В. С. Буслаев, Л. Д. Фаддеев, О формулах следов для дифференциального сингулярного оператора Штурма–Лиувилля, *Докл. АН СССР*, 1960, том 132, номер 1, 13–16

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 132, № 1

МАТЕМАТИКА

В. С. БУСЛАЕВ и Л. Д. ФАДДЕЕВ

О ФОРМУЛАХ СЛЕДОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 3 I 1960)

И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан и Л. А. Дикий получили тождества для собственных значений регулярного оператора Штурма — Лиувилля (список литературы см. ([1])). Их можно интерпретировать как выражения для регуляризованных спектральных следов целых степеней оператора непосредственно через оператор. Такая формулировка позволяет поставить подобную задачу и для оператора с непрерывным спектром.

В настоящей работе получены соотношения, выражающие некоторые характеристики спектра оператора

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y, \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad y(0) = 0$$

через $q(x)$. Эти соотношения аналогичны тождествам для собственных значений. Способ вывода основан на изучении свойств знаменателя резольвенты. Он оказывается удобным также и в случае регулярного оператора.

1. Мы будем всюду предполагать, что *

$$\int_0^\infty x\,|q(x)|\,dx < \infty.$$

Спектр оператора L состоит из полуоси $[0, \infty]$ — непрерывный спектр — и конечного числа отрицательных собственных значений $\lambda_l = -\varkappa_l^2$ ($\varkappa_l > 0$; $l = 1, 2, \ldots, m$). В связи с оператором L часто рассматривается функция

$$M(s) = 1 + \int_0^\infty e^{isx} q(x)\varphi(x, s)\,dx = A(s)e^{i\eta(s)}$$

$$(s = \sigma + i\tau, \ 0 \leqslant \tau < \infty, \ -\infty < \sigma < \infty).$$

Функция $\eta(\sigma)$ — аргумент $M(\sigma)$ — так называемая предельная фаза.

Пусть R_λ — резольвента L. Значком нуль сверху будем отмечать оператор, соответствующий $q(x) \equiv 0$.

Теорема 1. *Оператор* $R_\lambda - R_\lambda^0$ *имеет след*** *при* $\arg\lambda \neq 0$ *и* $\lambda \neq \lambda_l$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$, $\mathrm{Sp}(R_\lambda - R_\lambda^0) = -\frac{d}{d\lambda}\ln M(\sqrt{\lambda})$; $0 \leqslant \arg\sqrt{\lambda} \leqslant \pi$.

Следствие. $M(\sqrt{\lambda}) = \det(E + qR_\lambda^0)$.

---

* По поводу используемых нами обозначений и свойств оператора L см. ([2]).

** О понятии следа для абстрактных операторов см. ([3]).

При $q(x) \in L[0, \infty]$

$$\ln M(\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\eta(\sqrt{z})}{z-\lambda} dz + \sum_{l=1}^m \ln \frac{\lambda - \lambda_l}{\lambda} \qquad (\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} > 0);$$

отсюда

$$\operatorname{Sp}(R_\lambda - R_\lambda^0) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi(t)\, d\frac{1}{t-\lambda}, \tag{α}$$

где

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \eta(\sqrt{t}), & t > 0, \\ -\int\limits_{-\infty}^{t} \sum\limits_l \delta(z - \lambda_l)\, dz, & t < 0. \end{cases}$$

В связи с другой задачей формулы типа (α) рассматривались в работе И. М. Лифшица ([4]). Они были подробно исследованы для абстрактных операторов М. Г. Крейном ([5]). В нашем примере представляет интерес связь функции $\xi(t)$ с предельной фазой $\eta(k)$.

2. Вывод соотношений, подобных тождествам для собственных значений, использует следующие леммы:

Лемма 1. *Если* $q(x) \in L[0, \infty]$, *то при* $0 < \operatorname{Re} z < 1/2$

$$\frac{\pi}{2z} \sum_{l=1}^m \varkappa_l^{2z} = \sin \pi z \cdot L(z) - \cos \pi z \cdot H(z),$$

где

$$H(z) = \int\limits_0^\infty k^{2z-1} \eta(k)\, dk, \qquad L(z) = \int\limits_0^\infty k^{2z-1} \ln A(k)\, dk.$$

Лемма 1 является следствием аналитических свойств функции $M(s)$ в верхней полуплоскости. Ее можно получить контурным интегрированием функции $\frac{d}{ds} M(s) \frac{1}{M(s)} s^{2z}$.

Лемма 2. *Предположим, что существует при* $x \geqslant 0$ *непрерывная производная* $q^{(n)}(x)$ $(n \geqslant 1)$, *причем* $q^{(l)}(x)$ $(l = 0, \ldots, n)$ *имеют конечные пределы (с необходимостью равные нулю) при* $x \to \infty$. *Тогда равномерно в верхней полуплоскости имеют место асимптотические формулы*

$$M(s) \underset{|s| \to \infty}{=} 1 - \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{l+1}}{(2is)^{l+1}} V_l + o\left(\frac{1}{|s|^{n+1}}\right),$$

$$\ln M(s) \underset{|s| \to \infty}{=} -\sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^p}{(2is)^p} Q_p + o\left(\frac{1}{|s|^{n+1}}\right),$$

откуда на вещественной оси

$$\ln A(k) \underset{|k| \to \infty}{=} -\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^\mu}{(2k)^{2\mu}} Q_{2\mu} + o\left(\frac{1}{|k|^{n+1}}\right),$$

$$\eta(k) \underset{|k| \to \infty}{=} -\sum_{\mu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^\mu}{(2k)^{2\mu+1}} Q_{2\mu+1} + o\left(\frac{1}{|k|^{n+1}}\right).$$

В этих формулах $V_l \equiv \lim_{\alpha\to\infty} V_l(\alpha)$, $V_l(\alpha)$ $(0 \leqslant \alpha)$ *подчинены рекуррентным соотношениям*

$$V_0(\alpha) = -\int_0^\alpha q(z)\,dz,$$

$$V_l(\alpha) = q^{(l-1)}(0) + \sum_{m=0}^{l-1} C_{l-1}^m \int_0^\alpha dz\, V_m(z)\, q^{(l-m-1)}(z) \qquad (l = 1, \ldots, n+1),$$

$$Q_p = V_{p-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{j}{p} V_{p-j-1} Q_j.$$

Эту лемму можно доказать, представляя зависимость $\varphi(x, s)$ от s в выражении для $M(s)$ через оператор преобразования и используя интегральное уравнение для оператора преобразования.

Асимптотические формулы для $\ln A(k)$ и $\eta(k)$ позволяют исследовать аналитическое продолжение $H(z)$ и $L(z)$ из полосы $0 < \operatorname{Re} z < 1/2$ вправо при помощи обычных приемов (см., например, ([6])). При этом оказывается, что $H(z)$ имеет простые полюса в точках $1/2, 3/2, \ldots$, а функция $L(z)$ имеет простые полюса в точках $1, 2, \ldots$ Вычеты в полюсах непосредственно выражаются через Q_μ. Отсюда, как результат аналитического продолжения тождества леммы 1, следует

Теорема 2. *В предположениях леммы 2 справедливы формулы*

$$(-1)^\mu \sum_{l=1}^m \varkappa_l^{2\mu} + \frac{2\mu}{\pi}\int_0^\infty k^{2\mu-1}\left[\eta(k) - \sum_{l=0}^{\mu-1} \frac{(-1)^{l+1}}{(2k)^{2l+1}} Q_{2l+1}\right] dk =$$
$$= (-1)^\mu \frac{\mu}{2^{2\mu}} Q_{2\mu} \qquad \left(\mu = 1, 2, \ldots \leqslant \frac{n}{2}\right);$$

$$(-1)^\mu \sum_{l=1}^m \varkappa_l^{2\mu+1} - \frac{2\mu+1}{\pi}\int_0^\infty k^{2\mu}\left[\ln A(k) - \sum_{l=1}^{\mu} \frac{(-1)^{l+1}}{(2k)^{2l}} Q_{2l}\right] dk =$$
$$= (-1)^\mu \frac{2\mu+1}{2^{2\mu+2}} Q_{2\mu+1} \qquad \left(\mu = 0, \ldots \leqslant \frac{n-1}{2}\right).$$

Первая серия формул аналогична тождествам для собственных значений, вторая выражает те же соотношения, но в терминах функции $A(k)$.

При помощи леммы 2 находим

$$Q_1 = -\int_0^\infty q(z)\,dz, \qquad Q_2 = q(0),$$

$$Q_3 = q'(0) + \int_0^\infty q^2(z)\,dz, \qquad Q_4 = q''(0) - 2q^2(0).$$

Формулы первой серии при $\mu = 1, 2$ дают

$$-\sum_{l=1}^m \varkappa_l^2 + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty t\left[\eta(t) - \frac{1}{2t}\int_0^\infty q(z)\,dz\right] dt = -\frac{1}{4} q(0) \qquad (\mu = 1).$$

Это соотношение уже было получено в работе одного из авторов ([7]).

$$\sum_{l=1}^m \varkappa_l^4 + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty t^3\left[\eta(t) - \frac{1}{2t}\int_0^\infty q(z)\,dz - \left(\frac{1}{2t}\right)^3\left(q'(0) + \int_0^\infty q^2(z)\,dz\right)\right] dt =$$
$$= \frac{1}{8}\left(q''(0) - 2q^2(0)\right) \qquad (\mu = 2).$$

Сравнение наших результатов с результатами Л. А. Дикого для случая конечного промежутка обнаруживает полную аналогию *.

3. Сделаем некоторые замечания относительно случая конечного промежутка

$$ly \equiv -y'' + p(x)y, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \qquad y(0) = y(\pi) = 0; \qquad r_\lambda = (l-\lambda)^{-1}.$$

Знаменатель резольвенты здесь можно связать с целой функцией $\omega(\lambda) \equiv \omega(\pi, \lambda)$, где

$$-\omega''(x, \lambda) + p(x)\omega(x, \lambda) = \lambda\omega(x, \lambda), \quad \omega(0, \lambda) = 0, \quad \omega'(0, \lambda) = 1.$$

Вне точек спектра

$$\operatorname{Sp} r_\lambda = -\frac{d}{d\lambda} \ln \omega(\lambda).$$

Имеет место представление

$$\omega(\lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^\pi \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pi - t)}{\sqrt{\lambda}} p(t)\omega(t, \lambda)\,dt.$$

Его удобно использовать для изучения асимптотики $\omega(\lambda)$ и асимптотики собственных значений λ_l, определяемых нулями $\omega(\lambda)$.

Нетрудно доказать

$$\sum_{l=j+1}^{\infty} \lambda_l^s = \left[\frac{1}{\pi} p \int_{-\infty}^{0} \frac{\frac{d}{d\lambda}\omega(\lambda)}{\omega(\lambda)} \lambda^s d\lambda - i \sum_{l=1}^{j} \lambda_l^s\right] e^{-i\pi s} \sin \pi s;$$

λ_l, $l = 1, \ldots, j$, — отрицательные собственные значения; λ_l, $l = j+1, \ldots$, — положительные собственные значения; $-1 < \operatorname{Re} s < -1/2$.

Аналитическое продолжение этой формулы приводит, как и выше, к тождествам для собственных значений.

Авторы выражают благодарность М. Г. Крейну и М. Ш. Бирману за обсуждение результатов работы.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
17 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Дикий, УМН, **13**, 3, 111 (1958). [2] Л. Д. Фаддеев, УМН, **14**, 4, 57 (1959). [3] R. Schatten, A Theory of Cross-Spaces, 1950. [4] И. М. Лифшиц, УМН, **7**, 1, 171 (1952). [5] М. Г. Крейн, ДАН, **105**, № 3, 433 (1955). [6] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, 1958. [7] Л. Д. Фаддеев, ДАН, **115**, № 5, 878 (1957).

---

* Смотри формулы (6.3) и (6.4) работы ([1]). При сравнении надо учесть, что в ([1]) производные нечетного порядка $q(x)$ считаются на концах промежутка равными нулю.