Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. Д. Фаддеев, Факторизация S-матрицы многомерного оператора Шредингера, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 1, 69–72

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 195.218.150.2
6 марта 2018 г., 15:51:25

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 1

УДК 517.948 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. Д. ФАДДЕЕВ

ФАКТОРИЗАЦИЯ S-МАТРИЦЫ МНОГОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 VI 1965)

В настоящей работе обобщаются на многомерный случай некоторые формулы теории рассеяния, известные для одномерного уравнения Шредингера

$$H_1 u \equiv -u'' + v(x)u = k^2 u, \quad k > 0, \tag{1}$$

на всей оси $-\infty < x < \infty$. Если вещественный потенциал $v(x)$ убывает при $|x| \to \infty$ достаточно быстро, то имеет смысл следующая постановка задачи рассеяния: найти решения $\psi_1(x, k)$ и $\psi_2(x, k)$ уравнения (1), имеющие асимптотику

$$\begin{aligned} &\psi_1(x, k) \sim e^{ikx} + s_{12}(k)e^{-ikx}; \quad \psi_2(x,k) \sim s_{22}(k)e^{-ikx}; \quad x \to -\infty; \\ &\psi_1(x, k) \sim s_{11}(k)e^{ikx}; \quad \psi_2(x, k) \sim e^{-ikx} + s_{21}(k)e^{ikx}; \quad x \to \infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Матрица $S(k)$ с элементами $s_{ij}(k)$, $i, j = 1, 2$, называется S-матрицей рассматриваемой задачи. Из общих соображений теории рассеяния следует, что она унитарна и симметрична

$$s_{11}\bar{s}_{21} + s_{12}\bar{s}_{22} = 0; \quad |s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 = 1; \quad s_{11} = s_{22}. \tag{3}$$

Строгое доказательство существования решения этой задачи приведено в ([1]). Там же показано, что матричный элемент $s_{11}(k)$ имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменного k, имеет там простые полюса в точках $k = i\varkappa_l$, где $\varkappa_l^2$, $l = 1, \ldots, m$,— дискретные собственные значения оператора H_1, и не обращается в 0. При помощи (3) можно проверить, что имеют место соотношения

$$S(k) = M_1^{(-)}(k)\,[M_1^{(+)}(k)]^{-1} = M_2^{(-)}(k)\,[M_2^{(+)}]^{-1}, \tag{4}$$

где треугольные матрицы $M_1^{(+)}$, $M_2^{(+)}$, $M_1^{(-)}$ и $M_2^{(-)}$ имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{m}_{12} & \bar{m}_{11} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{m}_{22} & \bar{m}_{21} \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$m_{11} = m_{22} = s_{11}^{-1}; \quad m_{12} = -s_{12}s_{11}^{-1}; \quad m_{21} = -s_{21}s_{22}^{-1}.$$

Определителем матриц $M_i^{(+)}$, $i = 1, 2$, является функция $\Delta(k) = s_{11}(k)^{-1}$. Как следует из сказанного выше, это аналитическая функция в верхней полуплоскости, имеющая нули в точках $i\varkappa_l$, $l = 1, \ldots, m$. Факторизация (4) впервые упомянута в работе Кея и Мозеса ([2]), посвященной обратной задаче теории рассеяния, т. е. задаче о восстановлении потенциала $v(x)$ по S-матрице.

Известно, что уравнение (1) имеет два решения $f_1(x, k)$ и $f_2(x, k)$, определяемые асимптотикой при $x \to \infty$ и $x \to \infty$ соответственно

$$\exp\{-ikx\}f_1(x, k) \to 1, \quad x \to \infty; \qquad \exp\{ikx\}f_2(x, k) \to 1, \quad x \to -\infty.$$

Через элементы матриц $M_{i}^{(\pm)}(k)$ выражается асимптотика этих решений, например при $x \to -\infty$

$$f_1(x,\ k) \sim \exp\{ikx\}m_{11} - \exp\{-ikx\}m_{12}.$$

Таким образом, факторизация (4) тесно связана с существованием решений $f_1(x,\ k)$ и $f_2(x,\ k)$.

В недавней работе ([3]) автор предложил многомерный аналог этих решений. Естественно посмотреть, как выглядит соответствующая факторизация S-матрицы и насколько свойства участвующих в ней операторов являются обобщением свойств матриц $M_i^{(\pm)}$.

Рассмотрим n-мерный оператор Шредингера

$$H_n u = -\Delta u + v(x)u; \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n.$$

Расходящееся (+) и сходящееся (—) решения задачи рассеяния определяются как решения уравнения $H_n\psi^{(\pm)} = k^2\psi^{(\pm)}$, имеющие следующую асимптотику при $|x| \to \infty$:

$$\psi^{(\pm)}(x,\ k) - \exp\{i(k,\ x)\} \sim \exp\{\pm i|k|\,|x|\}\,|x|^{-1}f^{(\pm)}(k,\ \omega);$$
$$k = (k_1, \ldots, k_n); \quad (k,\ x) = k_1x_1 + \ldots + k_nx_n;$$
$$k^2 = (k,\ k); \quad |k| = (k^2)^{1/2}; \quad \omega = x|x|^{-1}.$$

Функция $f^{(+)}(k, \omega)$ называется **амплитудой рассеяния**. Существование решения сформулированной задачи было доказано А. Я. Повзнером ([4]) при помощи интегрального уравнения

$$\psi^{(\pm)}(x,\ k) = \exp\{i(k,\ x)\} - \int G^{(\pm)}(x-y, k^2)\,v(y)\psi^{(\pm)}(y,\ k)\,dy, \tag{5}$$

где $G^{(\pm)}(x,\ k^2)$ — функции Грина, имеющие интегральные представления

$$G^{(\pm)}(x,\ k^2) = (2\pi)^{-n}\int \exp\{i(m, x)\}\,(m^2 - k^2 \mp i0)^{-1}\,dm. \tag{6}$$

Оператором рассеяния называется интегральный оператор S с ядром

$$S(k,\ l) = \delta(k-l) - i(2\pi)^{1-n}\delta(k^2 - l^2)f(k,\ l), \tag{7}$$

где ядро $f(k,\ l)$ выражается через $\psi^{(+)}(x,\ l)$ по формуле

$$f(k,\ l) = \int \exp\{-i(k,\ x)\}\,v(x)\,\psi^{(+)}(x,\ l)\,dx.$$

Оператор S унитарен в $L_2(E_n)$ и удовлетворяет условию симметрии, которое в терминах ядра $f(k,\ l)$ выглядит так:

$$f(k,\ l) = f(-l,\ -k), \quad k^2 = l^2.$$

Решения $\psi^{(+)}(x,\ l)$ могут быть представлены в виде следующей линейной комбинации решений $\psi^{(-)}(x,\ k)$:

$$\psi^{(+)}(x,\ l) = \int \psi^{(-)}(x,\ k)\,S(k,\ l)\,dk. \tag{8}$$

Заметим, что при $|k| = |l|$ имеет место равенство $f(k,\ |k|\omega) = 4\pi f^{(+)}(k,\ \omega)$, так что оператор рассеяния определяется по амплитуде рассеяния. Присутствие $\delta(k^2 - l^2)$ в определении (7) оператора показывает, что этот оператор порождает на единичной сфере семейство интегральных операторов $S(k^2)$. Это семейство является аналогом S-матрицы одномерного оператора H_1.

Введем теперь многомерный аналог решений $f(x,\ k)$. В ([3]) рассматривалась функция Грина

$$G_q(x,\ k) = (2\pi)^{-n}\int \exp\{i(m,\ x)\}\,[(m+iq)^2 - (k+iq)^2]\,dm \tag{9}$$

Пусть $\gamma = q|q|^{-1}$. В ([3]) было показано, что $G_q(x,\ k)$ является аналитической функцией переменной $s = (k,\ \gamma) + i|q|$. Здесь мы рассмотрим предельное значение этой функции при $\operatorname{Im} s = |q| = 0$, которое зависит от γ. Будем обозначать его $G_\gamma(x, k)$. Ядро $G_\gamma(x, k)$ ограничено при $|x| \neq 0$. Определим решения $\varphi_\gamma(x, k)$ уравнения $H_n\varphi = k^2\varphi$ как решения интегрального уравнения

$$\varphi_\gamma(x, k) = \exp\{i(k, x)\} - \int G_\gamma(x - y, k)\, v(y)\, \varphi_\gamma(y, k)\, dy. \qquad (10)$$

Можно показать, что если потенциал $v(x)$ непрерывен и убывает достаточно быстро при $|x| \to \infty$, то это уравнение фредгольмово. К сожалению, нам не удалось доказать отсутствие нетривиальных решений соответствующего однородного уравнения, так что существование решений $\varphi_\gamma(x, k)$ не доказано. Ниже мы будем предполагать, что уравнение (10) однозначно разрешимо при любых k и γ. Это, во всяком случае, имеет место при достаточно малом $v(x)$.

Из сравнения интегральных представлений (9) и (6) следует, что

$$G_\gamma(x, k) = G^{(\pm)}(x, k^2) \mp i(2\pi)^{1-n} \int \exp\{i(m, x)\}\, \delta(m^2 - k^2)\, \theta[\pm(m - k, \gamma)]\, dm.$$

Здесь $\theta(a) = 1$, $a > 0$; $\theta(a) = 0$, $a < 0$. При помощи этих соотношений и интегральных уравнений (5) и (10) можно показать, что решения $\varphi_\gamma(x, l)$ являются следующими линейными комбинациями решений $\psi^{(\pm)}(x, k)$:

$$\varphi_\gamma(x, l) = \int \psi^{(\pm)}(x, k)\, Q_\gamma^{(\pm)}(k, l)\, dk, \qquad (11)$$

где ядра $Q_\gamma^{(\pm)}(k, l)$ интегральных операторов $Q_\gamma^{(\pm)}$ выражаются через ядро

$$h_\gamma(k, l) = \int \exp\{-i(k, x)\}\, v(x)\, \varphi_\gamma(x, l)\, dx$$

следующим образом:

$$Q_\gamma^{(\pm)}(k, l) = \delta(k - l) \pm i(2\pi)^{1-n} h_\gamma(k, l)\, \theta[\pm(k - l, \gamma]\, \delta(k^2 - l^2). \qquad (12)$$

Операторы $Q_\gamma^{(\pm)}$ порождают на единичной сфере семейство интегральных операторов $Q_\gamma^{(\pm)}(k^2)$.

Перепишем соотношения (8) и (11) кратко в виде

$$\psi^{(+)} = \psi^{(-)} S; \qquad \varphi_\gamma = \psi^{(\pm)} Q_\gamma^{(\pm)},$$

откуда видна факторизация операторов S и $S(k^2)$:

$$S = Q_\gamma^{(-)}[Q_\gamma^{(+)}]^{-1}; \qquad S(k^2) = Q_\gamma^{(-)}(k^2)\,[Q_\gamma^{(+)}(k^2)]^{-1}. \qquad (13)$$

Мы считаем (13) многомерным аналогом формул (4).

Сравним свойства операторов $Q_\gamma^{(\pm)}(k^2)$ и матриц $M_l^{(\pm)}(k)$. Аналогом треугольности матриц $M_l^{(\pm)}(k)$ является свойство вольтерровости операторов $Q_\gamma^{(\pm)}(k^2)$, которое явно следует из присутствия θ-функций в выражениях (12). Далее, на диагонали матриц $M^{(+)}$ стоят функции, имеющие аналитическое продолжение в комплексную плоскость. Аналогичным свойством обладают операторы $Q\ \ (k^2)$. Действительно, решения $\varphi_\gamma(x, k)$ имеют аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость по переменной $s = (k, \gamma)$. Именно это аналитическое продолжение $\varphi_\gamma(x, k_\perp, s)$, $k_\perp = k - (k, \gamma)\gamma$ рассматривалось в ([3]), где показано, что $\exp\{-is(x, \gamma)\}\varphi_\gamma(x, k_\perp, s)$ ограничено при всех x. Мы видим, что амплитуда $h_\gamma(k, l)$ при $(k, \gamma) = (l, \gamma) = s$ также аналитически продолжается по s. Из (12) видно, что именно такая амплитуда стоит на диагонали вольтерровых операторов $Q_\gamma^{(+)}(k^2)$.

Вследствие вольтерровости операторов $Q^{(+)}(k^2)$ их определители явно выражаются через ядро и имеет место формула

$$\Delta_\gamma(\lambda) = \det Q_\gamma^{(+)}(\lambda) = \exp\left\{i(2\pi)^{1-n} \int h_\gamma(k, k)\, \delta(k^2 - \lambda)\, dk\right\},$$

откуда можно показать, что эти определители имеют аналитическое продолжение в плоскость переменной λ с разрезом по положительной части вещественной оси. К сожалению, как уже отмечалось в ([3]), мы не знаем расположения особых точек решения $\varphi_\gamma(x, k_\perp, s)$ и тем самым аналитического продолжения амплитуды $h_\gamma(k, l)$ и самого определителя $\Delta_\gamma(\lambda)$. Есть основания утверждать, что $\Delta_\gamma(\lambda)$ аналитично на всей плоскости с разрезом и имеет нули в дискретных собственных значениях оператора H_n, однако строгое доказательство этого утверждения отсутствует.

Унитарность оператора S и вольтерровость операторов $Q_\gamma^{(\pm)}$ совместны только при условии, что $[Q_\gamma^{(\pm)}]^{-1} = [Q_\gamma^{(\pm)}]^*$. Это соотношение действительно имеет место, в чем можно убедиться при помощи интегрального уравнения (10). Соответствующее соотношение в одномерном случае выглядит несколько иначе.

В одномерном случае матрицы $M_i^{(\pm)}(k)$ в явном виде выражены в терминах матричных элементов S-матрицы. В случае $n > 1$ таких явных выражений нет, однако, в принципе, по заданному оператору S можно восстановить операторы $Q_\gamma^{(\pm)}$. Действительно, переписав (13) в виде $SQ_\gamma^{(+)} = Q_\gamma^{(-)}$ и подставив сюда (7) и (12), мы получим соотношение

$$h_\gamma(k, l) = f(k, l) + i(2\pi)^{1-n} \int f(k, m)\, \theta\,[(m-l, \gamma)]\, h_\gamma(m, l)\, \delta(m^2 - k^2)\, dm,$$

справедливое при $k^2 = l^2$, которое можно рассматривать как уравнение для определения ядра $h_\gamma(k, l)$ в терминах $f(k, l)$.

Мы можем сделать вывод, что аналогия между формулами (13) и (4) простирается весьма далеко.

Результаты, приведенные в ([3]) и в настоящей работе, получены автором в процессе поиска формализма, пригодного для решения обратной задачи рассеяния в многомерном случае. Тесная аналогия между решениями $f(x, k)$ и $\varphi_\gamma(x, k)$, прослеженная нами, позволяет надеяться, что последние, подобно первым, могут служить основой для решения этой задачи. Действительно, если предположить, что решения $\varphi_\gamma(x, k_\perp, s)$ не имеют особенностей при всех s, то можно получить линейное интегральное уравнение типа Гельфанда — Левитана, связывающее ядро $A_\gamma(x, k_\perp, t)$ оператора преобразования, введенного в ([3]), с ядром оператора $W_\gamma = Q_{-\gamma}^{(+)*} Q_{-\gamma}^{(+)}$ и тем самым с оператором рассеяния. Неизвестно, однако, как написать такое уравнение в общем случае, когда $\varphi_\gamma(k, k_\perp, s)$ имеет особенности. Трудность состоит в том, что мы не знаем детальной характеристики этих особенностей. Таким образом, основная нерешенная задача в проблематике, связанной с решениями $\varphi_\gamma(x, k)$, как мы уже неоднократно отмечали,— это исследование решений однородного уравнения, соответствующего (10).

В заключение отметим, что наше обобщение соотношения (4) отличается от предложенного Мозесом в ([5]), а формализм решения обратной задачи рассеяния, развитый Кеем и Мозесом в ([6]), представляется нам ошибочным.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
3 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Фаддеев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **73**, 314 (1964). [2] H. E. Moses, I. Kay, Nuovo Cim., **3**, № 2, 277 (1956). [3] Л. Д. Фаддеев, ДАН, **165**, № 3 (1965). [4] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., **32**, 1, 109 (1953). [5] H. E. Moses, J. Math. Phys., **5**, № 6, 833 (1964). [6] I. Kay, H. E. Moses, Nuovo Cim., **22**, 683 (1961); Comm. Pure and Appl. Math., **14**, № 3, 435 (1961).