Л. Д. Фаддеев, Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц и задача рассеяния, *Докл. АН СССР*, 1962, том 145, номер 2, 301–304

Доклады Академии наук СССР
1962. Том 145, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. Д. ФАДДЕЕВ

СТРОЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА СИСТЕМЫ ТРЕХ ЧАСТИЦ И ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 II 1962)

В настоящей работе получено представление для резольвенты оператора энергии системы трех частиц в нерелятивистской квантовой механике, при помощи которого изучается непрерывный спектр этого оператора, доказывается теорема разложения по его собственным функциям и исследуется асимптотика при больших $|t|$ решений соответствующего нестационарного уравнения Шредингера. Метод исследования является развитием подхода, предложенного в [1].

1. Введем основные обозначения и понятия. Рассматриваемый оператор H действует в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = \mathscr{L}_2(E_6)$ квадратично интегрируемых функций $f(k, p)$ двух трехмерных векторов k и p. Нам удобно использовать три системы координат в E_6: (k_{23}, p_1), (k_{31}, p_2) и (k_{12}, p_3), связь между которыми следует из соотношений

$$k_{23} = -p_2 - {}^1/_2 p_1 = p_3 + {}^1/_2 p_1 \tag{1}$$

и получающихся из (1) всевозможными циклическими заменами индексов. В случае, когда нам безразлично, какую из систем переменных использовать, мы будем писать k и p без индексов. Для сокращения формул удобно ввести индекс α, пробегающий значения 1, 2 и 3 или 23, 31 и 12 в зависимости от того, при какой величине он стоит.

Оператор H определяется следующим образом:

$$H = H_0 + V_{23} + V_{31} + V_{12}. \tag{2}$$

Здесь H_0 — оператор умножения на функцию

$$k_{23}^2 + {}^3/_4 p_1^2 = k_{31}^2 + {}^3/_4 p_2^2 = k_{12}^2 + {}^3/_4 p_3^2 \tag{3}$$

и операторы V_α ($\alpha = 23,\ 31,\ 12$) имеют ядра

$$V_\alpha(k, p; k', p') = v_\alpha(k_\alpha - k'_\alpha)\,\delta(p_\alpha - p'_\alpha). \tag{4}$$

Относительно функций $v_\alpha(q)$ мы требуем выполнения условий

$$|v_\alpha(q)| \leqslant K(1 + |q|)^{-1-\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 > 0; \tag{5}$$

$$|v_\alpha(q) - v_\alpha(q + h)| \leqslant K(1 + |q|)^{-1-\varepsilon_0} |h|^{\mu_0}, \quad \mu_0 > {}^1/_2. \tag{6}$$

Основной результат работы [1] можно сформулировать следующим образом: пусть

$$R(z) = (H - zI)^{-1}; \quad R_\alpha(z) = (H_\alpha - zI)^{-1}; \quad H_\alpha = H_0 + V_\alpha. \tag{7}$$

При условии [5] для $R(z)$ справедливо представление

$$R(z) = R_0(z) + \sum_\alpha (R_\alpha(z) - R_0(z)) + R_0(z)\Big(\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(z)\Big) R_0(z), \tag{8}$$

где $W_{\alpha\beta}(z)$ — интегральные операторы ядер, для которых при $\operatorname{Im} z \neq 0$ выполняются оценки:

$$|W_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)| \leqslant KM(k, p; k', p'; \varepsilon)(1 + p_\alpha^2 + p_\beta'^2)^{-1}. \tag{9}$$

Здесь $\varepsilon < \varepsilon_0$ и

$$M(k, p; k', p'; \varepsilon) = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} \{(1 + |p_\alpha - p'_\alpha|)(1 + |p_\beta - p'_\beta|)\}^{-1-\varepsilon}. \tag{10}$$

2. Сформулированное утверждение получается в ([1]) на основании исследования системы интегральных уравнений для $W_{\alpha\beta}(z)$:

$$W_{\alpha\beta}(z) = W^{(0)}_{\alpha\beta}(z) - T_\alpha(z) R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} W_{\alpha\beta}(z). \tag{11}$$

Мы здесь используем краткую запись для интегральных операторов. Ядро $T_\alpha(z)$ имеет вид

$$T_\alpha(k, p; k', p'; z) = t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z - {}^3/_4 p_\alpha^2)\, \delta(p_\alpha - p'_\alpha). \tag{12}$$

Свободный член определяется следующим образом:

$$W^{(0)}_{\alpha\alpha} = 0; \quad W^{(0)}_{\alpha\beta}(z) = T_\alpha(z) R_0(z) T_\beta(z), \quad \alpha \neq \beta. \tag{13}$$

Ядра $t_\alpha(k, k', z)$ являются решениями уравнений

$$t_\alpha(k, k', z) = v_\alpha(k - k') - \int v_\alpha(k - k'')(k''^2 - z)\, t_\alpha(k'', k', z)\, dk'', \tag{14}$$

с которыми приходится иметь дело при изучении операторов

$$h_\alpha f(k) = k^2 f(k) + \int v_\alpha(k - k') f(k')\, dk', \tag{15}$$

действующих в $\mathscr{L}_2(E_3)$ и соответствующих задаче двух частиц. При условиях (5) и (6) на $v_\alpha(q)$ операторы h_α имеют непрерывный спектр на положительной части вещественной оси и конечное число неположительных собственных значений конечной кратности. Для упрощения записи формул мы будем считать, что каждый h_α имеет по одному простому собственному значению в точке $-\varkappa_\alpha^2 < 0$, соответствующие нормированные собственные функции обозначим через $\psi_\alpha(k)$. В этом случае для ядер $t_\alpha(k, k', z)$ справедливо представление

$$t_\alpha(k, k', z) = \varphi_\alpha(k)\overline{\varphi_\alpha(k')}(z + \varkappa_\alpha^2)^{-1} + \tilde{t}_\alpha(k, k', z), \tag{16}$$

где $\varphi_\alpha(k) = (k^2 + \varkappa_\alpha^2)\psi_\alpha(k)$. Для $\varphi_\alpha(k)$ и $\tilde{t}_\alpha(k, k', z)$ выполняются оценки, аналогичные оценкам (5) и (6) для $v_\alpha(k)$ и $v_\alpha(k - k')$, соответственно, с показателями $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\mu < \mu_0$. Оценки для $\tilde{t}_\alpha(k, k', z)$ равномерны по z на всей комплексной плоскости с разрезом по положительной части вещественной оси. Предельные значения $\tilde{t}_\alpha(k, k', z)$ на разрезе удовлетворяют условию Гёльдера по z с показателем $\mu = {}^1/_2$.

Итерирование системы (11) подсказывает нам характер особенностей ядер $W_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$ в окрестности вещественной оси. Пусть $W^{(n)}_{\alpha\beta}(z)$ означает результат n-й итерации. С помощью сведения системы (11) к операторному уравнению с вполне непрерывным оператором в подходяще выбранном банаховом пространстве и на основании исследования соответствующего однородного уравнения получается следующий результат:

Теорема 1. *Для ядер* $Q_{\alpha\beta}(z) = W_{\alpha\beta}(z) - \sum_{n=0}^{2} W_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ *справедливо представление*

$$Q_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) = \overset{\circ\circ}{Q}_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z) +$$

$$+ \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha)}{z + \varkappa_\alpha^2 - {}^3/_4 p_\alpha^2} \overset{*\circ}{Q}_{\alpha\beta}(p_\alpha; k', p'; z) + \overset{\circ *}{Q}_{\alpha\beta}(k, p; p'_\beta; z) \frac{\overline{\varphi_\beta(k'_\beta)}}{z + \varkappa_\beta^2 - {}^3/_4 p'^2_\beta} +$$

$$+ \frac{\varphi_\alpha(k_\alpha)}{z + \varkappa_\alpha^2 - {}^3/_4 p_\alpha^2} \overset{**}{Q}_{\alpha\beta}(p_\alpha; p'_\beta; z) \frac{\overline{\varphi_\beta(k'_\beta)}}{z + \varkappa_\beta^2 - {}^3/_4 p'^2_\beta}. \tag{17}$$

Ядра $\overset{\circ\circ}{Q}_{\alpha\beta}(z)$ *удовлетворяют оценкам* (9), *и чтобы получить оценки для ядер* $\overset{\circ *}{Q}_{\alpha\beta}(z)$, $\overset{\circ *}{Q}_{\alpha\beta}(z)$ *или* $\overset{**}{Q}_{\alpha\beta}(z)$ *надо в правой части* (9) *положить* $k_\alpha = 0$, $k'_\beta = 0$ *или одновременно* $k_\alpha = 0$ *и* $k'_\beta = 0$, *соответственно. Аналогичные оценки выполняются для гёльдеровских разностей с показателем* $\mu < {}^1/_4$ *по всем переменным, от которых зависят эти ядра. Описанные оценки равномерны по* z *в любой конечной области комплексной плоскости с разрезом по положительной части вещественной оси, идущим на* ∞ *от точки* $\lambda_0 = -\max(\varkappa_{23}^2, \varkappa_{31}^2, \varkappa_{12}^2)$ *за исключением окрестностей вещественных точек* λ_n, $n = 1, \ldots$, *которые являются точками дискретного спектра оператора* H. *Точки* λ_n *сосредоточены на конечном отрезке и могут иметь точками накопления только точки* $-\varkappa_\alpha^2$ $(\alpha = 23,\ 31,\ 12)$.

Представление типа (17) естественно выписывается и для самих ядер $W_{\alpha\beta}(z)$. Соответствующие ядра будем обозначать через $\overset{\circ\circ}{W}_{\alpha\beta}$, $\overset{*\circ}{W}_{\alpha\beta}$, $\overset{\circ *}{W}_{\alpha\beta}$, $\overset{**}{W}_{\alpha\beta}$. Эти ядра содержат слагаемые, происходящие из первых трех итераций, для которых оценки типа (9) не справедливы. Однако особенности этих слагаемых можно исследовать специально.

3. С помощью изученного поведения резольвенты оператора H мы можем полностью охарактеризовать его спектр. Кроме дискретного спектра в точках λ_n $(n = 1, \ldots)$ H имеет абсолютно непрерывный спектр на полуоси $[\lambda_0, \infty)$. Дадим более подробную характеристику этого спектра. Пусть $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_\alpha$ $(\alpha = 23,\ 31,\ 12)$ — три экземпляра пространства $\mathscr{L}_2(E_3)$. Пусть D_0, D_α — плотные множества в $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}_\alpha$, состоящие из функций $f_0(k, p)$ и $f_\alpha(p)$, финитных, достаточно гладких и исчезающих в окрестности поверхностей $k^2 + {}^3/_4 p^2 = \lambda_n$, $-\varkappa_\alpha^2 + {}^3/_4 p_\alpha^2 = \lambda_n$, соответственно. Для $f_0 \in D_0$ и $f_\alpha \in D_\alpha$ имеют смысл выражения:

$$U_0^{(\pm)} f_0(k, p) = f_0(k, p) - \iint \Big\{ \sum_\alpha T_\alpha(k, p; k', p'; \omega'_0 \mp i0) -$$

$$- \sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; \omega'_0 \mp i0) \Big\} (k^2 + {}^3/_4 p^2 - \omega'_0 \mp i0)^{-1} f_0(k', p')\, dk' dp', \tag{18}$$

$$U_\alpha^{(\pm)} f_\alpha(p) = \psi_\alpha(k_\alpha) f_\alpha(p_\alpha) - \int \Big(\sum_\beta \{ \overset{\circ *}{W}_{\beta\alpha}(k, p; p'_\alpha; \omega'_\alpha \mp i0) +$$

$$+ \varphi_\beta(k_\beta)(\varkappa_\beta^2 - {}^3/_4 p_\beta^2 + \omega'_\alpha \mp i0)^{-1} \overset{**}{W}_{\beta\alpha}(p_\beta; p'_\alpha; \omega'_\alpha \mp i0) \} \Big) \times$$

$$\times (k^2 + {}^3/_4 p^2 - \omega'_\alpha \pm i0)^{-1} f_\alpha(p'_\alpha)\, dp'_\alpha; \tag{19}$$

$$\omega_0 = {}^3/_4 p^2 + k^2; \quad \omega_\alpha = {}^3/_4 p_\alpha^2 - \varkappa_\alpha^2.$$

Теорема 2. *Операторы* $U_0^{(\pm)}$ *и* $U_\alpha^{(\pm)}$ *продолжаются при замыкании до изометрических операторов, действующих из* $\mathfrak{H}_0$ *в* $\mathfrak{H}$ *или из* $\mathfrak{H}_\alpha$ *в* $\mathfrak{H}$, *соответственно. Справедливы утверждения*:

I. $\exp\{iHt\}\, U_0^{(\pm)} f_0(k, p) = U_0^{(\pm)}(\exp\{i\omega_0 t\}\, f_0(k, p))$,

$\exp\{iHt\}\, U_\alpha^{(\pm)} f_\alpha(p_\alpha) = U_\alpha^{(\pm)}(\exp\{i\omega_\alpha t\}\, f_\alpha(p_\alpha))$.

II. $(U_\alpha^{(\pm)} f_\alpha, U_\beta^{(\pm)} g_\beta)_{\mathfrak{H}} = (f_\alpha, g_\alpha)_{\mathfrak{H}_\alpha} \delta_{\alpha\beta}$, $\alpha = 0, 23, 31, 12$.

III. *Для любой* $f \in \mathfrak{H}$, *ортогональной всем собственным функциям дискретного спектра* H, *однозначно определяются* $f_0^{(\pm)} \in \mathfrak{H}_0$ *и* $f_\alpha^{(\pm)} \in \mathfrak{H}_\alpha$ $(\alpha = 23, 31, 12)$ *такие, что*

$$f = U_0^{(\pm)} f_0^{(\pm)} + U_{23}^{(\pm)} f_{23}^{(\pm)} + U_{31}^{(\pm)} f_{31}^{(\pm)} + U_{12}^{(\pm)} f_{12}^{(\pm)}.$$

Утверждение I позволяет называть ядра операторов $U_0^{(\pm)}$ и $U_\alpha^{(\pm)}$ собственными функциями непрерывного спектра оператора с собственными значениями ω_0 и ω_α, соответственно. Утверждение II содержит условия ортогональности и нормировки, а III — полноты этих функций.

4. Полученные результаты позволяют изучить асимптотику при больших $|t|$ оператора $\exp\{iHt\}$.

Пусть P_α — проектор в $\mathfrak{H}$ на подпространство, образованное функциями вида $\psi_\alpha(k_\alpha) f(p_\alpha)$, где $f(p)$ произвольно.

Теорема 3. *Существуют сильные пределы*

$$\widetilde{U}_0^{(\pm)} = \lim_{t\to\pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}; \qquad \widetilde{U}_\alpha^{(\pm)} = \lim_{t\to\pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_\alpha t} P_\alpha.$$

При этом

$$\widetilde{U}_0^{(\pm)} f = U_0^{(\pm)} f; \qquad \widetilde{U}_\alpha^{(\pm)}(\psi_\alpha f_\alpha) = U_\alpha^{(\pm)} f_\alpha. \tag{20}$$

В прямой сумме $\mathscr{E} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_{23} \oplus \mathfrak{H}_{31} \oplus \mathfrak{H}_{12}$ можно рассмотреть оператор S, определяемый матрицей

$$S_{\alpha\beta} = U_\alpha^{(+)*} U_\beta^{(-)} \quad (\alpha, \beta = 0,\ 23,\ 31,\ 12). \tag{21}$$

Из теоремы 2 следует унитарность оператора S в $\mathscr{E}$. Результат теоремы 3 позволяет называть его оператором рассеяния для системы, описываемой оператором H. Нетрудно установить связь ядер операторов $S_{\alpha\beta}$ с ядрами $W_{\alpha\beta}(z)$. За недостатком места мы не приводим соответствующих формул.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
21 II 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Фаддеев, ДАН, 138, № 3, 565 (1961).