О. А. Ладыженская, Л. Д. Фаддеев, К теории возмущений непрерывного спектра, *Докл. АН СССР*, 1958, том 120, номер 6, 1187–1190

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 120, № 6

МАТЕМАТИКА

О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ и Л. Д. ФАДДЕЕВ

К ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 17 II 1958)

К. О. Фридрихс [1,2] исследовал характер спектра для оператора $L = L_0 + \varepsilon K$, где L_0 — оператор умножения на независимую переменную в гильбертовом пространстве абстрактных функций, а K — интегральный оператор. При выполнении ряда условий типа гладкости и убывания, сходных с условиями (R) и (K) (см. ниже), и достаточно малом ε он доказал унитарную эквивалентность операторов L и L_0, а также исследовал поведение при $|t| \to \infty$ решения уравнения Шредингера с оператором L. Основную часть его исследования составляет изучение интегрального уравнения

$$r(\lambda, \mu) = k(\lambda, \mu) + i\pi\varepsilon k(\lambda, \mu) r(\mu, \mu) + \varepsilon P \int \frac{k(\lambda, \sigma) r(\sigma, \mu)}{\mu - \sigma} d\sigma \qquad \text{(I)}$$

(индекс P означает, что интеграл понимается в смысле главного значения) для ядра $r(\lambda, \mu)$ оператора R, с помощью которого строится оператор U, осуществляющий унитарное преобразование L в L_0. Малость ε понадобилась Фридрихсу для доказательства разрешимости уравнения (I). В настоящей работе доказывается разрешимость уравнения (I) при любых ε (мы полагаем в дальнейшем $\varepsilon = 1$).

1. Основные понятия и обозначения. Пусть A — комплексное гильбертово пространство элементов $x, y, \ldots$ со скалярным произведением xy и нормой $|x| = (xx)^{1/2}$. Множество измеримых функций $x(\lambda)$ вещественной переменной λ, меняющейся в промежутке I, со значениями в A, для которых * $\int |x(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$, является гильбертовым пространством (которое мы будем обозначать через $\mathcal{H}$), если ввести в нем скалярное произведение $(x(\lambda), y(\lambda)) = \int x(\lambda) y(\lambda) d\lambda$. На всех функциях, для которых $\int \lambda^2 |x(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$, определен оператор $L_0 x(\lambda) = \lambda x(\lambda)$, который является самосопряженным в $\mathcal{H}$. Пусть, далее, $k(\lambda, \mu)$ при фиксированных λ и μ из I является ограниченным оператором в A; через $|k(\lambda, \mu)|$ будем обозначать его норму, а через $\overline{k(\lambda, \mu)}$ — сопряженный оператор. В дальнейшем на ядро $k(\lambda, \mu)$ будут накладываться следующие условия:

$$|(1 + |\lambda|^\beta + |\mu|^\gamma) k(\lambda, \mu)| \leqslant c_1, \quad 0 < \beta, \gamma < 1; \qquad (\mathrm{R}_1)$$

$$|k(\lambda, \mu) - k(\lambda', \mu)| \leqslant c_2 |\lambda - \lambda'|^\beta; \qquad (\mathrm{R}_2)$$

$$|(1 + |\lambda|^\beta)(k(\lambda, \mu) - k(\lambda, \mu'))| \leqslant c_3 |\mu - \mu'|^\gamma; \qquad (\mathrm{R}_3)$$

$$|k(\lambda, \mu) - k(\lambda', \mu) - k(\lambda, \mu') + k(\lambda', \mu')| \leqslant c_4 |\lambda - \lambda'|^\beta |\mu - \mu'|^\gamma; \qquad (\mathrm{R}_4)$$

$$k(\lambda, \mu) = 0, \text{ если } \mu \text{ на границе } I; \qquad (\mathrm{R}_5)$$

* Все интегралы в дальнейшем распространены на промежуток I.

$k(\lambda, \mu)$ — вполне непрерывный оператор в A при любых λ и μ из I, (T)

$$k(\lambda, \mu) = \overline{k(\mu, \lambda)}. \tag{K}$$

Операторное ядро $r(\lambda, \mu)$ будем называть ядром класса (R), если оно подчиняется условиям (R), кроме ограниченности $|\mu^{\gamma} r(\lambda, \mu)|$.

Лемма 1. *Если выполняются условия* (R_1) *и* (R_2), *причем* $\beta > {}^1/_2$, *то на каждой функции из области определения* L_0 *определен оператор*

$$Kx(\lambda) = \int k(\lambda, \mu)\, x(\mu)\, d\mu,$$

и если выполняется еще условие (K), *то оператор* $L = L_0 + K$ — *самосопряженный в* H.

На основании исследования уравнения (I), проведенного нами, следуя методике Фридрихса, мы можем доказать следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (R), (T) *и* (K), *причем* $\beta > {}^1/_2$. *Тогда оператор* L *имеет непрерывный спектр на отрезке* I *и еще разве что конечное число собственных значений конечной кратности, которые могут находиться как внутри, так и вне отрезка* I. *Часть оператора* L, *действующая в инвариантном подпространстве, соответствующем непрерывному спектру, унитарно эквивалентна оператору* L_0, *т. е. существует оператор* U, *обладающий следующими свойствами*:

$$LU = UL_0; \quad U^*U = 1; \quad UU^* = 1 - P. \tag{U}$$

Здесь P — *ортогональный проектор на собственное подпространство оператора* L, *соответствующее дискретному спектру.*

В частности, свойствами (U) *обладают операторы*

$$U^{(\pm)} = \lim_{t \to \pm\infty} e^{-iLt} e^{iL_0 t},$$

причем эти пределы существуют в сильном смысле. Операторы $U^{(\pm)}$ *связаны друг с другом по формуле*

$$U^{(+)} = U^{(-)} S,$$

причем S — *унитарный оператор, коммутирующий с* L_0.

Отметим, что оператор S имеет важное значение в квантовой механике — это так называемый оператор рассеяния или S-матрица.

2. Наметим теперь основные этапы нашего исследования уравнения (I). Удобно рассматривать его в пространстве функций $u(\lambda)$ со значениями в A, которые удовлетворяют условию Гельдера с каким-нибудь показателем α, $0 < \alpha < 1$. Множество функций, для которых

$$\|u\|_\alpha = \sup_\lambda |u(\lambda)| + \sup_{\lambda\lambda'} \frac{|u(\lambda) - u(\lambda')|}{|\lambda - \lambda'|^\alpha} + \sup_\lambda |\lambda^\alpha u(\lambda)| < \infty,$$

является полным банаховым пространством, если взять $\|u\|_\alpha$ в качестве нормы. Будем его обозначать через B_α. Рассмотрим в B_α оператор

$$T_\omega u(\lambda) = i\pi k(\lambda, \omega)\, u(\omega) + P \int \frac{k(\lambda, \sigma)\, u(\sigma)}{\omega - \sigma} d\sigma. \tag{1}$$

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (R). *Тогда оператор* T_ω *определен на любой функции из* B_α *и ограничен в норме* B_β. *Кроме того,*

$$\|T_\omega u\|_\beta \leqslant c_\omega \|u\|_\alpha,$$

причем $c_\omega \to 0$ *при* $|\omega| \to \infty$, *если* J *безграничен, и*

$$\|(T_\omega - T_{\omega'})u\|_\beta \leqslant c|\omega - \omega'|^\delta \|u\|_\alpha, \quad \delta = \min(\gamma, \alpha).$$

Лемма 3. *Пусть выполняются условия леммы* 2 *с* $\beta > \alpha$ *и условие* (T). *Тогда оператор* T_ω *вполне непрерывен в* B_α.

Рассмотрим теперь структуру собственных функционалов оператора T^*_ω. Пусть $T^*_\omega l_\omega = l_\omega$. Это означает, что для любой $u \in B_\alpha$ мы имеем:

$$(l_\omega, u) = \left(l_\omega, i\pi k(\lambda, \omega)u(\omega) + P\int \frac{k(\lambda, \sigma)u(\sigma)}{\omega - \sigma}d\sigma\right).$$

Если выполняются условия (R_1) и (R_2), то при фиксированном μ и произвольном $x \in A$ $k(\lambda, \mu)x$ — элемент из B_β и, тем более, из B_α. Но тогда имеет смысл выражение $(l_\omega, k(\lambda, \mu)x)$, и оно определяет линейный функционал в A. По теореме Рисса

$$(l_\omega, k(\lambda, \omega)x) = \varphi_\omega(\mu)x. \tag{2}$$

Этим равенством определяется функция $\varphi_\omega(\mu)$ со значениями из A. Если выполняются условия (R_1) и (R_3), то $\varphi_\omega \in B_\gamma$ и

$$(l_\omega, u) = i\pi\varphi_\omega(\omega)u(\omega) + P\int \frac{\varphi_\omega(\sigma)u(\sigma)}{\omega - \sigma}d\sigma. \tag{3}$$

Если здесь в качестве $u(\lambda)$ взять $k(\lambda, \mu)x$, то после несложных преобразований мы получим для $\varphi_\omega(\mu)$ уравнение

$$\varphi_\omega(\mu) = -i\pi\overline{k(\omega, \mu)}\varphi_\omega(\omega) + P\int \frac{\overline{k(\sigma, \mu)}\varphi_\omega(\sigma)}{\omega - \sigma}d\sigma.$$

Если выполняется к тому же условие (K), то уравнение для $\varphi_\omega(\mu)$ можно переписать следующим образом:

$$\varphi_\omega(\mu) = T_\omega\varphi_\omega(\mu) - 2\pi i k(\mu, \omega)\varphi_\omega(\mu).$$

Отсюда нетрудно видеть, что $\varphi_\omega(\omega) = 0$. Действительно:

$$(l_\omega, \varphi_\omega) = (l_\omega, T_\omega\varphi_\omega) - 2\pi i(l_\omega, k(\mu, \omega)\varphi_\omega(\omega)) = (l_\omega, \varphi_\omega) - 2\pi i|\varphi_\omega(\omega)|^2.$$

Мы получим следующий результат:

Лемма 4. *Пусть выполняются условия* (R), (T) *и* (K). *Тогда собственные функционалы оператора* T^*_ω, *отвечающие собственному значению* 1, *строятся по формуле* (3) *с помощью функции* $\varphi_\omega(\mu) \in B_\gamma$, *определяемой равенством* (2), *причем* $\varphi_\omega(\omega) = 0$.

На основании лемм 2—4 доказывается следующая теорема:

Теорема 2. *При выполнении условий* (R), (T) *и* (K) *уравнение* (I) *всегда разрешимо, причем решение* $r(\lambda, \mu)$ *принадлежит классу* (R) *и является вполне непрерывным оператором в* A.

3. В качестве примера рассмотрим дифференциальный оператор $Mu = -\Delta u + q(x)u$ во всем трехмерном пространстве E_3. Этот оператор унитарно эквивалентен оператору типа L общей теории, причем промежуток $I = (0, \infty)$, а пространство A — пространство квадратично интегрируемых функций на единичной сфере. Оператор $k(\lambda, \mu)$ при фиксированных λ и μ является интегральным оператором на единичной сфере с ядром

$$k(\lambda, \mu; \alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \frac{(\lambda\mu)^{1/4}}{2} \int_{E_3} q(x)e^{i(\sqrt{\lambda}\alpha - \sqrt{\mu}\beta, x)}dx;$$

здесь α и β — единичные векторы.

При выполнении ряда условий типа гладкости и убывания функции $q(x)$ для $k(\lambda, \mu)$ выполняются условия (R) и (T) и, если $q(x)$ вещественно, то выполняется условие (K), так что имеют место утверждения теорем 1 и 2. В частности, для решения уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}z(\lambda, \alpha; t) = \lambda z(\lambda, \alpha; t) + \int_0^\infty d\mu \int d\beta\, k(\lambda, \mu; \alpha, \beta)\, z(\mu, \beta; t)$$

существуют пределы $\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{i\lambda t} z(\lambda, \alpha; t) = z_{\pm}(\lambda, \alpha)$ в среднем по λ и α, если $z(\lambda, \alpha; 0)$ ортогонально собственным функциям дискретного спектра оператора L, причем $z_{+}(\lambda, \alpha) = S(\lambda)\, z_{-}(\lambda, \alpha)$. При фиксированном λ $S(\lambda)$ — унитарный оператор на единичной сфере. Это так называемый оператор рассеяния оператора M.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
10 II 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. O. Friedrichs, Math. Ann., **115**, № 2, 249 (1938). [2] K. O. Friedrichs, Comm. Pure and Appl. Math., **1**, № 4, 361 (1948).