Л. Д. Фаддеев, Строение резольвенты операторов Шредингера системы трех частиц с парным взаимодействием, *Докл. АН СССР*, 1961, том 138, номер 3, 565–567

Доклады Академии наук СССР
1961. Том 138, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. Д. ФАДДЕЕВ

СТРОЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА СИСТЕМЫ ТРЕХ ЧАСТИЦ С ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 I 1961)

Оператор энергии системы N попарно взаимодействующих частиц с массами $m_1, \ldots, m_N$ имеет вид

$$H_N = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i} \nabla_i^2 + \sum_{i<j}^{N} v_{ij}(r_i - r_j). \tag{1}$$

Здесь r_i — радиус-вектор i-й частицы и ∇_i^2 — трехмерный оператор Лапласа по переменной r_i. В теории рассеяния все потенциалы $v_{ij}(r)$ убывают, когда $|r| \to \infty$.

В настоящее время подробно изучен только оператор H_2. Именно, А. Я. Повзнер [1,2] изучил спектр этого оператора при определенных условиях на $v_{12}(r)$ и доказал теорему разложения по его собственным функциям. Эти результаты были уточнены Като [3] и Икебе [4]. Основу подхода А. Я. Повзнера составляет изучение резольвенты оператора H_2 на комплексной плоскости и особенно в окрестности вещественной оси. Используемый им метод не переносится непосредственно на случай $N > 2$.

Недавно автор предложил в физической статье [5] новые интегральные уравнения для исследования системы с тремя частицами. В настоящей работе приводятся некоторые результаты, полученные с помощью этих уравнений, относительно поведения резольвенты оператора H_3 на комплексной плоскости. Основной результат сформулирован в теореме.

1. Вместо оператора H_3 нам удобнее изучать оператор H, полученный из H_3 после перехода в импульсное представление (т. е. после преобразования Фурье) и отделения оператора энергии движения центра инерции. За недостатком места мы не описываем соответствующий переход. Для упрощения формул считаем, что $m_1 = m_2 = m_3$. Ниже описывается оператор H.

Рассмотрим три вектора p_1, p_2 и p_3, связанных между собой соотношением

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0, \tag{2}$$

так что каждая пара p_1, p_2; p_2, p_3 и p_3, p_1 независимым образом пробегает все шестимерное пространство E_6. Оператор H задается в $\mathscr{L}_2(E_6)$ и имеет вид

$$H = H_0 + V = H_0 + V_{23} + V_{31} + V_{12}, \tag{3}$$

где H_0 является оператором умножения на функцию

$$p_1^2 + (p_1p_2) + p_2^2 = p_2^2 + (p_2p_3) + p_3^2 = p_3^2 + (p_3p_1) + p_1^2 \tag{4}$$

с естественной областью определения; оператор V_{23} имеет ядро

$$V_{23}(p, p') = v_{23}(p_2 - p_2')\, \delta(p_1 - p_1'), \tag{5}$$

и операторы V_{31} и V_{12} определяются аналогичным образом в координатах p_3, p_2 и p_1, p_3 соответственно.

Относительно функций $v_{ij}(q) = \overline{v_{ij}(-q)}$ мы требуем оценку

$$|v_{ij}(q)| \leqslant C(1+|q|)^{-1-\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{6}$$

При этом условии операторы $(H_0+1)^{-\alpha} V_{ij} (H_0+1)^{-\alpha}$ при $\alpha > 1/2 - \varepsilon_0/4$ ограничены в $\mathcal{L}_2(E_6)$, что позволяет однозначно определить при помощи квадратичной формы самосопряженный оператор H.

2. Пусть $R(z) = (H - zI)^{-1}$ и $R_0(z) = (H_0 - zI)^{-1}$ — резольвенты операторов H и H_0 соответственно. Справедливо соотношение

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z) V R(z), \tag{7}$$

причем, если искать $R(z)$ в виде

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z) T(z) R_0(z), \tag{8}$$

то для $T(z)$ эквивалентное соотношение имеет вид

$$T(z) = V - V R_0(z) T(z). \tag{9}$$

Уравнения типа (7) или (9) оказались полезными при изучении оператора H_2, причем в импульсном представлении удобнее уравнение типа (9). Для применения к нашей задаче уравнение (9) следует «частично решить». Это частичное решение осуществляется с помощью следующего приема, который кажется несколько искусственным, но на самом деле имеет вполне естественное основание, которое мы не можем привести за недостатком места.

Рассмотрим матричное уравнение (здесь и ниже готическими буквами обозначаются матрицы 3×3, составленные из операторов)

$$\mathfrak{T}(z) = \begin{pmatrix} V_{23} & 0 & 0 \\ 0 & V_{31} & 0 \\ 0 & 0 & V_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_{23} & V_{23} & V_{23} \\ V_{31} & V_{31} & V_{31} \\ V_{12} & V_{12} & V_{12} \end{pmatrix} R_0(z) \mathfrak{T}(z). \tag{10}$$

Это уравнение связано с уравнением (9) в том смысле, что сумма всех матричных элементов матрицы $\mathfrak{T}(z)$ удовлетворяет уравнению (9). Пусть $T_{23}(z)$ — решение уравнения

$$T_{23}(z) = V_{23} - V_{23} R_0(z) T_{23}(z), \tag{11}$$

и аналогичным образом определены $T_{31}(z)$ и $T_{12}(z)$. Обращая в уравнении (10) диагональную часть, мы приходим к уравнению

$$\mathfrak{T}(z) = \begin{pmatrix} T_{23}(z) & 0 & 0 \\ 0 & T_{31}(z) & 0 \\ 0 & 0 & T_{12}(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & T_{23}(z) & T_{23}(z) \\ T_{31}(z) & 0 & T_{31}(z) \\ T_{12}(z) & T_{12}(z) & 0 \end{pmatrix} R_0(z) \mathfrak{T}(z) =$$
$$= \mathfrak{T}_0(z) - \mathfrak{A}(z) \mathfrak{T}(z). \tag{12}$$

С помощью уравнения (11) можно убедиться, что оператор $T_{23}(z)$ имеет ядро

$$T_{23}(p, p') = t_{23}(-p_2 - 1/2\, p_1, -p_2' - 1/2\, p_1, \quad z - 3/4\, p_1^2)\, \delta(p_1 - p_1'), \tag{13}$$

где $t_{23}(k, k', z)$ — решение интегрального уравнения типа

$$t(k, k', z) = v(k - k') - \int v(k - k'')(k''^2 - z)^{-1} t(k'', k', z)\, dk''. \tag{14}$$

Чтобы не иметь δ-образных особенностей в свободном члене, удобнее изучать матрицу $\mathfrak{W}(z) = \mathfrak{T}(z) - \mathfrak{T}_0(z)$, уравнение для которой имеет вид

$$\mathfrak{W}(z) = \mathfrak{W}_0(z) - \mathfrak{A}(z) \mathfrak{W}(z), \tag{15}$$

где

$$\mathfrak{W}_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & T_{23}(z) R_0(z) T_{31}(z) & T_{23}(z) R_0(z) T_{12}(z) \\ T_{31}(z) R_0(z) T_{23}(z) & 0 & T_{31}(z) R_0(z) T_{12}(z) \\ T_{12}(z) R_0(z) T_{23}(z) & T_{12}(z) R_0(z) T_{31}(z) & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

С помощью уравнения (15) оказалось возможным изучить поведение резольвенты $R(z)$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$.

3. На основании изучения уравнения (14) при условии (6) можно получить, что для $t_{ij}(k, k', z)$ справедлива оценка

$$|t_{ij}(k, k', z)| \leqslant C(1 + |k - k'|)^{-1-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{17}$$

равномерно по z в области

$$\delta \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \delta, \quad |\operatorname{Im} z| \geqslant \delta, \quad \delta > 0. \tag{18}$$

Для записи оценок при изучении уравнения (15) удобно использовать функции

$$M_{ij}(p, p', \varepsilon) = (p_i^2 + p_j'^2 + 1)^{-1} \sum_{k<l}^{3} [(1 + |p_k - p_k'|)(1 + |p_l - p_l'|)]^{-1-\varepsilon}. \tag{19}$$

С помощью оценок (17) можно получить, что, например,

$$|(T_{23}(z) R_0(z) T_{31}(z))(p, p')| \leqslant CM_{12}(p, p', \varepsilon). \tag{20}$$

Естественно изучать уравнение (15) в классе матриц $\mathfrak{W}(z)$, для элементов которых справедлива оценка

$$|W_{ij}(p, p')| \leqslant CM_{ij}(p, p', \varepsilon), \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{21}$$

Нетрудно сконструировать соответствующее банахово пространство $B(\varepsilon)$.

Результаты проведенного исследования уравнения (15) можно сформулировать следующим образом:

Пусть z меняется в области (18). Тогда справедливы следующие утверждения:

I. Оператор $\mathfrak{A}(z)$ ограничен в $B(\varepsilon)$.

II. Однородное уравнение $\varphi + \mathfrak{A}(z)\varphi = 0$ не имеет нетривиальных решений в $B(\varepsilon)$.

III. Оператор $\mathfrak{A}^2(z)$ вполне непрерывен в $B(\varepsilon')$ при любом $\varepsilon' < \varepsilon$.

На основании одной теоремы С. М. Никольского ([6]) из утверждения III следует, что к оператору $\mathfrak{A}(z)$ применима альтернатива Фредгольма, а из утверждения II следует, что уравнение (15) однозначно разрешимо в $B(\varepsilon')$.

Таким образом мы приходим к следующему основному результату:

Теорема. *Пусть потенциалы V_{ij} удовлетворяют условию* (6). *Тогда резольвента оператора H имеет следующее строение*:

$$R(z) = R_0(z) + \sum_{i<j}^{3} (R_{ij}(z) - R_0(z)) + R_0(z) W(z) R_0(z). \tag{22}$$

Здесь $R_0(z)$ и $R_{ij}(z)$ — резольвенты операторов H_0 и $H_{ij} = H_0 + V_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, соответственно, а $W(z)$ является интегральным оператором, для ядра которого справедлива оценка

$$|W(p, p')| \leqslant C \sum_{i,j=1}^{3} M_{ij}(p, p', \varepsilon), \tag{23}$$

где $\varepsilon < \varepsilon_0$ в оценке (6), *равномерно по z в области* (18).

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
19 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., 32, 1 (1953). [2] А. Я. Повзнер, ДАН, 104, № 3, 360 (1955). [3] T. Kato, Comm. Pure and Appl. Math., 12, 403 (1959). [4] T. Ikebe, Arch. Rat. Mech. Anal., 5, № 1, 1 (1960). [5] Л. Д. Фаддеев, ЖЭТФ, 39, № 11, 1569 (1960). [6] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 7, 147 (1943).