Л. Д. Фаддеев, О выражении для следа разности двух сингулярных дифференциальных операторов типа Штурма–Лиувилля, *Докл. АН СССР*, 1957, том 115, номер 5, 878–881

Доклады Академии наук СССР
1957. Том 115, № 5

МАТЕМАТИКА

Л. Д. ФАДДЕЕВ

О ВЫРАЖЕНИИ ДЛЯ СЛЕДА РАЗНОСТИ ДВУХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 1 III 1957)

И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан [1] исследовали вопрос о выражении следа для разности двух регулярных операторов типа Штурма—Лиувилля. В рассмотренном ими случае оба оператора имеют дискретный спектр. Однако в квантовой теории поля [2] возникает вопрос о конечности следа разности двух операторов, каждый из которых имеет непрерывный спектр. В настоящей работе этот вопрос рассматривается на простейшем примере двух операторов типа Штурма—Лиувилля на интервале $(0, \infty)$. Полученные условия и выражение для следа совпадают с полученными в работе [1].

1. Мы будем рассматривать дифференциальные операторы типа

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad y(0) = 0. \tag{1}$$

Если $\int\limits_0^\infty x|q(x)|dx < \infty$, то оператор L имеет непрерывный спектр на полуоси $0 \leqslant \lambda < \infty$ и конечное число отрицательных собственных значений $\lambda = -\varkappa_l^2$. Спектральная функция E_λ при $\lambda > 0$ является интегральным оператором с ядром $\Theta(x, y, \lambda)$, которое имеет производную по λ:

$$\frac{d}{d\lambda}\Theta(x, y, \lambda) = \omega(x, \lambda)\overline{\omega(y, \lambda)}, \tag{2}$$

где $\omega(x, \lambda)$ — нормированные на $\delta(\lambda - \lambda')$ собственные функции непрерывного спектра. Они только множителем отличаются от решений $\varphi(x, k)$ уравнения

$$\begin{gathered} \varphi''(x, k) + k^2\varphi(x, k) = q(x)\varphi(x, k); \\ \varphi(0, k) = 0; \quad \varphi'(0, k) = 1; \\ k = \sqrt{\lambda}; \quad -\infty < k < \infty; \end{gathered} \tag{3}$$

при $x \to \infty$ $\varphi(x, k)$ имеет асимптотику [3]:

$$\varphi(x, k) = \frac{A(k)}{k}\sin(kx - \eta(k)) + o(1). \tag{4}$$

Здесь $A(k)$ и $\eta(k)$ — модуль и аргумент функции $M(k)$:

$$\begin{gathered} M(k) = 1 + \int\limits_0^\infty e^{ikx}q(x)\varphi(x, k)\,dx; \\ \eta(-k) = -\eta(k); \quad A(-k) = A(k). \end{gathered} \tag{5}$$

Лемма 1. *Если $q(x)$ имеет две непрерывные интегрируемые производные, то имеет место оценка при $k \to \infty$:*

$$M(k) = 1 - \frac{1}{2ik}\int_0^\infty q(t)\,dt + \frac{1}{4k^2}q(0) - \frac{1}{8k^2}\left[\int_0^\infty q(t)\,dt\right]^2 + O\left(\frac{1}{k^3}\right). \qquad (6)$$

Лемма 2. *Если $\int_0^\infty x^2|q(x)|\,dx < \infty$, то функция $\eta(k)$ непрерывно дифференцируема. Кроме того, при этом условии можно дифференцировать по k асимптотические формулы типа (4). Так, для решения $\psi(x, k) = \frac{k}{A(k)}\varphi(x, k)$ справедлива следующая оценка:*

$$\dot\psi(x, k) = \frac{d}{dk}\psi(x, k) = (x - \dot\eta(k))\cos(kx - \eta(k)) + o(1). \qquad (7)$$

Лемма 3. *Имеет место представление*

$$\ln A(k) = \frac{2}{\pi}P\int_0^\infty \frac{s\eta(s)}{s^2 - k^2}\,ds + \sum_{l=1}^{n}\ln\frac{k^2 + \varkappa_l^2}{k^2} \quad (0 < k < \infty). \qquad (8)$$

Здесь индекс P означает, что интеграл понимается в смысле Коши; $-\varkappa_l^2$ — дискретные собственные значения.

2. Рассмотрим теперь два оператора с потенциалами $q_1(x)$ и $q_2(x)$, обозначив их, соответственно, L_1 и L_2.

Определим след разности $L_1 - L_2$ следующим равенством:

$$\mathrm{Sp}\,(L_1 - L_2) \equiv \lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{R}\lambda\,d\,[\mathrm{Sp}\,(E_\lambda^{(1)} - E_\lambda^{(2)})] =$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\lambda\,d\,\mathrm{Sp}\,(E_\lambda^{(1)} - E_\lambda^{(2)}) + \lim_{R\to\infty}\int_0^R\lambda\left(\lim_{N\to\infty}\int_0^N[|\omega_1(x,\lambda)|^2 - |\omega_2(x,\lambda)|^2]\,dx\right)d\lambda.$$

Легко видеть, что

$$\int_{-\infty}^{0}\lambda\,d\,\mathrm{Sp}\,(E_\lambda^{(1)} - E_\lambda^{(2)}) = -\sum_{l=1}^{n_1}\varkappa_l^{(1)2} + \sum_{l=1}^{n_2}\varkappa_l^{(2)2}.$$

Займемся вычислением основной части следа. Перейдем к переменной $k = \sqrt{\lambda}$. Тогда второй член в выражении для следа будет иметь вид

$$\lim_{R\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^R k^2dk\left(\lim_{N\to\infty}\int_0^N[\psi_1^2(x,k) - \psi_2^2(x,k)]\,dx\right),$$

где $\psi(x,k) = \sqrt{\pi k}\,\omega(x,\lambda)$ — решение уравнения (3), имеющее асимптотику $\psi(x,k) = \sin(kx - \eta(k)) + o(1)$. С помощью дифференциального уравнения для $\psi(x,k)$ и оценок типа (4) и (7) нетрудно получить, что

$$\int_0^N\psi^2(x,k)\,dx = \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}\dot\eta(k) + \frac{1}{4k}\sin(2kN - \eta(k)) + o(1).$$

После интегрирования по k в конечных пределах и перехода к пределу при $N \to \infty$ мы получим

$$\frac{2}{\pi}\int_0^R k^2\left[\int_0^\infty(\psi_1^2(x,k) - \psi_2^2(x,k))\,dx\right]dk = -\frac{1}{\pi}\int_0^R k^2\frac{d}{dk}(\eta_1 - \eta_2)\,dk =$$

$$= \frac{1}{\pi}R^2(\eta_1(R) - \eta_2(R)) + \frac{2}{\pi}\int_0^R k(\eta_1(k) - \eta_2(k))\,dk.$$

Логарифмируя оценку (6) для $M(k)$, получим оценки

$$\eta(k) = \frac{1}{2k}\int\limits_0^\infty q(t)\,dt + O\left(\frac{1}{k^3}\right);$$

$$\ln A(k) = \frac{1}{4k^2}q(0) + O\left(\frac{1}{k^3}\right). \tag{9}$$

Если $\int\limits_0^\infty [q_1(x) - q_2(x)]\,dx = 0$, то $\eta_1(k) - \eta_2(k) = O\left(\frac{1}{k^3}\right)$. Поэтому мы можем перейти к пределу при $R \to \infty$, и в результате получим

$$\mathrm{Sp}(L_1 - L_2) = -\sum_{l=1}^{n_1} \varkappa_l^{(1)2} + \sum_{l=1}^{n_2} \varkappa_l^{(2)2} + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty k(\eta_1(k) - \eta_2(k))\,dk. \tag{10}$$

3. Нетрудно теперь получить для следа выражение, аналогичное полученному Гельфандом и Левитаном. С одной стороны, вследствие оценки $\eta_1(k) - \eta_2(k) = O(1/k^3)$ можно показать, что

$$\lim_{k\to\infty} k^2 P\int\limits_0^\infty \frac{s(\eta_1(s) - \eta_2(s))}{s^2 - k^2}\,ds = -\int\limits_0^\infty s(\eta_1(s) - \eta_2(s))\,ds,$$

и, следовательно, учитывая формулу (8), получим

$$-\sum_{l=1}^{n_1} \varkappa_l^{(1)2} + \sum_{l=1}^{n_2} \varkappa_l^{(2)2} + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty s(\eta_1(s) - \eta_2(s))\,ds = -\lim_{k\to\infty} k^2(\ln A_1(k) - \ln A_2(k)).$$

С другой стороны, из асимптотической формулы (9) для $\ln A(k)$ следует

$$\lim_{k\to\infty} k^2(\ln A_1(k) - \ln A_2(k)) = \frac{1}{4}(q_1(0) - q_2(0)).$$

Окончательно получаем для следа разности $L_1 - L_2$ выражение

$$\mathrm{Sp}(L_1 - L_2) = -\sum_{l=1}^{n_1} \varkappa_l^{(1)2} + \sum_{l=1}^{n_2} \varkappa_l^{(2)2} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty k(\eta_1(k) - \eta_2(k))\,dk = -\frac{1}{4}(q_1(0) - q_2(0)). \tag{11}$$

Эта формула и является аналогом соответствующей формулы Гельфанда и Левитана.

4. Формула (11) нами получена при весьма сильных ограничениях на потенциалы $q_i(x)$, а именно, $q_i(x)$ должны быть дважды непрерывно дифференцируемы и $\int\limits_0^\infty (1 + x^2)\,|q_i(x)|\,dx < \infty$. Однако с помощью предельного перехода эти ограничения можно снять. Точнее, имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Если выполняются условия:*

а) $\int\limits_0^\infty x\,|q_i(x)|\,dx < \infty$, $i = 1, 2$;

б) $g(x) = q_1(x) - q_2(x)$ *непрерывна в окрестности* $x = 0$;

в) $\int\limits_0^\infty g(x)\,dx = 0$,

то след разности операторов L_1 *и* L_2 *конечен и имеет место выражение* (11).

5. В рассмотренном выше случае операторы имели простой спектр. Случай конечнократного спектра может быть рассмотрен на примере операторов в пространстве вектор-функций с N компонентами

$$Ly = -y'' + Q(x)y, \quad y(0) = 0.$$

Здесь $Q(x)$ — вещественная симметричная матрица-функция. Если $\int_0^\infty x\|Q(x)\|dx < \infty$, где $\|Q(x)\|$ — подходящим образом выбранная норма, то этот оператор имеет N-кратный непрерывный спектр на полуоси $0 < \lambda < \infty$ и конечное число отрицательных собственных значений конечной кратности. Спектральная функция E_λ является интегральным оператором с матричным ядром $\Theta(x, y, \lambda)$, которое при $\lambda > 0$ имеет производную

$$\frac{d\Theta(x, y, \lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}} \Psi(x, \sqrt{\lambda}) \Psi(y, \sqrt{\lambda})^*,$$

где $\Psi(x, k)$ — матрица — решение уравнения

$$\Psi(x, k)'' + k^2\Psi(x, k) = Q(x)\Psi(x, k); \quad \Psi(0, k) = 0, \tag{12}$$

которая при $x \to \infty$ имеет асимптотику

$$\Psi(x, k) = \frac{1}{2i}\{e^{ikx}I - e^{-ikx}S(k)\} + o(1). \tag{13}$$

Здесь I — единичная матрица; $S(k)$ — так называемая S-матрица оператора L (это унитарная симметричная матрица-функция, однозначно определяемая потенциалом $Q(x)$ ([4])).

Аналог теоремы 1 для этого случая можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2. *Если выполняются условия:*

а) $\int_0^\infty x\|Q(x)\|dx < \infty$, $i = 1, 2$;

б) $G(x) = Q_1(x) - Q_2(x)$ *непрерывна в окрестности нуля*;

в) $\int_0^\infty \operatorname{Tr} G(x)dx = 0$, *где* $\operatorname{Tr} G(x)$ — *след матрицы* $G(x)$,

то разность операторов L_1 и L_2 имеет конечный след, который выражается следующим образом:

$$\operatorname{Sp}(L_1 - L_2) = -\sum_{l=1}^{n_1} m_l^{(1)}\varkappa_l^{(1)2} + \sum_{l=1}^{n_2} m_l^{(2)}\varkappa_l^{(2)2} + $$
$$+ \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty k(\ln\det S_1 - \ln\det S_2)dk = -\frac{1}{4}(\operatorname{Tr} Q_1(0) - \operatorname{Tr} Q_2(0)). \tag{14}$$

Здесь m_l — кратность соответствующих собственных значений.

Автор выражает благодарность проф. О. А. Ладыженской за интерес, проявленный к этой работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
20 II 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, ДАН, 88, № 4, 593 (1953). [2] K. O. Friedrichs, Mathematical Aspects of Quantum Theory of the Fields, Interscience Publishers, P. V, N. Y., 1953. [3] N. Levinson, Kgl. Danske Videnskab. Selskab., mat.-fys. medd., 25, № 9 (1949). [4] R. Newton, R. Jost, Nuovo Cim., ser. 10, 1, № 4, 590 (1955).