Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев, О точечном взаимодействии для системы из трех частиц в квантовой механике, *Докл. АН СССР*, 1961, том 141, номер 6, 1335–1338

Доклады Академии наук СССР
1961. Том 141, № 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. А. МИНЛОС и Л. Д. ФАДДЕЕВ

О ТОЧЕЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИЗ ТРЕХ ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 8 VI 1961)

В недавней заметке Ф. А. Березина и одного из авторов ([1]) было предложено математически корректное описание точечного взаимодействия в квантовой механике. Предложенный метод был проиллюстрирован на примере взаимодействия двух нерелятивистских скалярных частиц и привел к формулам, неоднократно получавшимся в физической литературе с помощью процедур, которым, однако, нельзя придать однозначный математический смысл (см., например, ([2], [3])). В настоящей работе этот подход применяется для изучения системы трех частиц, попарно взаимодействующих точечным образом.

1. Оператор энергии для системы из трех частиц определяется в гильбертовом пространстве $L^2(E_9)$ функций $\psi(x_1, x_2, x_3)$ (x_1, x_2, x_3 — векторы, пробегающие все трехмерное пространство) с помощью дифференциального выражения:

$$H = -\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2} - \frac{1}{2m_3}\Delta_{x_3} + V_{12}(r_{12}) + V_{13}(r_{13}) + V_{23}(r_{23}), \quad (1)$$

где Δ_{x_i} — оператор Лапласа по переменной x_i ($i = 1, 2, 3$); $r_{ij} = x_i - x_j$; $V_{ik}(r)$ — функции, описывающие парные взаимодействия. В случае точечного взаимодействия потенциалы $V_{ik}(r)$ следовало бы считать равными нулю при всех $r \neq 0$, что приводит к употреблению сингулярных функций типа δ-функций, причем дифференциальное выражение перестает определять самосопряженный оператор в $L^2(E_9)$, как бы мы ни выбирали его область определения. Поэтому вместо введения сингулярных потенциалов в оператор энергии предлагается следующий подход к описанию точечного взаимодействия.

Рассмотрим оператор $\widetilde{H}_0$, определенный дифференциальным выражением:

$$\widetilde{H}_0 = -\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2} - \frac{1}{2m_3}\Delta_{x_3} \quad (2)$$

на множестве достаточно гладких быстро убывающих функций $\psi(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющих условию

$$\psi(x_1, x_1, x_3) = \psi(x_1, x_2, x_2) = \psi(x_1, x_2, x_1) = 0. \quad (3)$$

Оператор $\widetilde{H}_0$ симметричен и, как нетрудно убедиться, имеет ненулевые индексы дефекта.

Точечность взаимодействия означает, что истинный оператор энергии H на функциях, удовлетворяющих условию (3), совпадает с оператором $\widetilde{H}_0$ и, таким образом, содержится среди его самосопряженных расширений.

Ниже описаны все самосопряженные расширения оператора $\widetilde{H}_0$ и более подробно изучено одно из них, встречающееся в физической литературе.

2. Для простоты мы будем считать частицы тождественными, т. е. положим $m_1 = m_2 = m_3 = {}^1/_2$ и оператор $\widetilde{H}_0$ и все его расширения будем изучать в подпространстве полностью симметричных функций

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}), \tag{4}$$

где (i_1, i_2, i_3) — произвольная перестановка индексов (1, 2, 3).

Удобно перейти в импульсное представление и отделить движение центра инерции системы, после чего наша задача сводится к следующей:

В гильбертовом пространстве $L^2(E_6)$ функций $f(k_1, k_2)$, удовлетворяющих условиям

$$f(k_1, k_2) = f(k_2, k_1) = f(k_1, -k_1 - k_2), \tag{5}$$

задан замкнутый симметрический неотрицательный оператор

$$\widetilde{H}_0 f(k_1, k_2) = (k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2) f(k_1, k_2), \tag{6}$$

область определения $D(\widetilde{H}_0)$ которого состоит из функций $f(k_1, k_2)$, удовлетворяющих условиям

$$\int (k_1^4 + k_2^4) |f(k_1, k_2)|^2 dk_1 dk_2 < \infty, \tag{7}$$

$$\int f(k_1, k_2) dk_2 = 0. \tag{8}$$

Требуется описать все его самосопряженные расширения.

Заметим, что условие (5) является следствием симметрии (4), а условие (8) равносильно требованию (3).

3. Поскольку оператор $\widetilde{H}_0$ неотрицателен, естественно воспользоваться теорией расширений полуограниченных операторов *. С помощью условия (8) нетрудно убедиться, что дефектное подпространство R_{-1} оператора $\widetilde{H}_0 + E$ состоит из элементов вида

$$U_\varphi(k_1, k_2) = \frac{\varphi(k_1) + \varphi(k_2) + \varphi(-k_1, -k_2)}{k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2 + 1}. \tag{9}$$

Отсюда видно, что подпространство R_{-1} изоморфно гильбертову пространству $\mathfrak{H}$ функций от одного вектора $\varphi(k)$, получающемуся пополнением $L^2(E_3)$ по скалярному произведению $[\varphi, \psi] = (W\varphi, \psi)$, где $(\cdot\,,\,\cdot)$ — обычное скалярное произведение в $L^2(E_3)$ и W — положительный оператор с ядром

$$W(k, k') = \frac{3\pi^2}{\sqrt{{}^3/_4 k^2 + 1}} \delta(k - k') + \frac{6}{(k^2 + kk' + k'^2 + 1)^2}. \tag{10}$$

Область определения $D(\widetilde{H}_0^*)$ оператора $\widetilde{H}_0^*$ состоит из элементов вида

$$g(k_1, k_2) = f(k_1, k_2) + U_\varphi(k_1, k_2) + \frac{U_\psi(k_1, k_2)}{k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2 + 1}, \tag{11}$$

где $f(k_1, k_2) \in D(\widetilde{H}_0)$, $\varphi, \varphi \in \mathfrak{H}$. Оператор $\widetilde{H}_0^*$ действует по формуле

$$\widetilde{H}_0^* g(k_1, k_2) = (k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2) g(k_1, k_2) - \varphi(k_1) - \varphi(k_2) - \varphi(-k_1 - k_2). \tag{12}$$

Любое самосопряженное расширение H_A оператора $\widetilde{H}_0$ получается сужением области $D(\widetilde{H}_0^*)$ с помощью соотношения типа

$$\psi(k) = A\varphi(k), \tag{13}$$

где A — произвольный самосопряженный оператор $\mathfrak{H}$.

---

* Теория расширений полуограниченных расширений разработана Фридрихсом, М. Г. Крейном и др. Используемые нами приемы можно найти в работе М. Ш. Бирмана [4].

4. Применим выписанные соотношения для построения резольвенты оператора H_A. Из уравнения

$$(H_A - zE)\, g = h, \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \tag{14}$$

и формулы (12) находим, что g имеет вид

$$g(k_1, k_2) = \frac{h(k_1, k_2) + \varphi(k_1) + \varphi(k_2) + \varphi(-k_1 - k_2)}{k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2 - z}. \tag{15}$$

Сравнивая (15) с (11) и используя условия (13) и (8), мы приходим к уравнению для определения $\varphi(k)$ через $h(k_1, k_2)$:

$$\{[T(z) - T(-1)] + WA\}\, \varphi(k) = \int \frac{h(k, k')\, dk'}{k^2 + kk' + k'^2 - z} \equiv \chi_h(k). \tag{16}$$

Здесь для краткости мы ввели обозначение

$$T(z)\, \varphi(k) = 2\pi^2 i \sqrt{z - {}^3/_4 k^2}\, \varphi(k) + 2 \int \frac{\varphi(k')\, dk'}{k^2 + kk' + k'^2 - z}, \quad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{17}$$

Нетрудно убедиться, что выражение $T(z) - T(-1)$ определяет ограниченный оператор, действующий из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}'$, где $\mathfrak{H}'$ — гильбертово пространство со скалярным произведением, задаваемым оператором W^{-1}, при этом $\chi_h(k) \in \mathfrak{H}'$.

5. Задаче о точечном взаимодействии трех частиц посвящено несколько физических работ. В работе К. А. Тер-Мартиросяна и Г. В. Скорнякова [5] задача о нахождении резольвенты соответствующего оператора энергии сведена к уравнению, по существу равносильному следующему:

$$(\alpha + 2\pi^2 i \sqrt{z - {}^3/_4 k^2})\; \varphi(k) + 2 \int \frac{\varphi(k')\, dk'}{k^2 + kk' + k'^2 - z} = \chi(k), \tag{18}$$

где α — некоторое вещественное число, характерное для модели. Такое уравнение может быть формально получено из нашего уравнения (16), если мы положим

$$A = W^{-1} [T(-1) + \alpha E]. \tag{19}$$

Требование самосопряженности такого A в $\mathfrak{H}$ равносильно самосопряженности $T(-1)$ в $L^2(E_3)$. Заметим, однако, что до сих пор мы избегали придавать смысл непосредственно оператору $T(z)$ и, в частности, $T(-1)$. Эта осторожность не случайна, поскольку оператор $T(z)$ не ограничен в $L^2(E_3)$. Обозначим через $\tilde{T}(z)$ оператор, определенный выражением (17) на финитных функциях. Можно показать, что оператор $\tilde{T}(-1)$ является симметрическим оператором и имеет индексы дефекта (1,1) *. Область определения сопряженного к нему оператора $T^*(-1)$ содержит, кроме элементов из области определения замыкания $\tilde{T}(-1)$, еще функции вида

$$\varphi(k) = \frac{1}{k^2 + 1} (c_1 \sin \lambda_0 \ln |k| + c_2 \cos \lambda_0 \ln |k|), \tag{20}$$

где λ_0 — единственный положительный корень трансцендентного уравнения

$$1 - \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\lambda}{6}}{\lambda \operatorname{ch} \frac{\pi\lambda}{2}} = 0 \tag{21}$$

и c_1 и c_2 — произвольные комплексные числа. Для любого самосопряжен-

* Последнее обстоятельство связано с тем, что однородное уравнение (18), как заметил Г. С. Данилов [6], имеет нетривиальные решения из $L^2(E_3)$ при всех z.

ного расширения $\widetilde{T}\,(-1)$ надо положить

$$c_1 = \beta c_2 \quad (\beta \text{ вещественно}). \tag{22}$$

Соответствующее расширение будем обозначать $\widetilde{T}_\beta\,(-1)$. Если в формуле (19) под $T\,(-1)$ понимать фиксированное расширение $\widetilde{T}_\beta\,(-1)$, то мы придем к уравнению

$$(\widetilde{T}_\beta\,(z) + \alpha E)\,\varphi = \chi, \tag{23}$$

где оператор $\widetilde{T}_\beta\,(z)$ имеет ту же область определения, что и $\widetilde{T}_\beta\,(-1)$. Другими словами, среди решений уравнения (18) мы выбираем решения, имеющие при больших k асимптотику

$$\varphi\,(k) = \frac{c}{k^2}\,[\beta \sin \lambda_0 \ln k + \cos \lambda_0 \ln k] + o\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{24}$$

В работе Г. С. Данилова предлагается такой же рецепт для отбора физически интересных решений уравнения Тер-Мартиросяна — Скорнякова. Таким образом, наша общая схема содержит модель точечного взаимодействия Тер-Мартиросяна и Скорнякова, уточненную Даниловым.

6. В заключение сделаем несколько замечаний. Можно показать, что непрерывный спектр описанного в предыдущем пункте расширения $H_{\alpha,\beta}$ расположен правее точки $-\alpha^2$ при $\alpha > 0$ и правее 0 при $\alpha < 0$. Подробная структура собственных функций непрерывного спектра будет изучена позднее. Кроме непрерывного спектра оператор $H_{\alpha,\beta}$ имеет счетный набор дискретных собственных значений E_n, уходящих на $-\infty$ со следующей асимптотикой при $n \to \infty$:

$$E_n = -3 \exp\left[\frac{2\pi n}{\lambda_0} - \frac{2}{\lambda_0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\beta}\right][1 + o\,(1)]. \tag{25}$$

Заметим, что последний результат несколько дискредитирует выбранное расширение, поскольку, вероятно, в нерелятивистской квантовой механике представляют интерес только полуограниченные операторы энергии. Нам представляется, что среди других расширений оператора $\widetilde{H}_0$ существуют полуограниченные расширения, обладающие всеми хорошими с физической точки зрения свойствами модели Тер-Мартиросяна и Скорнякова, а именно, локальностью и правильным характером непрерывного спектра. По-видимому, такие расширения будут получаться, если в качестве оператора A выбрать

$$A = W^{-1}[T\,(-1) + \alpha E + K], \tag{26}$$

где K — интегральный оператор типа свертки с ядром $K\,(k - k')$, причем $K\,(\xi)$ имеет асимптотику при $\xi \to \infty$:

$$K\,(\xi) \sim \frac{\gamma}{\xi^2}, \qquad \gamma > \frac{1}{\pi^3}\left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - 1\right). \tag{27}$$

Подробное развитие этой точки зрения не приводится за недостатком места.

Авторы выражают благодарность Ф. А. Березину и М. Г. Бирману за ценное обсуждение.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
28 V 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, ДАН, **137**, № 5, 1011 (1961). [2] А. Ахиезер, И. Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра, 1948. [3] Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, **38**, № 3, 819 (1960). [4] М. Ш. Бирман, Матем. сборн., **38**, 4, 431 (1956). [5] К. А. Тер-Мартиросян, Г. В. Скорняков, ЖТФ, **31**, 775 (1956). [6] Г. С. Данилов, ЖЭТФ, **40**, № 2, 498 (1961). [7] Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев, ЖЭТФ, **41**, № 12 (1961).