Л. Д. Фаддеев, О связи S-матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера, *Докл. АН СССР*, 1958, том 121, номер 1, 63–66

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 121, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. Д. ФАДДЕЕВ

О СВЯЗИ S-МАТРИЦЫ И ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 32 III 1958)

Мы будем рассматривать одномерное уравнение Шредингера

$$Ly - \frac{d^2}{dx^2} y + q(x) y = k^2 y \tag{1}$$

на всей оси $-\infty < x < \infty$ и требовать, чтобы выполнялось условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\, |q(x)|\, dx < \infty. \tag{2}$$

1. Обозначим $f_1(x, k)$ решение, для которого $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-ikx} f_1(x, k) = 1$, а $f_2(x, k)$ — решение, для которого $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{ikx} f_2(x, k) = 1$. При выполнении условия (2) эти решения существуют при всех k из верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. Б. Я. Левин ([1]) доказал, что имеет место представление

$$f_1(x, k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} A_1(x, y)\, e^{iky}\, dy, \tag{3}$$

причем

$$\int_a^{\infty} dx \int_x^{\infty} dy\, |A_1(x, y)|^2 \leqslant C_a, \qquad a > -\infty. \tag{4}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$f_2(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} A_2(x, y)\, e^{-iky}\, dy; \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{b} dx \int_{-\infty}^{x} dy\, |A_2(x, y)|^2 \leqslant C_b, \qquad b < \infty. \tag{6}$$

При вещественных $k \neq 0$ решения $f_1(x, k)$ и $f_1(x, -k) = \overline{f_1(x, k)}$ или $f_2(x, k)$ и $f_2(x, -k) = \overline{f_2(x, k)}$ образуют полную систему, так что каждое решение можно представить как их линейную комбинацию. В частности:

$$\begin{aligned} f_1(x, k) &= c_{11}(k) f_1(x, k) + c_{12}(k) f_1(x, -k); \\ f_1(x, k) &= c_{22}(k) f_2(x, k) + c_{12}(k) f_2(x, -k). \end{aligned} \tag{7}$$

Лемма 1. *Коэффициенты $c_{ij}(k)$ являются непрерывными функциями k на всей оси $-\infty < k < \infty$ за исключением $k = 0$, причем $kc_{ij}(k)$ непрерывны вплоть до $k = 0$. Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} &c_{ij}(k) = \overline{c_{ij}(-k)}, \quad i, j = 1, 2; \qquad c_{12}(k) = c_{21}(k); \\ &c_{11}(k) = -c_{22}(-k); \quad |c_{12}|^2 = 1 + |c_{11}|^2 = 1 + |c_{22}|^2. \end{aligned} \tag{8}$$

При больших $|k|$

$$c_{ii}(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad i = 1, 2; \qquad c_{12}(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right). \tag{9}$$

Из (8) следует, что $c_{12}(k) \neq 0$. Обозначим

$$s_{21}(k) = s_{12}(k) = \frac{1}{c_{12}(k)}, \qquad s_{ii}(k) = \frac{c_{ii}(k)}{c_{12}(a)}, \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

Тогда из (7) имеем:

$$\begin{aligned} s_{12}(k) f_2(x, k) &= s_{11}(k) f_1(x, k) + f_1(x, -k); \\ s_{12}(k) f_1(x, k) &= s_{22}(k) f_2(x, k) + f_2(x, -k). \end{aligned} \tag{11}$$

Мы видим, что решение $s_{12}(k) f_1(x, k)$, которое при $x \to \infty$ ведет себя как $s_{12}(k) e^{ikx}$, при $x \to -\infty$ ведет себя как $s_{22}(k) e^{-ikx} + e^{ikx}$; именно такого типа решения рассматриваются в квантовой теории рассеяния на одномерном потенциальном барьере ([2]). Функции $s_{11}(k)$ и $s_{22}(k)$ можно назвать амплитудами коэффициента отражения направо и налево, а функцию $s_{12}(k)$ — амплитудой коэффициента прохождения. Условия (8) эквивалентны утверждению, что симметричная матрица $S(k)$ с элементами $s_{ij}(k)$ унитарна, причем $S(-k) = S^*(k) = S^{-1}(k)$. Матрица $S(k)$ носит название оператора рассеяния или S-матрицы для оператора L. Условие унитарности эквивалентно выполнению следующих соотношений:

$$|s_{12}|^2 = 1 - |s_{11}|^2 = 1 - |s_{22}|^2; \quad s_{12}(-k) s_{11}(k) + s_{12}(k) s_{22}(-k) = 0. \tag{12}$$

Лемма 2. *При всех вещественных k, кроме, может быть, $k = 0$,*

$$|s_{ii}(k)| < 1, \quad i = 1, 2. \tag{13}$$

Если $|s_{ii}(0)| = 1$, то

$$s_{11}(0) = s_{22}(0) = -1. \tag{14}$$

Функция $s_{12}(k)$ является предельным значением функции, которая аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ за исключением, может быть, конечного числа точек на мнимой оси $k = i\tau_l$, $l = 1, \ldots, n$, где она имеет простые полюса. При больших $|k|$

$$s_{ii}(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right), \; i = 1, 2, \; \operatorname{Im} k = 0; \quad s_{12}(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \; \operatorname{Im} k \geqslant 0. \tag{15}$$

Точки k_l соответствуют тем значениям k, при которых решения $f_1(x, k)$ и $f_2(x, k)$ линейно зависимы

$$f_1(x, i\tau_l) = \alpha_l f_2(x, i\tau_l), \quad l = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

При этом

$$\operatorname{Res} s_{12}(k)|_{k = i\tau_l} = i\gamma_l = i \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, i\tau_l) f_2(x, i\tau_l)\, dx \right]^{-1}. \tag{17}$$

Величины $\lambda_l = -\tau_l^2$ являются собственными значениями оператора L. Введем в рассмотрение преобразования Фурье функций $s_{ij}(k)$:

$$\begin{gathered} F_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_{11}(k) e^{ikt}\, dk; \quad F_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_{22}(k) e^{-ikt}\, dk; \\ \Gamma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (s_{12}(k) - 1) e^{-ikt}\, dk; \end{gathered} \tag{18}$$

$F_1(t)$, $F_2(t)$ и $\Gamma(t)$ — квадратично интегрируемые функции t на всей оси, причем

$$\Gamma(t) = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l e^{\tau_l t}, \qquad t < 0. \tag{19}$$

На основании теоремы о свертке соотношения (11) эквивалентны следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} A_2(x, t)\,\Gamma(t-y)\,dt + A_2(x, y) + \Gamma(x-y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A_1(x, t)\,F_1(t+y)\,dt + A_1(x, y) + F_1(x+y); \\ &\int_{-\infty}^{\infty} A_1(x, t)\,\Gamma(y-t)\,dt + A_1(x, y) + \Gamma(y-x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A_2(x, t)\,F_2(t+y)\,dt + A_2(x, y) + F_2(x+y). \end{aligned} \tag{20}$$

Отсюда с помощью (18), (16) и (17) мы можем получить следующие уравнения, связывающие функции $A_1(x, y)$, $A_2(x, y)$ и $F_1(t)$, $F_2(t)$:

$$A_1(x, y) + \Omega_1(x+y) + \int_{x}^{\infty} A_1(x, t)\,\Omega_1(t+y)\,dt = 0, \quad x < y; \tag{21}$$

$$A_2(x, y) + \Omega_2(x+y) + \int_{-\infty}^{x} A_2(x, t)\,\Omega_2(t+y)\,dt = 0, \quad x > y. \tag{22}$$

Здесь

$$\Omega_1(t) = F_1(t) + \sum_{l=1}^{n} m_{l_1} e^{-\tau_l t}; \quad \Omega_2(t) = F_2(t) + \sum_{l=1}^{n} m_{l_2} e^{\tau_l t}, \tag{23}$$

причем

$$m_{l_1} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x, i\tau_l)]^2\,dx\right)^{-1}; \quad m_{l_2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} [f_2(x, i\tau_l)]^2\,dx\right)^{-1}. \tag{24}$$

Из соотношений (16) и (17) следует, что

$$m_{l_1} m_{l_2} = \gamma_l^2, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{25}$$

Уравнения типа (21) использовались для решения обратной задачи для радиального уравнения В. А. Марченко [3] и подробно изучались в работах З. С. Аграновича и В. А. Марченко [4]. На основании их исследования мы можем утверждать, что функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$ один раз дифференцируемы и

$$\begin{aligned} &\int_{a}^{\infty} (1 + |t|)\,|F_1'(t)|\,dt < C_a, \quad a > -\infty; \\ &\int_{-\infty}^{b} (1 + |t|)\,|F_2'(t)|\,dt < C_b, \quad b < \infty. \end{aligned} \tag{26}$$

2. Полученные связи позволяют решать задачу о восстановлении потенциала по S-матрице. Этой задачей занимались Кэй и Мозес [5], которые получили уравнение типа (22) и в предположении разрешимости этого уравнения исследовали, какие свойства $s_{22}(k)$ гарантируют, что соответствующий потенциал будет тождественным нулем левее некоторой точки. Наше исследование ставит другую цель, а именно, выяснить, какими свойствами должны обладать элементы S-матрицы для того, чтобы соответствующий потенциал удовлетворял только условию (2). Обратной задачей для уравнения (1) в другой постановке занимался А. Ш. Блох [6].

Пусть задана функция $s_{11}(k)$, удовлетворяющая условиям (13) и (15), и $2n$ произвольных положительных параметров τ_{l_1} и m_{l_1}, причем среди τ_{l_1} нет равных. Если построить по этим данным функцию $\Omega_1(t)$ по формуле (23), то уравнение (21) при всех x, $-\infty < x < \infty$, однозначно разрешимо. Аналогичное утверждение имеет место относительно уравнения (22), если исходить из функции $s_{22}(k)$, удовлетворяющей условиям (13) и (15), и произвольных положительных τ_{l_2} и m_{l_2}, причем опять среди τ_{l_2} нет равных. Результаты З. С. Аграновича и В. А. Марченко позволяют утверждать, что полученные решения $A_1(x, y)$ и $A_2(x, y)$ удовлетворяют соответственно условиям (4) и (6) и что построенные по формулам (3) и (5) функции $f_1(x, k)$ и $f_2(x, k)$ являются решениями дифференциальных уравнений с потенциалами $q_1(x)$ и $q_2(x)$, причем

$$\begin{gathered}\int_a^{\infty}(1+|x|)|q_1(x)|\,dx < C_a, \quad a > -\infty; \\ \int_{-\infty}^{b}(1+|x|)|q_2(x)|\,dx < C_b, \quad b < \infty.\end{gathered} \tag{27}$$

Решение обратной задачи завершается на основании следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть функции $s_{ij}(k)$ обладают свойствами, перечисленными в лемме 2, и связаны соотношениями* (12). *Пусть, далее,* $\tau_{l_1} = \tau_{l_2} = \tau_l$, $l = 1, \ldots, n$, *причем $k_l = i\tau_l$ совпадают с точками, где $s_{12}(k)$ имеет особенности, а для m_{l_1} и m_{l_2} выполняются соотношения* (25). *Тогда для функций $f_1(x, k)$ и $f_2(x, k)$ выполняются соотношения* (11).

Наш результат можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема. *Для того чтобы симметричная унитарная матрица $S(k)$ являлась S-матрицей оператора типа L, необходимо и достаточно, чтобы ее элементы обладали свойствами, указанными в лемме* 2, *и удовлетворяли условию* (26). *При этом потенциал определяется однозначно, если, кроме S-матрицы, задано n произвольных положительных чисел, где n — число дискретных собственных значений.*

3. Следует отметить, что требования леммы 2 и условие унитарности позволяют восстановить S-матрицу по одному из элементов $s_{11}(k)$ или $s_{22}(k)$, если задать число особенностей $s_{12}(k)$ в верхней полуплоскости. Так, пусть задано $s_{11}(k)$, обладающее свойствами (13) и (15). Тогда

$$\begin{aligned} s_{12}(k) &= \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1-|s_{11}(k')|^2)}{k'-k}\,dk'\right]\prod_{l=1}^{n}\frac{k+i\tau_l}{k-i\tau_l}, && \operatorname{Im} k > 0; \\ s_{12}(k) &= \lim_{\varepsilon\to 0} s_{12}(k+i\varepsilon) && \operatorname{Im} k = 0,\end{aligned} \tag{28}$$

обладает свойствами, указанными в лемме 2, и, если мы положим

$$s_{22}(k) = -s_{11}(-k)\,s_{12}(k)\,(s_{12}(-k))^{-1}, \tag{29}$$

то мы получим допустимую S-матрицу, если преобразования Фурье $s_{22}(k)$ и $s_{11}(k)$ удовлетворяют условию (26). В этом смысле можно говорить, что потенциал восстанавливается по амплитуде отражения в одну сторону.

Стоит отметить, что если от $s_{11}(k)$ не требовать никаких свойств, кроме квадратичной интегрируемости и убывания при больших $|k|$, то соответствующие уравнения разрешимы, и полученный потенциал явится обобщенной функцией типа производной от квадратично интегрируемой. В частности, можно получить потенциал, имеющий δ-образную особенность.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
12 III 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Я. Левин, ДАН, 106, № 2, 187 (1956). [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ч. I, 1948. [3] В. А. Марченко, ДАН, 104, № 5, 696 (1955). [4] З. С. Агранович, В. А. Марченко, ДАН, 113, № 5, 951 (1957). [5] I. Kay, H. E. Moses, Nuovo Cim., 3, №2, 277 (1956). [6] А. Ш. Блох, ДАН, 92, № 3, 209 (1953).