Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом, *Докл. АН СССР*, 1961, том 137, номер 5, 1011–1014

Доклады Академии наук СССР
1961. Том 137, № 5

МАТЕМАТИКА

Ф. А. БЕРЕЗИН и Л. Д. ФАДДЕЕВ

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 25 XI 1960)

1. В некоторых задачах квантовой механики возникает необходимость рассмотрения уравнения Шредингера вида

$$-\Delta\psi + \varepsilon\delta(x)\psi = E\psi, \tag{1}$$

где $\delta(x)$ — δ-функция Дирака.

Решение уравнения (1) вызывает известные трудности, связанные с тем, что выражение

$$H = -\Delta + \varepsilon\delta(x) \tag{2}$$

не является оператором в гильбертовом пространстве: в случае, если $\psi(0) = 0$, $H\psi = -\Delta\psi$; в случае, если $\psi(0) \neq 0$, $H\psi$ не принадлежит гильбертову пространству ни при каком ψ.

Целью настоящей заметки является придание математического смысла физическим работам, посвященным уравнению (1) (см., например, ([1])).

2. Воспроизведем прежде всего встречающееся в физических работах решение уравнения (1). С этой целью рассмотрим семейство ядер $u_N(x, y)$ такое, что

$$\lim_{N\to\infty} u_N(x, y) = \delta(x)\delta(y). \tag{3}$$

Кроме того, параметр ε также предположим зависящим от N. Заменим теперь уравнение (1) уравнением

$$-\Delta\psi + \varepsilon(N)\int u_N(x, y)\psi(y)\,d^3y = E\psi. \tag{N}$$

Для решения уравнения (N) совершим преобразование Фурье. В результате получим

$$\left.\begin{aligned} &p^2\tilde{\psi} + \frac{\varepsilon(N)}{8\pi^3}\int \tilde{u}_N(p, q)\tilde{\psi}(q)\,d^3q = E\tilde{\psi};\\ &\tilde{u}_N(p, q) = \int e^{i(qy - px)}u_N(x, y)\,d^3x\,d^3y. \end{aligned}\right. \tag{$\tilde{\mathrm{N}}$}$$

Функция $\tilde{u}_N(p, q)$ удовлетворяет, очевидно, требованию

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{u}_N(p, q) = 1. \tag{3$'$}$$

Так как семейство ядер $u_N(x, y)$ выбрано с единственным условием (3) или, что то же самое, (3′) и окончательный результат дальнейших вычислений не должен зависеть от выбора семейства u_N, выберем u_N так, чтобы

$$\tilde{u}_N(p, q) = \chi_N(p)\chi_N(q); \qquad \chi_N(p) = \begin{cases} 1 & \text{при } p^2 < N^2, \\ 0 & \text{при } p^2 > N^2. \end{cases} \tag{4}$$

Если воспользоваться выражением (4) для $\tilde{u}_N$, то уравнение ($\tilde{\mathrm{N}}$) легко решить. Собственные функции, принадлежащие к непрерывному спектру, оказываются равными:

$$\tilde{\psi}_N^+(p, s) = \delta(p-s) - \frac{\varepsilon'(N)}{1+\varepsilon'(N)\int \frac{\chi_N^2(p)\,d^3p}{p^2-s^2-i0}} \frac{\chi_N(p)\,\chi_N(s)}{p^2-s^2-i0}. \tag{5}$$

$$s^2 = E, \qquad \varepsilon' = \frac{\varepsilon(N)}{8\pi^3}.$$

Далее:

$$\int \frac{\chi_N^2(p)\,d^3p}{p^2-s^2-i0} = 4\pi \int_0^N \frac{p^2\,dp}{p^2-s^2-i0} = 4\pi\left(N + \frac{|s|}{2}\left(-\pi i + \ln\frac{N-|s|}{N+|s|}\right)\right). \tag{6}$$

Из (5) и (6) ясно, что для того, чтобы функция $\tilde{\psi}_N^+$ имела нетривиальный предел при $N \to \infty$, следует положить

$$\varepsilon'(N) = \frac{\alpha}{1-4\pi\alpha N},$$

где α — произвольная константа.

При этом предел $\tilde{\psi}_N^+$ при $N \to \infty$ оказывается равным

$$\tilde{\psi}^+ = \delta(p-s) - \frac{\alpha}{1-2\pi^2 i\alpha|s|} \frac{1}{p^2-s^2-i0}. \tag{7}$$

3. Рассмотрим преобразование Фурье выражения (2):

$$\tilde{H}\psi = p^2\psi + \varepsilon' \int \psi\, d^3p. \tag{8}$$

Если интеграл $\int \psi\, d^3p = 0$, то $\tilde{H}\psi = p^2\psi$.

Обозначим через D_L множество функций, для которых

$$\int p^4 |\psi|^2 d^3p < \infty, \qquad \int \psi\, d^3p = 0.$$

Через L обозначим определенный в D_L оператор умножения на p^2.

Оказывается, что *оператор L является замкнутым симметрическим оператором с индексами дефекта* (1,1).

Используя общую теорию расширений (см., например, ([2])), нетрудно построить все расширения оператора L. Легко проверить, что все эти расширения задаются формулой

$$H_\alpha\psi = p^2\psi + \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha}{1-4\pi\alpha N} \int \chi_N(p)\,\psi(p)\,d^3p, \tag{9}$$

где $\psi(p)$ — функция, обладающая свойствами:

$$\int \chi_N(p)\,\psi(p)\,d^3p = c(1-4\pi\alpha N) + o(1), \qquad \int |H_\alpha\psi|^2 d^3p < \infty\,|. \tag{9'}$$

Обратим внимание на то, что при $\alpha \neq 0$ равенство (9) можно заменить на

$$H_\alpha\psi = p^2\psi - \lim \frac{1}{4\pi N} \int \chi_N(p)\,\psi(p)\,d^3(p).$$

Таким образом, при $\alpha \neq 0$ зависимость H_α от α проявляется только как зависимость от α области определения H_α.

Проверим, что собственные функции непрерывного спектра H_α задаются формулой (7). Построим с этой целью резольвенту оператора H_α. Пусть $(H_\alpha - z) f = g$. Тогда ([2])

$$f(p) = \frac{g(p)}{p^2 - z} + \frac{M}{p^2 - z}. \tag{10}$$

Для того чтобы определить M, воспользуемся тем, что $f(p)$ удовлетворяет условию (9′). Из (10) имеем:

$$\int f(p)\chi_N(p)\,d^3p = \int \frac{\chi_N(p)g(p)}{p^2 - z}\,d^3p + {}$$
$$+ M\cdot 4\pi\left[N + \frac{\sqrt{z}}{2}\left(\pi i \operatorname{sign}\operatorname{Im}\sqrt{z} + \ln\frac{N - \sqrt{z}}{N + \sqrt{z}}\right)\right].$$

С другой стороны, из (9′) получаем, что

$$\int f(p)\chi_N(p)\,d^3p = c(1 - 4\pi\alpha N) + o(1).$$

Сравнивая два последние выражения, получаем, во-первых, что $M = -\alpha c$ и, во-вторых, что

$$\int \frac{\chi_N(p)g(p)}{p^2 - z}\,d^3p - 4\pi\alpha c\frac{\sqrt{z}}{2}\,\pi i \operatorname{sign}\operatorname{Im}\sqrt{z} - c \to 0.$$

Отсюда

$$c = \frac{\displaystyle\int \frac{g(p)\,d^3p}{p^2 - z}}{1 + 2\pi^2\alpha i\sqrt{z}\operatorname{sign}\operatorname{Im}\sqrt{z}}.$$

Таким образом,

$$f(p) = \frac{g(p)}{p^2 - z} - \frac{\alpha}{1 + 2\pi^2 i\alpha\sqrt{z}\operatorname{sign}\operatorname{Im}\sqrt{z}}\,\frac{1}{p^2 - z}\int \frac{g(q)\,d^3q}{q^2 - z}.$$

Отсюда находим ядро резольвенты

$$G(p, q, z) = \frac{\delta(p - q)}{p^2 - z} - \frac{\alpha}{1 + 2\pi^2 i\alpha\sqrt{z}\operatorname{sign}\operatorname{Im}\sqrt{z}}\,\frac{1}{(p^2 - z)(q^2 - z)}. \tag{11}$$

Используя формулу (11), легко получить собственные функции непрерывного спектра:

$$\psi_+(p, s) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{i}\,\varepsilon G(p, s, s^2 + i\varepsilon).$$

Выполняя предельный переход, получаем выражение (7) для собственной функции.

Используя выражение для $\psi_+(p, s)$ и аналогичное выражение для ψ_-, можно построить оператор рассеяния по формуле $S(s_1, s_2) = \int \psi_+(p, s_1)\times \times \overline{\psi_-(p, s_2)}\,d^3p$. В результате вычислений получается результат, указанный в ([1]).

4. Нетрудно получить выражение для H_α в x-представлении:

$$H_\alpha f = -\Delta f + \alpha \lim_{N\to\infty}\frac{1}{1 - 4\pi\alpha N}\,\frac{\sin N|x|}{|x|}\int \frac{\sin N|y|}{|y|} f(y)\,d^3y. \tag{12}$$

Область определения H_α состоит из функций, удовлетворяющих условию

$$\int \frac{\sin N|x|}{|x|} f(x)\, d^3x = c(1 - 4\pi\varepsilon N) + o(1), \quad \int |H_\alpha f|^2 d^3x < \infty. \qquad (12')$$

Таким образом, *математическое содержание обработки физиками уравнения* (1) *состоит в замене выражения* (2) *оператором* (12), (12′), *являющимся расширением оператора* $-\Delta$ *с области определения, состоящей из функций* $f(x)$, *для которых* $f(0) = 0$, *на область, состоящую из функций, удовлетворяющих условию* (12′).

Поступило
24 XI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 38, в. 3, 819 (1960). [2] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1950.