Л. Д. Фаддеев, О разделении эффектов самодействия и рассеяния по теории возмущений, *Докл. АН СССР*, 1963, том 152, номер 3, 573–576

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 152, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. Д. ФАДДЕЕВ

О РАЗДЕЛЕНИИ ЭФФЕКТОВ САМОДЕЙСТВИЯ И РАССЕЯНИЯ ПО ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 1 IV 1963)

Как известно, физическим основанием метода перенормировок в квантовой теории поля является стремление иметь дело только с наблюдаемыми величинами. В этом смысле обычная схема перенормировок обладает, как это отметил Ван-Хов ([1]), следующим недостатком: в ней широко используют разложение по собственным функциям свободного гамильтониана, что влечет за собой необходимость введения не имеющих наглядного смысла множителей перенормировки волновых функций.

На основании изучения ряда теории возмущений для резольвенты полного гамильтониана Ван-Хов построил состояния, определяющие асимптотику при больших $|t|$ решений нестационарного уравнения Шредингера. Эффекты самодействия точно учтены в этих состояниях. В настоящей работе предложен другой подход к проблеме исключения из расчетов собственных функций свободного гамильтониана. Показано, что при помощи унитарного преобразования можно привести оператор энергии к сумме двух слагаемых, одно из которых включает в себя все эффекты самодействия, а другое содержит только члены, ответственные за рассеяние. Собственные функции первого слагаемого можно брать в качестве асимптотических функций. Аргументы основаны на теории возмущений и не являются математически строгими

1. Прелагаемый подход будет проиллюстрирован на примере системы взаимодействующих нейтральных скалярных мезонов. Операторы рождения и уничтожения $a^*(k)$ и $a(k)$ удовлетворяют обычным соотношениям коммутации

$$[a(k), a(k')] = [a^*(k), a^*(k')] = 0; \quad [a(k), a^*(k')] = \delta(k-k'). \tag{1}$$

Будем считать, что оператор энергии имеет вид

$$H = H_0 + \varepsilon V; \quad V = \sum_{\alpha,\beta} V_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

где

$$H_0 = \int \omega(k)\, a^*(k)\, a(k)\, dk, \tag{3}$$

$$V_{\alpha\beta} = \int v_{\alpha\beta}(k_1, \ldots, k_\alpha;\ k_1', \ldots, k_\beta')\, \delta(k_1 + \ldots + k_\alpha - k_1' - \ldots - k_\beta') \times$$
$$\times a^*(k_1) \ldots a^*(k_\alpha)\, a(k_1') \ldots a(k_\beta')\, dk_1 \ldots dk_\alpha dk_1' \ldots dk_\beta', \tag{4}$$

причем суммирование в (2) ведется по значениям $\alpha + \beta \geqslant 3$. Коэффициентные функции $v_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию симметрии

$$v_{\alpha\beta}(k_1, \ldots, k_\alpha;\ k_1', \ldots, k_\beta') = \overline{v_{\beta\alpha}(k_1', \ldots, k_\beta';\ k_1, \ldots, k_\alpha)}. \tag{5}$$

В дальнейшем операторы вида (4) будем называть операторами типа (α, β) по числу операторов $a^*(k)$ и $a(k)$ в соответствующем произведении.

Для применимости нестационарной теории рассеяния необходимо, чтобы выполнялось асимптотическое условие в следующей форме: *оператор*

$$U(t) = \exp\{iHt\} \exp\{-iH_0t\}$$

должен иметь сильные пределы при $t \to \pm\infty$. *Отметим здесь, что часто, используя адиабатическую гипотезу, рассматривают пределы типа*

$$U^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \to \pm 0} \mp \varepsilon \int_0^{\mp\infty} e^{\varepsilon t} U(t)\, dt.$$

Такие пределы существуют для широкого класса операторов H_0 и H, однако предельные операторы $U^{(\pm)}$, а вместе с ними и соответствующий оператор рассеяния $S = U^{(+)^*}U^{(-)}$, не будут, вообще говоря, унитарными. Именно с этим связано появление множителей перенормировки волновых функций в обычной теории возмущений.

Мы покажем, что для выполнения асимптотического условия *необходимо, чтобы суммирование в* (2) *начиналось с значений* $\alpha \geqslant 2$ *и* $\beta \geqslant 2$, *т. е. чтобы взаимодействие, разложенное в ряд по нормальным произведениям, содержало не менее двух операторов рождения и двух операторов уничтожения.*

Для этого заметим, что если взаимодействие содержит члены $(\alpha, 0)$ или $(\alpha, 1)$, то оператор $U(t)$ не может сходиться на подпространстве, содержащем свободные одночастичные состояния и вакуум. Действительно, если $U(t)\,\Phi$ сходится, то норма элемента $\Phi' = V \exp\{-iH_0t\}\,\Phi$ должна исчезать при $|t| \to \infty$. Пусть Φ_0 — вакуум, Φ_f — одночастичное состояние, т. е. $\Phi_f = \int f(k)\, a^*(k)\, dk\, \Phi_0$ и $\Phi_\alpha(t) = V_{\alpha 1} \exp\{-iH_0t\}\,\Phi_f$. Нетрудно сосчитать, что

$$\Phi_\alpha(t) = \int f_\alpha(k_1, \ldots, k_\alpha; t)\, a^*(k_1) \ldots a^*(k_\alpha)\, dk_1 \ldots dk_\alpha \Phi_0,$$

где $f_\alpha(k_1, \ldots, k_\alpha; t) = v_{\alpha 1}(k_1, \ldots, k_\alpha; k') f(k') \exp\{-i\omega(k')\, t\};\ k' = k_1 + \ldots + k_\alpha$.

Норма элемента $\Phi_\alpha(t)$ вообще не зависит от t. Таким образом, если выполняется асимптотическое условие, то члены типа $(\alpha, 1)$ во взаимодействии должны отсутствовать. Аналогично можно убедиться, что взаимодействие не должно содержать членов типа $(\alpha, 0)$. Из условия симметрии (5) следует, что члены типа $(1, \beta)$ и $(0, \beta)$ также должны отсутствовать. Сформулированное необходимое условие следует из приведенных рассуждений.

2. Гамильтонианы, с которыми приходится иметь дело в теории поля, не удовлетворяют этому условию. Мы покажем, однако *если функция* $\omega(k)$ *удовлетворяет условию выпуклости*

$$\omega(k_1) + \omega(k_2) > \omega(k_1 + k_2), \tag{6}$$

то можно подобрать такой унитарный оператор W, *что*

$$H' = W^{-1}HW = c + H_0' + V',$$

где c — *константа,* H_0 *имеет вид* (3) *с функцией* $\omega'(k)$, *отличной, вообще говоря, от* $\omega(k)$, *и* V' *представляется рядом нормальных произведений, где число операторов рождения и уничтожения не меньше двух.*

Аргументы основаны на теории возмущений. Будем искать операторы W и H' в виде разложения по параметру ε $W = I + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \ldots$; $H' = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \ldots$. Подставим эти разложения в соотношения $HW = WH'$; $W^*W = I$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Мы получим систему соотношений

$$W_1^* + W_1 = 0, \quad W_n + W_n^* + \sum_{k=1}^{n-1} W_k^* W_{n-k} = 0, \quad n \geqslant 2; \tag{7}$$

$$[H_0, W_1] + V = H_1; \tag{8^1}$$

$$[H_0, W_n] + VW_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} W_k H_{n-k} + H_n, \quad n \geqslant 2. \tag{8^2}$$

Пусть B_n и A_n — симметричная и антисимметричная части оператора W_n. Соотношения (7) будут выполнены, если в качестве A_n брать произвольные операторы, а B_n определять из рекуррентных соотношений

$$B_1 = 0; \quad 2B_n = \sum_{k=1}^{n-1} (A_k - B_k)(A_{n-k} + B_{n-k}), \quad n \geqslant 2.$$

Если подставить построенные таким образом W_n в (8), то эти соотношения примут вид

$$[H_0, A_n] + Q_n = H_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где Q_n — симметричный оператор, который в явном виде выражается через операторы V, A_k и H_k при $k < n$. Используем (9) для рекуррентного определения H_n и A_n. Пусть мы знаем A_k и H_k при $k = 1, \ldots, n-1$. Оператор Q_n в этом случае также известен. Обозначим через $\tilde{Q}_n$ сумму слагаемых типа $(\alpha, 0)$, $(0, \beta)$, $\alpha, \beta \geqslant 1$ и $(\alpha, 1)$ $(1, \beta)$, $\alpha, \beta \geqslant 2$ из ряда нормальных произведений для Q_n и положим $H_n = Q_n - \tilde{Q}_n$. Оператор H_n содержит, вообще говоря, константу, слагаемое типа (1,1) и слагаемые типа (α, β) при $\alpha \geqslant 2$ и $\beta \geqslant 2$, дающие вклад n-го порядка в константу c и операторы H_0' и V' соответственно.

Для определения A_n у нас осталось соотношение

$$[H_0, A_n] + \tilde{Q}_n = 0. \tag{10}$$

В качестве его решения мы предлагаем брать оператор A_n, представляемый суммой слагаемых того же типа, что и оператор $\tilde{Q}_n$. Обозначим через $a_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$ соответствующие коэффициентные функции для операторов A_n и $\tilde{Q}_n$. Из (10) следует, что

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}(k_1, \ldots, k_\alpha;\ k_1', \ldots, k_\beta') = \\ = [\omega(k_1) + \ldots + \omega(k_\alpha) - \omega(k_1') - \ldots - \omega(k_\beta')]^{-1} \times \\ \times q_{\alpha\beta}(k_1, \ldots, k_\alpha;\ k_1', \ldots, k_\beta'). \end{aligned} \tag{11}$$

В интегралы, определяющие A_n, функции $a_{\alpha\beta}$ входят только при $k_1 + \ldots + k_\alpha = k_0' + \ldots + k_\beta'$. По определению оператора $\tilde{Q}_n$ номера α и β принимают неравные значения, причем только один из них может отличаться от 0 или 1. При таких α, β, $k_1, \ldots, k_\alpha$, $k_1', \ldots, k_\beta'$ знаменатель в (11) не исчезает в силу условия (6), так что соотношение (11) определяет $a_{\alpha\beta}$ однозначно. Из условия симметрии типа (5) для функций $q_{\alpha\beta}$ следует, что

$$a_{\alpha\beta}(k_1, \ldots, k_\alpha;\ k_1', \ldots, k_\beta') = -\overline{a_{\beta\alpha}(k_1', \ldots, k_\beta';\ k_1, \ldots, k_\alpha)},$$

т. е. оператор A_n — антисимметричный. Таким образом, предлагаемая схема самосогласована.

3. Для операторов H_0' и H' — c отсутствуют обсуждавшиеся в п. 1 препятствия для выполнения асимптотического условия. Следует ожидать, что

при весьма широких условиях относительно коэффициентных функций $v_{\alpha\beta}$ существуют сильные пределы оператора

$$U'(t) = \exp\{i(H' - c)t\}\exp\{-iH_0't\}$$

при $t \to \pm\infty$. Оператором рассеяния естественно считать оператор

$$S = U'^*(+\infty)\,U'(-\infty).$$

Физический смысл имеют его матричные элементы между собственными функциями оператора H_0'.

Из рассуждений п. 2 следует схема теории возмущений для построения оператора рассеяния, отличная от принятой в теории поля. Именно, вычисления разбиваются на два этапа: на первом следует явно разделить вклады в гамильтониан, ответственные за эффекты самодействия и рассеяния, а на втором считать оператор рассеяния по обычной схеме, отправляясь как от невозмущенного от оператора, включающего все эффекты самодействия. При таком методе S-матрица получается сразу унитарной и имеет нетривиальные матричные элементы только между состояниями, содержащими не менее двух частиц. В частности, исчезает необходимость в перенормировке волновых функций.

В теориях с локальными взаимодействиями на первом этапе появляются расходимости, устраняющиеся перенормировкой массы, а на втором — перенормировкой заряда.

При конкретном построении оператора H' удобно искать оператор W в виде, заранее учитывающем его унитарность, например, $W = \exp\{R\}$; $W = (I + C)(I - C)^{-1}$, где R или C — антисимметричные операторы. Для определения этих операторов по теории возмущений можно построить рекуррентные соотношения типа (9). Выражение для оператора H' не зависит от конкретного выбора вида оператора W.

4. Вместо того чтобы говорить об унитарном преобразовании оператора энергии, можно в эквивалентных терминах говорить о выборе представления для операторов $a^*(k)$ и $a(k)$, в котором они не являются операторами рождения и уничтожения. Именно, если мы будем рассматривать операторы $a'(k) = Wa(k)W^{-1}$; $a'^*(k) = Wa^*(k)W^{-1}$, то оператор H, выраженный через эти операторы, примет вид $H(a^*, a) = H'(a^{*\prime}, a')$. Естественно считать операторами рождения и уничтожения операторы $a^{*\prime}(k)$ и $a'(k)$.

Во многих интересных случаях, в частности, если взаимодействие содержит члены типа $(\alpha, 0)$ и $(0, \beta)$, преобразование W является, как принято говорить, бесконечным унитарным преобразованием. Точнее, в этих случаях операторы a, a^* и a', $a^{*\prime}$ реализуют неэквивалентные представления соотношений коммутации (1).

В заключение отметим, что преобразование W является одевающим преобразованием в смысле Гринберга и Швебера ([2]). Требования, приведенные в ([2]), не определяют одевающего преобразования однозначно. Нам представляется, что преобразование, построенное в этой работе, является минимальным в том смысле, что оно точно учитывает только эффекты самодействия.

Автор выражает благодарность В. С. Буслаеву, О. А. Ладыженской и В. Н. Попову за обсуждение работы.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
18 III 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Van-Hove, Physica, 21, 901 (1955); 22, 343 (1956). [2] O. W. Greenberg, S. S. Schweber, Nuovo Cimento, 8, 378 (1958).