Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. А. Тахтаджян, А. Ю. Алексеев, И. Я. Арефьева, М. А. Семенов-Тян-Шанский, Е. К. Склянин, Ф. А. Смирнов, С. Л. Шаташвили, Научное наследие Л. Д. Фаддеева. Обзор работ, *УМН*, 2017, том 72, выпуск 6(438), 3–112

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9799

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 192.168.20.33
21 декабря 2017 г., 13:38:28

УДК 512.54+517.84+517.98

Научное наследие Л. Д. Фаддеева. Обзор работ

Л. А. Тахтаджян, А. Ю. Алексеев, И. Я. Арефьева, М. А. Семенов-Тян-Шанский, Е. К. Склянин, Ф. А. Смирнов, С. Л. Шаташвили

Обзор написан учениками Л. Д. Фаддеева под редакцией Л. А. Тахтаджяна. Разделы статьи написаны: разделы 1.1, 1.2, 2–4 и 6 – Л. А. Тахтаджяном, разделы 1.3 и 1.4 – Ф. А. Смирновым, разделы 5.1 и 5.2 – Е. К. Склянином, разделы 5.3–5.6 – Е. К. Склянином, Ф. А. Смирновым и Л. А. Тахтаджяном, раздел 7.1 – М. А. Семеновым-Тян-Шанским, разделы 7.2–7.6 – Л. А. Тахтаджяном и С. Л. Шаташвили, раздел 7.7 – А. Ю. Алексеевым и С. Л. Шаташвили, раздел 8 – И. Я. Арефьевой.

Библиография: 130 названий.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, разложение по собственным функциям, теория рассеяния, обратная задача рассеяния, уравнение Кортевега–де Фриза, полная интегрируемость, метод обратной задачи, уравнение Янга–Бакстера, квантовый метод обратной задачи, алгебраический анзац Бете, квантовые группы, квантовый дилогарифм, квантование калибровочных полей, духи Фаддеева–Попова, квантовые аномалии.

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9799

Содержание

Редколлегия благодарит Л. А. Тахтаджяна за большую работу по организации обзора и редактированию собранных материалов.

Исследование М. А. Семенова-Тян-Шанского выполнено при поддержке программы Президиума РАН № 02 “Нелинейная динамика: фундаментальные проблемы и приложения” (грант PRAS-18-02). Исследование Е. К. Склянина выполнено им в качестве Royal Society Leverhulme Trust Senior Research Fellow. Исследование С. Л. Шаташвили выполнено при поддержке Simons Foundation в рамках программы “Targeted Grants to Institutes” (The Hamilton Mathematics Institute).

© Л. А. Тахтаджян, А. Ю. Алексеев, И. Я. Арефьева и др. 2017

1. Теория рассеяния

Когда Л. Д. Фаддеев учился в университете, в 1951–1956 гг., квантовая механика еще считалась новой наукой. Действительно, с 1926 г., с момента публикации уравнения Шрёдингера, прошло всего 25 лет! Замечательные достижения квантовой механики и ее объединения со специальной теорией относительности – квантовой теории поля – привлекали к себе внимание как физиков-теоретиков, так и математиков. Фундаментальную роль в описании квантовых явлений играет теория рассеяния, которая изучает изменение состояния квантовой частицы при прохождении через потенциальный барьер. Математический формализм основан на операторе Гамильтона (гамильтониане) в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$,

$$H = H_0 + V, \tag{1.1}$$

где $H_0 = -\Delta$ – гамильтониан свободной частицы[1], Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$, а V – оператор умножения в $L^2(\mathbb{R}^3)$ на измеримую функцию $v(\boldsymbol{x})$, надлежащим образом убывающую при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ – например, достаточно, чтобы $v(\boldsymbol{x})$ была ограниченной и обладала свойством

$$v(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x}|^{-3-\varepsilon}) \quad \text{при } |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{1.2}$$

Именно, эволюция частицы описывается в терминах уравнения Шрёдингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{1.3}$$

на волновую функцию $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, и при условии (1.2) существуют решения

$$\psi_\pm(t) = e^{-itH_0}\psi_\pm$$

свободного уравнения Шрёдингера такие, что

$$\|\psi(t) - \psi_\pm(t)\| \to 0 \quad \text{при } t \to \pm\infty.$$

Переход от свободного движения при $t \to -\infty$ к свободному движению при $t \to +\infty$ задается оператором рассеяния

$$\psi_+ = S\psi_-.$$

Оператор S является унитарным в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и коммутирует с гамильтонианом H_0 свободной частицы. Точнее,

$$S = U_+^* U_-,$$

где *волновые операторы* $U_\pm$ определяются следующим образом:

$$U_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_0}. \tag{1.4}$$

Пределы существуют в смысле сильной операторной топологии, и волновые операторы сплетают свободный и возмущенный гамильтонианы:

$$HU_\pm = U_\pm H_0. \tag{1.5}$$

При так называемом стационарном подходе к теории рассеяния оператор S определяется как интегральный оператор с ядром, получаемым из решения стационарного уравнения Шрёдингера

$$-\Delta\psi(\boldsymbol{x}) + v(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}) = k^2\psi(\boldsymbol{x}). \tag{1.6}$$

Именно, для всех $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ уравнение (1.6) при $k = |\boldsymbol{k}|$ имеет решения $u^{(\pm)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$, удовлетворяющие так называемым *условиям излучения* при $r = |\boldsymbol{x}| \to \infty$:

$$u^{(\pm)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k}) = e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} + f^{(\pm)}(k,\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{n})\frac{e^{\pm ikr}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right).$$

[1] Для удобства мы положили постоянную Планка $\hbar$ равной 1 и массу частицы равной $1/2$.

Здесь $k = |\boldsymbol{k}|$, $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{n}$ принадлежат S^2 – двумерной сфере в $\mathbb{R}^3$, а $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $\mathscr{F}$ оператор преобразования Фурье в $L^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\widehat{\psi}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\psi(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x},$$

осуществляющий переход от координатного к импульсному представлению. В импульсном представлении оператор рассеяния имеет вид $\widehat{S} = \mathscr{F}^{-1}S\mathscr{F}$ и задается явной формулой

$$(\widehat{S}\psi)(\boldsymbol{k}) = \psi(\boldsymbol{k}) + \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{l}^2) f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})\psi(\boldsymbol{l})\, d^3\boldsymbol{l},$$

где

$$\delta(\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{l}^2) = \frac{\delta(k-l)}{2k}\,, \quad f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}) = f^{(+)}(k,\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}'), \quad \boldsymbol{k} = k\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{l} = k\boldsymbol{\omega}'.$$

Оператор $\widehat{S}$ в физической литературе называется S-*матрицей*, а определенная при $|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{l}|$ функция $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$ – *амплитудой рассеяния*. S-матрица является фундаментальным объектом в квантовой механике и в квантовой теории поля.

1.1. Первые работы. Теория рассеяния была первой любовью Л. Д. Фаддеева. Все началось со студенческого семинара по монографии К. Фридрихса “Математические аспекты квантовой теории поля” [96], организованного О. А. Ладыженской. Л. Д. Фаддеев был основным докладчиком и мечтал, что он тоже когда-нибудь сможет серьезно заниматься квантовой теорией поля, которая описывает квантовые системы с бесконечным числом степеней свободы. Для ее изучения необходимо сначала понять системы с конечным числом степеней свободы, т. е. квантовую механику. В своей первой работе [1][2], опубликованной в 1956 г., Л. Д. Фаддеев доказал, что преобразование Фурье $\widehat{v}(\boldsymbol{p})$ потенциала $v(\boldsymbol{x})$ является пределом амплитуды рассеяния $f(k,\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}')$ при $k \to \infty$ и фиксированном $k(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') = \boldsymbol{p}$. Таким образом, в этом случае потенциал $v(\boldsymbol{x})$ однозначно определяется своей S-матрицей.

В то время, в 1950-е годы, математическая теория операторов квантовой механики служила вдохновением и источником важных задач спектральной теории дифференциальных операторов. Достижения советской математической школы, яркими представителями которой были М. Ш. Бирман, И. М. Гельфанд, М. Г. Крейн, Б. М. Левитан, А. В. Марченко, А. Я. Повзнер и другие, занимали передовое место в мировой математической науке. Одной из актуальных и сложных задач было построение спектральной теории многомерного оператора Шрёдингера с убывающим потенциалом, описывающего рассеяние квантовой частицы на потенциальном центре. К этому случаю, после отделения центра инерции, сводится задача для двух взаимодействующих частиц. Построение спектральной теории оператора Шрёдингера для трех взаимодействующих частиц представляло собой в то время неразрешимую задачу.

[2] Ее референтом в Mathematical Reviews был Норман Левинсон.

В работе 1955 г. А. Я. Повзнер впервые доказал теорему о разложении по собственным функциям для трехмерного оператора Шрёдингера[3] в случае потенциалов с компактным носителем. В своей работе [2] 1957 г.[4] Л. Д. Фаддеев существенно развил метод Повзнера и доказал теорему разложения для потенциалов $v(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющих условию (1.2) вместе со своим градиентом $\nabla v(\boldsymbol{x})$. Он также доказал теорему равносходимости: разложение по собственным функциям сходится в точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, если в этой точке сходится разложение в интеграл Фурье.

В опубликованной в физическом журнале работе [4] Л. Д. Фаддеев предложил элегантное и строгое доказательство аналитических свойств амплитуды рассеяния на нулевой угол[5] $f(k,\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})$ как функции энергии $E = k^2$. Именно, для потенциалов $v(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющих (1.2), он доказал, что функция

$$f(E) = f(\sqrt{E}\,,\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})$$

при фиксированном $\boldsymbol{\omega} \in S^2$ аналитически продолжается на комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль положительной части вещественной оси, за исключением конечного числа точек E_l на отрицательной полуоси, где она может иметь простые полюсы с вещественными вычетами d_l. Это дает строгое математическое доказательство так называемого *дисперсионного соотношения*

$$f(E) = f(\infty) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f(E')}{E-E'}\,dE' + \sum_{l=1}^{n} \frac{d_l}{E-E_l}\,, \tag{1.7}$$

где $E \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$, а $f(\infty) = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} v(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x}$. Это изящное рассуждение было приведено в знаменитом учебнике Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица “Квантовая механика” [109] (гл. XVII, § 130) со сноской: “Идея изложенного доказательства принадлежит *Л. Д. Фаддееву* (1958)”.

1.2. Модель Фридрихса. В работе О. А. Ладыженской и Л. Д. Фаддеева [6] изучалась модель Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра. Развитый в [6] и усовершенствованный в [16] метод был им с успехом применен к различным задачам теории рассеяния – от теории рассеяния трех частиц [13] до спектральной теории автоморфных функций [19]!

Именно, пусть $\mathfrak{H} = L^2(I,\mathfrak{h})$ – пространство функций $f(x)$ на интервале $I \subseteq \mathbb{R}$, принимающих значения во вспомогательном гильбертовом пространстве $\mathfrak{h}$ и таких, что $\|f(x)\|_{\mathfrak{h}}$ квадратично интегрируема на I, а H_0 – оператор умножения на x.[6] Пусть V – интегральный оператор с компактным в $\mathfrak{h}$ ядром $v(x,y)$, удовлетворяющим условию вещественности

$$v(x,y) = v^*(y,x) \quad \text{при всех } x,y \in I,$$

и некоторым условиям ограниченности и гёльдеровости, которые для случая $I = \mathbb{R}$ имеют следующий вид.

[3]Изучение многомерного оператора Шрёдингера проводится совершенно аналогично.
[4]В Mathematical Reviews ее реферировал знаменитый аналитик Ларс Гординг!
[5]Также называемой *амплитудой рассеяния вперед*.
[6]Здесь мы используем обозначения из работы [16].

Условие A_{θ_0} (ограниченность):

$$\|v(x,y)\|_{\mathfrak{h}} \leqslant K(1+|x|+|y|)^{-\theta_0}, \qquad \theta_0 > \frac{1}{2}.$$

.

Условие B_{μ_0} (гладкость):

$$\|v(x+h,y+k)-v(x,y)\|_{\mathfrak{h}} \leqslant K(1+|x|+|y|)^{-\theta_0}(|h|^{\mu_0}+|k|^{\mu_0}), \qquad \mu_0 > \frac{1}{2}.$$

.

Развитый Л. Д. Фаддеевым метод исследования возмущенного оператора[7]

$$H = H_0 + V$$

состоит в следующем. Рассмотрим второе тождество Гильберта

$$R(\lambda) - R_0(\lambda) = R_0(\lambda)VR(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus I, \tag{1.8}$$

для резольвент

$$R(\lambda) = (H-\lambda I)^{-1} \quad \text{и} \quad R_0(\lambda) = (H_0-\lambda I)^{-1}$$

самосопряженных операторов H и H_0. Это уравнение непригодно для исследования резольвенты $R(\lambda)$, поскольку оператор $R_0(\lambda)$ не является компактным. Однако если положить

$$T(\lambda) = V - VR(\lambda)V, \tag{1.9}$$

то

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) - R_0(\lambda)T(\lambda)R_0(\lambda), \tag{1.10}$$

а оператор $T(\lambda)$ будет удовлетворять уравнению

$$T(\lambda) = V - VR_0(\lambda)T(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus I. \tag{1.11}$$

Как доказано в [15], это уравнение является фредгольмовым в банаховом пространстве $\mathfrak{B}(\theta,\mu)$ гёльдеровых функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{\theta,\mu} = \sup_{x\in I,\ |h|\leqslant 1} (1+|x|)^{\theta}\left[|f(x)| + \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^{\mu}}\right], \qquad \mu,\theta > 0,$$

для всех $\theta < \theta_0$ и $\mu < \mu_0$. Этот замечательный результат и позволяет установить, что оператор H имеет конечное число собственных значений конечной кратности, описать его собственные функции непрерывного спектра и доказать соответствующую теорему разложения. Доказательство компактности оператора $VR_0(\lambda)$ основывается на следующем изящном рассуждении[8]. Доказывается, что этот оператор ограничен и действует из $\mathfrak{B}(\theta,\mu)$ в $\mathfrak{B}(\theta',\mu')$, где $\theta' > \theta$, $\mu' > \mu$. Пространство $\mathfrak{B}(\theta',\mu')$ естественно вкладывается в $\mathfrak{B}(\theta,\mu)$, при этом слабо сходящиеся последовательности переходят в сильно сходящиеся.

[7]Примером оператора H является оператор Шрёдингера (1.6) в импульсном представлении. Переменной x в модели Фридрихса отвечает импульсная переменная $\boldsymbol{k}$, используемая в остальных разделах.

[8]Л. Д. Фаддеев говорил: “В этой работе мне помогла О. А., сформулировавшая удачный критерий компактности в пространстве гёльдеровых функций”.

1.3. Потенциал нулевого радиуса. В начале 1960-х Л. Д. Фаддеев стал серьезно интересоваться квантовой теорией поля (КТП), которая в то время находилась в несколько хаотическом состоянии в связи с открытым Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуком парадоксом “нуль-заряда”.

Красота и в то же время сложность КТП – в том, что она имеет дело с локальными взаимодействиями. Л. Д. Фаддеев всегда стремился найти простую модель для понимания сложных явлений. В качестве таковой он, совместно с Ф. А. Березиным, в работе [11] решил рассмотреть уравнение Шрёдингера (1.6) в $\mathbb{R}^3$ с потенциалом, задаваемым δ-функцией Дирака:

$$-\Delta\psi(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\delta(\boldsymbol{x})\psi = E\psi(\boldsymbol{x}). \tag{1.12}$$

Очевидным образом потенциал $\delta(\boldsymbol{x})$ не принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}^3)$, поэтому в [11] предлагается ввести регуляризацию, рассматривая уравнение

$$-\Delta\psi(\boldsymbol{x}) + \varepsilon(N)\int_{\mathbb{R}^3} u_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y})\,d^3\boldsymbol{y} = E\psi(\boldsymbol{x}), \tag{1.13}$$

где

$$u_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to \delta(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{y}) \quad \text{при } N\to\infty$$

и $\varepsilon(N)$ разрешается зависеть от N для самосогласованности, что будет ясно из нижеследующего. На языке КТП параметр N называется ультрафиолетовым обрезанием, а $\varepsilon(N)$ – затравочной константой связи. Уравнение (1.13) задает хорошо определенный самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Переходя к преобразованию Фурье и выбирая кусочно постоянную аппроксимацию для ядра $u_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, спектральную задачу (1.13) достаточно легко решить методами модели Фридрихса (см. п. 1.2). При этом получается следующий замечательный результат. Чтобы волновая функция имела нетривиальный предел при $N\to\infty$, следует положить

$$\varepsilon(N) = \frac{8\pi^3\alpha}{1-4\pi\alpha N}\,, \tag{1.14}$$

где α – произвольная постоянная, которую в КТП назвали бы физической или перенормированной константой связи. Чуть позже мы вернемся к интерпретации этой формулы с точки зрения физики, но сначала следует объяснить математический смысл происходящего.

Для математика естественно начать изучение уравнения (1.12) с рассмотрения замкнутого симметрического оператора $-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$, заданного на гладких функциях с компактным носителем в $\mathbb{R}^3$, обращающихся в нуль в точке $\boldsymbol{x}=0$. Этот оператор имеет индексы дефекта $(1,1)$ и, следовательно, допускает однопараметрическое семейство самосопряженных расширений. Параметр α и описывает это семейство операторов H_α, при этом ядро резольвенты $(H_\alpha - zI)^{-1}$ в импульсном представлении имеет вид

$$R(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},z) = \frac{\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{p}^2-z} - \frac{\alpha}{1+2\pi^2 i\alpha\sqrt{z}\,\operatorname{sign}\operatorname{Im}\sqrt{z}}\,\frac{1}{(\boldsymbol{p}^2-z)(\boldsymbol{q}^2-z)}\,. \tag{1.15}$$

В случае двумерного оператора Шрёдингера, к которому Л. Д. Фаддеев вернулся много лет спустя [76], перенормированная константа связи логарифмически зависит от параметра обрезания N, а в одномерном случае уравнение Шрёдингера (1.12) описывает бесконечный потенциальный барьер и соответствующий оператор Шрёдингера самосопряжен. В случае размерностей $n \geqslant 4$ оператор $-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, заданный на гладких функциях с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$, обращающихся в нуль в точке $\boldsymbol{x} = 0$, существенно самосопряжен, что отвечает $\varepsilon = 0$ в (1.12) и связано с теоремами вложения С. Л. Соболева.

Вернемся к тому, как понимают формулу (1.14) физики. Чтобы получить расширение с данной константой связи α, следует согласованным образом устремить N к бесконечности и $\varepsilon(N)$ к нулю, что содержит намек на возможность другого подхода к задаче, построенного на теории возмущений по параметру ε. Такой подход действительно возможен, при этом формула (1.14) получается суммированием геометрической прогрессии. Замечательно, что все это находится в согласии со снятием ультрафиолетового обрезания, $N \to \infty$.

На современном языке теория поля, допускающая аналогичную вышеописанной самосогласованную процедуру, называется асимптотически свободной. Примером асимптотически свободной теории поля является неабелева калибровочная теория, о которой речь пойдет ниже. Ее ультрафиолетовое поведение диаметрально противоположно парадоксальному поведению, открытому Ландау и Померанчуком для абелева случая (квантовой электродинамики).

1.4. Проблема трех тел. Наиболее известной из работ Л. Д. Фаддеева по теории рассеяния является решение квантово-механической проблемы рассеяния трех частиц, анонсированное в работах [8], [10], [12] и подробно изложенное в [13]. В гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^9)$ рассматривается оператор Шрёдингера для трех попарно взаимодействующих частиц:

$$H_3 = H_0 + V_{12} + V_{23} + V_{13},$$

где

$$H_0 = -\frac{1}{2m_1}\Delta_1 - \frac{1}{2m_2}\Delta_2 - \frac{1}{2m_3}\Delta_3$$

это свободный гамильтониан, а V_{ij} суть операторы умножения на потенциалы $v_{ij}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)$, которые предполагаются гладкими и достаточно быстро убывающими на бесконечности. Предполагается также, что соответствующие двухчастичные операторы

$$H_2 = -\frac{1}{2m_1}\Delta_1 - \frac{1}{2m_2}\Delta_2 + V_{12} \quad \text{и т. д.}$$

в $L^2(\mathbb{R}^6)$ имеют только по одной точке дискретного спектра и не имеют виртуальных уровней в начале непрерывного спектра[9].

Проблема трех тел сложна по многим причинам, из которых мы упомянем две, наиболее существенные. Во-первых, в девятимерном конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^9$ существуют направления, по которым суммарный потенциал не убывает (например, $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = \mathrm{const}$). Во-вторых, в процессе рассеяния две из трех частиц могут образовать связанное состояние (в двухчастичном случае такой процесс запрещен сохранением энергии). Математически это означает,

[9]Первое из этих ограничений несущественно и легко убирается.

что непрерывный спектр оператора H_3 существенно отличается от непрерывного спектра свободного трехчастичного гамильтониана. Очевидно, что эти две проблемы тесно связаны, именно в их преодолении и состоит основное содержание работы Л. Д. Фаддеева.

Как и в случае модели Фридрихса [4], [15], Л. Д. Фаддеев использует преобразование Фурье (импульсное представление), в котором свободные гамильтонианы частиц – это операторы умножения на функции $\boldsymbol{k}_i^2/(2m_i)$, а потенциалы V_{ij} задаются интегральными операторами с описанными ниже ядрами, содержащими δ-функции по части переменных. Двухчастичная задача, после выделения центра инерции, сводится к исследованию в $L^2(\mathbb{R}^3)$ оператора

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_0 + \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{h}_0 = \frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}$$

(здесь и далее мы используем обозначения из работы [13]).

В трехчастичном случае, отделяя центр инерции, Л. Д. Фаддеев рассматривает координаты, сопряженные к известным в задаче трех тел координатам Якоби, что дает три пары переменных

$$\boldsymbol{k}_{23}, \boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{k}_{31}, \boldsymbol{p}_2 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{k}_{12}, \boldsymbol{p}_3,$$

каждую из которых можно использовать независимо. Удобно ввести обозначения

$$\boldsymbol{k}_\alpha, \boldsymbol{p}_\alpha, \quad \text{где } \alpha = 23, 31, 12 \text{ и } \boldsymbol{p}_{23} = \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_{31} = \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_{12} = \boldsymbol{p}_3.$$

При этом трехчастичный гамильтониан H_3 сводится к следующему оператору в $L^2(\mathbb{R}^6)$:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{V}_{23} + \boldsymbol{V}_{31} + \boldsymbol{V}_{12},$$

где для любого $\alpha = 23, 31, 12$

$$\boldsymbol{H}_0 = \frac{\boldsymbol{k}_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{\boldsymbol{p}_\alpha^2}{2n_\alpha}\,,$$

а m_α и n_α просто выражаются через массы m_1, m_2, m_3 индивидуальных частиц. Операторы $\boldsymbol{V}_\alpha$ – это интегральные операторы с ядрами

$$V_\alpha(\boldsymbol{k}_\alpha, \boldsymbol{p}_\alpha; \boldsymbol{k}'_\alpha, \boldsymbol{p}'_\alpha) = v_\alpha(\boldsymbol{k}_\alpha - \boldsymbol{k}'_\alpha)\delta(\boldsymbol{p}_\alpha - \boldsymbol{p}'_\alpha), \qquad \alpha = 23, 31, 12.$$

Наличие δ-функции по переменной $\boldsymbol{p}_\alpha$ отражает уже упоминавшуюся сложность трехчастичной задачи.

Как и в модели Фридрихса, на функции $v_\alpha(\boldsymbol{k})$, задающие зависящие от разностей ядра V_α, налагаются условие вещественности

$$\overline{v_\alpha(-\boldsymbol{k})} = v_\alpha(\boldsymbol{k})$$

и условия убывания и гладкости A_{θ_0} и B_{μ_0}. При $\theta_0 > 1/2$ эти условия совпадают с условиями известной теоремы Като, следовательно, операторы $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{H}$ – самосопряженные и их резольвенты

$$\boldsymbol{r}(z) = (\boldsymbol{h} - zI)^{-1} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{R}(z) = (\boldsymbol{H} - zI)^{-1}$$

являются ограниченными операторами при $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Изучение резольвенты $\boldsymbol{R}(z)$ служит для Л. Д. Фаддеева основным средством исследования; ее поведение вблизи $\mathbb{R}$ определяет спектральные свойства оператора.

Двухчастичная резольвента $\boldsymbol{r}(z)$ исследуется по приведенной выше схеме модели Фридрихса с использованием оператора $\boldsymbol{t}(z)$, задаваемого формулой (1.9) и удовлетворяющего уравнению (1.11).[10] Перейдем теперь к трехчастичной задаче и рассмотрим тождество Гильберта:

$$\boldsymbol{R}(z) - \boldsymbol{R}_0(z) = \boldsymbol{R}_0(z)\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}(z), \tag{1.16}$$

где

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{23} + \boldsymbol{V}_{13} + \boldsymbol{V}_{12} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{R}_0(z) = (\boldsymbol{H}_0 - zI)^{-1}.$$

Как и в п. 1.2, для оператора

$$\boldsymbol{T}(z) = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}(z)\boldsymbol{V}$$

получаем уравнение

$$\boldsymbol{T}(z) = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}_0(z)\boldsymbol{T}(z), \tag{1.17}$$

при этом

$$\boldsymbol{R}(z) = \boldsymbol{R}_0(z) - \boldsymbol{R}_0(z)\boldsymbol{T}(z)\boldsymbol{R}_0(z). \tag{1.18}$$

Однако, в отличие от уравнения (1.11), это уравнение непригодно для исследования оператора $\boldsymbol{T}(z)$. Дело в том, что, например, оператор $\boldsymbol{V}_{23}\boldsymbol{R}_0(z)$ имеет ядро, содержащее δ-функцию, и эта особенность не пропадает при итерациях. В то же время в ядре произведения операторов $\boldsymbol{V}_{23}\boldsymbol{R}_0(z)\boldsymbol{V}_{13}\boldsymbol{R}_0(z)$ эта особенность исчезает. Это наблюдение привело Л. Д. Фаддеева к открытию новых интегральных уравнений, носящих его имя!

Именно, положим

$$\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{V}_\alpha - \boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{R}(z)\boldsymbol{V}_\beta,$$

так что

$$\boldsymbol{T}(z) = \sum_{\alpha,\beta} \boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z).$$

Из (1.16) получаем систему уравнений для операторов $\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z)$:

$$\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha,\beta}\boldsymbol{V}_\alpha - \boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{R}_0(z)\sum_{\gamma}\boldsymbol{M}_{\gamma\beta}(z). \tag{1.19}$$

Система уравнений (1.19) ничуть не лучше уравнения (1.11): при ее итерациях по-прежнему будут появляться ядра, содержащие δ-функцию. Чтобы исправить положение, Л. Д. Фаддеев предлагает прием, который следует осознать любому человеку, серьезно занимающемуся квантовой механикой! Именно, предлагается воспользоваться уже полученными знаниями о двухчастичной

[10] Усовершенствование в [16] по сравнению с [4] как раз и связано с работой, проведенной Л. Д. Фаддеевым в [13]!

задаче с тем, чтобы отсуммировать эти неприятные члены, которые имеют сугубо двухчастичное происхождение. Более точно, в системе (1.19) перенесем слагаемые, содержащие $\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}$, из правой части в левую:

$$(I+\boldsymbol{V}_\alpha \boldsymbol{R}_0(z))\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z)=\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{V}_\alpha-\boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{R}_0(z)\sum_{\gamma\neq\alpha}\boldsymbol{M}_{\gamma\beta}(z), \tag{1.20}$$

и обратим операторы $(I+\boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{R}_0(z))$. Для этого введем операторы $\boldsymbol{T}_\alpha(z)$ с ядром

$$t_\alpha\left(\boldsymbol{k}_\alpha,\boldsymbol{k}'_\alpha,z-\frac{\boldsymbol{p}_\alpha^2}{2n_\alpha}\right)\delta(\boldsymbol{p}_\alpha-\boldsymbol{p}'_\alpha),$$

где $t_\alpha(\boldsymbol{k}_\alpha,\boldsymbol{k}'_\alpha,z)$ – ядро оператора двухчастичной задачи с потенциалом $v_\alpha(\boldsymbol{k})$ и массой m_α. Операторы $\boldsymbol{T}_\alpha(z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\boldsymbol{T}_\alpha(z)=\boldsymbol{V}_\alpha-\boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{R}_0(z)\boldsymbol{T}_\alpha(z),$$

так что $\boldsymbol{T}_\alpha(z)=(I+\boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{R}_0(z))^{-1}\boldsymbol{V}_\alpha$ и мы получаем

$$\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z)=\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{T}_\alpha(z)-\boldsymbol{T}_\alpha(z)\boldsymbol{R}_0(z)\sum_{\gamma\neq\alpha}\boldsymbol{M}_{\gamma\beta}(z). \tag{1.21}$$

Это и есть знаменитые уравнения Фаддеева для квантовой системы трех частиц!

Уравнения (1.21) являются основным средством для изучения резольвенты $\boldsymbol{R}(z)$, которая строится по их решению с помощью простых формул (1.17) и (1.18). Ядра свободных членов уравнений (1.21) содержат δ-функции, поэтому следует рассмотреть операторы

$$\boldsymbol{W}_{\alpha\beta}(z)=\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z)-\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{T}_\alpha(z),$$

которые удовлетворяют тем же уравнениям, но с другими свободными членами:

$$\boldsymbol{W}_{\alpha\beta}(z)=\boldsymbol{W}^{(0)}_{\alpha\beta}(z)-\boldsymbol{T}_\alpha(z)\boldsymbol{R}_0(z)\sum_{\gamma\neq\alpha}\boldsymbol{W}_{\gamma\beta}(z), \tag{1.22}$$

где

$$\boldsymbol{W}^{(0)}_{\alpha\alpha}(z)=0,\quad \boldsymbol{W}^{(0)}_{\alpha\beta}(z)=-\boldsymbol{T}_\alpha(z)\boldsymbol{R}_0(z)\boldsymbol{T}_\beta(z). \tag{1.23}$$

Дальнейший анализ этих уравнений невероятно сложен. Вызывает восхищение продемонстрированная Л. Д. Фаддеевым техническая мощь при проведении сложнейших выкладок и виртуозных оценок различных сингулярных интегралов.

Именно, определим семейство операторов $\widetilde{\boldsymbol{A}}(z)$, действующих на тройках функций $\chi(z)=\{\chi_{23}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p};z),\chi_{31}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p};z),\chi_{12}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p};z)\}$ по формуле

$$(\widetilde{\boldsymbol{A}}(z)\chi(z))_\alpha=-\boldsymbol{T}_\alpha(z)\boldsymbol{R}_0(z)\sum_{\gamma\neq\alpha}\chi_\gamma(z).$$

Выделим в ядрах $t_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',z)$ вклад от дискретного спектра:

$$t_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',z)=\frac{\varphi_\alpha(\boldsymbol{k})\overline{\varphi_\alpha(\boldsymbol{k}')}}{z+\varkappa_\alpha^2}+\widehat{t}_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',z),$$

где $\varphi_\alpha(\boldsymbol{k}_\alpha)$ – нормированные собственные функции соответствующих двухчастичных операторов, отвечающие собственным значениям $-\varkappa_\alpha^2$. Ядра $\widehat{t}_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',z)$ уже аналитичны на всей плоскости z, за исключением разреза вдоль положительной полуоси, причем значения на берегах разреза непрерывны. Это представление подсказывает, что функции $\chi_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p};z)$ разумно представлять в виде

$$\chi_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p};z)=\rho_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p};z)+\frac{\varphi_\alpha(\boldsymbol{k}_\alpha)\sigma_\alpha(\boldsymbol{p}_\alpha)}{z+\varkappa_\alpha^2-\boldsymbol{p}_\alpha^2/(2n_\alpha)}\,, \tag{1.24}$$

получая оператор $\boldsymbol{A}(z)$, действующий на вектор-функциях

$$\omega(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p};z)=\big\{\rho_{23}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p};z),\rho_{31}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p};z),\rho_{12}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p};z),\sigma_{23}(\boldsymbol{p}_{23}),\sigma_{31}(\boldsymbol{p}_{31}),\sigma_{12}(\boldsymbol{p}_{12})\big\}.$$

Но оператор $\boldsymbol{A}(z)$ непосредственно не пригоден для анализа уравнений (1.22), (1.23), так как он переводит гладкие функции $\rho_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p};z)$ в функции $\rho'_\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p};z)$, определяемые по $\omega'(z)=\boldsymbol{A}(z)\omega(z)$, которые могут иметь сингулярности, порождаемые особенностью свободной резольвенты $\boldsymbol{R}_0(z)$. Замечательное открытие Л. Д. Фаддеева состоит в том, что эти сингулярности смягчаются по мере итераций и $\boldsymbol{A}(z)^n$ при $n>4$ вовсе их не порождает. Более того, вводя на гёльдеровых вектор-функциях ω структуру банахова пространства, подобную $\mathfrak{B}(\theta,\mu)$, он доказывает, что операторы $\boldsymbol{A}(z)^n$ при $n>4$ компактны. Используя известную теорему С. М. Никольского об операторе в банаховом пространстве, степень которого является компактным оператором, Л. Д. Фаддеев доказывает, что неоднородное уравнение с оператором $\boldsymbol{A}$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда у однородного уравнения

$$\boldsymbol{A}(z)\omega=0 \tag{1.25}$$

есть только нулевое решение, что и имеет место для невещественных z. Особую трудность представляет доказательство отсутствия сингулярного спектра у оператора $\boldsymbol{H}$ – утверждения, что множество точек z, при которых однородное уравнение (1.25) имеет нетривиальное решение, сосредоточено на конечном интервале вещественной оси, счетно, замкнуто и может иметь в качестве предельных точек только $-\varkappa_\alpha^2$, $\alpha=23,31,12$. Все такие z (за исключением, быть может, предельных точек) являются точками дискретного спектра[11] оператора $\boldsymbol{H}$.

В отличие от двухчастичного случая, для трехчастичной задачи абсолютно непрерывный спектр оператора $\boldsymbol{H}$ не совпадает со спектром свободного гамильтониана $\boldsymbol{H}_0$. Теорема разложения по собственным функциям оператора $\boldsymbol{H}$, доказанная в [16], гласит, что проекция оператора $\boldsymbol{H}$ на подпространство абсолютно непрерывного спектра в $L^2(\mathbb{R}^6)$ унитарно эквивалентна оператору

$$\widehat{\boldsymbol{H}}=\widetilde{\boldsymbol{H}}_0\oplus\widetilde{\boldsymbol{H}}_{23}\oplus\widetilde{\boldsymbol{H}}_{31}\oplus\widetilde{\boldsymbol{H}}_{12}$$

в гильбертовом пространстве

$$\begin{gathered}\widehat{\mathfrak{H}}=\mathfrak{H}_0\oplus\mathfrak{H}_{23}\oplus\mathfrak{H}_{31}\oplus\mathfrak{H}_{12},\\ \mathfrak{H}_0=L^2(\mathbb{R}^6),\qquad \mathfrak{H}_\alpha=L^2(\mathbb{R}^3),\quad \alpha=23,31,12,\end{gathered} \tag{1.26}$$

[11] При доказательстве леммы 7.11 в [13] была допущена неточность, исправленная в работе Д. Р. Яфаева [127].

задаваемому явными формулами

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_0 = \frac{\boldsymbol{k}_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{\boldsymbol{p}_\alpha^2}{2n_\alpha}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{H}}_\alpha = \frac{\boldsymbol{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} - \varkappa_\alpha^2,$$

причем первое выражение не зависит от α.

Как и в двухчастичном случае, но гораздо сложнее и изощреннее, в [13] доказывается существование волновых операторов $\boldsymbol{U}^\pm$: $\widehat{\mathfrak{H}} \to L^2(\mathbb{R}^6)$, удовлетворяющих условиям

$$\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U} = I, \quad \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^* = I - \boldsymbol{P}_d, \quad \boldsymbol{H}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\widehat{\boldsymbol{H}}, \tag{1.27}$$

где $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^\pm$ и $\boldsymbol{P}_d$ – проектор на подпространство $L^2(\mathbb{R}^6)$, отвечающее дискретному спектру оператора $\boldsymbol{H}$. В стационарном подходе волновые операторы

$$\boldsymbol{U}^\pm = \boldsymbol{U}_0^\pm \oplus \boldsymbol{U}_{23}^\pm \oplus \boldsymbol{U}_{31}^\pm \oplus \boldsymbol{U}_{12}^\pm \tag{1.28}$$

определяются при помощи решения задачи рассеяния для оператора $\boldsymbol{H}$, а в нестационарном подходе они определяются формулами, аналогичными (1.4):

$$\boldsymbol{U}_0^\pm = \lim_{t\to\pm\infty} e^{it\boldsymbol{H}} \boldsymbol{J}_0 e^{-it\widetilde{\boldsymbol{H}}_0}, \qquad \boldsymbol{U}_\alpha^\pm = \lim_{t\to\pm\infty} e^{it\boldsymbol{H}} \boldsymbol{J}_\alpha e^{-it\widetilde{\boldsymbol{H}}_\alpha}.$$

Здесь $\boldsymbol{J}_0$ – оператор отождествления $\mathfrak{H}_0$ с $L^2(\mathbb{R}^6)$, а $\boldsymbol{J}_\alpha$ – операторы изометрического вложения $\mathfrak{H}_\alpha$ в $L^2(\mathbb{R}^6)$:

$$(\boldsymbol{J}_\alpha f)(\boldsymbol{k}_\alpha, \boldsymbol{p}_\alpha) = \varphi_\alpha(\boldsymbol{k}_\alpha) f(\boldsymbol{p}_\alpha).$$

Матрица рассеяния

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^{(+)*}\boldsymbol{U}^{(-)}$$

– это унитарный оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$, который в соответствии с разложениями (1.26) и (1.28) имеет блочную структуру. Блоки S-матрицы описывают различные физические процессы: рассеяние трех частиц в три частицы, или же в одну частицу и связанное состояние двух других, обратный процесс – рассеяние одной частицы и связанного состояния двух других в аналогичное состояние с перестройкой или без нее. Все это отражает большое разнообразие трехчастичного рассеяния в отличие от рассеяния на потенциальном центре; первое является примером так называемого *многоканального рассеяния*, в то время как второе есть *одноканальное рассеяние*.

Уравнения Фаддеева служат мощным математическим средством исследования квантовой задачи трех тел, и в семидесятых годах их начали активно использовать для численных расчетов конкретных процессов ядерной физики. Эти уравнения дают несравненно лучшие результаты, чем наивные попытки решать численно исходное уравнение Шрёдингера. В наше время можно получить прекрасную точность в вычислении процессов рассеяния, численно решая уравнения Фаддеева на персональном компьютере, итерации сходятся очень быстро. В заключение скажем несколько слов об общем впечатлении от этой работы Людвига Дмитриевича Фаддеева: его технический арсенал и виртуозность не имеют равных, изобретательность безгранична, а трудолюбие должно служить примером новым поколениям российских ученых.

Идеи и методы Л. Д. Фаддеева успешно развивались в работах его учеников. Задача многих тел исследовалась О. А. Якубовским. Доказательство компактности интегральных операторов в этом случае невероятно усложняется даже по сравнению с работой [13]. Второе направление, которым очень интересовался сам Л. Д. Фаддеев, состоит в обобщении на медленно убывающие потенциалы, наиболее интересный случай представляет собой кулоновское взаимодействие. Этой задачей занимался С. П. Меркурьев. Основная проблема состоит в том, что траектории частиц в медленно убывающем потенциальном поле не являются асимптотически линейными. Поэтому нельзя использовать преобразование Фурье и приходится работать в координатном представлении, что весьма сложно. Этим и другим результатам посвящена итоговая монография Л. Д. Фаддеева и С. П. Меркурьева [50].

2. Обратная задача квантовой теории рассеяния

Другой важной проблемой спектральной теории дифференциальных операторов является так называемая обратная задача. Она имеет два аспекта:

(a) спектральный, состоящий в восстановлении дифференциального оператора по спектральной функции;

(b) квантово-механический, состоящий в нахождении аналитических свойств амплитуды рассеяния $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$ оператора Шрёдингера (1.6) и в восстановлении потенциала $v(\boldsymbol{x})$ по заданной амплитуде рассеяния. Л. Д. Фаддеев внес фундаментальный вклад в решение обратной задачи теории рассеяния и ее приложений к теории интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений.

2.1. Радиальное уравнение Шрёдингера. Особую роль играет обзор Л. Д. Фаддеева [7] 1959 г., посвященный обратной задаче для радиального уравнения Шрёдингера. Последнее возникает в результате разделения переменных в уравнении (1.6) для сферически симметрического потенциала

$$v(\boldsymbol{x}) = v(r), \qquad r = |\boldsymbol{x}|.$$

В результате получается уравнение[12]

$$-\frac{d^2\psi}{dr^2} + v(r)\psi(r) = k^2\psi(r), \qquad r > 0, \tag{2.1}$$

с граничным условием $\psi(0) = 0$. Аналогом (1.2) является условие

$$\int_0^\infty r|v(r)|\,dr < \infty, \tag{2.2}$$

и в этом случае решение $\varphi(r,k)$ уравнения (2.1) с начальными данными

$$\varphi(0,k) = 0, \quad \varphi'(0,k) = 1$$

при вещественных k имеет следующую асимптотику при $r \to \infty$:

$$\varphi(r,k) = \frac{1}{2ik}\big(\overline{M(k)}e^{ikr} - M(k)e^{-ikr}\big). \tag{2.3}$$

[12] для случая $l = 0$, где $l(l+1)$ – собственные значения оператора Лапласа на двумерной сфере S^2 в $\mathbb{R}^3$.

Функция $M(k)$ удовлетворяет условию $M(-k) = \overline{M(k)}$ и аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость переменной k. Она имеет асимптотику

$$M(k) = 1 + o(1) \quad \text{при } k \to \infty,\ \operatorname{Im} k > 0 \tag{2.4}$$

и конечное число N простых нулей $k = i\varkappa_l$, отвечающих дискретным собственным значениям $-k_l^2$ радиального оператора Шрёдингера. Для функций

$$A(k) = |M(k)| \quad \text{и} \quad \eta(k) = \arg M(k)$$

приняты названия *предельная амплитуда* и *предельная фаза*. Соответствующая S-матрица есть оператор умножения на функцию

$$S(k) = \frac{M(-k)}{M(k)} = e^{-2i\eta(k)}$$

в $L^2(0,\infty)$, при этом $\eta(k)\big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi N$.

До ставшего классическим обзора Л. Д. Фаддеева [7] существовало несколько подходов к решению обратной задачи, которые были предложены А. В. Марченко, М. Г. Крейном и И. М. Гельфандом с Б. М. Левитаном. Так, в подходе А. В. Марченко выводятся необходимые и достаточные условия на S-матрицу: функция $1 - S(k)$ является преобразованием Фурье абсолютно непрерывной функции $F(x) \in L^1(0,\infty)$ такой, что

$$\int_0^\infty x|F'(x)|\,dx < \infty.$$

Соответствующий потенциал $v(r)$ строится по решению некоторого интегрального уравнения (уравнения Марченко) и удовлетворяет условию (2.2). В подходе М. Г. Крейна использовалось интегральное уравнение для канонической системы Крейна, а в подходе И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана решалась задача о восстановлении дифференциального оператора по его спектральной функции при помощи другого интегрального уравнения (уравнения Гельфанда–Левитана).

Искусно используя восходящий к К. Фридрихсу метод операторов преобразования, операторов U, удовлетворяющих (1.5) и отличных от волновых операторов $U_\pm$, Л. Д. Фаддеев в [7] доказал эквивалентность этих подходов и установил связь между соответствующими интегральными уравнениями. В частности, спектральная функция $\rho(k)$ в подходе Гельфанда–Левитана есть не что иное, как $1/|M(k)|^2$ в подходах Марченко и Крейна[13]. Обзор [7], а впоследствии его продолжение [28], о котором мы поговорим позже, стали настольной книгой для нескольких поколений специалистов по теории рассеяния и математической физике, как в СССР, так и за рубежом.

Приведем одну цитату из [7]: “Интересно отметить, что в СССР обратной задачей занимаются в основном математики, в то время как за границей – почти исключительно физики”. Ученикам Людвига Дмитриевича передалось

[13] Подобная связь между спектральной функцией и S-матрицей играет важную роль в теории представлений полупростых групп Ли.

его уважение к пионерским работам советских математиков, З. С. Аграновича, М. Ш. Бирмана, И. М. Гельфанда, М. Г. Крейна, Б. М. Левитана, В. А. Марченко, А. Я. Повзнера и др. С особым уважением он хранил оттиски работ М. Г. Крейна в "Докладах АН СССР", восхищаясь глубиной его результатов и лаконичностью их формулировок. Также интересна история работы [7]. По приглашению академика Н. Н. Боголюбова в 1958 г. Л. Д. Фаддеев выступил с докладом об обратной задаче для радиального уравнения Шрёдингера на конференции, организованной Лабораторией теоретической физики в Дубне. В аудитории присутствовали И. М. Гельфанд, М. Г. Крейн, Б. М. Левитан и В. А. Марченко. Основу доклада составила статья, подготовленная Л. Д. Фаддеевым для аспирантского экзамена, а результатом доклада было приглашение 25-летнему автору написать обзор для "Успехов математических наук"!

2.2. Тождества следов. Другая важная задача спектральной теории дифференциальных операторов состоит в нахождении так называемых *тождеств следов*, выражающих надлежащим образом регуляризованный спектральный след дифференциального оператора через его коэффициенты. Эти тождества можно рассматривать как далеко идущее обобщение равенства матричного следа и суммы собственных значений в конечномерном случае[14]. Первый важный результат такого рода был получен в 1953 г. И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном для простейшего случая регулярного оператора Штурма–Лиувилля

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$$

на отрезке $[0,\pi]$ с нулевыми граничными условиями. Оператор L в $L^2(0,\pi)$ имеет однократный дискретный спектр с собственными значениями λ_n, имеющими точку сгущения на бесконечности, и при условии $v(x) \in C^2(0,\pi)$ справедливы соотношения

$$\lambda_n = n^2 + c + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{при } n \to \infty,$$

где

$$c = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi v(x)\,dx.$$

Равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n - c - n^2) = \frac{v(0)+v(\pi)}{4}$$

и есть формула следов Гельфанда–Левитана, дающая выражение для следа разности $L - L_0$ двух регулярных операторов Штурма–Лиувилля, где $L_0 = -d^2/dx^2$. Другим, гораздо более сложным примером тождества следов является знаменитая формула следа Сельберга для оператора Лапласа–Бельтрами на фундаментальной области фуксовой группы первого рода на плоскости Лобачевского.

[14]В случае, когда интегральный оператор в $L^2(0,1)$ с непрерывным ядром является ядерным, равенство матричного и спектрального следов – это известная теорема Б. Л. Лидского.

Основополагающий вклад в тождества следов для уравнения Шрёдингера внесли работы Л. Д. Фаддеева [3], [9]. Так, в [3] им был рассмотрен сингулярный оператор Штурма–Лиувилля – радиальный оператор Шрёдингера

$$H = -\frac{d^2}{dr^2} + v(r)$$

с нулевым граничным условием и потенциалом $v(r)$, удовлетворяющим условию (2.2). Оператор H имеет однократный абсолютно непрерывный спектр, заполняющий $[0, \infty)$, и конечное число отрицательных собственных значений. Определим след разности $H_1 - H_2$ двух таких операторов:

$$\operatorname{Tr}(H_1 - H_2) = \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{R} \lambda \, d \operatorname{Tr}(E^1_\lambda - E^2_\lambda),$$

где E_λ – разложение единицы оператора H из спектральной теоремы фон Неймана (функция распределения соответствующей проекторнозначной меры на $\mathbb{R}$). Используя теорию рассеяния, Л. Д. Фаддеев доказал, что при условии

$$\int_0^\infty (v_1(x) - v_2(x)) \, dx = 0$$

предел интеграла при $R \to \infty$ существует и равен $-(v_1(0) - v_2(0))/4$, что и есть тождество следов в сингулярном случае.

В работе [9], совместной с В. С. Буслаевым, первым учеником[15] Людвига Дмитриевича, тема следов развивается дальше и рассматривается разность резольвент $R_\lambda - R^0_\lambda$ оператора H и свободного оператора H_0. Здесь

$$R_\lambda = (H - \lambda I)^{-1},$$

где λ лежит в дополнении к спектру H в $\mathbb{C}$, через I обозначен единичный оператор в $L^2(\mathbb{R})$, и аналогично для H_0. Замечательный результат состоит в том, что при таких λ оператор $R_\lambda - R^0_\lambda$ ядерный и

$$\operatorname{Tr}(R_\lambda - R^0_\lambda) = -\frac{d}{d\lambda} \ln M(\sqrt{\lambda}\,), \qquad 0 < \arg \sqrt{\lambda} < \pi, \tag{2.5}$$

где функция $M(k)$ была введена в (2.3). Поскольку оператор VR^0_λ ядерный, то из формулы (2.5) следует, что

$$M(\sqrt{\lambda}\,) = \det(I + VR^0_\lambda),$$

где det – это детерминант Фредгольма, что дает выражение для регуляризованного детерминанта оператора $H - \lambda I$. Более того, в случае гладких потенциалов $v(r)$, быстро убывающих при $r \to \infty$ вместе со всеми производными, обе части формулы (2.5) допускают асимптотическое разложение по обратным степеням $k = \sqrt{\lambda}$ при $k \to \infty$ в верхней полуплоскости, которое по гладкости переносится на вещественную ось. Разложение для $\ln M(k)$ получается из дисперсионного соотношения типа (1.7), которое вытекает из приведенных выше аналитических свойств $M(k)$. Разложение левой части формулы (2.5) получается

[15] Научными руководителями В. С. Буслаева были О. А. Ладыженская и Л. Д. Фаддеев.

сведением уравнения Шрёдингера к уравнению Риккати. Соответствующие коэффициенты даются интегралами по положительной полуоси от рекуррентно задаваемых полиномов от функции $v(r)$ и ее производных, а также значений этих производных при $r = 0$. Эти тождества будут играть фундаментальную роль в доказательстве полной интегрируемости уравнения Кортевега–де Фриза как бесконечномерной гамильтоновой системы!

2.3. Одномерное уравнение Шрёдингера. Одномерное уравнение Шрёдингера

$$-\psi''(x) + v(x)\psi(x) = k^2\psi(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{2.6}$$

занимает промежуточное место между трехмерным (1.6) и радиальным (2.1) уравнениями Шрёдингера. Аналогом условия (2.2) является условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|v(x)|\, dx < \infty, \tag{2.7}$$

при котором оператор H имеет двукратный абсолютно непрерывный спектр, заполняющий $[0, \infty)$, и конечное число отрицательных собственных значений. Полное исследование прямой и обратной задачи для уравнения с условием (2.7) было проведено Л. Д. Фаддеевым в работе [5] и составило его кандидатскую диссертацию (1959 г.) "Свойства S-матрицы для рассеяния на локальном потенциале", опубликованную в [16]. В этом случае S-матрица – это (2×2)-матрица $S(k)$, которая при $k \neq 0$ определяется через решения задачи рассеяния.

Именно, пусть $f_1(x, k)$ и $f_2(x, k)$ – решения Йоста, однозначно определяемые при вещественных k асимптотиками

$$\begin{aligned} f_1(x,k) &= e^{ikx} + o(1) \qquad \text{при } x \to \infty, \\ f_2(x,k) &= e^{-ikx} + o(1) \quad \text{при } x \to -\infty \end{aligned}$$

и при фиксированном x аналитически продолжающиеся в верхнюю полуплоскость переменной k. Коэффициенты перехода $a(k)$ и $b(k)$ при $k \neq 0$ определяются из соотношения

$$f_2(x,k) = a(k) f_1(x, -k) + b(k) f_1(x, k)$$

и удовлетворяют условиям симметрии $\overline{a(k)} = a(-k)$, $\overline{b(k)} = b(-k)$ и нормировки

$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2.$$

Решения $u_{1,2}(x, k) = f_{1,2}(x, k)/a(k)$ удовлетворяют одномерному аналогу условий излучения, и S-матрица имеет вид

$$S(k) = \begin{pmatrix} s_{11}(k) & s_{12}(k) \\ s_{21}(k) & s_{22}(k) \end{pmatrix},$$

где

$$s_{11}(k) = s_{22}(k) = \frac{1}{a(k)}, \quad s_{12}(k) = \frac{b(k)}{a(k)}, \quad s_{21} = \frac{\overline{b(k)}}{a(k)}.$$

S-матрица унитарна:

$$S^*(k)S(k) = I,$$

удовлетворяет условию вещественности $\overline{S(k)} = S(-k)$ и

$$S(k) = I + O(|k|^{-1}) \quad \text{при } |k| \to \infty.$$

В квантовой механике функция $t(k) = s_{11}(k)$ называется коэффициентом прохождения, а функция $r(k) = s_{12}(k)$ – коэффициентом отражения.

При помощи интегральных уравнений Марченко в [6], [16] доказано, что из условия (2.7) следует, что преобразования Фурье $F_1(x)$ и $F_2(x)$ функций $s_{12}(k)$ и $s_{21}(k)$ являются абсолютно непрерывными и при произвольном a

$$\int_a^\infty (1+|x|)|F_1'(x)|\,dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^a (1+|x|)|F_2'(x)|\,dx < \infty.$$

Матричные элементы S-матрицы удовлетворяют условиям[16]

$$\lim_{k\to 0} \frac{k(s_{12}(k)+1)}{s_{11}(k)} = \lim_{k\to 0} \frac{k(s_{21}(k)+1)}{s_{11}(k)} = 0$$

и

$$|s_{12}(k)| = |s_{21}(k)| \leqslant 1 - \frac{Ck^2}{1+k^2} \quad \text{при } k \to 0.$$

Подобно функции $M(k)$ в радиальном случае, функция $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость переменной k с асимптотикой (2.4) и может иметь там только конечное число N простых нулей $i\varkappa_l$, а аналогом формулы (2.5) является соотношение

$$\operatorname{Tr}(R_\lambda - R_\lambda^0) = -\frac{d}{d\lambda} \ln a(\sqrt{\lambda}\,), \qquad 0 < \arg\sqrt{\lambda} < \pi. \tag{2.8}$$

При этом

$$f_2(x, i\varkappa_l) = c_l f_1(x, i\varkappa_l), \qquad c_l \neq 0,$$

так что $-\varkappa_l^2$ являются отрицательными собственными значениями оператора H; нормировочные константы m_l задаются формулами

$$m_l^{-1} = \int_{-\infty}^\infty |f_1(x, i\varkappa_l)|^2\,dx = \frac{i\dot{a}(i\varkappa_l)}{c_l}\,.$$

Из условия аналитичности функции $1/s_{11}(k)$, соотношения

$$|s_{11}(k)|^2 = 1 - |s_{12}(k)|^2$$

и приведенных выше формул для матричных элементов матрицы $S(k)$ следует, что вся S-матрица определяется заданием одного из $s_{12}(k)$ и $s_{21}(k)$, а также

[16] Эти условия, уточняющие соотношения (2.8) из работы [16], приведены в монографии В. А. Марченко [116] (см. гл. 3, § 5). Также отметим, что в работе [93] американских математиков П. Дейфта и Е. Трубовица для решения обратной задачи вместо условия (2.7) было предложено более сильное условие $\int_{-\infty}^\infty (1+x^2)|v(x)|\,dx < \infty$. Анализ В. А. Марченко показывает, что необходимости в этом условии нет.

полюсами $i\varkappa_l$ элемента $s_{11}(k)$. Именно, это позволяет восстановить функцию $\ln s_{11}(k)$ через $\ln|s_{11}(k)|^2 = \ln(1-|s_{12}(k)|^2)$ при помощи формулы Пуассона–Шварца, аналога дисперсионного соотношения (1.7):

$$s_{11}(k) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1-|s_{12}(p)|^2)}{k-p}\,dp\right\}\prod_{l=1}^{N}\frac{k+i\varkappa_l}{k-i\varkappa_l}\,, \qquad \operatorname{Im} k > 0, \quad (2.9)$$

и

$$s_{11}(k) = \lim_{\varepsilon\to 0} s_{11}(k+i\varepsilon) \quad \text{при } k\in\mathbb{R}.$$

В силу условия $s_{12}(-k) = \overline{s_{12}(k)}$ вся матрица $S(k)$ определяется одной комплекснозначной функцией $s_{12}(k)$ на положительной полуоси $k>0$ и конечным набором $i\varkappa_l$, что отвечает одной вещественнозначной функции $v(x)$ на всей вещественной оси $-\infty < x < \infty$, а это и дает правильный подсчет функциональных параметров.

Основной результат работ [6], [16] – теорема Фаддеева – утверждает, что все приведенные выше условия на матрицу $S(k)$ и задание констант $m_l > 0$ являются также и достаточными для того, чтобы $S(k)$ была S-матрицей одномерного уравнения Шрёдингера с потенциалом $v(x)$, удовлетворяющим условию (2.7), с собственными значениями $-\varkappa_l^2$ и нормировочными константами m_l. Другими словами, потенциал $v(x)$ однозначно восстанавливается по набору $s = (r(k),\varkappa_l,m_l)$, называемому *данными рассеяния*. Именно, из анализа уравнения Марченко на правом конце доказывается существование потенциала $v_1(x)$, удовлетворяющего той же оценке, что и функция $F_1'(x)$, а уравнение Марченко на левом конце приводит к потенциалу $v_2(x)$, удовлетворяющему той же оценке, что и $F_2'(x)$. Наконец, с использованием соотношений

$$s_{21}(k) = \frac{s_{12}(-k)s_{11}(k)}{s_{11}(-k)}\,,$$

унитарности S-матрицы и уравнений Марченко доказывается, что

$$v_1(x) = v_2(x) = v(x).$$

2.4. Трехмерное уравнение Шрёдингера. Обратная задача рассеяния для трехмерного оператора Шрёдингера существенно сложнее, чем аналогичная задача для радиального и одномерного уравнения Шрёдингера. Принципиальное отличие от одномерного случая состоит в том, что, на первый взгляд, S-матрица, однозначно определяемая потенциалом $v(\boldsymbol{x})$, зависит от большего числа функциональных параметров, чем потенциал. Именно, амплитуда рассеяния $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$ есть комплексная функция от энергии $E=\boldsymbol{k}^2=\boldsymbol{l}^2$, $0\leqslant E<\infty$, и двух векторов на единичной сфере S^2, в то время как $v(\boldsymbol{x})$ есть вещественная функция в $\mathbb{R}^3$, т. е. зависит от радиуса r, $0\leqslant r<\infty$, и вектора на S^2. Свойства симметрии $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}) = f(-\boldsymbol{l},-\boldsymbol{k})$ и унитарности S-матрицы сводят амплитуду рассеяния к вещественной и симметричной функции энергии и двух векторов на S^2, что является недостаточным. Таким образом, задача состоит в нахождении всех свойств S-матрицы, однозначно определяемой потенциалом $v(\boldsymbol{x})$.

Эта важная и очень сложная задача была решена в работах Л. Д. Фаддеева [17], [18], [25], подробно изложенных в обзоре [28]. Сам Людвиг Дмитриевич считал их своими наиболее технически изощренными работами и гордился ими. Основная идея состоит в определении и изучении семейства операторов преобразования $\{U_{\boldsymbol{\gamma}}\}_{\boldsymbol{\gamma}\in S^2}$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$, $HU_{\boldsymbol{\gamma}} = U_{\boldsymbol{\gamma}}H_0$, являющихся вольтерровыми по направлению $\boldsymbol{\gamma}$:

$$(U_{\boldsymbol{\gamma}}\psi)(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) + \int_{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\gamma})>0} A_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y})\,d^3\boldsymbol{y}.$$

Для доказательства существования операторов $U_{\boldsymbol{\gamma}}$ достаточно показать, что при каждом $\boldsymbol{\gamma}\in S^2$ уравнение Шрёдингера (1.6) имеет решение $f_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$, которое при фиксированных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{k}_\perp = \boldsymbol{k} - (\boldsymbol{k},\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость переменной $s = (\boldsymbol{k},\boldsymbol{\gamma})$, допускает там оценку

$$|f_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})e^{-is(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})}| \leqslant C$$

и при больших s имеет асимптотику

$$f_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})e^{-is(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})} = e^{i(\boldsymbol{k}_\perp,\boldsymbol{x})} + o(1).$$

Решения являются многомерными аналогами решений Йоста.

В одномерном случае существование решений Йоста доказывается при помощи вольтерровых функций Грина $G_1(x-y,k)$ и $G_2(x-y,k)$ оператора $H_0-\lambda I$:

$$G_1(x,k) = -\theta(-x)\,\frac{\sin kx}{k} \quad \text{и} \quad G_2(x,k) = \theta(x)\,\frac{\sin kx}{k}\,,$$

где $k=\sqrt{\lambda}$ и $\theta(x)$ – это функция Хевисайда:

$$\theta(x) = 1 \quad \text{при } x>0, \qquad \theta(x) = 0 \quad \text{при } x<0.$$

Напомним, что обычная функция Грина $G(x-y,k)$ (ядро резольвенты R^0_λ оператора H_0 в $L^2(\mathbb{R})$) есть

$$G(x,k) = -\frac{e^{ik|x|}}{2ik}\,.$$

В трехмерном случае обычная функция Грина $G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{k})$ (ядро резольвенты R^0_λ оператора H_0 в $L^2(\mathbb{R}^3)$) дается классической формулой

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{i|\boldsymbol{k}|\,|\boldsymbol{x}|}}{|\boldsymbol{x}|}\,, \qquad \lambda = \boldsymbol{k}^2.$$

Замечательным образом существование функций $f_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$ доказывается на основе открытого Л. Д. Фаддеевым в работе [17] многомерного обобщения вольтерровых функций Грина, которое теперь называют функциями Грина–Фаддеева. Эти функции образуют семейство $G_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},k)$, где $\boldsymbol{\gamma}\in S^2$, и имеют вид

$$G_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(\boldsymbol{l},\boldsymbol{x})}}{\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{l}^2 + i0(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l},\boldsymbol{\gamma})}\,d^3\boldsymbol{l},$$

где обобщенная функция $(x+i0a)^{-1}$ понимается как

$$(x+i0)^{-1} \quad \text{при } a>0 \quad \text{и} \quad (x-i0)^{-1} \quad \text{при } a<0.$$

Функция Грина–Фаддеева $G_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$ обладает важным свойством аналитичности: при фиксированных $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{k}_\perp$ она аналитически продолжается по $s=(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\gamma})$ в верхнюю полуплоскость и имеет там оценку

$$|G_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})e^{-is(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma})}| \leqslant \frac{C}{|\boldsymbol{x}|}\,.$$

Интегральное уравнение

$$u_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k}) = e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} + \int_{\mathbb{R}^3} G_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{k})v(\boldsymbol{y})u_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{k})\,d^3\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{\gamma}\in S^2, \tag{2.10}$$

является многомерным аналогом интегрального уравнения для функций Йоста. Однако, в отличие от одномерного случая, уравнение (2.10) уже более не является уравнением типа Вольтерра, а есть только уравнение Фредгольма. Таким образом, решение $u_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$ является ограниченным, только если при заданном s однородное уравнение не имеет нетривиальных ограниченных решений; в противном случае при s таких, что $\operatorname{Im} s>0$, у решения $u_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$ имеется полюс. Как показано в [28], если оператор Шрёдингера H имеет дискретные собственные значения, то такие сингулярные значения s всегда есть. Для дальнейшего применения метода Фаддеева необходимо доказать аналог теоремы Като о том, что при вещественных s однородное уравнение (2.10) ограниченных решений не имеет. Это верно для малых потенциалов, а в общем случае *требуется*, чтобы потенциал $v(\boldsymbol{x})$ удовлетворял этому условию. В работе [28] оно называется *условием* C. При выполнения этого условия

$$u_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k}) = \overline{u_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{k})},$$

а аналоги решений Йоста $f_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$ задаются формулой

$$f_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k}) = u_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k}),$$

где $\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k})$ – регуляризованный определитель Фредгольма уравнения (2.10). Виртуозно используя интегральные уравнения и дифференцирования по параметру $\boldsymbol{\gamma}$ (производные Ли действия SO(3) на S^2), Л. Д. Фаддеев доказывает в [28], что $\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k})$ выражаются через амплитуду рассеяния $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$.

Полное описание аналитических свойств S-матрицы дается в терминах решений $u_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$. Именно, положим[17]

$$h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\boldsymbol{l},\boldsymbol{x})}v(\boldsymbol{x})u_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})\,d^3\boldsymbol{x}$$

[17] Отметим, что амплитуда $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$, используемая в [28], – это введенная здесь функция $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$, поделенная на $-2\pi^2$, поэтому функция $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$ здесь – это $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$ из [28], умноженная на $-2\pi^2$.

и определим операторы $Q_{\boldsymbol{\gamma}}^{(\pm)}$, действующие по правилу

$$(Q_{\boldsymbol{\gamma}}^{(\pm)}\psi)(\boldsymbol{k}) = \psi(\boldsymbol{k}) \pm \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{l}^2) h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})\theta(\pm(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l},\boldsymbol{\gamma}))\psi(\boldsymbol{l})\, d^3\boldsymbol{l}.$$

Замечательным образом операторы $Q_{\boldsymbol{\gamma}}^{(\pm)}$ для произвольного $\boldsymbol{\gamma} \in S^2$ определяют факторизацию оператора рассеяния:

$$\widehat{S} = (Q_{\boldsymbol{\gamma}}^{(+)})^{-1} Q_{\boldsymbol{\gamma}}^{(-)},$$

где функция $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$ однозначно определяется по амплитуде рассеяния при помощи интегрального уравнения

$$h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}) = f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{m}^2) h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{m})\theta((\boldsymbol{m}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{\gamma}))f(\boldsymbol{m},\boldsymbol{l})\, d^3\boldsymbol{m}. \quad (2.11)$$

Условие C эквивалентно однозначной разрешимости уравнения (2.11).

Ключевым моментом является открытое Л. Д. Фаддеевым свойство аналитичности функций $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$: при $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{l},\boldsymbol{\gamma}) = s$ и фиксированных $\boldsymbol{k}_\perp$, $\boldsymbol{l}_\perp$ и $\boldsymbol{\gamma}$ функция $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной s с полюсами конечного порядка при сингулярных значениях s. Подчеркнем, что доказательство аналитичности самым существенным образом использует свойство локальности потенциала $v(\boldsymbol{x})$ – условие, что оператор V есть оператор умножения на функцию $v(\boldsymbol{x})$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$. Открытое Л. Д. Фаддеевым свойство функций $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$ является далеко идущим обобщением аналитичности амплитуды рассеяния вперед.

Резюмируя, получаем, что амплитуда рассеяния $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$ гладкого, убывающего на бесконечности потенциала $v(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющего условию C, обладает следующими свойствами.

I. Уравнение (2.11) однозначно разрешимо при всех $\boldsymbol{\gamma} \in S^2$, определяя семейство решений $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$.

II. Построенная по $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$ функция $\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k})$ имеет ограниченное аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной $s = (\boldsymbol{k},\boldsymbol{\gamma})$.

III. Функции $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})\Delta_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{k})$ при $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{l},\boldsymbol{\gamma})$ и фиксированных $\boldsymbol{k}_\perp, \boldsymbol{l}_\perp$ также имеют аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной $s = (\boldsymbol{k},\boldsymbol{\gamma})$.

Фундаментальный результат Л. Д. Фаддеева [28] состоит в том, что приведенные свойства I–III амплитуды рассеяния $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$ являются также и достаточными! Именно, при выполнении этих условий существует локальный потенциал $v(\boldsymbol{x})$, единственность которого доказана в [1], такой, что его амплитуда рассеяния совпадает с $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$. Именно, потенциал определяется при помощи решений уравнений типа Гельфанда–Левитана для функций $A_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, задающих решения $f_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$. Уравнения Гельфанда–Левитана – это семейство интегральных уравнений, параметризованных $\boldsymbol{\gamma} \in S^2$, с положительными ядрами, выражающимися через амплитуду рассеяния. Для каждого $\boldsymbol{\gamma} \in S^2$ по решению $A_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ уравнения Гельфанда–Левитана определяется интегральный оператор $V_{\boldsymbol{\gamma}}$ с ядром $V_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, локальным по направлению $\boldsymbol{\gamma}$. Приведенные выше свойства аналитичности амплитуды рассеяния позволяют установить связь V_{γ} при различных $\boldsymbol{\gamma}$ и доказать, что

$$V_{\gamma} = V \quad \text{для всех } \boldsymbol{\gamma} \in S^2$$

и $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})v(\boldsymbol{x})$!

Читателю предоставляется уникальная возможность проработать все эти детали, следуя работе [28]. Конечно, там приведена только общая схема решения обратной задачи теории рассеяния для трехмерного оператора Шрёдингера. Доказательство основного предположения – условия C – и установление соответствия функциональных классов потенциалов и амплитуд рассеяния, подобно рассмотренному выше одномерному случаю, ждет своего решения. Возможно, что кто-то из читателей сможет довести эту важную и трудную задачу до полного конца.

Матрица рассеяния является важнейшим объектом квантовой теории. Решение обратной задачи рассеяния в разных случаях отвечает на вопрос, содержится ли в ней полная информация о системе. Этот вопрос приобретает особенно важное значение в квантовой теории поля. Интегрируемые модели квантовой теории поля, которые будут описаны в разделе 5, являют собой единственный случай, когда известен положительный ответ. Именно, в работах Ф. А. Смирнова, ученика Л. Д. Фаддеева, было показано, что знание факторизованной матрицы рассеяния полностью определяет локальные наблюдаемые с помощью некоторой системы уравнений. При этом, как и в рассмотренных выше случаях, решающую роль играют аналитические свойства матрицы рассеяния и матричных элементов локальных наблюдаемых.

3. Спектральная теория автоморфных функций

В 1950-е годы классическая теория автоморфных форм и функций переживала мощный подъем, связанный со знаменитой работой А. Сельберга [119], переведенной на русский в 1957 г. В то же время И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро и С. В. Фомин установили связь подхода Сельберга с теорией бесконечномерных представлений полупростых групп Ли. Именно, пусть G – вещественная полупростая группа Ли, K – ее максимальная компактная подгруппа, а Γ – дискретная подгруппа G такая, что $\Gamma\backslash G$ имеет конечный объем[18]. В пространстве $\Gamma\backslash G/K$ действует представление коммутативной алгебры $\mathscr{D}$ инвариантных дифференциальных операторов – операторов Лапласа, и основной задачей является вывод разложения по собственным функциям операторов из $\mathscr{D}$ в $L^2(\Gamma\backslash G/K)$. В 6-м выпуске серии “Обобщенные функции” – в монографии “Теория представлений и автоморфные функции” И. М. Гельфанда, М. И. Граева, И. И. Пятецкого-Шапиро [97] – эта задача для случая компактного пространства $\Gamma\backslash G$ была решена методами теории представлений. Именно, представление группы G, индуцированное конечномерным унитарным представлением подгруппы Γ, распадается в прямую сумму счетного числа неприводимых унитарных представлений с конечными кратностями, что в этом случае и доказывает теорему разложения по собственным функциям.

[18] по отношению к мере Хаара на G.

3.1. Разложение по собственным функциям оператора Лапласа. Особый интерес представляет случай ранга 1, когда

$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \quad K = \mathrm{SO}(2),$$

однородное пространство G/K есть плоскость Лобачевского, реализованная как верхняя полуплоскость

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \colon y > 0\},$$

а группа Γ – это фуксова группа первого рода, действующая на $\mathbb{H}$ дробно-линейными преобразованиями. Основная задача при этом сводится к изучению оператора Лапласа–Бельтрами A метрики Пуанкаре, задаваемого дифференциальным выражением

$$Af = -y^2\biggl(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\biggr), \tag{3.1}$$

и к доказательству теоремы разложения по собственным функциям оператора A в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. Как уже указывалось выше, в случае, когда замыкание $\overline{F}$ фундаментальной области[19] компактно, эта задача полностью решается методами теории представлений, однако в случае, когда $\overline{F}$ некомпактно, но имеет конечную площадь в геометрии Лобачевского, задача становится гораздо более сложной. В монографии [97] было получено разложение гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в ортогональную сумму двух подпространств, инвариантных относительно оператора A, при этом первое подпространство состоит из функций, имеющих нулевой интеграл по всем орициклам в $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, и оператор A имеет там дискретный спектр (возможно, конечный). Про второе подпространство там написано (см. гл. 1, § 6): "Можно доказать, что второе подпространство имеет не более чем конечное число точек дискретного спектра, а спектр его остальной части – непрерывный конечнократный; при этом кратность непрерывного спектра равна минимальному числу[20] параболических вершин фундаментальной области группы Γ. Доказательство основано на теории возмущений дифференциальных операторов. Чтобы не перегружать книгу специальными вопросами теории дифференциальных операторов, мы изложим это доказательство в другом месте".

Эта задача и была решена в работе Л. Д. Фаддеева [19], написанной в 1966 г.! Именно, в [19] были доказаны следующие утверждения:

(a) спектр оператора Лапласа состоит из n-кратного абсолютно непрерывного спектра, заполняющего полуось $1/4 \leqslant \lambda < \infty$, и дискретного спектра конечной кратности, расположенного на полуоси $0 \leqslant \lambda < \infty$ и не имеющего точек накопления в конечном интервале;

(b) так называемые ряды Эйзенштейна–Мааса, определяемые абсолютно сходящимися при $\operatorname{Re} s > 1$ рядами по классам смежности группы Γ, допускают мероморфное продолжение на всю комплексную s-плоскость с полюсами при $\operatorname{Re} s < 1/2$;

[19]Здесь F – это фундаментальная область группы Γ в $\mathbb{H}$, т. е. открытое подмножество $\mathbb{H}$ такое, что $\gamma_1 F \cap \gamma_2 \overline{F} = \varnothing$ при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ и объединение $\bigcup \gamma\overline{F}$ по всем $\gamma \in \Gamma$ есть $\mathbb{H}$.

[20]точнее, числу n неэквивалентных параболических вершин группы Γ. – *Прим. Л. А. Т.*

(c) система собственных функций непрерывного спектра оператора A дается аналитическим продолжением рядов Эйзенштейна–Мааса на прямую $\operatorname{Re} s = 1/2$;

(d) теорема разложения по собственным функциям оператора A в $\mathscr{H}$.

Хотя эти результаты были хорошо известны специалистам[21], а сам Сельберг явно ими пользовался при выводе формулы следов, их полные доказательства в общем случае опубликованы не были. Таким образом, работа [19], написанная через 10 лет после знаменитой работы Сельберга, стала первой, где все эти результаты были строго доказаны. Хотя Л. Д. Фаддеев понимал важность этих результатов и методов их получения, во введении к [19] он скромно отмечал,что "данная работа может иметь только методическое значение". Основополагающую роль работы [19] отметил С. Ленг в своей монографии "$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$" [110], вторая часть которой посвящена изложению этой работы Л. Д. Фаддеева. Именно, в предисловии автора С. Ленг пишет: "Работа Л. Д. Фаддеева о спектральном разложении оператора Лапласа на верхней полуплоскости представляет собой прекрасное введение в анализ, облеченный в красивую геометрическую форму. Большая ее часть должна быть доступна любому хорошему старшекурснику, и я воспроизвел эту работу в гл. XIV (с добавлением ряда деталей, опущенных Л. Д. Фаддеевым, который ориентировался на более искушенного читателя). Методы Фаддеева берут свое начало в теории возмущений и теории рассеяния и представляют самостоятельный интерес; они могут быть интересны и специалисту, который знаком с аналитической частью работы и хочет узнать, как она используется в теоретико-групповой задаче".

Конкретно, метод Л. Д. Фаддеева состоит в использовании теории возмущений непрерывного спектра, развитой им в работе [15] на примере модели Фридрихса (см. п. 1.2). Изложение начинается с рассмотрения самосопряженного оператора A_0 в $L^2(\mathbb{H})$ – оператора Лапласа на плоскости Лобачевского, определяемого дифференциальным выражением (3.1). Как и в случае уравнения Шрёдингера, удобно использовать параметризацию

$$\lambda = s(1-s),$$

где для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [1/4, \infty)$ переменная s удовлетворяет условию $\operatorname{Re} s > 1/2$. Резольвента

$$R_0(s) = (A_0 - s(1-s)I)^{-1}$$

оператора A_0 при $\operatorname{Re} s > 1$ является интегральным оператором с ядром $k(z, z'; s)$, зависящим от инвариантного расстояния $\rho(z, z')$ на $\mathbb{H}$ и задаваемого простым определенным интегралом, явно выражающимся через гипергеометрическую функцию. Несложно доказать, что дифференциальное выражение (3.1) единственным образом задает самосопряженный оператор A в $\mathscr{H} = L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ и его резольвента

$$R(s) = (A - s(1-s)I)^{-1}$$

при $\operatorname{Re} s > 2$ есть интегральный оператор с ядром $r(z, z'; s)$, получаемым методом изображений:

$$r(z, z'; s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} k(z, \gamma z'; s), \tag{3.2}$$

[21]В неопубликованных в то время лекциях А. Сельберга в Гёттингенском университете в 1954 г. излагался подход, основанный на теории потенциала.

где ряд абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$. Резольвента $R(s)$ удовлетворяет первому тождеству Гильберта

$$R(s) - R(s') = (s(1-s) - s'(1-s'))R(s')R(s).$$

Полагая здесь $s' = \varkappa$, где $\varkappa > 0$ достаточно велико, и обозначая

$$R = R(\varkappa), \quad \omega(s) = s(1-s) - \varkappa(1-\varkappa),$$

получаем уравнение

$$R(s) = R + \omega(s)RR(s). \tag{3.3}$$

Как и (1.8), уравнение (3.3) непригодно для исследования $R(s)$, так как оператор R не является компактным, а имеет непрерывный спектр. Однако главную часть, порождающую этот спектр, можно выделить и явно обратить. Именно, рассматривая для простоты случай одной параболической вершины[22] на $i\infty$, выберем фундаментальную область F группы Γ в виде

$$F = F_0 \cup F_1,$$

где $\overline{F}_0$ компактно, а $\overline{F}_1$ – это полоса

$$\{z = x + iy \colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \geqslant a\} \quad \text{для некоторого } a > 0.$$

Обозначим через P_0 и $P_1 = I - P_0$ операторы ортогонального проектирования в $\mathscr{H}$, отвечающие умножению на характеристические функции областей F_0 и F_1. Используя (3.2), несложно доказать, что при $\varkappa > 2$ операторы

$$R_{00} = P_0RP_0, \quad R_{01} = P_0RP_1 \quad \text{и} \quad R_{10} = P_1RP_0$$

компактны. Для изучения вершинной части оператора R, т. е. оператора $R_{11} = P_1RP_1$, рассмотрим оператор ортогонального проектирования P из подпространства $P_1\mathscr{H}$ в $L^2([a,\infty); y^{-2}\,dy)$, задаваемый интегрированием по орициклам области F_1:

$$f(z) \mapsto P(f)(y) = \int_0^1 (x+iy)\,dx, \qquad y \geqslant a.$$

Из представления (3.2) следует, что R_{11} есть интегральный оператор с ядром

$$R_{11} = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty} k(z, \gamma z'; \varkappa),$$

где

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ n \in \mathbb{Z} \right\},$$

откуда получаем, что $R_{11} = PR_{11}P + R'_{11}$, где $T = PR_{11}P$ есть интегральный оператор в $L^2([a,\infty); y^{-2}\,dy)$ с ядром $t(y, y'; \varkappa)$,

$$t(y,y';\varkappa) = \frac{1}{2\varkappa - 1} \begin{cases} y^{\varkappa}y'^{1-\varkappa}, & y < y', \\ y^{1-\varkappa}y'^{\varkappa}, & y > y', \end{cases}$$

[22] Случай нескольких вершин рассматривается аналогично.

а R_{11} – компактный оператор. Оператор T есть значение при $s = \varkappa$ резольвенты

$$R_0(s) = (B - s(1-s)I)^{-1}$$

самосопряженного оператора B в $L^2([a,\infty); y^{-2}\,dy)$, задаваемого дифференциальным выражением $-y^2\,d^2\varphi/dy^2$ с граничным условием

$$\varphi(a) = \varkappa a\varphi'(a).$$

Замечательное наблюдение Л. Д. Фаддеева, необходимое для применения разработанного в [15] метода, состоит в том, что оператор A можно рассматривать как возмущение оператора B с тем же абсолютно непрерывным спектром!

Точнее, записывая $R = T + V$, где V – компактный оператор, и используя еще раз тождество Гильберта для $R_0(s)$,

$$(I - \omega(s)T)^{-1} = I + \omega(s)R_0(s),$$

перепишем уравнение (3.3) следующим образом:

$$R(s) = R_0(s) + (I + \omega(s)R_0(s))V + \omega(s)(I + \omega(s)R_0(s))VR(s).$$

Наконец, полагая

$$R(s) = R_0(s) + (I + \omega(s)R_0(s))B(s)(I + \omega(s)R_0(s)),$$

для так определенного оператора $B(s)$ получаем интегральное уравнение

$$B(s) = V + H(s)B(s), \tag{3.4}$$

где

$$H(s) = V(I + \omega(s)R_0(s)).$$

Таким образом, $B(s)$ является аналогом оператора $T(\lambda)$ для модели Фридрихса, задаваемого формулой (1.9), а уравнение (3.4) – аналогом уравнения (1.11)! Виртуозно используя развитые в [15] аналитические методы, Л. Д. Фаддеев доказывает, что оператор $H(s)$ является фредгольмовым в банаховом пространстве $\mathfrak{B}_{-1}$ непрерывных в F функций $f(z)$ с нормой

$$\|f\| = \sup_{z\in F_0} |f(z)| + \sup_{z\in F_1} y|f(z)|$$

и аналитически зависит от s в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 2$. Отсюда вытекает аналитическое продолжение ядра резольвенты $r(z,z';s)$ оператора A с полюсами конечной кратности при $0 < \operatorname{Re} s \leqslant 1$, причем при $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$ полюсы могут находиться только на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$! Аналитическое продолжение собственных функций непрерывного спектра и их полнота также вытекают из развитой в [15] техники теории возмущений непрерывного спектра. Поскольку при $\operatorname{Re} s > 1$ эти собственные функции совпадают с рядами Эйзенштейна–Мааса

$$E(z,s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} y^s(\gamma z),$$

отсюда также следует их аналитическое продолжение и функциональное уравнение. Читателя ждет удовольствие познакомиться с подробными доказательствами в работе Л. Д. Фаддеева [19] и в упомянутой выше книге С. Ленга [110].

3.2. Теория рассеяния для автоморфных функций. Помимо изложенных выше общего и стационарного подходов к теории рассеяния имеется более специальный подход, предложенный П. Лаксом и Р. Филлипсом в монографии "Теория рассеяния" [112]. Вместо зависящего от времени уравнения Шрёдингера (1.3) в нем используется волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Hu = 0, \tag{3.5}$$

связанное с оператором H, и оператор эволюции $U(t)$ данных Коши. Операторы $U(t)$ задают группу унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_E$ – пополнении в энергетической норме уравнения (3.5) гладких данных Коши с компактными носителями, ортогональных отрицательному спектру оператора H, так что по теореме Стоуна

$$U(t) = e^{it\mathcal{L}},$$

где $\mathcal{L}$ – самосопряженный оператор в $\mathscr{H}_E$. Применение схемы Лакса–Филлипса основано на существовании так называемых приходящих и уходящих подпространств $\mathscr{D}_\pm$ пространства $\mathscr{H}_E$ таких, что

i) $U(t)\mathscr{D}_- \subset \mathscr{D}_-$ при $t < 0$ и $U(t)\mathscr{D}_+ \subset \mathscr{D}_+$ при $t > 0$;

ii) $\displaystyle\bigcap_{t<0} U(t)\mathscr{D}_- = \bigcap_{t>0} U(t)\mathscr{D}_+ = \{0\}$;

iii) $\displaystyle\bigcup_{t>0} U(t)\mathscr{D}_- = \bigcup_{t<0} U(t)\mathscr{D}_+$;

iv) $\mathscr{D}_+ \perp \mathscr{D}_-$.

Оператор рассеяния S в этом подходе связан со сжимающей полугруппой

$$Z(t) = PU(t)P,$$

где $t \geqslant 0$, а P – ортогональный проектор из подпространства $\mathscr{H}_E^a$ абсолютно непрерывного спектра[23] оператора $\mathcal{L}$ на ортогональное дополнение к $\mathscr{D}_+ \oplus \mathscr{D}_-$.

В совместной с Б. С. Павловым работе [26] Л. Д. Фаддеев применил схему Лакса–Филлипса для случая

$$H = A - \frac{1}{4}I,$$

где A – оператор Лапласа в $\mathscr{H} = L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, рассмотренный им ранее в [19]. Рассматривая для простоты изложения случай одной параболической вершины, они доказывают, что оператор рассеяния S в методе Лакса–Филлипса совпадает с оператором умножения на коэффициент отражения $c(s)$, определяемым асимптотикой при $y \to \infty$ ряда Эйзенштейна–Мааса

$$E(z,s) = y^s + c(s)y^{1-s} + o(1), \qquad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\,.$$

[23] $\mathscr{H}_E^a = \mathscr{H}_E$ для оператора Шрёдингера (1.1) с потенциалом (1.2).

Для случая $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ классическое разложение $E(z,s)$ в ряд Фурье (так называемая формула Сельберга–Човлы) показывает, что

$$c(s) = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(s-1/2)\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)}\,,$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера, а $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана. Замечательным образом в [26] доказывается, что гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции эквивалентна операторной оценке

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|Z(t)(B+iI)^{-1}\| = -\frac{1}{4}\,, \tag{3.6}$$

где B – генератор полугруппы $Z(t)$, и дается ее чисто теоретико-операторная формулировка!

Этот яркий и неожиданный результат вдохновил П. Лакса и Р. Филлипса на систематическое изложение спектральной теории оператора Лапласа, используя развитый ими в [112] подход. Во введении к монографии "Теория рассеяния для автоморфных функций" [113] они пишут: "Наш интерес к гармоническому анализу на группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ породила увлекательная статья Фаддеева и Павлова [16] [24] 1972 года, где они показали, что теория рассеяния Лакса–Филлипса приложима к автоморфному волновому уравнению. Изучив эту работу, мы решили переделать все изложение, оставаясь целиком в рамках нашей теории...". В добавлении 2 к § 7, иронически озаглавленном "Как не удается доказать гипотезу Римана", авторы предлагают свой вариант критерия Павлова–Фаддеева.

3.3. Формула следа Сельберга. Развитые в работе [19] методы естественно использовать для последовательного вывода знаменитой формулы следа Сельберга. Эту задачу Людвиг Дмитриевич и поставил своим ученикам А. Б. Венкову и В. Л. Калинину, студентам математико-механического факультета ЛГУ. Ее решение было изложено в совместной работе [27], основанной на дипломных работах первых двух авторов и на лекциях Л. Д. Фаддеева в Вильнюсе в марте[25] 1973 г. Основу этого подхода составляет метод функции спектрального сдвига М. Г. Крейна. Именно, пусть H_0 и V – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и при этом V принадлежит $\mathscr{S}_1$ – классу Шаттена–фон Неймана ядерных операторов. Как обычно, положим

$$H = H_0 + V.$$

Теорема М. Г. Крейна (усиленная М. Ш. Бирманом и М. З. Соломяком) утверждает, что для любой абсолютно непрерывной функции φ такой, что ее производная φ' удовлетворяет условию Липшица и $\varphi' \in L^p(\mathbb{R})$, где $1 \leqslant p < \infty$, выполняется условие

$$\varphi(H) - \varphi(H_0) \in \mathscr{S}_1.$$

[24] В библиографии к настоящему обзору эта статья имеет номер [26]. – *Прим. Л. А. Т.*

[25] Там завязалась дружба Людвига Дмитриевича с Аскольдом Ивановичем Виноградовым, специалистом по аналитической теории чисел, который заинтересовался приложениями новых методов теории автоморфных функций к теории чисел.

При этом существует единственная функция $\xi \in L^1(\mathbb{R})$ (называемая *функцией спектрального сдвига* для пары операторов H_0 и H) такая, что

$$\operatorname{Tr}(\varphi(H) - \varphi(H_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\lambda)\xi(\lambda)\, d\lambda$$

и при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)\, d\lambda = \operatorname{Tr} V.$$

Новизна работы [27] состоит в явном вычислении функции спектрального сдвига для пары $P_c A P_c$ и $\widetilde{P} B \widetilde{P}$, где P_c – оператор ортогонального проектирования из $\mathscr{H} = L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ на подпространство абсолютно непрерывного спектра оператора Лапласа A, а $\widetilde{P} = P P_1$ – проектор на $L^2([a,\infty), y^{-2}\, dy)$ (см. изложение работы [19] выше). При этом функция спектрального сдвига выражается через матрицу рассеяния оператора A, и для функций h из явно описываемого функционального класса, используемого для вывода формулы следа Сельберга, явно вычисляется спектральный след $\operatorname{Tr}(h(A) - \widetilde{P} h(B) \widetilde{P})$. Вычисление матричного следа интегрального оператора $h(A) - \widetilde{P} h(B) \widetilde{P}$ – интеграла по фундаментальной области от его ядра при совпадающих аргументах – следует подходу Сельберга, изложенному в книге Т. Куботы [105]. При этом равенство

“спектральный след = матричный след”,

следующее из общей теории ядерных операторов (см. монографию [99]), и дает формулу следа Сельберга! Также в работе [27] объясняется, что введенная Сельбергом функция $Z(s)$, называемая теперь дзета-функцией Сельберга, является регуляризованным характеристическим определителем оператора Лапласа A. Замечательным образом (см. формулу (2.8)) $Z(s)$ является аналогом коэффициента прохождения $a(\sqrt{\lambda})$ для одномерного уравнения Шрёдингера (2.6)!

Следует отметить, что, хотя у Л. Д. Фаддеева больше не было работ по этой тематике, он интересовался ей постоянно. Так, он считал, что требуется новая идея для успешной реализации его подхода с Б. С. Павловым [26] к определению полюсов автоморфной матрицы рассеяния. Разработанные Л. Д. Фаддеевым методы спектральной теории автоморфных функций получили дальнейшее развитие в работах А. Б. Венкова. Идея регуляризации, будь то для тождества Гильберта как уравнения для резольвенты самосопряженного оператора, или для определения ее следа и характеристического определителя, пронизывает все творчество Людвига Дмитриевича, начиная от теории оператора Шрёдингера и автоморфного оператора Лапласа и кончая квантовой теорией калибровочных полей. В 1981 г. Л. Д. Фаддеев прочел пленарный доклад на конференции, посвященной 90-летию И. М. Виноградова. В докладе было рассказано об универсальной роли определителей в математике и теоретической физике, от дзета-функции Сельберга $Z(s)$ для группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, с полюсами $s = \rho/2$, где ρ – нетривиальные нули дзета-функции Римана, до “духовых детерминантов Фаддеева–Попова” в теории полей Янга–Миллса. По словам академика Ю. В. Прохорова, А. Н. Колмогоров был под глубоким впечатлением от этого доклада Л. Д. Фаддеева.

4. Классические интегрируемые уравнения

4.1. Уравнение КдФ. В начале 1971 г. на симпозиуме в Новосибирске Л. Д. Фаддеев делал доклад о своих результатах по обратной задаче для трехмерного уравнения Шрёдингера. Работавший тогда в Новосибирске В. Е. Захаров рассказал ему про замечательную работу [101] группы американских прикладных математиков – К. Гарднера, Д. Грина, М. Крускала и Р. Миуры – об интегрировании известного в теории нелинейных волн уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) и про интерпретацию этой работы, предложенную П. Лаксом [111].

Именно, открытие Гарднера, Грина, Крускала и Миуры состояло в следующем. Рассмотрим задачу Коши для уравнения КдФ:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u(x,t)\big|_{t=0} = u(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{4.1}$$

где начальное данное $u(x)$ быстро убывает при $|x| \to \infty$, и свяжем с ней оператор $L(t)$, одномерный оператор Шрёдингера (2.6) с потенциалом $u(x,t)$, зависящим от t как от параметра. Замечательным образом оказывается, что нелинейная эволюция $u(x,t)$ по уравнению КдФ в терминах данных рассеяния оператора Шрёдингера задается необычайно простыми формулами:

$$r(k,t) = e^{8ik^3t} r(k), \quad \varkappa_l(t) = \varkappa_l, \quad m_l(t) = e^{8\varkappa_l^3 t} m_l, \qquad l = 1, \ldots, N, \tag{4.2}$$

где $(r(k), \varkappa_l, m_l)$ – данные рассеяния, отвечающие начальному потенциалу $u(x)$. Таким образом, решение $u(x,t)$ задачи Коши (4.1) дается решением обратной задачи для одномерного оператора Шрёдингера с данными рассеяния (4.2)! П. Лакс объяснил формулы (4.2), показав, что уравнение КдФ эквивалентно операторному уравнению

$$\frac{dL(t)}{dt} = [L(t), A(t)], \tag{4.3}$$

называемому теперь уравнением Лакса[26], где $A(t)$ – явно зависящий от $u(x,t)$ дифференциальный оператор третьего порядка[27]. Впоследствии оказалось, что существует широкий класс нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых аналогичным методом, получившим название “метод обратной задачи”.

Обсуждение этих результатов с В. Е. Захаровым и привело к появлению совместной работы [24] Л. Д. Фаддеева и В. Е. Захарова, в которой было доказано, что уравнение КдФ является вполне интегрируемой бесконечномерной гамильтоновой системой! Фундаментальную роль этой работы трудно переоценить. Понятие полной интегрируемости ведет свое начало от классических работ Эйлера, Лагранжа, Якоби и Ковалевской о движении твердого тела. Однако к середине XX в. эта тематика утратила актуальность (в то время казалось, что интегрируемость – это очень редкое явление), и в случае бесконечного числа

[26] В оригинальной работе Лакса использовались обозначения L и B; позже их заменили на L и A, что есть первые две буквы фамилии Lax! Также часто используются обозначения L и M.

[27] Именно, $A = 4\dfrac{d^3}{dx^3} - 6u\dfrac{d}{dx} - \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

степеней свободы не было известно ни одного нетривиального интегрируемого примера. Значение работы [24] В. Е. Захарова и Л. Д. Фаддеева в том и состоит, что она показала, что существуют интересные и нетривиальные бесконечномерные интегрируемые системы, и положила начало гамильтоновой теории уравнений, интегрируемых методом обратной задачи.

Именно, фазовым пространством для уравнения КдФ является многообразие данных Коши – пространство Шварца $\mathscr{M} = \mathscr{S}(\mathbb{R})$ вещественнозначных функций. Бесконечномерное многообразие Фреше $\mathscr{M}$ является пуассоновым многообразием со скобкой Пуассона

$$\{F,G\}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta F}{\delta u(x)}\right)\frac{\delta G}{\delta u(x)}\,dx \tag{4.4}$$

для гладких функционалов F и G на $\mathscr{M}$, где $\delta F/\delta u(x)$ означает производную Фреше (вариационную производную) функционала F. Симплектические листы $\mathscr{M}_c$ скобки Пуассона (4.4), называемой *скобкой Гарднера–Захарова–Фаддеева*, – это аффинные пространства, задаваемые уравнением

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx = c.$$

Соответствующая симплектическая форма на $\mathscr{M}_c$ имеет вид

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u(x) \wedge \left(\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}u(y)\,dy\right)dx,$$

где d – оператор внешнего дифференцирования на $\mathscr{M}$. Непосредственно проверяется, что уравнение КдФ записывается в гамильтоновом виде

$$u_t = \{H,u\} = \frac{d}{dx}\,\frac{\delta H}{\delta u(x)}\,, \quad \text{где} \quad H(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}u_x^2 + u^3\right)dx.$$

Другая параметризация фазового пространства $\mathscr{M}$ задается данными рассеяния $s = (r(k), \varkappa_l, m_l)$ потенциала $u(x)$, а обратное отображение $\imath\colon s \to u(x)$ дается решением обратной задачи теории рассеяния для одномерного уравнения Шрёдингера, изложенной в п. 2.3. Элегантно используя общее уравнение Гельфанда–Левитана для разности двух потенциалов и тождества для вронскианов решений Йоста, в [24] В. Е. Захаров и Л. Д. Фаддеев вычисляют прообраз симплектической формы Ω на $\mathscr{M}_c$ при отображении $\imath$ и явно строят канонические переменные (переменные Дарбу). Замечательным образом справедливо соотношение

$$\imath^*\Omega = \int_0^{\infty} \mathrm{d}P(k) \wedge \mathrm{d}Q(k)\,dk + \sum_{l=1}^{N} dp_l \wedge dq_l, \tag{4.5}$$

где

$$\begin{aligned} &P(k) = \frac{4k}{\pi}\ln|a(k)|, \quad Q(k) = \arg b(k),\\ &p_l = 2\varkappa_l^2, \quad q_l = \ln c_l, \qquad l = 1,\dots,N. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь функция $a(k)$ восстанавливается по коэффициенту отражения $r(k)$ и нулям $i\varkappa_l$ при помощи дисперсионного соотношения (2.9), где $a(k)=1/s_{11}(k)$, и

$$b(k)=a(k)r(k), \quad c_l=im_l\dot{a}(i\varkappa_l).$$

Переменные $P(k)$ и $Q(k)$ являются бесконечномерными аналогами классических переменных типа "действие-угол" из теоремы Лиувилля–Арнольда.

Более того, при помощи тождеств следов для одномерного оператора Шрёдингера, вывод которых аналогичен выводу в случае радиального уравнения Шрёдингера в п. 2.2, удается явно выразить гамильтониан H уравнения КдФ через канонические переменные типа "действие" $P(k)$ и p_l! Именно, из (2.9) следует, что при $|k|\to\infty$ и $\operatorname{Im}k>0$ справедливо асимптотическое разложение

$$\ln a(k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^n}\,,$$

где $c_{2j}=0$ в силу условия $r(-k)=\overline{r(k)}$. С другой стороны, сводя уравнение Шрёдингера для решения Йоста $f_1(x,k)$ при $\operatorname{Im}k>0$ к уравнению Риккати

$$\sigma_x+\sigma^2-u+2ik\sigma=0 \tag{4.7}$$

для функции

$$\sigma(x,k)=\frac{d}{dx}\ln f(x,k)-ik,$$

получаем

$$\ln a(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(x,k)\,dx.$$

Из уравнения (4.7) следует, что решение $\sigma(x,k)$ также имеет асимптотическое разложение

$$\sigma(x,k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n(x)}{(2ik)^n}\,,$$

где коэффициенты $\sigma_n(x)$ – это рекуррентно определяемые полиномы от потенциала $u(x)$ и его производных, причем $\sigma_{2j}(x)$ являются полными производными. Чудесным образом имеем

$$H=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_5(x)\,dx=8\int_0^{\infty}k^3P(k)\,dk-\frac{32}{5}\sum_{l=1}^{N}p_l^{5/2}, \tag{4.8}$$

что и завершает доказательство полной интегрируемости уравнения КдФ в работе [24]!

Вклад дискретного спектра в формулу (4.8) отвечает солитонам – специальным локализованным решениям уравнения КдФ, которые имеют частицеподобный характер. Точнее, солитон отвечает случаю $N=1$ и описывается решением

$$u(x,t)=-\frac{2\varkappa^2}{\operatorname{ch}^2(\varkappa(x-vt-x_0))}\,,$$

распространяющимся со скоростью $v = 4\varkappa^2$, а случай $N > 1$ отвечает N-солитонному решению, описывающему взаимодействие N солитонов, движущихся со скоростями $v_l = 4\varkappa_l^2$. Разные знаки перед интегралом и суммой в правой части (4.8) показывают, что моды непрерывного спектра распространяются с отрицательными скоростями, а солитоны – с положительными.

Функционалы

$$I_n = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{2n+1}(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

находятся в инволюции по отношению к скобке Гарднера–Захарова–Фаддеева и являются первыми интегралами для уравнения КдФ. При этом функционал

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u^2\,dx$$

играет роль импульса, $I_2 = H$, а I_n, $n > 2$, являются высшими интегралами движения. Метод работы [24] также сразу дает доказательство полной интегрируемости “высших уравнений КдФ”:

$$u_t = \sum_n a_n \frac{d}{dx}\,\frac{\delta I_n}{\delta u(x)}\,,$$

играющих важную роль в подходе С. П. Новикова к периодической задаче для уравнения КдФ.

Л. Д. Фаддеев неоднократно подчеркивал, что в работе [24] волшебным образом объединились сюжеты, над которыми он ранее работал независимо: обратная задача рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера, тождества следов и гамильтонова механика!

4.2. Уравнение sine-Gordon. В начале 1972 г. Л. Д. Фаддеев был в США, где он сделал серию докладов и рассказывал, в частности, о только что написанной работе с В. Е. Захаровым. Присутствовавший на докладе американский физик Д. Клаудер упомянул уравнение sine-Gordon[28] (SG), возникшее первоначально при изучении поверхностей постоянной отрицательной кривизны, а впоследствии в нелинейной оптике и в теории сверхпроводимости (эффект Джозефсона). Это уравнение

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \frac{m^2}{\beta}\sin\beta\varphi = 0, \qquad -\infty < x, t < \infty, \tag{4.9}$$

релятивистски-инвариантно и может рассматриваться как существенно нелинейная модель классической теории поля в двумерном пространстве-времени.

Как и уравнение КдФ, уравнение SG является бесконечномерной гамильтоновой системой. Именно, фазовое пространство $\mathscr{M} = \{(\pi(x), \varphi(x))\}$ – это многообразие данных Коши уравнения (4.9):

$$\varphi(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \varphi_t(x,t)\big|_{t=0} = \pi(x), \tag{4.10}$$

[28]Как отмечал впоследствии Л. Д. Фаддеев, рифма “сайн-Кляйн” (от “sine-Klein”) довольно безвкусна, но прилипчива. Однако то, что мы называем уравнением Клейна–Гордона, следует называть уравнением Клейна–Фока.

где $\pi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, а $e^{i\beta\varphi(x)} - 1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, и при этом

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \frac{2\pi}{\beta} Q,$$

где величина $Q \in \mathbb{Z}$ играет роль топологического заряда. Симплектическая форма Ω на $\mathscr{M}$ имеет канонический вид

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\pi(x) \wedge \mathrm{d}\varphi(x)\, dx,$$

и уравнение SG представляется в гамильтоновом виде

$$\varphi_t = \{H, \varphi\}, \quad \pi_t = \{H, \pi\}$$

с гамильтонианом

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\varphi_x^2 + \frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cos\beta\varphi)\right) dx.$$

Функционалы

$$P = -\int_{-\infty}^{\infty} \pi\varphi_x\, dx$$

(импульс поля $\varphi(x)$) и

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\varphi_x^2 + \frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cos\beta\varphi)\right) dx$$

(лоренцев буст) реализуют гамильтоново действие алгебры Ли группы Пуанкаре двумерного пространства-времени, что и отражает релятивистский характер уравнения SG.

Уравнение SG привлекло внимание Л. Д. Фаддеева, и в 1973 г. он со своим новым учеником Л. А. Тахтаджяном приступил к поиску представления Лакса для уравнения (4.9)[29]. Это представление было получено в совместной с В. Е. Захаровым работе трех авторов [29]. Оператор L из представления Лакса является матричным дифференциальным оператором первого порядка, действующим на вектор-функции в $\mathbb{C}^4$, при этом постоянная (4×4)-матрица перед $\dfrac{d}{dx}$ в операторе L имеет ранг 2. Матричные операторы такого типа ранее в литературе не рассматривались. Уравнение на собственные значения

$$L\Psi = \lambda\Psi$$

сводится к матричному дифференциальному уравнению порядка 2×2, содержащему как спектральный параметр λ, так и $1/\lambda$. В работе [29] был приведен

[29]В координатах светового конуса $\xi = (t+x)/2$, $\eta = (t-x)/2$ представление Лакса (4.3) уже было известно (см. [124] и [82]). Однако гамильтонова формулировка уравнения SG в этих координатах выглядит иначе, чем приведенная выше, так что необходимо представление Лакса в исходных координатах x, t.

формализм прямой и обратной задачи рассеяния для оператора L. Как и в случае уравнения Шрёдингера, данные рассеяния $s = (r(\lambda), \zeta_j, m_j)$ состоят из:

– функции $r(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda)$, где $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ – это аналоги коэффициентов перехода, удовлетворяющие условиям вещественности

$$a(\lambda) = \overline{a(-\lambda)}, \quad b(\lambda) = -\overline{b(-\lambda)}$$

и условию

$$|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1;$$

– нулей ζ_j, $j = 1, \dots, N$, функции $a(\lambda)$, расположенных симметрично относительно мнимой оси в верхней полуплоскости; и

– соответствующих нормирующих множителей m_j.

В работе [30] Л. Д. Фаддеева и Л. А. Тахтаджяна построен формализм обратной задачи, обращение отображения к данным рассеяния

$$\imath\colon (\pi(x), \varphi(x)) \to s = (r(\lambda), \zeta_j, m_j),$$

основанный на существовании треугольных операторов преобразования и интегральных уравнениях типа Гельфанда–Левитана–Марченко. Основной результат работы [30] – это доказательство полной интегрируемости уравнения SG как бесконечномерной гамильтоновой системы!

Именно, в [30] показано, что[30]

$$\imath^*\Omega = \int_0^\infty \mathrm{d}\rho(\lambda) \wedge \mathrm{d}\vartheta(\lambda)\, d\lambda + \sum_{l=1}^{n_1} dp_l \wedge dq_l + \sum_{k=1}^{n_2} (d\xi_k \wedge d\eta_k + d\theta_k \wedge d\phi_k),$$

где

$$\rho(\lambda) = -\frac{8}{\pi\beta^2\lambda} \ln|a(\lambda)|, \quad \vartheta(\lambda) = -\arg b(\lambda), \qquad \lambda > 0,$$

$$p_l = \frac{1}{\beta^2} \ln \varkappa_l, \quad q_l = 8\ln|c_l|, \qquad l = 1, \dots, n_1,$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_k &= \frac{4}{\beta^2} \ln|\lambda_k|, \quad & \eta_k &= 4\ln|d_k|, \\ \theta_k &= \arg\lambda_k, & \phi_k &= -\frac{16}{\beta^2} \arg d_k, \end{aligned}\right. \qquad k = 1, \dots, n_2.$$

Здесь $i\varkappa_l$ (где $\varkappa_l > 0$, $l = 1, \dots, n_1$) – это нули функции $a(\lambda)$, расположенные на мнимой оси, а $(\lambda_k, -\overline{\lambda}_k)$ (где $\operatorname{Im}\lambda_k, \operatorname{Re}\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, n_2$) – это пары нулей функции $a(\lambda)$, симметричных относительно мнимой оси, $N = n_1 + 2n_2$. При этом

$$c_l = m_l \dot{a}(i\varkappa_l) \quad \text{и} \quad d_k = m_k \dot{a}(\lambda_k).$$

Отметим, что соответствующие скобки Пуассона коэффициентов перехода $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ имеют следующий элегантный вид:

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = 0, \quad \{b(\lambda), b(\mu)\} = 0 \tag{4.11}$$

[30] Здесь и далее мы используем обозначения из работы [30].

и

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = \frac{\beta^2 \lambda\mu}{4(\lambda^2 - \mu^2)} a(\lambda) b(\mu). \tag{4.12}$$

Эти формулы имеют фундаментальное значение для квантования модели SG (см. п. 5.5).

Как и в случае уравнения КдФ (см. п. 4.1), тождества следов, т. е. асимптотические разложения

$$\frac{1}{i} \ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n} \qquad \text{при } \lambda \to \infty,$$

$$\frac{1}{i} \ln a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{-n} \lambda^n \quad \text{при } \lambda \to 0,$$

дают бесконечный набор интегралов движения $\{I_n\}$ модели SG. Здесь $I_0 \equiv \pi Q \pmod{2\pi}$ и

$$P = \frac{2m}{\beta^2}(I_{-1} + I_1), \qquad H = \frac{2m}{\beta^2}(I_{-1} - I_1). \tag{4.13}$$

Гамильтониан H и импульс P модели SG выражаются только через переменные типа “действие” следующими красивыми и прозрачными формулами:

$$P = \int_0^{\infty} p(\lambda) \rho(\lambda)\, d\lambda + \sum_{l=1}^{n_1} P_{sl} + \sum_{k=1}^{n_2} P_{bk}, \tag{4.14}$$

$$H = \int_0^{\infty} \sqrt{p(\lambda)^2 + m^2}\, \rho(\lambda)\, d\lambda + \sum_{l=1}^{n_1} \sqrt{P_{sl}^2 + M_s^2} + \sum_{k=1}^{n_2} \sqrt{P_{bk}^2 + M_{bk}^2}\,, \tag{4.15}$$

где

$$p(\lambda) = m\biggl(\frac{1}{8\lambda} - 2\lambda\biggr), \quad P_{sl} = \frac{m}{\beta^2}\biggl(\frac{1}{\varkappa_l} - 16\varkappa_l\biggr),$$

$$P_{bk} = \frac{m(\lambda_k - \overline{\lambda}_k)}{\beta^2}\biggl(\frac{1}{|\lambda_k|^2} - 16\biggr)$$

и

$$M_s = \frac{8m}{\beta^2}\,, \quad M_{bk} = \frac{16m}{\beta^2} \sin\theta_k. \tag{4.16}$$

Эти формулы допускают следующую интерпретацию в терминах классических частиц, порождаемых уравнением SG. Именно, первые слагаемые в (4.14), (4.15) представляют собой вклад от релятивистских частиц с массой m, импульсом $p(\lambda)$ и плотностью $\rho(\lambda)$, порождаемых непрерывным спектром оператора L. Топологический заряд этих частиц равен нулю. Вторые слагаемые уже записаны в виде суммы по частицам с массой M_s и импульсами P_{sl}. Эти частицы нового типа порождаются собственными значениями дискретного спектра оператора L, лежащими на мнимой оси. Им отвечают солитоны – локализованные частицеподобные решения уравнения SG с топологическим зарядом

$$Q = \operatorname{sign} c_l.$$

Третьи слагаемые в (4.14), (4.15) порождаются симметричными относительно мнимой оси парами собственных значений дискретного спектра оператора L и представляют собой частицы с массой M_{bk} и импульсом P_{bk}, обладающие внутренней степенью свободы, причем в зависимости от внутреннего состояния их масса меняется от нуля до удвоенной массы солитона. Соответствующие им решения уравнения SG – это так называемые двойные солитоны, или бризеры ("breathers"), имеющие нулевой топологический заряд. Они отвечают связанным состояниям солитонов с антисолитонами. Таким образом, на примере классического спектра возбуждений модели была реализована мечта Эйнштейна о том, что "одно нелинейное поле с самодействием порождает несколько сортов частиц". В результате, помимо скалярной частицы массы m, квазиклассический спектр содержит[31] солитоны и антисолитоны с массой $8m/\beta^2$, а также их связанные состояния с массами

$$M_n = \frac{16m}{\beta^2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta^2}{16}\right),$$

где предполагалось, что квантовая теория определена только при $\beta^2 = 8\pi/N$, N – целое[32].

В продолжение статьи [30], в совместной с Л. А. Тахтаджяном работе [37] Л. Д. Фаддеев доказал[33], что в классе быстроубывающих начальных данных задача Коши (4.9)–(4.10) для уравнения SG эквивалентна соответствующей задаче в координатах светового конуса. Там же для последней задачи был развит гамильтонов формализм и установлена ее полная интегрируемость.

4.3. Гамильтонов подход к теории солитонов. Усовершенствованный вариант представления Лакса (4.3), так называемое представление нулевой кривизны,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U(x,t,\lambda)F, \tag{4.17}$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} = V(x,t,\lambda)F, \tag{4.18}$$

где U и V – матрицы размера $n\times n$, зависящие от некоторого набора функций $u_\alpha(x,t)$ и параметра λ, так называемого спектрального параметра. Условие совместности системы (4.17)–(4.18),

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U,V] = 0, \tag{4.19}$$

справедливое при всех значениях λ, и задает систему нелинейных эволюционных уравнений на функции $u_\alpha(x,t)$.

---

[31]Эти результаты были изложены в работе L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, "*The relativistic one-dimensional model, generating several particles*", которая дважды (в декабре 1973 г. и в июне 1974 г.) посылалась в журнал "Physics Letters", но по непонятным до сих пор причинам так и не была опубликована, см. [33].

[32]Как мы увидим в разделе 5, предположение о целочисленности $8\pi/\beta^2$ не нужно и правильной в однопетлевом приближении является формула (5.3) без добавки "индекса Маслова" 1/2.

[33]тем самым исправляя не влияющее на дальнейшее изложение неверное замечание в [29].

Таким образом представляется широкий класс интегрируемых нелинейных уравнений, включая уравнение КдФ, уравнение SG, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение магнетика Гейзенберга и многие другие. Так, для уравнения SG представление нулевой кривизны[34] имеет вид

$$U(x,t,\lambda) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -i\beta\pi(x) & m\lambda e^{-i\beta\varphi(x)/2} - \dfrac{m}{\lambda}e^{i\beta\varphi(x)/2} \\ \dfrac{m}{\lambda}e^{-i\beta\varphi(x)/2} - m\lambda e^{i\beta\varphi(x)/2} & i\beta\pi(x) \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

и

$$V(x,t,\lambda) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -i\beta\varphi_x(x) & m\lambda e^{-i\beta\varphi(x)/2} + \dfrac{m}{\lambda}e^{i\beta\varphi(x)/2} \\ -\dfrac{m}{\lambda}e^{-i\beta\varphi(x)/2} - m\lambda e^{i\beta\varphi(x)/2} & i\beta\varphi_x(x) \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

При этом формализм метода обратной задачи рассеяния для уравнения Шрёдингера, использовавшийся для решения уравнения КдФ, естественным образом обобщается на случай уравнения (4.17) как метод задачи Римана–Гильберта о матричной факторизации. Согласно общей теории Гохберга–Крейна, эта задача сводится к фредгольмовой системе интегральных уравнений типа Винера–Хопфа. В простейших случаях эта система может быть сведена к интегральным уравнениям типа Марченко с компактными интегральными операторами.

Гамильтонов подход к интегрируемым нелинейным уравнениям разрабатывался учениками Л. Д. Фаддеева, сотрудниками лаборатории математических проблем физики ЛОМИ: П. П. Кулишом, А. Г. Рейманом, Н. Ю. Решетихиным, М. А. Семеновым-Тян-Шанским, Е. К. Скляниным и Л. А. Тахтаджяном. Гамильтонова структура соответствующих уравнений оказывается тесно связанной с пуассоновой структурой на двойственном пространстве к алгебре Ли. Как показал М. А. Семенов-Тян-Шанский, она элегантно записывается в терминах введенной Е. К. Скляниным классической r-матрицы. Так, в работе [46], совместной с Н. Ю. Решетихиным, была установлена связь пуассоновой структуры интегрируемых моделей классической теории поля с алгеброй петель и ее обобщениями. Все эти результаты нашли свое отражение в монографии Л. Д. Фаддеева и Л. А. Тахтаджяна [52][35].

В качестве основного примера в монографии [52] было выбрано нелинейное уравнение Шрёдингера (уравнение NS)

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2\varkappa|\psi|^2\psi, \qquad -\infty < x,t < \infty, \tag{4.22}$$

имеющее много физических приложений. В отличие от уравнения КдФ, уравнение NS имеет естественный квантовый аналог, описывающий систему многих частиц, взаимодействующих с δ-образным потенциалом (см. п. 5.2). Как и уравнения КдФ и SG, уравнение NS является бесконечномерной гамильтоновой системой. Фазовое пространство – это векторное пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$

[34]Здесь по сравнению с [52] мы заменили λ на $1/\lambda$.

[35]В 2007 г. эта монография была переиздана издательством Шпрингер в серии “Classics in Mathematics”.

комплекснозначных функций с комплексными координатами $\psi(x)$ и $\overline{\psi}(x)$ и симплектической формой

$$\Omega = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\psi(x) \wedge \mathrm{d}\overline{\psi}(x)\, dx,$$

которой отвечают следующие скобки Пуассона:

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} = 0, \quad \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = \delta(x-y). \tag{4.23}$$

Уравнение NS представляется в гамильтоновом виде

$$\psi_t = \{H, \psi\}, \quad \bar{\psi}_t = \{H, \bar{\psi}\}$$

с гамильтонианом

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_x|^2 + \varkappa|\psi|^4)\, dx. \tag{4.24}$$

Соответствующие скобки Пуассона коэффициентов перехода $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$[36] имеют следующий вид:

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = 0, \quad \{b(\lambda), b(\mu)\} = 0 \tag{4.25}$$

и

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = -\frac{\varkappa}{\lambda-\mu} a(\lambda) b(\mu). \tag{4.26}$$

Тождества следов

$$\frac{1}{i}\ln a(\lambda) = \varkappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n} \quad \text{при } \lambda \to \infty \tag{4.27}$$

дают бесконечный набор интегралов движения уравнения NS, и при этом

$$H = I_3. \tag{4.28}$$

Эти формулы имеют фундаментальное значение для квантования уравнения NS (см. п. 5.2).

5. Квантовые интегрируемые системы

5.1. Квазиклассическое квантование. С самого начала своей работы над интегрируемыми уравнениями Л. Д. Фаддеев осознавал их богатый потенциал для квантования[37]. Под этим углом зрения особый интерес представляло уравнение SG, квантовая версия которого, как ожидалось Л. Д. Фаддеевым, должна была дать пример релятивистской квантовой теории поля с богатым спектром частиц (основные частицы, солитоны, их связанные состояния, соответствующие бризерам), порождаемым всего одним полем φ в исходном уравнении (4.9). При этом было бы естественно ожидать, что квантовая версия

[36] Здесь $b(\lambda)$ соответствует $\bar{b}(\lambda)$ из [52], для согласования с п. 5.2.

[37] В своей научной автобиографии [54] он писал: “Если в одном слове сфокусировать сферу моих научных интересов, получится квантование”.

модели, как и исходная классическая, окажется точно решаемой. Задача построения теории квантовых интегрируемых систем, обобщающей метод обратной задачи рассеяния, стала с этого момента важнейшим направлением работы Л. Д. Фаддеева. Разработка гамильтонова подхода к теории солитонов (см. п. 4.3) естественно вписывалась в программу квантования как необходимый подготовительный этап.

Первым шагом в исполнении программы стало квантование модели SG в квазиклассическом приближении. В 1974 г. П. П. Кулиш, один из первых учеников Людвига Дмитриевича, показал, что наличие бесконечного числа локальных законов сохранения для уравнения SG означает, что импульсы p_{in} входящих (при $t \to -\infty$) и вылетающих p_{out} (при $t \to \infty$) частиц – солитонов, двойных солитонов, и основных частиц – удовлетворяют уравнениям

$$\sum_a (p_a^{2n+1})_{\text{in}} = \sum_b (p_b^{2n+1})_{\text{out}}, \tag{5.1}$$

$$\sum_a (p_a^0 p_a^{2n})_{\text{in}} = \sum_b (p_b^0 p_b^{2n})_{\text{out}}, \tag{5.2}$$

где $p_a^0 = \sqrt{p_a^2 + m_a^2}$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$. Из этих уравнений непосредственно следует, что число частиц каждого вида и их импульсы сохраняются после взаимодействия. Замечательным образом это свойство сохраняется при квантовании, в модели SG отсутствует множественное рождение частиц, и число частиц каждого вида и их импульсы сохраняются после взаимодействия! Этот неожиданный[38] для физиков-теоретиков результат был в рамках теории возмущений доказан И. Я. Арефьевой, одной из первых учениц Людвига Дмитриевича, и его новым учеником В. Е. Корепиным. Более тонкие рассуждения, использующие локальность интегралов движения, приводят к замечательному выводу: рассеяние факторизовано, т. е. все многочастичные процессы сводятся к двухчастичным.

Л. Д. Фаддеев провел систематическое квантование модели при помощи функционального интеграла в совместной с В. Е. Корепиным и П. П. Кулишом работе [31], продолженной с В. Е. Корепиным в [32]. Именно, в однопетлевом приближении там была выведена формула

$$M_n = \frac{16m}{\beta^2} \sin \frac{n\beta^2}{16} \tag{5.3}$$

для масс связанных состояний солитона и антисолитона (ср. с точной формулой (5.34)). Помимо спектра масс в [31], [32] в квазиклассическом приближении были вычислены матрицы рассеяния солитонов и сделаны предсказания о точных выражениях для них при целочисленных $8\pi/\beta^2$, отвечающих так называемому безотражательному случаю. Вычисление основано на том, что классический предел двухчастичной матрицы рассеяния определяется производящей функцией канонического преобразования от начальных координат к конечным.

[38]На физических семинарах Л. Д. Фаддеев подвергался яростной критике со стороны В. Н. Грибова и его школы, утверждавших, что квантовые поправки полностью разрушают классическую интегрируемость модели SG.

Расширенная сводка результатов для уравнения SG содержится в совместном с В. Е. Корепиным обзоре [38]. В совместной с П. П. Кулишом и С. В. Манаковым статье [36] аналогичные результаты получены для уравнения NS, которое можно рассматривать как нерелятивистский предел SG.

Отметим, что классический предел матрицы рассеяния солитонов выражается через дилогарифмы, а для точной квантовой матрицы рассеяния в случае целочисленных $8\pi/\beta^2$ в работе [31] предложено выражение в терминах функции (называемой теперь квантовым дилогарифмом), замечательные свойства которой Л. Д. Фаддеев исследовал значительно позднее (см. п. 6.2). Точные формулы для матрицы рассеяния квантовой модели при всех значениях константы связи были выведены А. Б. Замолодчиковым исходя из основных кинематических постулатов квантовой теории поля ([129], см. также [130]).

Для вычисления квантовых (так называемых однопетлевых) поправок в [31], [32], [38] Л. Д. Фаддееву еще раз представилась возможность воспользоваться своим излюбленным приемом – вычислением детерминантов дифференциальных операторов[39]. Именно, представим пропагатор G как функциональный (фейнмановский) интеграл по траекториям:

$$G = \int \exp\{iS(u)\}\, du$$

с определенными граничными условиями. Разлагая затем классическую функцию действия $S(u)$ в окрестности стационарной точки, в качестве которой берется траектория $u_0(x,t)$ (например, многосолитонное решение: $u = u_0 + \varphi$), получаем

$$S(u) = S_0 + \varphi K \varphi + O(\phi^3), \qquad K = K_0 + \varepsilon v(x,t), \quad K_0 = \partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2.$$

Однопетлевое приближение дается тогда гауссовым интегралом

$$G \sim \int \exp\Bigl\{ i \int \varphi K \varphi \Bigr\} \prod D\varphi \sim \det{}^{1/2}(K/K_0),$$

который формально определяется как регуляризованный детерминант дифференциального оператора K. Этот детерминант, как обычно, выражается через след резольвенты:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \ln \det K = \operatorname{tr} vK^{-1}$$

– прием, который Л. Д. Фаддеев очень любил и часто использовал (см. п. 2.2). Поскольку для уравнения SG существует полное описание решений в терминах данных рассеяния (см. п. 4.2), для линеаризованного уравнения в окрестности многосолитонного решения также имеется полное описание всех решений, а следовательно, и явная формула для его резольвенты. После этого нахождение искомых величин сводится к прямому вычислению. Строго говоря, схема вычисления на самом деле несколько сложнее, чем описано выше, из-за наличия нулевых собственных значений у оператора K (так называемая проблема нулевых мод). Решение этой проблемы содержится в совместной с В. Е. Корепиным работе [35].

[39] И снова процитируем [54]: "Если одним термином охарактеризовать технические средства, это будет детерминант".

5.2. Квантовый метод обратной задачи: первые шаги. Успех с квантованием уравнения SG в квазиклассическом приближении укрепил надежду на возможность точного квантования этой модели. Вместе с тем было очевидно, что возможности квазиклассического квантования уже исчерпаны, и в начале 1978 г. на одном из "фаддеевских" семинаров[40] Людвиг Дмитриевич поставил задачу перенести метод обратной задачи рассеяния на квантовый случай.

К концу 1970-х были известны три группы примеров квантовых систем, которые можно было назвать "интегрируемыми" в том смысле, что для них было известно точное решение.

Во-первых, это квантовое уравнение NS. При квантовании поля $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ со скобками Пуассона (4.23) заменяются соответственно на операторы $\Psi(x)$ и $\Psi^\dagger(x)$ с каноническими коммутационными соотношениями[41]

$$[\Psi(x), \Psi(y)] = [\Psi(x)^\dagger, \Psi^\dagger(y)] = 0, \qquad [\Psi(x), \Psi^\dagger(y)] = \delta(x-y)I.$$

Быстроубывающему случаю

$$\psi(x), \bar{\psi}(x) \to 0, \qquad |x| \to \infty,$$

соответствует квантование в пространстве Фока (см. [87]), представляющем собой ортогональную сумму вакуумного подпространства, порожденного вектором Ω, удовлетворяющим условию $\Psi(x)\Omega = 0$, и N-частичных подпространств, порожденных векторами вида

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x_1,\dots,x_N)\Psi^\dagger(x_1)\cdots\Psi^\dagger(x_N)\,d^N x\right)\Omega.$$

Квантовый гамильтониан получается из (4.24) заменой ψ, $\bar{\psi}$ на Ψ, $\Psi^\dagger$ и нормальным упорядочением:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\Psi_x^\dagger(x)\Psi_x(x) + \varkappa\Psi^\dagger(x)\Psi^\dagger(x)\Psi(x)\Psi(x)\big)\,dx. \tag{5.4}$$

На N-частичном подпространстве этот гамильтониан превращается в сингулярный дифференциальный оператор

$$H_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \varkappa \sum_{1\leqslant j<k\leqslant N} \delta(x_j - x_k), \tag{5.5}$$

явные выражения для собственных функций которого были построены в работах Ф. А. Березина, Дж. Б. Макгвайра, Ч.-Н. Янга, Э. Брезена и Ж. Зин-Жюстена.

Вторым источником примеров квантовых интегрируемых систем были работы Б. Костанта по квантованию открытой цепочки Тоды методами теории представлений.

[40] О значении фаддеевского семинара подробно рассказано во вступительной статье М. А. Семенова-Тян-Шанского к сборнику "L. D. Faddeev's seminar on mathematical physics" [120].

[41] Здесь мы положили постоянную Планка $\hbar$ равной 1.

В-третьих, наконец, в физике твердого тела и в статистической физике начиная с классических работ Изинга и Бете интенсивно шло изучение точно решаемых решеточных моделей фазовых переходов и тесно связанных с ними спиновых цепочек. В частности, к середине 1970-х годов в работах Р. Бакстера был доведен до совершенства метод трансфер-матрицы, сыгравший важную роль в становлении квантового метода обратной задачи.

Все перечисленные выше подходы, на первый взгляд, не имели ничего общего с методом обратной задачи рассеяния в теории солитонов. Первый шаг на пути синтеза классических и квантовых методов был сделан в совместной статье [39] Л. Д. Фаддеева с новым учеником Е. К. Склянининым, где на примере уравнений NS и SG было предложено положить в основу квантования коэффициенты перехода $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, через которые выражаются данные рассеяния (см. пп. 4.2 и 4.3).

Для обоих уравнений имеют место фундаментальные скобки Пуассона для $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$:

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = 0, \qquad \{a(\lambda), a(\mu)\} = 0, \tag{5.6}$$

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = a(\lambda)b(\mu)\rho(\lambda,\mu), \tag{5.7}$$

где для NS и SG имеем соответственно[42] (см. (4.26) и (4.12))

$$\rho_{\mathrm{NS}}(\lambda,\mu) = \frac{c}{\lambda-\mu}\,, \qquad \rho_{\mathrm{SG}}(\lambda,\mu) = \frac{2\gamma\lambda\mu}{\lambda^2-\mu^2}\,, \tag{5.8}$$

где[43] $\gamma = \beta^2/8$. Здесь мы также положили $c = -\varkappa < 0$, ограничившись случаем притягивающего потенциала в гамильтониане (5.5), поскольку именно для такого выбора знака константы связи уравнение NS является нерелятивистским пределом уравнения SG.

В работе [39] было высказано предположение, что правильным квантовым аналогом квадратичной скобки Пуассона (5.7) является квадратичное коммутационное соотношение

$$A(\lambda)B(\mu) = B(\mu)A(\lambda)\check{\rho}(\lambda,\mu) \tag{5.9}$$

для неких квантовых операторов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. В квазиклассическом приближении[44]

$$\check{\rho}(\lambda,\mu) \simeq 1 - i\rho(\lambda,\mu).$$

В качестве точных выражений для $\alpha(\lambda,\mu)$ было предложено использовать

$$\check{\rho}_{\mathrm{NS}}(\lambda,\mu) = \frac{\lambda-\mu-ic/2}{\lambda-\mu+ic/2}\,, \tag{5.10}$$

$$\check{\rho}_{\mathrm{SG}}(\lambda,\mu) = \frac{\operatorname{sh}(\alpha-\beta) - i\sin(\gamma/2)}{\operatorname{sh}(\alpha-\beta) + i\sin(\gamma/2)}\,, \tag{5.11}$$

где[45] $\alpha = \ln\lambda$, $\beta = \ln\mu$ – это так называемые физические быстроты.

[42] См. сноски 34 и 36.

[43] Это согласуется с обозначениями в [40] и [52]; в работе [30] использовалось $\gamma = \beta^2$.

[44] Поскольку мы положили $\hbar = 1$, то ему соответствует $\varkappa \to 0$ или $\gamma \to 0$.

[45] Так как в основном мы используем $\gamma = \beta^2/8$ в качестве константы связи модели SG, то использование β для быстроты не должно привести к путанице.

Как и в классическом случае, логарифм $A(\lambda)$ должен являться производящей функцией коммутирующих локальных интегралов движения. Что касается операторов $B(\lambda)$, в работе [39] было предложено интерпретировать их как операторы рождения собственных функций оператора $A(\lambda)$. Действительно, определим вакуум Ω как общий собственный вектор для всех $A(\lambda)$ с единичным собственным значением: $A(\lambda)\Omega = \Omega$. Тогда в силу соотношений (5.9) вектор

$$\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B(\lambda_1) \cdots B(\lambda_N)\Omega$$

тоже является собственным вектором всех операторов $A(\lambda)$ с собственным значением $\prod_{n=1}^{N} \check{\rho}(\lambda, \lambda_n)$.

Конкретный выбор коэффициентов $\check{\rho}(\lambda, \mu)$ обосновывался в [39] изучением аналитических свойств собственных значений $A(\lambda)$ по параметру λ и требованиями согласования получающихся результатов для связанных состояний с формулой (5.3). В случае модели NS дополнительным аргументом послужили вычисления Е. К. Склянина [121], который показал, что в этом случае имеют место явные формулы

$$A_{\mathrm{NS}}(\lambda) = {:}a_{\mathrm{NS}}\left(\lambda + \frac{ic}{2}\right){:} \quad \text{и} \quad B_{\mathrm{NS}}(\lambda) = {:}b_{\mathrm{NS}}(\lambda){:},$$

где $:\Phi:$ означает оператор в пространстве Фока, нормальным символом (см. [87]) которого является классический функционал Φ от канонических полей $\bar{\psi}$ и ψ, в терминах которых описывается уравнение NS.

Аналогом формул (4.27)–(4.28) в классическом случае является следующее выражение для квантового гамильтониана модели NS:

$$H = I_3 + \frac{c^2}{12} I,$$

где I – единичный оператор, и

$$\ln A(\lambda) = -ic \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n}\,.$$

Раскладывая $\ln \prod_{k=1}^{N} \check{\rho}(\lambda, \lambda_k)$ по степеням λ^{-1}, получаем

$$H\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = E(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N),$$

где

$$E(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2.$$

В случае модели NS в определенной степени помог элемент везения: квантовая модель, несмотря на наличие взаимодействия, реализовалась в том же гильбертовом пространстве представления канонических коммутационных соотношений, что и для свободных полей, т. е. в пространстве Фока. Благодаря этому задача распадалась на серию N-частичных квантово-механических задач, которые допускали явное решение, а операторы $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ допускали явное описание в терминах нормальных символов. В случае же полноценной релятивистской квантовой теории поля (такой как модель SG), с заведомо несвободным представлением канонических коммутационных соотношений, расходимостями и перенормировками, шансов на такой простой ответ не было и требовался какой-то существенно новый подход.

5.3. Квантовый метод обратной задачи: R-матрица. Удивительным образом из всех упомянутых выше подходов Л. Д. Фаддеев больше всего увлекся трудными для изучения и далекими от области его непосредственных интересов работами Р. Бакстера (см. [86]). В этом проявилась гениальная интуиция Л. Д. Фаддеева, он почувствовал глубокий математический потенциал, скрытый в этих работах!

Именно, следуя совместной работе Л. Д. Фаддеева и Л. А. Тахтаджяна [41], подход Бакстера можно изложить следующим образом. Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$, а $R(\lambda)$ – зависящий от комплексного параметра λ оператор[46] в $V\otimes V$. Обозначим через R_{12}, R_{13}, R_{23} операторы в $V\otimes V\otimes V$, отвечающие трем вложениям

$$\operatorname{End}(V\otimes V)\hookrightarrow \operatorname{End}(V\otimes V\otimes V).$$

Более точно,

$$R_{12}=R\otimes I,\qquad R_{23}=I\otimes R,$$

где I – единичный оператор в V, а

$$R_{13}(u\otimes v\otimes w)=\sum_k u_k\otimes v\otimes w_k,\qquad \text{где}\qquad R(u\otimes w)=\sum_k u_k\otimes w_k.$$

С каждой матрицей $R(\lambda)$, которая при всех λ и μ удовлетворяет уравнению

$$R_{12}(\lambda-\mu)R_{13}(\lambda)R_{23}(\mu)=R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda)R_{12}(\lambda-\mu), \tag{5.12}$$

естественным образом связано коммутативное семейство операторов $t_N(\lambda)$ в векторном пространстве

$$V^{\otimes N}=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{N}$$

для произвольного N, описываемое следующим образом. В общем случае предполагается, что $\det R(\lambda)$ – мероморфная функция λ.

Пусть P – оператор перестановки в $V\otimes V$:

$$P(u\otimes v)=v\otimes u,\qquad u,v\in V.$$

Используя вложение

$$\imath_n\colon \operatorname{End}V\hookrightarrow \operatorname{End}(V^{\otimes N}),$$

[46]У Бакстера $V=\mathbb{C}^2$, а $R(\lambda)$ – матрица размера 4×4, составленная из больцмановских весов восьмивершинной модели.

при котором оператор $a \in \operatorname{End} V$ нетривиально действует только в множителе с номером n в тензорном произведении $V^{\otimes N}$, $n = 1, \dots, N$, рассмотрим отображение

$$\operatorname{End}(V \otimes V) \ni A = \sum_k a_k \otimes b_k \mapsto A_n = \sum_k a_k \otimes \imath_n(b_k) \in \operatorname{End} V \otimes \operatorname{End}(V^{\otimes N}).$$

Другими словами, A_n – это матрица в пространстве V, элементами которой являются операторы в пространстве $V^{\otimes N}$. Полагая теперь

$$L_n(\lambda) = R(\lambda + \eta)_n \quad \text{и} \quad \widehat{R}(\lambda) = PR(\lambda), \tag{5.13}$$

убеждаемся, что уравнение (5.12) переписывается в виде

$$\widehat{R}(\lambda - \mu)(L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)) = (L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda))\widehat{R}(\lambda - \mu), \qquad n = 1, \dots, N. \tag{5.14}$$

Здесь $\otimes$ означает тензорное произведение по “вспомогательному” пространству V и операторное произведение в “квантовом” пространстве $V^{\otimes N}$. Поскольку при разных n отображения $\imath_n$ коммутируют, из (5.14) получаем

$$\widehat{R}(\lambda - \mu)(T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)) = (T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda))\widehat{R}(\lambda - \mu), \tag{5.15}$$

где

$$T_N(\lambda) = L_N(\lambda) \cdots L_1(\lambda) \tag{5.16}$$

есть “квантовая” матрица монодромии – упорядоченное произведение $L_n(\lambda)$ вдоль конечной цепочки $1, \dots, N$. Эквивалентным образом,

$$R(\lambda - \mu)(T_N(\lambda) \otimes I)(I \otimes T_N(\mu)) = (I \otimes T_N(\mu))(T_N(\lambda) \otimes I)R(\lambda - \mu). \tag{5.17}$$

Полагая теперь

$$t_N(\lambda) = \operatorname{tr}_V T_N(\lambda) \in \operatorname{End}(V^{\otimes N}), \tag{5.18}$$

из (5.15) получаем

$$[t_N(\lambda), t_N(\mu)] = 0.$$

Именно это свойство коммутативности “трансфер-матриц” $t_N(\lambda)$ приводит к точному решению восьмивершинной модели и позволяет рассматривать $t_N(\lambda)$ как производящую функцию интегралов движения для соответствующей квантовой спиновой цепочки.

Замечательным образом Л. Д. Фаддеев уловил сходство квантовой матрицы монодромии $T_N(\lambda)$ и матрицы монодромии для представления нулевой кривизны (4.17)–(4.18)! Именно, матрица монодромии $T(x; \lambda)$ для уравнения (4.17) определяется как решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx} T(x; \lambda) = U(x; \lambda) T(x; \lambda), \qquad T(0; \lambda) = I,$$

где I – единичная матрица.

В дискретной версии, когда непрерывная переменная x пробегает решетку $x_n = n\Delta$ с шагом Δ и $n \in \mathbb{Z}$, уравнение (4.17) приобретает вид

$$F_{n+1} = L_n(\lambda) F_n,$$

а матрица монодромии определяется следующим образом:

$$T_N(\lambda) = L_N(\lambda) \cdots L_1(\lambda). \tag{5.19}$$

При $\Delta \to 0$ имеем

$$L_n(\lambda) \approx I + \Delta U(x_n; \lambda).$$

Теперь тождественность формул (5.16) и (5.19) очевидна.

Вышеописанные идеи легли в основу совместной статьи [40] Л. Д. Фаддеева с Е. К. Скляниным и Л. А. Тахтаджяном, в которой было дано точное решение квантовой модели SG и сформулирован квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) – метод точного решения квантовых моделей, отвечающих уравнениям, интегрируемым классическим методом обратной задачи (см. раздел 4). Прежде чем перейти к описанию результатов [40], сформулируем, следуя этой работе, основные алгебраические положения КМОЗ.

5.4. Квантовый метод обратной задачи: общая схема. *Первый ключевой элемент* КМОЗ – это локальный L-оператор, обобщающий матрицы (5.13) из подхода Бакстера. Именно, предположим, что с каждым узлом n конечной решетки длины N связано пространство состояний – конечное или бесконечномерное гильбертово пространство $\mathfrak{h}_n$ – и задана зависящая от “спектрального” параметра λ матрица $L_n(\lambda)$ в пространстве V, элементами которой являются операторы в $\mathfrak{h}_n$. Такая матрица $L_n(\lambda)$ называется L-оператором, если существует матрица $\widehat{R}(\lambda,\mu) \in \mathrm{End}(V \otimes V)$, для которой при всех λ и μ выполняется соотношение (5.14), т. е.

$$\widehat{R}(\lambda,\mu)(L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)) = (L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda))\widehat{R}(\lambda,\mu). \tag{5.20}$$

Подчеркнем, что, в отличие от подхода Бакстера, произошло разделение вспомогательного пространства V и гильбертова пространства $\mathfrak{h}$, играющего роль квантового пространства состояний в n-м узле. При этом уравнение (5.12) отвечает рассмотренному Бакстером случаю

$$L(\lambda) = R(\lambda + \eta).$$

Такое разграничение ролей R-матрицы и L-оператора играет ключевую роль в КМОЗ, и в этом разделении в зародыше содержится будущая теория квантовых групп! (См. п. 6.1.)

Рассматривая тензорное произведение гильбертовых пространств

$$\mathfrak{H}_N = \mathfrak{h}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{h}_N$$

(полное гильбертово пространство на N узлах) и вкладывая, как и выше, операторы в $\mathfrak{h}_n$ в операторы в пространстве $\mathfrak{H}_N$, получаем, что матрица

$$T_N(\lambda) = L_N(\lambda) \cdots L_1(\lambda)$$

(квантовая матрица монодромии) удовлетворяет тому же соотношению (5.15), что и локальные L-операторы, т. е.

$$\widehat{R}(\lambda,\mu)(T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)) = (T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda))\widehat{R}(\lambda,\mu). \tag{5.21}$$

Опять же, как и выше, отсюда следует коммутативность семейства операторов $t_N(\lambda) = \mathrm{tr}_V\, T_N(\lambda)$ в $\mathfrak{H}_N$.

Второй фундаментальный принцип КМОЗ – это открытый в [40] алгебраический анзац Бете диагонализации коммутативного семейства операторов $t_N(\lambda)$. Подчеркнем, что, в отличие от подхода Бакстера, в алгебраическом анзаце Бете используются все элементы квантовой матрицы монодромии T_N и коммутационные соотношения (5.21) между ними, а не только коммутативность ее следов $t_N(\lambda)$.

Рассмотрим здесь для простоты изложения простой, но важный случай $V = \mathbb{C}^2$ и, следуя [40], [41], предположим, что матрица $\widehat{R}(\lambda,\mu)$ имеет вид

$$\widehat{R}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda,\mu) & c(\lambda,\mu) & 0 \\ 0 & c(\lambda,\mu) & b(\lambda,\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

с функциями $b(\lambda,\mu)$ и $c(\lambda,\mu)$, удовлетворяющими соотношению

$$\frac{b(\lambda,\mu)}{c(\lambda,\mu)} = -\frac{b(\mu,\lambda)}{c(\mu,\lambda)}\,.$$

Представим матрицу $T_N(\lambda)$ в виде

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix},$$

где, чтобы не загромождать обозначения, мы опустили индекс N, и выпишем вытекающие из (5.21) коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered} [B(\lambda), B(\mu)] = 0, \\ A(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{c(\mu,\lambda)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{b(\mu,\lambda)}{c(\mu,\lambda)} B(\lambda)A(\mu), \\ D(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{c(\lambda,\mu)} B(\mu)D(\lambda) - \frac{b(\lambda,\mu)}{c(\lambda,\mu)} B(\lambda)D(\mu). \end{gathered}$$

Также предположим, что существует вектор $\Omega \in \mathfrak{H}_N$ (порождающий вектор), уничтожаемый оператором $C(\lambda)$ и собственный для операторов $A(\lambda)$, $D(\lambda)$ с собственными значениями $a(\lambda)$, $d(\lambda)$ соответственно. Как и соотношение (5.21), часто существование порождающего вектора следует из аналогичных свойств L-оператора. Именно, запишем $L_n(\lambda)$ в виде

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} a_n(\lambda) & b_n(\lambda) \\ c_n(\lambda) & d_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

и предположим, что существует $\omega_n \in \mathfrak{h}_n$ такой, что

$$a_n(\lambda)\omega_n = \alpha_n(\lambda)\omega_n, \quad d_n(\lambda)\omega_n = \delta_n(\lambda)\omega_n \quad \text{и} \quad c_n(\lambda)\omega_n = 0. \tag{5.23}$$

Порождающий вектор дается формулой

$$\Omega = \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_N$$

и

$$a(\lambda) = \prod_{n=1}^{N} \alpha_n(\lambda), \quad d(\lambda) = \prod_{n=1}^{N} \delta_n(\lambda).$$

Наконец, будем искать собственные векторы коммутативного семейства операторов $t(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ в виде

$$\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} B(\lambda_i)\Omega. \tag{5.24}$$

Из приведенных выше коммутационных соотношений получаем

$$\begin{aligned} t(\lambda)\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \biggl(a(\lambda)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{c(\lambda_i,\lambda)} + d(\lambda)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{c(\lambda,\lambda_i)}\biggr)\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ + \sum_{j=1}^{n}\frac{b(\lambda,\lambda_j)}{c(\lambda,\lambda_j)}\biggl(a(\lambda_j)\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}}\frac{1}{c(\lambda_k,\lambda_j)} \\ - d(\lambda_j)\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}}\frac{1}{c(\lambda_j,\lambda_k)}\biggr)B(\lambda)\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}}B(\lambda_k)\Omega. \end{aligned}$$

Действительно, для доказательства достаточно воспользоваться симметрией вектора $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ по $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, вытекающей из коммутативности “операторов рождения” $B(\lambda)$. Слагаемое, содержащее $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, возникает очевидным образом, и также очевидно, что существуют только два слагаемых, в которых $B(\lambda_1)$ заменен на $B(\lambda)$, а остальные слагаемые следуют из симметрии. Теперь для того, чтобы вектор $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ был собственным для операторов $t(\lambda)$ с собственным значением

$$\Lambda(\lambda;\lambda_1, \dots, \lambda_n) = a(\lambda)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{c(\lambda_i,\lambda)} + d(\lambda)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{c(\lambda,\lambda_i)}\,, \tag{5.25}$$

достаточно, чтобы набор $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворял системе уравнений

$$\frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)} = \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}}\frac{c(\lambda_k,\lambda_j)}{c(\lambda_j,\lambda_k)}\,, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{5.26}$$

Это и есть знаменитые уравнения Бете, в другой форме полученные Х. Бете в 1931 г. при решении изотропного квантового магнетика Гейзенберга (см. [88]). Новыми здесь являются компактная формула для собственных векторов (5.24) и простой алгебраический вывод формул (5.25), (5.26), опирающийся только на перестановочные соотношения (5.21) и на существование порождающего вектора Ω.

Последний, третий элемент КМОЗ непосредственно зависит от рассматриваемой модели и состоит в предельном переходе к случаю “бесконечного объема” $N \to \infty$ и к снятию решетки $\Delta \to 0$ для случая непрерывных моделей.

Важнейшей задачей является определение полного (“физического”) гильбертова пространства $\mathscr{H}$ модели, в котором действуют квантовые интегралы движения, включая гамильтониан H. При этом, согласно основному принципу квантовой теории поля, оператор H должен быть положительно определен и аннулировать “физический вакуум” – специальный вектор $\Omega_{\mathrm{phys}} \in \mathscr{H}$. Выделение сепарабельного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в “большом” несепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_\infty$, нахождение спектра квантовых интегралов движения с использованием предельного перехода в уравнениях анзаца Бете (5.26), построение асимптотических состояний и S-матрицы – все это зачастую требует сложных технических средств[47].

5.5. Квантовый метод обратной задачи: модель SG. Для избавления от ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля (т. е. расходимостей на малых расстояниях) необходимо перейти к теории на конечной решетке, когда пространственная переменная x принимает дискретные значения

$$x_n = -L + (n-1)\Delta, \quad n = 1, \dots, N, \quad \text{и} \quad x_{N+1} = L.$$

Шаг решетки Δ играет роль параметра ультрафиолетового обрезания, а ее длина $2L$ – роль инфракрасного обрезания.

Классический L-оператор для решеточной модели SG имеет вид

$$L_n^{\mathrm{cl}}(\lambda) = I + \int_{x_n}^{x_n+\Delta} U(x,\lambda)\,dx + O(\Delta^2),$$

где $U(x,\lambda)$ дается формулой (4.20), а для соответствующего квантового L-оператора в [40] была предложена формула

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{-i\Delta\beta\pi_n/4} & \dfrac{m\Delta}{4}\left(\lambda e^{-i\beta\varphi_n/2} - \dfrac{1}{\lambda} e^{i\beta\varphi_n/2}\right) \\ \dfrac{m\Delta}{4}\left(\dfrac{1}{\lambda} e^{-i\beta\varphi_n/2} - \lambda e^{i\beta\varphi_n/2}\right) & e^{i\Delta\beta\pi_n/4} \end{pmatrix}, \tag{5.27}$$

здесь π_n и φ_n – канонические операторы в $\mathfrak{h}_n = L^2(\mathbb{R})$, вложенные, как указано выше, в $\mathfrak{H}_N = \bigotimes_{n=1}^{N} \mathfrak{h}_n$ и удовлетворяющие гейзенберговым перестановочным соотношениям

$$[\varphi_m, \varphi_n] = [\pi_m, \pi_n] = 0 \quad \text{и} \quad [\varphi_m, \pi_n] = \frac{i}{\Delta}\delta_{mn} I,$$

являющимся дискретизацией соотношений

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = [\pi(x), \pi(y)] = 0 \quad \text{и} \quad [\varphi(x), \pi(y)] = i\delta(x-y) I$$

для полевых операторов $\varphi(x)$ и $\pi(x)$. Другими словами, в шрёдингеровском представлении унитарные операторы $u_n = e^{i\Delta\beta\pi_n/4}$ и $v_n = e^{i\beta\varphi_n/2}$ в $L^2(\mathbb{R})$

[47] Отметим, что в работе [40], как и в других работах по КМОЗ, не обсуждались сложные аналитические вопросы, связанные с предельными переходами $N \to \infty$, $\Delta \to 0$ и построением подпространства $\mathscr{H} \subset \mathfrak{H}_\infty$. Их строгое математическое обоснование представляет интересную и сложную задачу функционального анализа.

имеют вид

$$(u_n f)(x) = f\left(x + \frac{\beta}{4}\right), \quad (v_n f)(x) = e^{i\beta x/2} f(x)$$

и образуют вейлевскую пару:

$$u_n v_n = q v_n u_n, \qquad q = e^{i\gamma}, \quad \gamma = \frac{\beta^2}{8}\,.$$

Замечательным образом L-оператор (5.27) удовлетворяет соотношению (5.20) с R-матрицей вида (5.22), где

$$b(\lambda,\mu) = \frac{i\sin\gamma}{\operatorname{sh}(\alpha-\beta+i\gamma)} \quad \text{и} \quad c(\lambda,\mu) = \frac{\operatorname{sh}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sh}(\alpha-\beta+i\gamma)}, \tag{5.28}$$

а $\alpha = \ln\lambda$, $\beta = \ln\mu$. Соотношение (5.20) выполняется с точностью до членов порядка Δ^2, что вполне удовлетворительно для перехода к пределу $\Delta \to 0$.

В работе [40] показано, что после модификации диагональных матричных элементов L-оператора[48]

$$(L_n(\lambda))_{11} \mapsto (\widetilde{L}_n(\lambda))_{11} = u_n^*\left(1 + \frac{S}{2}(qv_n^2 + q^{-1}v_n^{*2})\right),$$
$$(L_n(\lambda))_{22} \mapsto (\widetilde{L}_n(\lambda))_{22} = \left(1 + \frac{S}{2}(qv_n^2 + q^{-1}v_n^{*2})\right)u_n,$$

где $S = (m\Delta/4)^2$, парные произведения $\widetilde{L}_{n+1}(\lambda)\widetilde{L}_n(\lambda)$ L-операторов удовлетворяют соотношениям (5.23), где

$$\omega_{n,n+1} = \bigl[1 + S\cos(\beta(x_n + x_{n+1}))\bigr]\delta\left(x_{n+1} - x_n - \frac{\beta}{4} + \frac{2\pi}{\beta}\right)$$

– лежащий в оснащении гильбертова пространства $L^2(\mathbb{R}^2)$ вектор, а собственные значения операторов $(\widetilde{L}_{n+1}(\lambda)\widetilde{L}_n(\lambda))_{11}$ и $(\widetilde{L}_{n+1}(\lambda)\widetilde{L}_n(\lambda))_{22}$ на $\omega_{n,n+1}$ не зависят от n и имеют вид

$$\alpha(\lambda) = 1 + S(\lambda^2 q^{-1} + \lambda^{-2} q), \quad \delta(\lambda) = 1 + S(\lambda^2 q + \lambda^{-2} q^{-1}). \tag{5.29}$$

Для диагонализации коммутативного семейства $t_N(\lambda) = \operatorname{tr} T_N(\lambda)$, где $T_N(\lambda)$ – это матрица монодромии:

$$T_N(\lambda) = L_N(\lambda)L_{N-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda),$$

[48] В работе [40] использовались другие, эквивалентные приведенным здесь, модификация L-оператора и вектор $\omega_{n,n+1}$. Отметим, что в работе [103] были построены L-оператор решеточной модели SG

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} u_n^*\rho_n & \dfrac{m\Delta}{4}\left(\lambda v_n^* - \dfrac{1}{\lambda}v_n\right) \\ \dfrac{m\Delta}{4}\left(\dfrac{1}{\lambda}v_n^* - \lambda v_n\right) & \rho_n u_n \end{pmatrix}, \qquad \rho_n = \bigl(1 + S(qv_n^2 + q^{-1}v_n^{*2})\bigr)^{1/2},$$

и вектор

$$\omega_{n,n+1} = \bigl[1 - 2S\cos(\beta(u_{2n} + u_{2n-1}))\bigr]^{-1/2}\delta\left(u_{2n} - u_{2n-1} - \frac{\beta}{4} + \frac{2\pi}{\beta}\right),$$

для которых соотношения (5.20) и (5.23) для парных произведений L-операторов с теми же $\alpha(\lambda)$ и $\delta(\lambda)$, что и в (5.29), выполняются уже при всех Δ.

в [40] используется предложенный там алгебраический анзац Бете с порождающим вектором

$$\Omega_N = \prod_{n=1}^{N/2} \omega_{n,n+1}. \tag{5.30}$$

Переходя к пределу $N \to \infty$ и $\Delta \to 0$ такому, что $2L = N\Delta$ остается постоянным (или при конечном Δ используя L-оператор Изергина–Корепина), и считая, что при этом Ω_N переходит в вектор Ω_0, из (5.26) и (5.28), (5.29) получаем, что вектор

$$\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{l=1}^{n} B_L(\lambda_l)\Omega_0$$

является собственным для операторов $t_L(\lambda) = \operatorname{tr} T_L(\lambda)$ с собственным значением

$$\begin{aligned}\Lambda_L(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \exp\biggl\{\frac{m_1 \operatorname{ch}(2\alpha - i\gamma)L}{2}\biggr\} \prod_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}(\alpha_j - \alpha + i\gamma)}{\operatorname{sh}(\alpha_j - \alpha)} \\ + \exp\biggl\{\frac{m_1 \operatorname{ch}(2\alpha + i\gamma)L}{2}\biggr\} \prod_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}(\alpha_j - \alpha - i\gamma)}{\operatorname{sh}(\alpha_j - \alpha)}\,,\end{aligned} \tag{5.31}$$

если $\alpha_1 = \ln\lambda_1, \dots, \alpha_n = \ln\lambda_n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\exp\{-im_1 \sin\gamma \operatorname{sh}(2\alpha_j)L\} = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} \frac{\operatorname{sh}(\alpha_j - \alpha_k + i\gamma)}{\operatorname{sh}(\alpha_k - \alpha_j + i\gamma)}\,. \tag{5.32}$$

Здесь считается, что n конечно и “затравочная масса” m в L-операторе выбрана зависящей от Δ так, что $m_1 = m^2\Delta/4$ остается конечной при $\Delta \to 0$ (параметр $1/\Delta$ физики называют “импульсом обрезания”). Таким образом, мы имеем дело с системой n частиц с импульсами $m_1 \sin\gamma \operatorname{sh}(2\alpha_l)$ и энергиями $m_1 \sin\gamma \operatorname{ch}(2\alpha_l)$ с удовлетворяющими (5.32) быстротами $2\alpha_l$.

Однако такое описание является неудовлетворительным. Во-первых, состояние Ω_0 имеет топологический заряд $Q = -\infty$. Во-вторых, при $\operatorname{Im}\alpha_l = \pi/2$ энергия возбуждений становится отрицательной. Говоря физическим языком, Ω_0 является псевдовакуумом, а описанные возбуждения – квазичастицами. Выход из этой ситуации, предложенной в [40], состоит в построении физического вакуума Ω_{phys} как “заполненного моря Дирака” квазичастиц с отрицательной энергией, что означает применение к Ω_0 большого числа операторов $B_L(ie^{\alpha_l})$, где $\alpha_l + \pi i/2$ удовлетворяют (5.32), что изображается как

$$\Omega_{\text{phys}} = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ L \to \infty}} \prod_l B_L(ie^{\alpha_l})\Omega_0.$$

Поскольку операторы $B_L(\lambda)$ повышают топологический заряд на единицу, то Ω_{phys} имеет заряд $Q = 0$. Это построение требует анализа[49] предельного перехода $\Delta \to 0$, $L \to \infty$ и гипотезы о равномерном распределении α_l при $L \to \infty$

[49]См. примечание 47.

на интервале $-\Lambda \leqslant \alpha \leqslant \Lambda$ с плотностью $\rho(\alpha)$, где

$$\Lambda \sim \ln \frac{1}{m\Delta}\,.$$

В этом пределе система уравнений (5.26) естественно переходит в интегральное уравнение для функции распределения, и требование конечности решения $\rho(\alpha)$ приводит к перенормировке массы. Именно, в [40] показано, что затравочная масса m зависит от Δ следующим образом:

$$m = m_r^{(\pi-\gamma)/\pi} \Delta^{-\gamma/\pi}\,, \tag{5.33}$$

где конечная величина m_r – "перенормированная масса" – задает масштаб масс в теории, т. е. массы физических возбуждений пропорциональны m_r.[50] При этом

$$\rho(\alpha) = C m_r \operatorname{ch} \alpha',$$

где C – зависящая только от γ константа и

$$\alpha' = \frac{\pi\alpha}{\pi - \gamma}\,.$$

Физические возбуждения отличаются от вакуума на конечное число квазичастиц, поляризующих вакуум. Так, одночастичное состояние получается внесением одной квазичастицы с вещественным α, что "расталкивает" квазичастицы вакуума и приводит к образованию "дырки" – пропуску одного из $\alpha_k + \pi i/2$ с α_k, близким к α, что изображается как

$$\Psi(\alpha) = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ L\to\infty}} B_L(e^{\alpha}) \prod_l B_L(ie^{\widetilde{\alpha}_l})\Omega_0.$$

Аналогичным образом строится состояние рассеяния n частиц $\Psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, получающееся внесением в вакуум n квазичастиц с вещественными $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.[51] Их связанные состояния $\Psi_n(\alpha)$ получаются внесением в вакуум "струны" – связанного состояния n квазичастиц с $n \leqslant [\pi/\gamma] - 1$, где

$$\alpha_j = \alpha + i\gamma\biggl(j - \frac{n+1}{2}\biggr), \qquad j = 1, \ldots, n,$$

и несколько более сложным образом строится солитон-антисолитонная пара $\Psi(\alpha_s, \alpha_{\overline{s}})$. Обозначая через M массу основной частицы, получаем, что масса связанного состояния n частиц есть

$$M_n = M \frac{\sin(n\gamma'/2)}{\sin(\gamma'/2)}\,, \tag{5.34}$$

[50] С точки зрения конформной теории поля естественно включать множитель $\Delta^{-\gamma/\pi}$ в определение операторов v_n и v_n^*, так как операторы $e^{\pm i\beta\varphi(x)/2}$ имеют "аномальную размерность". При этом выражения $m_r^{(\pi-\gamma)/\pi} v_n$ и $m_r^{(\pi-\gamma)/\pi} v_n^*$ в L-операторе имеют размерность массы.

[51] Построение "физического" гильбертова пространства $\mathscr{H}$, порожденного этими векторами, как подпространства в несепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_\infty$ – тензорном произведении по всем $x \in \mathbb{R}$ оснащенного гильбертова пространства $L^2(\mathbb{R})$ – представляет собой сложную задачу функционального анализа. Ср. с определением асимптотического пространства $\mathscr{H}_{\mathrm{as}}$ в п. 8.2.2.

а масса солитона дается формулой

$$M_s = \frac{M}{2\sin(\gamma'/2)}\,, \tag{5.35}$$

где

$$\gamma' = \frac{\pi\gamma}{\pi-\gamma}$$

– это перенормированная константа связи. Точная формула (5.34) в однопетлевом приближении переходит в формулу (5.3), а в квазиклассическом пределе формулы (5.34), (5.35) переходят в классические формулы (4.16).[52]

Наконец, определяя оператор $A(\lambda)$ как

$$A(\lambda) = \lim_{L\to\infty} \frac{t_L(\lambda^{\pi-\gamma/\pi} e^{i\gamma/2})}{\Lambda_L(\lambda^{\pi-\gamma/\pi} e^{i\gamma/2})}\,,$$

где $\Lambda_L(\lambda)$ – собственное значение оператора (5.5) на $\Psi(\alpha)$ при конечном L, а оператор $B(\lambda)$ как оператор рождения основной частицы,

$$B(\lambda)\Psi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \Psi(\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_n),$$

получаем, что $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ удовлетворяют предсказанному в [39] соотношению (5.9), где $\check{\rho}(\lambda,\mu)$ дается формулой (5.11) с заменой γ на γ'! Как и в классическом случае, квантовые операторы импульса P и энергии H находятся из асимптотик оператора $A(\lambda)$

$$\ln A(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} I^{\pm}_{2j-1} e^{\mp\alpha(2j-1)}, \qquad \alpha\to\pm\infty, \tag{5.36}$$

по формулам, аналогичным (4.13):

$$P = \frac{M_s}{4}(I_1^- + I_1^+), \qquad H = \frac{M_s}{4}(I_1^- - I_1^+).$$

На этом мы закончим описание работы [40].[53]

5.6. Квантовый метод обратной задачи: спиновые цепочки. Помимо работы [40], алгебраический анзац Бете, как и сам метод трансфер-матрицы Бакстера, был детально описан в работе [41], на которой большей частью и основывалось приведенное в п. 5.3 изложение. Л. Д. Фаддеев очень любил излагать эту конструкцию в педагогических обзорах и лекциях [42], [43], [47], [61],

[52] В современном подходе основными частицами модели SG принято считать солитоны и антисолитоны с массой m_s, имеющие связанные состояния – бризеры с массами $2m_s\sin(\gamma' k/2)$, где $k \leqslant [\pi/\gamma']$. Основные частицы отвечают при этом $k=1$ и отсутствуют при $\gamma' > \pi/2$. Бризеры также можно рассматривать как связанные состояния основных частиц, что соответствует “ядерной демократии”.

[53] В начале 1979 г. Л. Д. Фаддеев направил телеграмму (электронной почты тогда еще не было) Ч.-Н. Янгу “Solved Sine-Gordon model by Bethe Ansatz” и получил в ответ – “Congratulations!”.

[68], [69], [72], [77], [79]. Однако основным предметом работы [41] было обобщение алгебраического анзаца Бете на так называемую спиновую XYZ-цепочку. Эта интегрируемая модель задается гамильтонианом

$$H_{XYZ} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(J_x\sigma_n^1\sigma_{n+1}^1 + J_y\sigma_n^2\sigma_{n+1}^2 + J_z\sigma_n^3\sigma_{n+1}^3), \tag{5.37}$$

определенным как оператор в квантовом пространстве $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. Здесь

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– стандартные матрицы Паули, а σ_n^a, $a = 1, 2, 3$, – это их вложения в $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ как операторов, действующих на n-й множитель тензорного произведения. В (5.37) подразумевается также периодичность $n + N \equiv n$. При $J_x = J_y$ гамильтониан H_{XYZ} коммутирует с так называемым оператором числа магнонов

$$M = \sum_{n=1}^{N}(\sigma_N^3 - 1), \tag{5.38}$$

и соответствующая R-матрица имеет вид (5.22), позволяющий применить алгебраический анзац Бете с локальным порождающим вектором ω_n таким, что

$$(\sigma_n^1 + i\sigma_n^2)\omega_n = 0.$$

Однако в общем случае неравных констант J у R-матрицы есть дополнительные ненулевые элементы $d(\lambda, \mu)$:

$$\widehat{R}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d(\lambda,\mu) \\ 0 & b(\lambda,\mu) & c(\lambda,\mu) & 0 \\ 0 & c(\lambda,\mu) & b(\lambda,\mu) & 0 \\ d(\lambda,\mu) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.39}$$

и она параметризуется эллиптическими функциями. Как следствие, гамильтониан H_{XYZ} не коммутирует с M, операторы $B(\lambda)$ не коммутируют между собой, порождающий вектор, уничтожаемый оператором $C(\lambda)$, отсутствует, и алгебраический анзац Бете в его исходной форме неприменим. Р. Бакстеру удалось обойти эти препятствия и найти спектр гамильтониана H_{XYZ} посредством очень сложной специально разработанной для этого конструкции (метод Q-оператора). В работе [41] Л. А. Тахтаджян и Л. Д. Фаддеев показали, что конструкция Бакстера вполне погружается в КМОЗ при некоторой модификации последнего. Именно, вводя калибровочные преобразования локальных L-операторов

$$L_n'(\lambda) = M_{n+1}(\lambda)L_n(\lambda)M_n(\lambda)$$

со специальным образом подобранными матрицами $M_n(\lambda)$, можно добиться наличия не зависящего от λ локального порождающего вектора у $L_n'(\lambda)$.[54] С помощью этих калибровочных преобразований в [41] были построены многопараметрические операторы $A_{kl}(\lambda)$, $B_{kl}(\lambda)$, $C_{kl}(\lambda)$, $D_{kl}(\lambda)$ с коммутационными

[54] С точки зрения алгебраической геометрии эта конструкция обсуждалась в работе И. М. Кричевера [104].

соотношениями, позволяющими применить конструкцию алгебраического анзаца Бете. Необходимо отметить, что именно в [41] впервые появилось название "уравнение Бакстера–Янга" для (5.12), впоследствии трансформировавшееся в общепринятое ныне *уравнение Янга–Бакстера*.

Работы Л. Д. Фаддеева и Л. А. Тахтаджяна [44], [45] посвящены исследованию так называемой спиновой XXX-цепочки, т. е. гамильтониана (5.37) в полностью изотропном случае

$$J_x = J_y = J_z \equiv J.$$

В этом случае гамильтониан приобретает дополнительную симметрию: H_{XXX} коммутирует с операторами полного спина

$$S^a = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \sigma_n^a, \qquad a = 1, 2, 3. \tag{5.40}$$

Как показано в [44], [45], следствием такой глобальной SU(2)-симметрии является то, что операторы $B(\lambda)$ порождают по формуле (5.24) только старшие векторы относительно действия (5.40), т. е. аннулируемые оператором $S^+ \equiv S^1 + iS^2$. Недостающие собственные векторы гамильтониана H_{XXX} получаются применением к старшим векторам оператора $S^- = S^1 - iS^2$.

В работах [44], [45] проведено также исследование спектра гамильтониана H_{XXX} в пределе $N \to \infty$ в антиферромагнитном режиме $J > 0$. При $J > 0$ вектор Ω, порождающий анзац Бете, не является физическим вакуумом, т. е. собственным вектором H_{XXX} с минимальным собственным значением. Для построения физического вакуума и возбуждений требуется процедура "заполнения псевдовакуума", подобная описанной для уравнения SG в п. 5.5. Аккуратное исследование уравнений алгебраического анзаца Бете для элементарных возбуждений – спиновых волн – над физическим вакуумом в [44], [45] выявило неожиданное обстоятельство: спин спиновых волн оказался равным не 1, как ошибочно считали до этого физики, а 1/2. Это открытие привлекло внимание специалистов по физике твердого тела, и работы [44], [45] часто цитировались впоследствии.

Многие коллеги Л. Д. Фаддеева по теоретической физике выказывали недоумение по поводу его увлечения интегрируемыми моделями: их применимость им казалась ограниченной двумерным пространством-временем. Однако, зная историю развития физики и математики, Людвиг Дмитриевич хорошо понимал универсальную важность точных решений, и в очередной раз интуиция его не подвела! Интерес физиков-теоретиков, занимающихся реалистическими моделями КТП, к интегрируемым моделям начался с известной работы Л. Н. Липатова [115] по высокоэнергетическому рассеянию адронов в специальной кинематике. Именно, в [115] было показано, что существенная часть амплитуды рассеяния адронов описывается квантовой интегрируемой цепочкой. Замечательным образом в совместной работе [71] Л. Д. Фаддеева и Г. П. Корчемского было показано, что эта цепочка совпадает с интегрируемой версией изотропного магнетика Гейзенберга спина $s = 0$ для некомпактной группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. После этого оказалось возможным применить к решаемой Л. Н. Липатовым задаче и смежным вопросам всю мощь КМОЗ. Это стало только началом современных применений теории интегрируемых моделей к задачам КТП в четырехмерном пространстве-времени. Так, в настоящее время интегрируемые модели используются для изучения открытого Х. Малдасеной соответствия между теорией струн в пятимерном пространстве Лобачевского и конформной теорией на его границе (точнее, на абсолюте), а, как недавно обнаружили Н. А. Некрасов и С. Л. Шаташвили, описание вакуумного сектора в суперсимметрических квантовых теориях поля (в частности, в четырехмерном пространстве-времени) непосредственно приводит к квантовым интегрируемым системам. Эти и другие приложения теории квантовых интегрируемых систем, а также их краткая история приведены в последнем обзоре Л. Д. Фаддеева [79], вышедшем в свет в 2013 г.

6. Квантовые группы

6.1. Квантование групп и алгебр Ли. Классический метод обратной задачи послужил основой для новых математических структур и понятий. Так, введенная Е. К. Скляниным классическая r-матрица привела В. Г. Дринфельда к созданию теории групп Пуассона–Ли – групп Ли с пуассоновой структурой, согласованной с групповой операцией. Аналогичным образом квантовые группы Ли и алгебры Ли появились как абстракции конкретных алгебраических конструкций, возникших в недрах квантового метода обратной задачи. Приведем два иллюстративных примера.

1. В работе [53] Л. Д. Фаддеева и Л. А. Тахтаджяна появилась $\mathbb{C}$-алгебра A_q с образующими a, b, c, d и соотношениями

$$\begin{gathered} ab = qba, \quad ac = qca, \quad bc = cb, \quad bd = qdb, \quad cd = qdc, \\ ad - da = (q - q^{-1})bc, \end{gathered} \tag{6.1}$$

где $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Эти соотношения обладают следующим замечательным свойством: рассмотрим матрицы

$$T' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T'' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix},$$

где a', b', c', d' и a'', b'', c'', d'' – два взаимно коммутирующих набора элементов, удовлетворяющих (6.1); тогда набор a, b, c, d, где

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T'T'',$$

также удовлетворяет этим соотношениям. Другими словами, основные соотношения (6.1) сохраняются при умножении матриц, т. е. A_q является *биалгеброй* с коумножением Δ, задаваемым на образующих a, b, c, d формулой

$$\Delta(T) = T \dot{\otimes} T,$$

где символ $\dot{\otimes}$ подразумевает тензорное произведение алгебр и обычное умножение матриц. При $q \to 1$ образующие a, b, c, d коммутируют, так что алгебру A_q можно рассматривать как деформацию – квантование – коммутативной алгебры $\mathbb{C}[a,b,c,d]$ полиномиальных функций на алгебре $M_2(\mathbb{C})$ матриц размера 2×2.

2. В работе П. П. Кулиша и Н. Ю. Решетихина [107] и в работе Е. К. Склянина [122] рассматривалась $\mathbb{C}$-алгебра $U_\hbar$ с образующими H, $X^\pm$ и соотношениями

$$[H,X^\pm]=\pm 2X^\pm,\quad [X^+,X^-]=\frac{\operatorname{sh}(\hbar H)}{\operatorname{sh}\hbar}, \tag{6.2}$$

где $\hbar\in\mathbb{C}$ играет роль постоянной Планка. При этом в алгебре $U_\hbar$ допускаются формальные степенные ряды по $\hbar$ типа $e^{\pm\hbar H/2}$. Как показал Е. К. Склянин [123], алгебра $U_\hbar$ также является биалгеброй с коумножением

$$\Delta(H)=H\otimes 1+1\otimes H,\quad \Delta(X^\pm)=X^\pm\otimes e^{-\hbar H/2}+e^{\hbar H/2}\otimes X^\pm.$$

При $\hbar\to 0$ соотношения (6.2) переходят в коммутационные соотношения для образующих алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, так что алгебру $U_\hbar$ можно рассматривать как деформацию – квантование – универсальной обертывающей алгебры $U\mathfrak{sl}(2)$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Часто под $U_\hbar$ понимается $\mathbb{C}$-алгебра с образующими E, F, K, K^{-1} и соотношениями

$$KK^{-1}=K^{-1}K=1,\quad KE=q^2EK,\quad KF=q^{-2}FK\quad \text{и}\quad [E,F]=\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}},$$

где $q=e^\hbar$. При этом

$$\Delta(E)=E\otimes 1+K\otimes E,\quad \Delta(F)=F\otimes K^{-1}+1\otimes F,\quad \Delta(K)=K\otimes K,$$

и формулы

$$E=iX^+e^{\hbar H/2},\quad F=-ie^{-\hbar H/2}X^-,\quad K^{\pm1}=e^{\pm\hbar H} \tag{6.3}$$

устанавливают эквивалентность этих двух определений.

Второй пример и послужил основой для общего определения квантовой универсальной обертывающей алгебры $U_\hbar\mathfrak{g}$ простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, данного в работах М. Джимбо и В. Г. Дринфельда. Именно, В. Г. Дринфельд отметил, что теория алгебр Хопфа наиболее адекватным образом описывает основные соотношения для матриц монодромии в квантовом методе обратной задачи, и определил квантовые группы как специальные алгебры Хопфа.

Основные алгебраические формулы квантового метода обратной задачи, приводящие, в частности, к указанным выше примерам, имеют вид

$$R_{12}R_{13}R_{23}=R_{23}R_{13}R_{12} \tag{6.4}$$

и

$$RT_1T_2=T_2T_1R. \tag{6.5}$$

Они получаются из формул (5.12) и (5.17) надлежащим пределом

$$\lambda,\mu,\lambda-\mu\to\infty,$$

где мы опустили индекс N у T_N и положили $T_1=T\otimes I$, $T_2=I\otimes T$ (см. п. 5.3). Однако в упомянутых работах по квантовым группам эти соотношения не были использованы в полной мере. Поэтому в совместных с Н. Ю. Решетихиным и Л. А. Тахтаджяном работах [56], [59] эти формулы были положены в основу систематического определения квантовых групп Ли и алгебр Ли. Этот подход, впоследствии названный формализмом Решетихина–Тахтаджяна–Фаддеева[55], широко применяется в теории квантовых групп и ее приложениях.

В основе этого подхода лежит следующая простая конструкция [56], [59]. С каждой невырожденной матрицей R размера $n^2 \times n^2$ естественным образом связывается биалгебра $\mathcal{A}_R$ – *алгебра функций на квантовой матричной алгебре ранга n, ассоциированной с матрицей R*. Именно, пусть $\mathbb{C}\langle t_{ij}\rangle$ – свободная ассоциативная $\mathbb{C}$-алгебра с единицей 1 и образующими t_{ij}, $i,j=1,\dots,n$, а $\mathbb{I}_R$ – двусторонний идеал в $\mathbb{C}\langle t_{ij}\rangle$, порожденный соотношениями (6.5). Алгебра $\mathcal{A}_R$ определяется как факторалгебра

$$\mathcal{A}_R = \mathbb{C}\langle t_{ij}\rangle/\mathbb{I}_R$$

и является биалгеброй с коумножением Δ и коединицей ε. На образующих t_{ij} они задаются следующими формулами:

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\otimes t_{kj}, \qquad \varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}, \quad i,j=1,\dots,n,$$

т. е.

$$\Delta(T) = T \dot{\otimes} T \quad \text{и} \quad \varepsilon(T) = I.$$

Далее, пусть $\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ – алгебра некоммутативных многочленов от переменных $x_1,\dots,x_n$, а P – матрица перестановки в $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$:

$$P(u\otimes v) = v\otimes u, \qquad u,v\in\mathbb{C}^n.$$

С каждым многочленом $f(t)\in\mathbb{C}[t]$ связана алгебра $\mathbb{C}^n_{f,R}$ – *алгебра функций на квантовом n-мерном векторном пространстве*, *ассоциированном с многочленом $f(t)$ и матрицей R*, т. е. факторалгебра

$$\mathbb{C}^n_{f,R} = \mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_n\rangle/\mathbb{I}_{f,R},$$

где $\mathbb{I}_{f,R}$ – двусторонний идеал в $\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$, порожденный соотношениями

$$f(\widehat{R})(x\otimes x) = 0, \qquad \widehat{R} = PR,$$

а x – вектор-столбец из образующих $x_1,\dots,x_n$. Определяя гомоморфизм алгебр

$$\delta\colon \mathbb{C}^n_{f,R} \to \mathcal{A}_R\otimes\mathbb{C}^n_{f,R}$$

на образующих как

$$\delta(x_i) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\otimes x_k,$$

т. е. $\delta(x) = T\dot{\otimes} x$, легко убедиться, что отображение δ задает кодействие биалгебры $\mathcal{A}_R$ на алгебре $\mathbb{C}^n_{f,R}$, наделяя ее структурой левого $\mathcal{A}_R$-комодуля.

[55]FRT formalism – по-английски.

В случае, когда матрица R удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера (6.4), в работе [59] приведен общий метод построения алгебры Хопфа по биалгебре $\mathcal{A}_R$. Замечательным образом уравнение Янга–Бакстера имеет серию решений[56] R_q, параметризованную простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и параметром $q \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Некоммутативная алгебра Хопфа, отвечающая биалгебре $\mathcal{A}_{R_q}$, и есть искомая *алгебра функций* $\operatorname{Fun}(G_q)$ *на квантовой группе* G_q, где G – группа Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$. При этом в "классическом пределе" $q \to 1$ алгебра Хопфа $\operatorname{Fun}(G_q)$ переходит в коммутативную алгебру Хопфа – алгебру полиномиальных функций на простой группе Ли G, снабженную дополнительной структурой группы Пуассона–Ли.

Эта процедура введения квантовых групп G_q параллельна заданию классических групп Ли как алгебраических групп – алгебраических подмногообразий в пространстве $M_n(\mathbb{C})$ матриц размера $n \times n$. При этом в отличие от случая $q = 1$, когда все простые группы Ли, пользуясь словами Германа Вейля, вложены в "Ее Всеобъемлющее Величество" $M_n(\mathbb{C})$, в случае $q \neq 1$ алгебры $\mathcal{A}_R$, отвечающие различным сериям простых алгебр Ли, не изоморфны. Это лишний раз иллюстрирует любимый Л. Д. Фаддеевым принцип "квантование снимает вырождение", поэтому случай $q \neq 1$ является, в известном смысле, более фундаментальным.

Так, в случае серии A_{n-1} соответствующая матрица $R = R_q$ имеет вид

$$R_q = q\sum_{i=1}^{n} e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1,\dots,n\\ i\neq j}} e_{ii} \otimes e_{jj} + (q - q^{-1}) \sum_{\substack{i,j=1,\dots,n\\ i>j}} e_{ij} \otimes e_{ji}, \qquad q \in \mathbb{C}^*,$$

где e_{ij} – матричные единицы, и удовлетворяет условию Гекке

$$\widehat{R}_q^2 = (q - q^{-1})\widehat{R}_q + I, \qquad \widehat{R}_q = PR_q.$$

Биалгебра $\mathcal{A}_q = \mathcal{A}_{R_q}$ – *алгебра функций на матричной алгебре ранга* n, кодействует на *алгебре функций на квантовом* n*-мерном евклидовом пространстве* – алгебре $\mathbb{C}_q^n$ с образующими $x_1, \dots, x_n$ и соотношениями

$$x_i x_j = q x_j x_i, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$

а также на q*-внешней алгебре квантового векторного пространства* $\mathbb{C}_q^n$ – конечномерной алгебре $\bigwedge^\bullet \mathbb{C}_q^n$ с образующими $x_1, \dots, x_n$ и соотношениями

$$x_i^2 = 0, \quad x_i x_j = -q^{-1} x_j x_i, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Эти алгебры получаются из $\mathbb{C}^n_{f,R_q}$ соответственно специализацией

$$f(t) = t - q \quad \text{и} \quad f(t) = t + q^{-1}$$

(в последнем случае при $q^2 \neq -1$).

[56] Решения R_q получаются специальным предельным переходом $\lambda \to \infty$ из R-матриц $R(\lambda)$, отвечающих квантовым интегрируемым моделям, и играют важную роль в построении инвариантов узлов и зацеплений.

В ситуации общего положения (когда q не есть корень из единицы) центр соответствующей алгебры $\mathcal{A}_q$ порождается квантовым детерминантом

$$\det_q T = \sum_{\sigma\in \mathrm{Sym}(n)} (-q)^{l(\sigma)} t_{1\sigma_1}\cdots t_{n\sigma_n},$$

где $l(\sigma)$ – длина (число инверсий) подстановки σ. При этом

$$\Delta(\det_q T) = \det_q T \otimes \det_q T.$$

Факторалгебра алгебры $\mathcal{A}_q$ по соотношению $\det_q T = 1$ называется *алгеброй функций на квантовой группе* $\mathrm{SL}_q(n)$ и обозначается через $\mathrm{Fun}(\mathrm{SL}_q(n))$. Биалгебра $\mathrm{Fun}(\mathrm{SL}_q(n))$ является алгеброй Хопфа с антиподом S,

$$S(t_{ij}) = (-q)^{i-j}\widetilde{t}_{ji}, \qquad i,j = 1,\dots,n,$$

где $\widetilde{t}_{ij}$ – это так называемые квантовые миноры,

$$\widetilde{t}_{ij} = \sum_{\sigma\in \mathrm{Sym}(n-1)} (-q)^{l(\sigma)} t_{1\sigma_1}\cdots t_{i-1\sigma_{i-1}} t_{i+1\sigma_{i+1}}\cdots t_{n\sigma_n},$$

и

$$\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\dots,\sigma_n) = \sigma(1,\dots,j-1,j+1,\dots,n).$$

Аналогичным образом, алгебра Хопфа $\mathrm{Fun}(\mathrm{GL}_q(n))$ определяется как факторалгебра алгебры $\mathcal{A}_q\langle t\rangle$ по соотношениям

$$tt_{ij} = t_{ij}t, \quad t\det_q T = \det_q T\, t, \qquad i,j=1,\dots,n,$$

при этом

$$S(t) = \det_q T, \quad S(t_{ij}) = t(-q)^{i-j}\widetilde{t}_{ji}.$$

В простейшем случае $n=2$ матрица R_q имеет вид

$$R_q = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & q-q^{-1} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & q\end{pmatrix} \tag{6.6}$$

и использовалась в [53]. Полагая

$$T = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

получаем соотношения (6.1), причем $\det_q T = ad - qbc$ и если $\det_q T = 1$, то

$$S(T) = \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b\\ -qc & a\end{pmatrix}.$$

При этом $\mathbb{C}_q^2$ задается вейлевскими перестановочными соотношениями

$$uv = qvu,$$

а соответствующая q-внешняя алгебра – соотношениями

$$\zeta^2 = \eta^2 = 0, \quad \zeta\eta = -q^{-1}\eta\zeta.$$

Вещественные формы квантовой группы $\mathrm{SL}_q(n)$ появляются при $|q| = 1$ и $q \in \mathbb{R}$, при этом в первом случае возникает квантовая группа $\mathrm{SL}_q(n, \mathbb{R})$, а во втором – квантовая группа $\mathrm{SU}_q(n)$. В работе [59] также были подробно изучены квантовые группы для классических серий B_n, C_n, D_n и их вещественные формы.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли G, а $U\mathfrak{g}$ – ее универсальная обертывающая алгебра. Классическое соотношение Л. Шварца реализует $U\mathfrak{g}$ в виде

$$U\mathfrak{g} \cong C_e^{-\infty}(G), \tag{6.7}$$

где $C_e^{-\infty}(G)$ – алгебра обобщенных функций на G с носителем в единичном элементе e. Отправляясь от (6.7), в работах [56], [59] была предложена общая конструкция квантования простых алгебр Ли. Именно, рассмотрим биалгебру $\mathcal{A}_R$, где R удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера, и пусть $\mathcal{A}_R^* = \mathrm{Hom}(\mathcal{A}_R, \mathbb{C})$ – двойственное пространство к $\mathcal{A}_R$. Коумножение Δ в $\mathcal{A}_R$ индуцирует умножение в $\mathcal{A}_R^*$ по формуле

$$(l_1 l_2, a) = (l_1 \otimes l_2, \Delta(a)), \qquad l_1, l_2 \in \mathcal{A}_R^*, \quad a \in \mathcal{A}_R,$$

и наделяет $\mathcal{A}_R^*$ структурой $\mathbb{C}$-алгебры. Положим

$$R^{(+)} = PRP, \quad R^{(-)} = R^{-1}$$

и обозначим через U_R подалгебру в $\mathcal{A}_R^*$, порожденную элементами $l_{ij}^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon = \pm$, $i, j = 1, \dots, n$, определяемыми при помощи матриц-функционалов $L^{(\varepsilon)} = \{l_{ij}^{(\varepsilon)}\} \in M_n(\mathcal{A}_R^*)$ как

$$(L^{(\varepsilon)}, T_1 \cdots T_k) = R_1^{(\varepsilon)} \cdots R_k^{(\varepsilon)}, \qquad \varepsilon = \pm, \tag{6.8}$$

где

$$T_i = I \otimes \dots \otimes \underbrace{T}_{i} \otimes \dots \otimes I \in M_n(\mathcal{A}_R),$$

а матрицы $R_i^{(\pm)}$ действуют нетривиально только в сомножителях с номерами 0 и i тензорного произведения $\mathbb{C}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^n$ ($k+1$ раз) и совпадают там с матрицами $R^{(\pm)}$. В силу (6.4) формула (6.8) согласована с соотношениями в $\mathcal{A}_R$. Алгебра U_R является биалгеброй с коумножением

$$\Delta(L^{(\varepsilon)}) = L^{(\varepsilon)} \dot{\otimes} L^{(\varepsilon)} \tag{6.9}$$

и соотношениями

$$R^{(+)} L_1^{(\varepsilon)} L_2^{(\varepsilon)} = L_2^{(\varepsilon)} L_1^{(\varepsilon)} R^{(+)}, \tag{6.10}$$

$$R^{(+)} L_1^{(+)} L_2^{(-)} = L_2^{(-)} L_1^{(+)} R^{(+)}, \tag{6.11}$$

где
$$L_1^{(\varepsilon)} = L^{(\varepsilon)} \otimes I, \quad L_2^{(\varepsilon)} = I \otimes L^{(\varepsilon)} \in M_{n^2}(U_R) \quad \text{и} \quad \varepsilon = \pm.$$
В случае, когда R-матрица связана[57] с простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, биалгебра U_R является алгеброй Хопфа с антиподом
$$S(L^{(\varepsilon)}) = S_{q^{-1}}(L^{(\varepsilon)}),$$
где S_q – это антипод для алгебры Хопфа $\mathrm{Fun}(G_q)$. Замечательным образом, алгебра Хопфа U_R и есть надлежащее пополнение квантовой универсальной обертывающей алгебры $U_q\mathfrak{g}$. Матрицы $L^{(+)}$ и $L^{(-)}$ являются соответственно верхне- и нижнетреугольными матрицами, а их ненулевые элементы – образующими квантового базиса Картана–Вейля для $U_q\mathfrak{g}$. При этом сложные соотношения и формулы копроизведения для образующих квантового базиса Шевалле в подходе Джимбо–Дринфельда следуют из простых формул (6.9)–(6.11).

При $n=2$ имеем
$$L^{(+)} = \begin{pmatrix} e^{\hbar H/2} & (q-q^{-1})X^+ \\ 0 & e^{-\hbar H/2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad L^{(-)} = \begin{pmatrix} e^{-\hbar H/2} & 0 \\ -(q-q^{-1})X^- & e^{\hbar H/2} \end{pmatrix},$$
где $q = e^{\hbar}$ и H, $X^{\pm}$ – образующие Кулиша–Решетихина алгебры (6.2). При $|q|=1$ получаем вещественную форму $U_q\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ – алгебру $U_q\mathfrak{sl}(2)$ с антиинволюцией $*$, при которой
$$H^* = H \quad \text{и} \quad X_{\pm}^* = -X_{\pm},$$
что в силу (6.3) эквивалентно
$$E^* = E, \quad F^* = F \quad \text{и} \quad K^* = K.$$

В работе [56] также был рассмотрен бесконечномерный случай групп и алгебр петель. Именно эти примеры впервые появились в рамках квантового метода обратной задачи и послужили источником развития понятия квантовых групп. Квазиклассический предел $q \to 1$ ($\hbar \to 0$) изложенной в [56], [59] конструкции приводит к пуассоновым структурам на группах и алгебрах Ли, которые естественно описываются классической r-матрицей. В частности, они приводят к группам Пуассона–Ли и биалгебрам Ли, которые играют важную роль в гамильтоновой интерпретации классического метода обратной задачи, изложенной в монографии [52].

Л. Д. Фаддеев очень любил основное соотношение (6.5) и в последующих работах часто к нему возвращался, используя его в [60] для обменной алгебры модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена, для описания квантового кокасательного расслоения к группе Ли в совместной с А. Ю. Алексеевым работе [62], а также для построения решеточного аналога алгебры Каца–Муди в [63], совместно с А. Ю. Алексеевым и М. А. Семеновым-Тян-Шанским. Соотношение послужило основой для серии совместных с А. Ю. Волковым работ [64], [65], [67], а также совместных с Р. М. Кашаевым работ [74], [75], посвященных изучению введенной в [53] решеточной модели Лиувилля и общих вопросов квантовых решеточных моделей.

[57] Именно, $R = cR_q$, где $c = q^{-1/n}$ для серии A_{n-1} и $c=1$ для серий B_n, C_n и D_n.

6.2. Квантовый дилогарифм и модулярный дубль. Как было показано В. Г. Дринфельдом, R-матрицы R_q из предыдущего пункта получаются как

$$R_q = (\rho \otimes \rho)(\mathcal{R}),$$

где $\mathcal{R} \in U_q\mathfrak{g} \otimes U_q\mathfrak{g}$ – это введенная им универсальная R-матрица, а ρ – конечномерное представление алгебры $U_q\mathfrak{g}$. В ставшей классической работе [73] Л. Д. Фаддеев заметил, что в простейшем случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ формулу Дринфельда можно записать в виде

$$\mathcal{R} = q^{(H\otimes H)/2} s_q\{-(q - q^{-1})(E \otimes F)\}, \tag{6.12}$$

где использованы образующие E и F, а

$$s_q(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + q^{2k+1}x)$$

– известное классикам q-произведение, абсолютно сходящееся при $|q| < 1$. Доказанные в 1748 г. Эйлером тождества

$$\begin{aligned} s_q(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}x^n}{(q^{-1} - q)\cdots(q^{-n} - q^n)} \\ &= \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(q^n - q^{-n})}\right\}, \quad \text{где } |x|, |q| < 1, \end{aligned}$$

показывают, что функцию $s_q(x)$ можно рассматривать и как q-экспоненту, и как q-дилогарифм Эйлера!

Пусть U и V – это вейлевская пара, т. е. операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, удовлетворяющие соотношению

$$UV = q^2 VU.$$

Знаменитое соотношение Шютценберже

$$s_q(U)s_q(V) = s_q(U + V)$$

подтверждает интерпретацию $s_q(U)$ как некоммутативной экспоненты, а замечательное пентагональное соотношение

$$s_q(V)s_q(U) = s_q(U)s_q(q^{-1}UV)s_q(V),$$

выведенное Л. Д. Фаддеевым совместно с А. Ю. Волковым в [65], является некоммутативным аналогом пятичленного соотношения для дилогарифма Роджерса (см. совместную с Р. М. Кашаевым работу [66]).

Функция $s_q(x)$ определена только при $|q| < 1$, что делает ее непригодной для отвечающего квантовой группе $\mathrm{SL}_q(2, \mathbb{R})$ случая $|q| = 1$ (см. п. 6.1). Л. Д. Фаддеев в работе [70] предложил вместо функции $s_q(x)$ рассматривать отношение

$$\frac{s_q(x)}{s_{\widetilde{q}}(\widetilde{x})}, \quad \text{где } q = e^{i\pi\tau},\ \widetilde{q} = e^{-\pi i/\tau} \text{ и } \widetilde{x} = x^{1/\tau}.$$

Именно, положим[58] $\tau = b^2$ и, следуя работам [70], [73], при $\operatorname{Im} b > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$ рассмотрим функцию

$$\Phi_b(z) = \frac{s_q(e^{2\pi bz})}{s_{\tilde{q}}(e^{2\pi b^{-1}z})}\,. \tag{6.13}$$

Замечательным образом $\Phi_b(z)$ как функция параметра b допускает аналитическое продолжение в область $b \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ и определяет мероморфную функцию z. Действительно, при

$$\operatorname{Im} b > 0, \quad \operatorname{Re} b > 0 \quad \text{и} \quad |\operatorname{Im} z| < \frac{|\operatorname{Re}(b + b^{-1})|}{2}$$

формула (6.13) может быть переписана следующим образом:

$$\Phi_b(z) = \exp\biggl\{-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2itz}}{\operatorname{sh}(bt)\operatorname{sh}(b^{-1}t)}\,\frac{dt}{t}\biggr\}, \tag{6.14}$$

где контур интегрирования обходит сингулярность при $t = 0$ сверху (см. [70]). Формула (6.14) показывает, что функция $\Phi_b(z)$ при всех b, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} b \neq 0$, определяет мероморфную функцию z. Функция $\Phi_b(z)$ – “фаддеевский квантовый дилогарифм”, или квантовый модулярный дилогарифм, – обладает свойством симметрии

$$\Phi_b(z) = \Phi_{-b}(z) = \Phi_{b^{-1}}(z)$$

и удовлетворяет функциональным уравнениям

$$\begin{aligned}
\Phi_b(z + ib) &= (1 + qe^{2\pi z})\Phi_b(z),\\
\Phi_b(z - ib) &= (1 + q^{-1}e^{2\pi z})^{-1}\Phi_b(z).
\end{aligned}$$

Функция $\Phi_b(z)$ имеет интересную историю. В работе Т. Шинтани по предельной формуле Кронекера для вещественных квадратичных полей и работе Н. Курокавы по теории дзета-функции Сельберга она фигурирует под названием “двойной синус”, в работе С. Рёйсенарса по квантовым цепочкам типа Калоджеро–Мозера она называется “гиперболической гамма-функцией” и выражается как отношение двойных гамма-функций, введенных В. П. Алексеевским в 1889 г. и Е. В. Барнсом в 1899 г. Удивительным образом, через функции Алексеевского–Барнса также выражаются полученная А. Б. Замолодчиковым S-матрица квантовой модели SG и ее форм-факторы, полученные Ф. А. Смирновым.

Замечательное открытие Л. Д. Фаддеева состоит в изобретении модулярного дубля квантовой алгебры $U_q\mathfrak{sl}(2)$ и объяснении фундаментальной роли функции Φ_q.

Именно, для всех $z \in \mathbb{C}$ отображение

$$K \mapsto q^{-1}uv, \quad E \mapsto i\frac{v + u^{-1}z}{q - q^{-1}}\,, \quad F \mapsto i\frac{u + v^{-1}z^{-1}}{q - q^{-1}}$$

[58] В работах по этой тематике Л. Д. Фаддеев любил использовать старинную нормировку Вейерштрасса $\omega\omega' = -1/4$ для периодов 2ω, $2\omega'$ эллиптических функций. В наших обозначениях $\omega' = ib/2$, $\omega = i/(2b)$ и $\tau = b^2$.

задает гомоморфизм алгебр $r_{q,z}\colon U_q\mathfrak{sl}(2) \to \mathbb{C}^2_{q^2}$, где к $\mathbb{C}^2_{q^2}$ также присоединены элементы u^{-1}, v^{-1}. При этом

$$r_{q,z}(C) = -(z + z^{-1}),$$

где

$$C = qK + q^{-1}K^{-1} + (q - q^{-1})^2 FE$$

– это квантовый элемент Казимира, порождающий центр алгебры $U_q\mathfrak{sl}(2)$, когда q не есть корень из единицы. В случае $|q| = 1$, т. е. $q = e^{\pi i\tau}$, где $\tau \in \mathbb{R}$, алгебра $\mathbb{C}^2_{q^2}$ допускает представление в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$, при котором образующие u и v переходят в унитарные операторы U и V,

$$(Uf)(x) = e^{-2\pi ix}f(x) \quad \text{и} \quad (Vf)(x) = f(x + \tau), \qquad f \in \mathscr{H}.$$

Если $\tau \notin \mathbb{Q}$, то централизатором подалгебры $\rho(\mathbb{C}^2_{q^2})$ в алгебре всех ограниченных операторов $\mathcal{L}(\mathscr{H})$ является образ дуальной подалгебры $\mathbb{C}^2_{\widetilde{q}^2}$ с $\widetilde{q} = e^{-\pi i/\tau}$ и образующими $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ при представлении $\widetilde{u} \mapsto \widetilde{U}$ и $\widetilde{v} \mapsto \widetilde{V}$, где

$$(\widetilde{U}f)(x) = e^{2\pi ix/\tau}f(x) \quad \text{и} \quad (\widetilde{V}f)(x) = f(x + 1), \qquad f \in \mathscr{H}.$$

Соответствующий гомоморфизм $r_{\widetilde{q},\widetilde{z}}$ дуальной алгебры Хопфа $U_{\widetilde{q}}\mathfrak{sl}(2)$ с образующими $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$ и $\widetilde{K}$ в дуальную алгебру $\mathbb{C}^2_{\widetilde{q}^2}$ дается теми же формулами, что и выше, где $\widetilde{z} = z^{1/\tau}$. Удобно положить $z = e^{2\pi b\lambda}$, так что

$$\widetilde{z} = e^{2\pi\lambda/b}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Важный факт (см. [70]) состоит в том, что представление тензорного произведения $\mathbb{C}^2_{q^2} \otimes \mathbb{C}^2_{\widetilde{q}^2}$ в $L^2(\mathbb{R})$ уже неприводимо.

Это базовое наблюдение и привело Л. Д. Фаддеева к понятию модулярного дубля алгебры Хопфа $U_q\mathfrak{sl}(2)$ – алгебре Хопфа

$$\mathscr{D}_{\mathrm{mod}} = U_q\mathfrak{sl}(2) \otimes U_{\widetilde{q}}\mathfrak{sl}(2), \quad \text{где } q = e^{\pi i\tau} \text{ и } \widetilde{q} = e^{-\pi i/\tau},\ \tau \in \mathbb{C}. \tag{6.15}$$

Как и q-дилогарифм, фаддеевский квантовый дилогарифм удовлетворяет пентагональному соотношению, и, как показано в [73], для алгебры Хопфа $\mathscr{D}_{\mathrm{mod}}$ также существует универсальная R-матрица, задаваемая аналогичной (6.12) формулой, в которой теперь вместо функции s_q участвует модулярно инвариантная функция Φ_q! Универсальная R-матрица теперь определена при всех $q \in \mathbb{C}^*$, включая и интересный для приложений случай $|q| = 1$.

В случае $|q| = 1$ композиция $r_{q,z} \otimes r_{\widetilde{q},\widetilde{z}}$ с рассмотренными выше унитарными представлениями алгебр $\mathbb{C}^2_{q^2}$ и $\mathbb{C}^2_{\widetilde{q}^2}$ реализует представление модулярного дубля $\mathscr{D}_{\mathrm{mod}}$ в $L^2(\mathbb{R})$. Однако условие вещественности формы $U_q\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, при котором образующим E, F, K и $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{K}$ модулярного дубля отвечают самосопряженные операторы в $L^2(\mathbb{R})$, при этом не выполняется. Чтобы обойти эту трудность и построить представление модулярного дубля для $U_q\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, Л. Д. Фаддеев предложил [73] использовать представления алгебр $\mathbb{C}^2_{q^2}$ и $\mathbb{C}^2_{\widetilde{q}^2}$

неограниченными операторами! Именно, рассмотрим представления, при которых образующим u, v и $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ отвечают неограниченные, положительно определенные, самосопряженные операторы U, V и $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$, задаваемые на соответствующих областях определения в $L^2(\mathbb{R})$ следующими формулами[59]:

$$(Uf)(x) = f(x + ib), \qquad (Vf)(x) = e^{2\pi bx} f(x), \tag{6.16}$$

$$(\widetilde{U}f)(x) = f\left(x - \frac{i}{b}\right), \quad (\widetilde{V}f)(x) = e^{2\pi x/b} f(x). \tag{6.17}$$

На общей инвариантной области определения, состоящей из линейных комбинаций функций вида $P(x)e^{-x^2+cx}$, где $P(x)$ – полином, а $c \in \mathbb{C}$ произвольно, операторы U, V коммутируют[60] с $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ и задают при $\lambda \in \mathbb{R}$ унитарное представление модулярного дубля для $U_q\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Такие представления соответствуют представлениям основной серии алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ и параметризуются вещественным числом λ. В работе [78] Л. Д. Фаддеев построил аналоги представлений дискретной серии модулярного дубля $\mathscr{D}_{\mathrm{mod}}$ для другого интересного случая $|\tau| = 1$.

Работы Л. Д. Фаддеева по этой тематике получили широкую известность и используются как в чистой математике, так и в приложениях к моделям конформной теории поля и, в частности, к так любимой им квантовой модели Лиувилля на решетке. В последней естественным образом возникает функционально-разностный оператор $U + U^{-1} + V$ в $L^2(\mathbb{R})$, где операторы U и V задаются формулами (6.16). В недавней совместной работе Л. Д. Фаддеева и Л. А. Тахтаджяна [81] была рассмотрена спектральная теория для этого оператора и доказана теорема разложения по собственным функциям, являющаяся q-аналогом известного преобразования Конторовича–Лебедева из теории специальных функций. Аналогом модифицированных функций Бесселя в этом случае является волновая функция Кашаева – преобразование Фурье от произведения двух фаддеевских квантовых дилогарифмов.

7. Квантовая теория поля. Калибровочные поля

7.1. Теория Янга–Миллса. Работы Л. Д. Фаддеева о теории поля Янга–Миллса – по-видимому, самые известные и важные из его работ 1960-х годов. Вместе с тем с ними связана и очень драматическая история. Сам Людвиг Дмитриевич очень живо описал ее в своем выступлении 27 марта 2014 г. на Общем собрании РАН по случаю присуждения ему медали им. М. В. Ломоносова – высшей награды Академии наук. Он озаглавил его “Моя жизнь среди квантовых полей” [80].

Интерес Л. Д. Фаддеева к квантовой теории поля сложился еще в студенческие годы, когда О. А. Ладыженская организовала специальный студенческий семинар, посвященный математическим аспектам квантовой теории поля, в котором сам Людвиг Дмитриевич был главным докладчиком. Но в середине

[59] Здесь мы используем такие же обозначения, как в [81].

[60] Подчеркнем, что эти операторы коммутируют только на общей инвариантной области определения, соответствующие им операторные разложения единицы не коммутируют!

1950-х годов квантовая теория поля переживала трудное время и надолго вышла из моды. За блестящими успехами квантовой электродинамики (КЭД) последовало целое десятилетие безуспешных попыток применить теорию поля для расчета внутриядерных сил. Но окончательный удар ей нанесло открытие Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуком так называемого "парадокса нуль-заряда", который еще (и больше по сути) называется проблемой полюса Ландау. Этот парадокс относился к квантовой электродинамике (которая, в отличие от мезонной теории ядерных сил, прекрасно работала и позволяла рассчитывать тонкие эффекты с беспрецедентной точностью). Тем не менее результат тонкого (и правильного!) вычисления Ландау и Померанчука указывал, как считалось, на прямое логическое противоречие в ее основах[61].

В п. 1.3 обсуждалась совместная работа Л. Д. Фаддеева и Ф. А. Березина [11], ставшая их вкладом в объяснение парадокса нуль-заряда. Построенный ими пример, с одной стороны, указывал на то, что эта проблема не является артефактом теории возмущений, а с другой – оставлял надежду на построение нетривиальных моделей теории поля, свободных от трудностей, связанных с полюсом Ландау[62], т. е. моделей, для которых $\beta(\overline{g}) < 0$. Однако общее мнение теоретиков, сложившееся на рубеже 1960-х годов, было полностью противоположным. В своей последней короткой статье "Фундаментальные проблемы" [108] 1960 года, незадолго до трагической автомобильной катастрофы, оборвавшей его научную карьеру, Л. Д. Ландау написал, со ссылкой на проблему полюса Ландау, что "гамильтонов метод в теории сильных взаимодействий изжил себя и должен быть похоронен, конечно со всеми почестями, которых он заслужил". "Ввиду краткости нашей жизни, – заключал Ландау, – мы не можем позволить себе роскошь заниматься вопросами, не обещающими новых результатов". Слова Ландау воспринимались его учениками в начале 1960-х годов как завещание Учителя, и когда в 1966 г. Л. Д. Фаддеев вместе с В. Н. Поповым получили решающее продвижение в квантовой теории Янга–Миллса (на основе функционального интеграла в лагранжевом подходе), их статья не могла быть принята к печати ни в одном из ведущих физических журналов в СССР, как не могла и быть опубликована за границей (для этого требовалось положительное заключение Отделения ядерной физики АН СССР). В результате Л. Д. Фаддеев и В. Н. Попов смогли лишь издать препринт [20][63] в Институте теоретической

[61] С современной точки зрения речь идет о положительности β-функции Гелл-Манна–Лоу, вследствие которой ряд теории возмущений для квантовой электродинамики становится неприменимым на малых расстояниях, начиная с некоторого конечного значения энергии/расстояния (при котором эффективная константа разложения бесконечна); квантовая теория не полна и требует доопределения. Теории с $\beta < 0$ (асимптотически свободные теории), в которых не возникает проблема полюса Ландау, в то время не были известны, и, по-видимому, считалось, что таких теорий не существует, иначе квантовая теория поля не была бы "запрещена" Л. Д. Ландау и его школой. Как обнаружили в начале 1970-х годов Д. Гросс, Ф. Вильчек и Х. Д. Политцер, в теории Янга–Миллса реализуется именно этот случай и "парадокс нуль-заряда" не возникает.

[62] Л. Д. Фаддеев подробно описывал этот пример и его связь с проблемой полюса Ландау в своих лекциях на физическом факультете, однако в заметку в ДАН этот материал не вошел – авторы ограничились описанием точных результатов про самосопряженные расширения оператора Лапласа. Несомненно, в этом сказалось характерное для того времени отсутствие коммуникации между математической и теоретической физикой, при которой результаты теоретиков находились как бы вне математического дискурса, а результаты математиков, в свою очередь, часто игнорировались теоретиками.

физики АН Украинской ССР в Киеве и послать короткий двухстраничный текст [21] в новый европейский журнал “Physics Letters”.

Геометрическая красота теории Янга–Миллса стала понятна не сразу – первоначально Людвиг Дмитриевич хотел заниматься квантовой гравитацией, поля Янга–Миллса казались скорее более простым модельным примером. Теперь мы знаем, что этот пример оказался исключительно удачным – он позволил обобщить квантовую электродинамику, объединив ее со слабыми взаимодействиями, и впервые построить последовательную теорию сильных взаимодействий. Геометрически теория Янга–Миллса – это по существу “общая теория относительности в зарядовом пространстве”, и в этом смысле она очень близка по духу к теории тяготения Эйнштейна. Идея о связи принципа общей ковариантности, составляющего основу общей теории относительности, и калибровочной инвариантности в электродинамике восходит еще к работам Германа Вейля. Само название калибровочных преобразований связано с поучительной ошибкой Вейля – в своей работе 1918 г. он предложил геометрическую трактовку электромагнитного поля как связности с одномерной абелевой структурной группой, но, поскольку квантовая механика с ее комплексными волновыми функциями еще не была создана, единственной возможной группой казались масштабные преобразования. Вейль предположил, что при параллельном переносе в электромагнитном поле меняется длина, и именно отсюда возник артиллерийский термин “Eichinvarianz”, продолживший уже существовавшую артиллерийскую метафорику электродинамики, начавшуюся с введения “зарядов” (артиллерийская терминология была сохранена и при переводе на английский и французский; В. А. Фок предпочитал говорить о “градиентной инвариантности”). Гипотеза Вейля об изменении масштабов в электромагнитном поле была полностью неверна, но после появления квантовой механики он исправил свою ошибку: “правильная” структурная группа – это группа вращений, действующая на фазу волновой функции. В 1928 г. Вейль и независимо В. А. Фок вывели уравнение Дирака, описывающее заряженный электрон в электромагнитном поле на фоне произвольной псевдоримановой метрики в пространстве-времени; выведенные ими формулы фактически содержали многие элементы будущей неабелевой калибровочной теории. Следующий важный шаг был сделан В. Гейзенбергом, введшим в теорию поля неабелеву группу изотопических преобразований, перемешивающих волновые функции протона и нейтрона. Идея обобщить глобальные изотопические преобразования и перейти таким образом к неабелевой калибровочной теории, содержалась в неопубликованном докладе О. Клейна, сделанном за несколько недель до начала Второй мировой войны. Только после войны, в 1954 г., неабелева калибровочная теория в форме, которую мы используем и сегодня, была сформулирована в знаменитой работе Ч.-Н. Янга и Р. Л. Миллса [128]. Эта теория была сразу же подвергнута почти уничтожающей критике Вольфгангом Паули, поскольку в ее наивной форме она предсказывала существование целого мультиплета безмассовых заряженных частиц, которые в природе не наблюдаются. Таким образом, в 1950-е годы теория Янга–Миллса, несмотря на ее геометрическую естественность и красоту, оставалась малоизвестной и малоизученной, а задача ее квантования не была решена.

[63]Препринт [20] был переведен на английский только в 1972 г.

Первую и не вполне удачную попытку построить квантовую теорию Янга–Миллса предпринял Р. Фейнман в начале 1960-х годов. Как и Фаддеев несколькими годами позже, Фейнман хотел применить технику квантовой теории поля в общей теории относительности, но из-за громоздкости вычислений решил, по предложению М. Гелл-Манна, начать с технически более простой теории Янга–Миллса. Применив к ней обычные правила вычисления теории возмущений, известные из квантовой электродинамики, Фейнман обнаружил, что наивный диаграммный подход дает в однопетлевом приближении неунитарный ответ. Поправку, восстанавливающую унитарность, можно было интерпретировать как вклад дополнительной скалярной частицы. При этом эта фиктивная частица ведет себя как фермион (в нарушение обычной связи между спином и статистикой).

Результаты Фейнмана стали известны Фаддееву по записи его доклада на гравитационной конференции в Варшаве (1962, опубликовано в 1963 г. в журнале "Acta Physica Polonica"). Возникла задача объяснить эти результаты вне рамок теории возмущений и вычислить поправки к наивной теории за пределами однопетлевого приближения. В решении этой задачи Фаддеев вместе с В. Н. Поповым [20], [21] исходили из предложенной когда-то самим Фейнманом техники функционального интеграла[64]. Кроме Фейнмана в середине 1960-х годов именно этими задачами занимался также Брайс Девитт, который сумел построить правильный метод квантования полей Янга–Миллса, а также теории гравитации Эйнштейна, но в его работах "духи Фаддеева–Попова" не были введены (см. п. 7.3) – именно введение духов (а также глубокое понимание структуры квантовой теории Янга–Миллса, которое возникло после работ Фаддеева) и повлияло на развитие этой важнейшей темы в последующие годы вплоть до наших времен. Фаддеев любил говорить, что основной вклад внесли Фейнман, Девитт и он с Поповым.

Разумеется, как и в квантовой электродинамике, получение диаграммного разложения – это только первый этап построения правильной теории. Второй, не менее важный этап, как уже отмечалось выше, – это доказательство перенормируемости теории, построение перенормированных констант связи и перенормированного ряда теории возмущений. При этом перенормируемость теории критически зависит от явного учета ее калибровочной инвариантности. Оказалось возможным соединить программу перенормировки с механизмом спонтанного нарушения симметрии ("механизм Хиггса", предложенный в 1964 г. П. Хиггсом и независимо Р. Браутом и Ф. Энглером), в результате которого часть квантов поля Янга–Миллса приобретает массу. Основанная на механизме Хиггса калибровочная модель электромагнитных и слабых взаимодействий, предложенная в 1967 г. С. Вайнбергом, полностью изменила отношение теоретиков к калибровочным теориям. В результате опубликованная в том же году (с годичной задержкой) работа Фаддеева и Попова немедленно оказалась в центре взрывного развития калибровочной теории; эта работа стала основой для дальнейшего развития теории. В работах Г. 'т Хоофта и М. Вельтмана

[64] В своей знаменитой статье 1950 г. Фейнман использовал функциональные интегралы для вывода диаграммного разложения в квантовой электродинамике, но в более поздних работах, парадоксальным образом, он ее уже не применял.

было проверено, что теория Янга–Миллса со спонтанным нарушением калибровочной симметрии остается перенормируемой[65]. Ключевое открытие начала 1970-х годов, сделанное в работах Д. Гросса, Ф. Вильчека и Х. Д. Политцера, состояло в том, что она свободна от полюса Ландау – бета-функция отрицательна и взаимодействие становится слабым на малых расстояниях. Это позволило распространить калибровочную теорию на сильные взаимодействия. Результатом этого беспрецедентного развития стало построение Стандартной модели в физике элементарных частиц, отмеченное несколькими Нобелевскими премиями. К сожалению, Л. Д. Фаддеев не попал в число лауреатов. Не только мы, его ученики, считаем, что это явная несправедливость. Старый друг Людвига Дмитриевича и создатель теории Янга–Миллса великий физик Янг Чжен-нин написал [80] по этому поводу:

> Многие, включая меня, считали, что Фаддеев должен был разделить Нобелевскую премию 1999 г. с 'т Хоофтом и Вельтманом. Среди физиков-теоретиков в XX в. существовало странное отношение к математике. В XIX в. работы Максвелла, Больцмана, Гиббса, Кельвина, Лоренца свидетельствовали о противоположном отношении к роли математики в физике. Кажется, что с некоторой заносчивости молодых Паули и Гейзенберга берет свое начало представление, что математика только вредит оригинальности в физике. Свидетельство тому – горечь и страдания Макса Борна или Вигнера. Хотя Гейзенберг в поздние годы изменил свои взгляды на математику, в американской физике это высокомерное пренебрежение математикой надолго укоренилось. Я думаю, что это одна из причин, почему Фаддеев не был включен в число лауреатов 1999 г.

Стоит заметить, что упоминание Паули в этом контексте не лишено некоторой персональной горечи – в 1954 г. Паули на семинаре Р. Оппенгеймера "зарубил" работу самого Янга, который рассказывал про свою теорию. Только молодость Янга и благожелательность Оппенгеймера спасли положение, и работа Янга и Миллса, изменившая фундаментальную физику, была опубликована.

7.2. Некоторые общие факты и обозначения. Л. Д. Фаддеев еще со студенческих лет мечтал заниматься квантовой теорией поля[66]. После решения квантовой задачи трех тел он решил заняться сложной задачей квантования гравитации, которой очень интересовался Дирак. В качестве модельного примера Л. Д. Фаддеев решил рассмотреть более просто формулируемую теорию полей Янга–Миллса. По-видимому, он был первым, кто понял геометрическую структуру[67] теории Янга–Миллса и использовал соответствующий математический аппарат.

---

[65] Перенормируемость безмассовой теории Янга–Миллса была доказана несколько раньше А. А. Славновым.

[66] Предполагается, что читатель знаком с основами квантовой теории поля. См., например, монографию А. А. Славнова и Л. Д. Фаддеева [57] и учебник Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [90].

[67] Следует отметить, что в 1970-е годы Джеймс Саймонс и Ч.-Н. Янг организовали в университете Стоуни-Брук физико-математический семинар, посвященный математической формулировке калибровочных теорий.

Людвиг Дмитриевич любил начинать свои лекции с геометрической формулировки теории Янга–Миллса[68]. Пусть M_4 – это пространство-время с координатами

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

и метрикой Минковского

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu, \qquad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(здесь и далее мы используем суммирование по повторяющимся индексам). Пусть G – компактная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, а $P \to M_4$ – главное G-расслоение над M_4.[69] Обозначим через $\mathcal{A}$ бесконечномерное аффинное пространство связностей в присоединенном расслоении $\operatorname{ad} P = P \times_G \mathfrak{g}$, а через $\mathcal{G} = \operatorname{Map}(M_4, G)$ – бесконечномерную группу калибровочных преобразований. Калибровочная группа $\mathcal{G}$ действует на пространстве связностей $\mathcal{A}$ следующим образом[70]:

$$(g, A) \mapsto A^g = gAg^{-1} + dgg^{-1}, \quad \text{где } A \in \mathcal{A},\ g \in \mathcal{G}. \tag{7.1}$$

Кривизна связности A определяется как

$$F = (d - A)^2 = -dA + A \wedge A$$

и является 2-формой на M_4 со значениями в расслоении $\operatorname{ad} P$. В локальном репере мы имеем

$$A = A_\mu\, dx^\mu \quad \text{и} \quad F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + [A_\mu, A_\nu], \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,.$$

Лагранжиан теории Янга–Миллса имеет вид

$$\mathscr{L}(A)(x) = \frac{1}{8\mathrm{g}^2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \text{где} \quad F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}. \tag{7.2}$$

Здесь $\operatorname{tr}\colon \operatorname{End}\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ – матричный след (форма Киллинга), а g играет роль константы связи. Переопределением $A \to \mathrm{g}A$ константу связи g можно убрать

[68] Людвиг Дмитриевич любил вспоминать, что понять геометрическую формулировку теории Янга–Миллса ему помогла книжка А. Лихнеровича "Теория связностей в целом и группы голономий" [114], которую он купил в 1964 г. на развале старых книг на Невском проспекте за 46 копеек.

[69] Часто, когда поле Янга–Миллса взаимодействует с "материей", используется также $E \to M_4$ – комплексное векторное расслоение, ассоциированное с заданным конечномерным представлением $\rho\colon G \to \operatorname{End} V$ группы G. В физических приложениях к стандартной модели Вайнберга–Салама–Глэшоу G равна $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$.

[70] Как принято у физиков и в [57], мы используем $(d - A)s$ для ковариантного дифференцирования сечений s расслоения E, а не более общепринятое соглашение $(d + A)s$.

из (7.2), но она появится в определении кривизны перед нелинейным членом. Таким образом, взаимодействие определяется квадратичным членом формы кривизны, и поэтому мы без потери общности положим $\mathrm{g} = 1$. Уравнения Янга–Миллса возникают как уравнения Эйлера–Лагранжа из функционала действия[71]

$$\mathcal{S}(A) = \int_{M_4} \mathscr{L}(A)\, d^4x \tag{7.3}$$

и имеют вид

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - [A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0.$$

Калибровочная инвариантность теории Янга–Миллса существенно отличает ее от других моделей квантовой теории поля. Поучительна история ее приложений к физике высоких энергий. Р. Фейнман, по совету В. Вайскопфа, решил заняться квантовой теорией гравитации Эйнштейна, и М. Гелл-Манн посоветовал ему потренироваться вначале на более удобной модели Янга–Миллса. Используя стандартный подход, основанный на теории возмущений, Фейнман обнаружил, что в так называемом однопетлевом приближении этот подход дает неунитарный ответ. Удивительным образом Фейнман в своем подходе к теории Янга–Миллса не использовал сформулированный им метод функционального интегрирования, который был отправной точкой изложенного ниже подхода Л. Д. Фаддеева и В. Н. Попова [20], [21].

7.3. Квантование полей Янга–Миллса: лагранжев подход. Согласно Фейнману, матричные элементы матрицы рассеяния в квантовой теории поля задаются функциональным интегралом

$$\langle \mathrm{in}|S|\mathrm{out}\rangle = \int e^{i\mathcal{S}(A)}\, d\mu(A). \tag{7.4}$$

а “интегрирование” ведется по всем связностям A, удовлетворяющим при $t = x_0 \to \pm\infty$ специальным асимптотическим условиям, характеризующим “in/out” состояния рассеяния[72]. Поскольку действие $\mathcal{S}(A)$ и “мера интегрирования”

$$d\mu(A) = \prod_{x\in M_4} dA(x) \tag{7.5}$$

инвариантны при калибровочных преобразованиях, возникает задача корректного определения функционального интеграла (7.4) не как (заведомо расходящегося вследствие бесконечного объема калибровочной группы $\mathcal{G}$) “интеграла” по всему пространству связностей $\mathcal{A}$, а как функционального интеграла по пространству орбит $\mathcal{A}/\mathcal{G}$. В работах [20], [21] эта задача была решена при помощи замечательного приема, так называемого “трюка Фаддеева–Попова”.

Основную идею трюка Фаддеева–Попова проще всего объяснить на конечномерном примере. Рассмотрим n-мерное риманово многообразие X с мерой $d\mu$,

[71] с надлежащими условиями убывания $A_\mu(x)$ при $|x| \to \infty$.

[72] Фейнман не указал, как надо выбирать эти асимптотические условия. Корректное определение асимптотических условий в функциональном интеграле для S-матрицы было дано в лекциях Л. Д. Фаддеева [34] на знаменитой физической школе в Лезуш, Франция. На этих лекциях было воспитано не одно поколение физиков-теоретиков; их подробное изложение см. в монографии [57].

порожденной формой объема римановой метрики, и предположим, что на X задано свободное действие компактной группы Ли G при помощи изометрий:

$$X \times G \ni (g, x) \mapsto T_x(g) = g \cdot x \in X.$$

Прием Фаддеева–Попова состоит в сведении интеграла

$$\int_X f(x)\, d\mu(x)$$

от G-инвариантной функции $f(x)$ на X к интегралу по факторпространству X/G – пространству орбит $\mathcal{O}_x = G \cdot x$ группы G.

Именно, предположим, что X/G можно реализовать при помощи подмногообразия Y в X, которое пересекает каждую орбиту ровно один раз и задается уравнениями $F(x) = 0$, где F – гладкое отображение $F\colon X \to \mathbb{R}^k$, дифференциал которого имеет ранг k для всех $x \in X$. Обозначим через dg меру Хаара на G, нормированную условием

$$\int_G dg = 1,$$

и определим G-инвариантную функцию $A_F(x)$ на X при помощи соотношения

$$A_F(x) \int_G \delta(F(g \cdot x))\, dg = 1. \tag{7.6}$$

Замечательным образом

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x) A_F(x) \delta(F(x))\, d\mu(x) \tag{7.7}$$

$$= \int_Y f(y) \det(F_y \mathcal{T}_y)\, d\nu(y), \tag{7.8}$$

где $d\nu$ – мера на Y, порожденная индуцированной формой объема, F_y – дифференциал отображения F в точке $y \in Y$, а $\mathcal{T}_y$ – дифференциал отображения $g \mapsto T_y(g)$ в единице e группы G.

Действительно, используя трюк Фаддеева–Попова (“вставку единицы” при помощи уравнения (7.6)), по теореме Фубини получаем

$$\begin{aligned}\int_X f(x)\, d\mu(x) &= \int_G \left(\int_X f(x) A_F(x) \delta(F(g \cdot x))\, d\mu(x) \right) dg \\ &= \int_G \left(\int_X f(x) A_F(x) \delta(F(x))\, d\mu(x) \right) dg \\ &= \int_X f(x) A_F(x) \delta(F(x))\, d\mu(x).\end{aligned}$$

Здесь во втором уравнении мы воспользовались заменой переменной $x \mapsto g \cdot x$ и G-инвариантностью функций $f(x)$, $A_F(x)$ и меры $d\mu$. Это доказывает равенство (7.7); равенство (7.8) следует из соотношения $A_F(y) = \det(F_y \mathcal{T}_y)$, получаемого из известной формулы замены переменной в δ-функции[73].

[73]См., например, монографию И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова “Обобщенные функции и действия над ними” [98].

В работах [20], [21] Л. Д. Фаддеев и В. Н. Попов применили этот прием к функциональному интегралу для S-матрицы в теории Янга–Миллса[74]. Именно, в качестве многообразия X с действием группы Ли G рассмотрим бесконечномерное аффинное пространство $\mathcal{A}$ связностей в главном расслоении P с действием бесконечномерной калибровочной группы $\mathcal{G}$. Как и в конечномерном случае, будем предполагать, что факторпространство $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ можно реализовать как подмногообразие в $\mathcal{A}$ при помощи калибровочного условия, например, используя калибровку Лоренца[75]

$$\chi^L(A)(x) = \partial_\mu A^\mu(x) = 0, \qquad A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu.$$

Формальное применение равенств (7.7) и (7.8) дает

$$\langle \mathrm{in}|S|\mathrm{out}\rangle = \int e^{i\mathcal{S}(A)} \det M^L(A) \prod_{x\in M_4} \delta(\partial_\mu A^\mu(x))\, d\mu(A), \tag{7.9}$$

где

$$M^L(A) = \partial_\mu \partial^\mu - [A^\mu, \partial_\mu], \qquad \partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu,$$

– дифференциальный оператор, действующий на элементы u в присоединенном представлении алгебры Ли $\mathfrak{G}$ калибровочной группы $\mathcal{G}$, т. е. на функции $u(x)$ на M_4 со значениями в присоединенном представлении алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Регуляризованный детерминант $\det M^L(A)$ дифференциального оператора $M^L(A)$ – знаменитый детерминант Фаддеева–Попова – определяется, например, при помощи метода ζ-функции.

Л. Д. Фаддеев хорошо знал работы Ф. А. Березина[76] об интегрировании по грассмановым (антикоммутирующим) переменным (см. [87]). Замечательным образом в этом подходе аналог гауссова интеграла содержит детерминант соответствующей квадратичной формы в числителе, а не в знаменателе. Фаддеев и Попов поняли, что участвующий в формуле (7.9) детерминант $\det M^L(A)$ может быть переписан в виде интеграла по антикоммутирующим переменным, если ввести фиктивные антикоммутирующие переменные $\bar{c}(x)$ и $c(x)$ со значениями в присоединенном представлении алгебры Ли $\mathfrak{g}$ – знаменитые духи[77] Фаддеева–Попова! Именно,

$$\det M^L(A) = \int \exp\biggl\{ i \int_{M_4} \langle \bar{c}(x), M^L(A) c(x)\rangle\, d^4x \biggr\} \prod_{x\in M_4} d\bar{c}(x)\, dc(x), \tag{7.10}$$

[74] По поводу основных определений и понятий квантовой теории поля мы отсылаем читателя к монографии [57].

[75] Необходимо проверить, что многообразие, задаваемое калибровочным условием, пересекает каждую орбиту калибровочной группы ровно один раз, так что в калибровке Лоренца оператор $M^L(A)$ должен всегда иметь тривиальное ядро. В 1978 г. В. Н. Грибов показал, что это условие не выполняется на подмногообразии полей Янга–Миллса коразмерности нуль, а впоследствии И. М. Зингер доказал, что на S^4 однозначного выбора калибровки не существует и всегда имеются "грибовские неоднозначности". Однако эти неоднозначности никак не влияют на корректность теории возмущений.

[76] Фаддеев познакомился с Березиным в 1958 г. на знаменитом семинаре И. М. Гельфанда, и с того времени их связывала научная дружба.

[77] Отметим, что духи Фаддеева–Попова не участвуют в асимптотических состояниях и граничные условия при $t \to \pm\infty$ на них не накладываются.

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – форма Киллинга в присоединенном представлении алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом, получаем

$$\langle \mathrm{in}|S|\mathrm{out}\rangle = \int \exp\left\{ i\mathcal{S}(A) + i\int_{M_4} \langle \bar{c}(x), M^L(A)c(x)\rangle\, d^4x \right\} d\mu^L(A,\bar{c},c), \tag{7.11}$$

где

$$d\mu^L(A,\bar{c},c) = \prod_{x\in M_4} \delta(\partial_\mu A^\mu(x))\, d\bar{c}(x)\, dc(x)\, d\mu(A). \tag{7.12}$$

Отметим, что в случае абелевой калибровочной группы, как в теории Максвелла и в КЭД, оператор M^L не зависит от A, так что духи не взаимодействуют с калибровочным полем и не нужны для построения теории возмущений. В неабелевых же теориях духи Фаддеева–Попова играют ключевую роль.

Формулы (7.11), (7.12) лежат в основе правил Фейнмана для теории возмущений в теории Янга–Миллса и излагаются теперь во всех учебниках по квантовой теории поля. Соответствующая диаграммная техника для теории возмущений, с пропагаторами калибровочного поля и духов и всеми вершинами взаимодействия, была впервые сформулирована в киевском препринте [20] Л. Д. Фаддеева и В. Н. Попова. Использование этих правил Фаддеева–Попова лежит в основе замечательных достижений физики высоких энергий, приведших в 1970-е годы к формулировке Стандартной модели элементарных частиц. Так, используя формализм Фаддеева–Попова, Г. 'т Хоофт и М. Вельтман доказали перенормируемость квантовой теории Янга–Миллса и модели Вайнберга–Салама, а Д. Гросс, Ф. Вильчек и Х. Д. Политцер установили, что квантовая теория Янга–Миллса асимптотически свободна[78].

7.4. Интеграл Фейнмана для систем со связями. После знаменитой работы [21] Л. Д. Фаддеева и В. Н. Попова о квантовании калибровочных полей в формализме функционального интеграла у физиков-теоретиков возник естественный вопрос об унитарности предложенного там формализма. Л. Д. Фаддеев хорошо понимал, что если вместо лагранжева подхода к функциональному интегралу использовать гамильтонов формализм, то унитарность будет обеспечена. Сложность задачи состоит в том, что в гамильтоновом подходе классическая динамика полей Янга–Миллса, как и теория тяготения Эйнштейна, являются обобщенными гамильтоновыми системами со связями. Хотя Дирак и предложил (см. [94]) общий формализм для классического описания систем со связями, а также их квантования в операторном формализме, задача о квантовании гамильтоновых систем со связями первого класса в формализме фейнмановского интеграла в гамильтоновом подходе оставалась открытой.

В своей ставшей классической работе [22] Л. Д. Фаддеев дал элегантную математическую интерпретацию формализма Дирака для связей первого класса и с ее помощью решил задачу о квантовании таких систем в формализме функционального интеграла. В применении к теории Янга–Миллса это доказывает унитарность предложенного в [21], [20] формализма.

[78]Эти работы были удостоены Нобелевской премии по физике соответственно в 1999 и 2004 гг.

Следуя [22], начнем с конечномерного фазового пространства – симплектического многообразия Γ с симплектической формой ω. Для простоты рассмотрим случай $\Gamma = \mathbb{R}^{2n}$ с координатами

$$\boldsymbol{q} = (q^1, \dots, q^n), \quad \boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_n),$$

канонической симплектической формой

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

и вещественнозначной функцией $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, играющей роль гамильтониана классической системы. Пусть $\boldsymbol{H}$ – гамильтониан соответствующей квантовой системы – самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$, определенный, например, при помощи вейлевского квантования. Согласно Фейнману, матричные элементы унитарного оператора эволюции

$$\exp\biggl\{-\frac{i}{\hbar}(t'' - t')\boldsymbol{H}\biggr\}$$

(с помощью которого можно записать и S-матрицу) даются при помощи следующего функционального интеграла в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned}\biggl\langle \boldsymbol{q}'' \biggl| \exp\biggl\{-\frac{i}{\hbar}(t''-t')\boldsymbol{H}\biggr\} \biggr| \boldsymbol{q}' \biggr\rangle \\ = \int \exp\biggl\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} \Bigl(\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\Bigr)\, dt\biggr\} \prod_{t' \leqslant t \leqslant t''} d\boldsymbol{p}(t)\, d\boldsymbol{q}(t),\end{aligned} \tag{7.13}$$

где

$$\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}} = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i, \quad d\boldsymbol{p}(t)\, d\boldsymbol{q}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{dp_i(t)\, dq^i(t)}{2\pi\hbar}$$

и в экспоненте справа стоит классическое действие, сосчитанное для траектории $(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t))$, $t' \leqslant t \leqslant t''$, с условиями $\boldsymbol{q}(t') = \boldsymbol{q}'$ и $\boldsymbol{q}(t'') = \boldsymbol{q}''$, задающими специальные лагранжевы подмногообразия в Γ (см. главу 1 монографии А. А. Славнова и Л. Д. Фаддеева [57]).

Теперь рассмотрим случай, когда канонические переменные $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ пробегают не все фазовое пространство, а удовлетворяют связям

$$\varphi^a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0, \qquad a = 1, \dots, m, \tag{7.14}$$

и определяют гладкое подмногообразие M фазового пространства размерности $2n - m$. В работе [22] рассматриваются только связи первого класса, удовлетворяющие соотношениям[79]

$$\{\varphi^q, \varphi^b\}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{c=1}^{m} h_c^{ab}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\varphi^c(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \qquad a, b = 1, \dots, m, \tag{7.15}$$

[79] Из (7.15) следует, что $m \leqslant n$.

с некоторыми функциями $h_c^{ab}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$, где $\{\,\cdot\,,\cdot\,\}$ – это скобка Пуассона, отвечающая симплектической форме ω. Другими словами, скобки Пуассона связей первого класса между собой исчезают при ограничении на M. Также предполагается, что

$$\{H,\varphi^a\}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \sum_{c=1}^{m} h_c^a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\varphi^c(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \tag{7.16}$$

с некоторыми функциями $h_c^a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$, т. е. скобки Пуассона связей первого класса с гамильтонианом H также исчезают при ограничении на M.

Согласно Дираку, уравнения движения для такой обобщенной гамильтоновой системы получаются из вариационного принципа с обобщенным действием

$$S(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda}) = \int_{t'}^{t''}\left(\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) - \sum_{a=1}^{m}\lambda_a(t)\varphi^a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\right)dt,$$

в котором помимо канонических переменных $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ также участвуют независимые функции

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t),\ldots,\lambda_m(t)),$$

играющие роль множителей Лагранжа. Соответствующие уравнения движения состоят из канонических уравнений

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{a=1}^{m}\lambda_a\frac{\partial\varphi^a}{\partial q_i}\,, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i} + \sum_{a=1}^{m}\lambda_a\frac{\partial\varphi^a}{\partial p^i}\,, \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{7.17}$$

и условий (7.14). Из соотношений (7.15), (7.16) следует, что траектория, начавшаяся на M, не покидает это подмногообразие, так что уравнения (7.17) определяют закон преобразования координат M, в описании которого, кроме гамильтониана H, участвуют m произвольных функций $\lambda_a(t)$. Поэтому наблюдаемыми следует считать не все функции на M, а только такие, для которых гладкое продолжение f на все фазовое пространство Γ удовлетворяет условиям

$$\{f,\varphi^a\}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \sum_{b=1}^{m} g_b^a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\varphi^b(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \tag{7.18}$$

с произвольными функциями $g_b^a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$. В силу соотношений (7.15) условия (7.18) не зависят от способа продолжения на Γ заданной функции на M. При этом в уравнениях движения для таких функций,

$$\dot{f} = \{H,f\} + \sum_{a=1}^{m}\lambda_a\{\varphi^a,f\},$$

зависящие от λ_a члены исчезают на M.

Функции на M, продолжения которых на Γ удовлетворяют условиям (7.18), можно рассматривать как произвольные функции на некотором *редуцированном фазовом пространстве* Γ^* размерности $2n-2m$. Как показал Дирак, в качестве Γ^* можно выбрать пересечение M с подмногообразием в Γ, задаваемым уравнениями

$$\chi_a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = 0, \qquad a = 1,\ldots,m,$$

которые называются дополнительными условиями. Функции χ_a должны удовлетворять условию

$$\det \|\{\varphi^a, \chi_b\}\|(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \neq 0. \tag{7.19}$$

Л. Д. Фаддеев в [22] предложил следующую элегантную математическую интерпретацию формализма Дирака[80]. Именно, пусть $\widetilde{\omega}$ – ограничение симплектической формы ω на M, а X_f – гамильтоново векторное поле, отвечающее функции f на Γ. Условие (7.15) эквивалентно тому, что векторы $X_{\varphi^a}(m)$ для всех $m \in M$ являются касательными к M нулевыми векторами 2-формы $\widetilde{\omega}$. Условие $d\widetilde{\omega} = 0$ означает, что эти векторы образуют инволютивное распределение P на M, которое по теореме Фробениуса порождает слоение на M, слоями которого являются интегральные многообразия P. Соотношения (7.18) означают постоянство функции f вдоль слоев этого слоения. Дополнительные условия определяют подмногообразие Γ^* в M, а условие (7.19) означает, что Γ^* трансверсально интегральным многообразиям распределения P и ограничение симплектической формы $\widetilde{\omega}$ на Γ^* невырождено. В случае, когда каждое интегральное многообразие пересекает Γ^* только в одной точке, слоение является расслоением и редуцированное фазовое пространство Γ^* является его базой.

Важным специальным случаем этой конструкции является широко используемый в современной математике метод гамильтоновой редукции. Именно, рассмотрим гамильтоново действие ρ компактной группы Ли G на симплектическом многообразии Γ. Другими словами, действие G сохраняет симплектическую форму ω, а соответствующее действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ задается гамильтоновыми векторными полями, каждому $\xi \in \mathfrak{g}$ отвечает векторное поле

$$X_{H_\xi} = \{H_\xi, \cdot\} \quad \text{на } \Gamma, \quad \text{где} \quad dH_\xi = i_{\rho(\xi)}\omega.$$

При этом предполагается, что функции H_ξ можно выбрать так, чтобы возникающее отображение $\mathfrak{g} \to C^\infty(\Gamma)$ было гомоморфизмом алгебр Ли:

$$H_{[\xi,\eta]} = \{H_\xi, H_\eta\} \quad \text{для всех } \xi, \eta \in \mathfrak{g}. \tag{7.20}$$

В этой ситуации отображение моментов $\mu\colon \Gamma \to \mathfrak{g}^*$ определяется формулой

$$\mu(\xi) = H_\xi, \qquad \xi \in \mathfrak{g},$$

где $\mathfrak{g}^*$ – двойственное пространство к алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что 0 является регулярным значением отображения μ, так что $\mu^{-1}(0)$ является гладким подмногообразием в Γ. Если действие группы Ли G на $\mu^{-1}(0)$ свободно, то факторпространство $\mu^{-1}(0)/G$ является гладким многообразием и при этом на $\mu^{-1}(0)/G$ имеется естественная симплектическая форма, прообраз которой на $\mu^{-1}(0)$ при отображении проекции совпадает с ограничением формы ω на $\mu^{-1}(0)$. Симплектическое многообразие $\mu^{-1}(0)/G$ обозначается $\Gamma/\!/G$ и называется *симплектическим фактором* или *фактором Марсдена–Вайнштейна* (см. [117]), а сама процедура называется гамильтоновой редукцией. Гамильтонова редукция является частным случаем формализма Дирака, когда связи φ^a – это гамильтонианы H_{ξ_a} векторных полей $\rho(\xi_a)$, где ξ_a – образующие

[80]Этому способствовали беседы Людвига Дмитриевича с В. И. Арнольдом, с которым его связывала многолетняя дружба.

алгебры Ли $\mathfrak{g}$, так что $\mu^{-1}(0) = M$, а дополнительные условия характеризуют вложение M/G в M, определяющее редуцированное фазовое пространство Γ^*.

В случае, когда

$$\{\chi_a, \chi_b\}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0, \qquad a, b = 1, \ldots, m, \tag{7.21}$$

канонические переменные на Γ^* вводятся следующим простым образом. Соотношения (7.21) позволяют перейти к новым переменным на Γ, в которых дополнительные условия примут вид

$$\chi_a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = p_a,$$

где p_a теперь обозначают часть канонических импульсов новой системы переменных. Обозначим через q^a сопряженные с ними координаты, и пусть

$$\boldsymbol{p}^* = (p_1^*, \ldots, p_{2n-2m}^*), \quad \boldsymbol{q}^* = (q^{*1}, \ldots, q^{*2n-2m})$$

– остальные канонические переменные. Условие (7.19) в новых переменных выглядит следующим образом:

$$\det\left\|\frac{\partial \varphi^a}{\partial q^b}\right\|(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \neq 0,$$

так что уравнения (7.14) можно разрешить относительно q^a. В результате подмногообразие Γ^* задается уравнениями

$$p_a = 0, \quad q^a = q^a(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*), \qquad a = 1, \ldots, m,$$

и координаты $\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$ являются каноническими координатами для ограничения симплектической формы ω на Γ^*,

$$\omega\big|_{\Gamma^*} = \sum_{i=1}^{2n-2m} dp_i^* \wedge dq^{*i}.$$

Таким образом, обобщенная гамильтонова система на фазовом пространстве Γ с каноническими координатами $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, связями (7.14) и гамильтонианом $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ сводится к гамильтоновой системе на редуцированном фазовом пространстве Γ^* с каноническими координатами $\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{q}^*$ и гамильтонианом

$$H^*(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) = H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\big|_{\Gamma^*}.$$

Согласно Фейнману, ее квантование дается функциональным интегралом (7.13):

$$\int \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} \big(\boldsymbol{p}^* \dot{\boldsymbol{q}}^* - H^*(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)\big)\, dt\right\} \prod_{t' \leqslant t \leqslant t''} d\boldsymbol{p}^*(t)\, d\boldsymbol{q}^*(t). \tag{7.22}$$

Однако нахождение канонических переменных в редуцированном фазовом пространстве – очень сложная задача, которая редко поддается точному решению.

Замечательным образом Л. Д. Фаддеев доказал, что выражение (7.22) можно точно переписать в терминах обобщенной гамильтоновой системы со связями на фазовом пространстве Γ при помощи следующей формулы:

$$\int \exp\biggl\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\biggl(\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) - \sum_{a=1}^{m}\lambda_a(t)\varphi^a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\biggr)\,dt\biggr\}\prod_{t'\leqslant t\leqslant t''} d\boldsymbol{\lambda}(t)\,d\mu(\boldsymbol{p}(t),\boldsymbol{q}(t))$$
$$= \int \exp\biggl\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\bigl(\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\bigr)\,dt\biggr\}\prod_{t'\leqslant t\leqslant t''} d\widetilde{\mu}(\boldsymbol{p}(t),\boldsymbol{q}(t)), \qquad (7.23)$$

где

$$d\boldsymbol{\lambda} = \prod_{a=1}^{m}\frac{d\lambda_a}{2\pi}, \qquad d\mu(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = (2\pi)^m\prod_{a=1}^{m}\delta(\chi_a)\det\|\{\varphi^a,\chi_b\}\|(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\,d\boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{q},$$
$$d\widetilde{\mu}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = d\mu(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\prod_{a=1}^{m}\delta(\varphi^a),$$

а $\delta(F)$ – это δ-функция гиперповерхности (см., например, [98]) $F=0$ в Γ. Формула (7.23) и представляет собой искомое обобщение функционального интеграла Фейнмана для систем со связями. Важный результат, доказанный в [22], состоит в том, что выражение (7.23) не зависит от выбора дополнительных условий $\chi_a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=0$.

7.5. Квантование полей Янга–Миллса: гамильтонов подход. Формула (7.23) допускает обобщение на бесконечномерный случай и позволяет написать функциональный интеграл и для полей Янга–Миллса в гамильтоновой формулировке. Следуя [22], пусть G – простая компактная группа Ли размерности n, а t^a – образующие ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в присоединенном представлении, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{tr} t^a t^b = -2\delta^{ab}, \qquad a,b=1,\dots,n. \qquad (7.24)$$

Из (7.24) следует, что структурные константы f^{abc} алгебры Ли $\mathfrak{g}$,

$$[t^a,t^b] = \sum_{c=1}^{n} f_c^{ab}t^c,$$

образуют полностью антисимметричный тензор, что позволяет их записывать как $f^{abc}=f_c^{ab}=f_{bc}^a$.

Положим

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^{n}A_\mu^a(x)t^a \quad \text{и} \quad F_{\mu\nu}(x) = \sum_{a=1}^{n}F_{\mu\nu}^a(x)t^a.$$

Действие (7.2)–(7.3) теории Янга–Миллса может быть переписано в виде

$$\mathcal{S}(A) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\int_{M_4}\operatorname{tr}\biggl(E_k\partial_0A_k - \frac{1}{2}(E_k^2+B_k^2) + A_0G\biggr)\,d^4x, \qquad (7.25)$$

где

$$E_k = F_{k0}, \quad B_k = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk} F_{ij}, \quad G = \sum_{k=1}^{3}(\partial_k E_k - [A_k, E_k]), \qquad k = 1, 2, 3,$$

а ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{123} = 1$. Применяя к (7.25) преобразование Лежандра, получаем бесконечномерную обобщенную гамильтонову систему со связями первого класса. Именно, фазовым пространством является пространство Фреше

$$\mathscr{X} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n)$$

с каноническими координатами $E_k^a(\boldsymbol{x})$, $A_k^a(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, и симплектической формой

$$\Omega = \sum_{k=1}^{3}\sum_{a=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}E_k^a(\boldsymbol{x}) \wedge \mathrm{d}A_k^a(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x}.$$

Гамильтониан H и связи $G^a(\boldsymbol{x}) = 0$ (называемые в физической литературе законом Гаусса) даются формулами

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\int \operatorname{tr}\bigl(E_k^2(\boldsymbol{x}) + B_k^2(\boldsymbol{x})\bigr)\, d^3\boldsymbol{x} \tag{7.26}$$

и

$$G^a(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{3}\bigl(\partial_k E_k^a(\boldsymbol{x}) - f_{bc}^a A_k^b(\boldsymbol{x}) E_k^c(\boldsymbol{x})\bigr), \qquad a = 1, \ldots, n, \tag{7.27}$$

а переменные $A_0^a(\boldsymbol{x})$ играют роль множителей Лагранжа. Можно показать, аккуратно используя канонические скобки Пуассона

$$\{E_k^a(\boldsymbol{x}), A_l^b(\boldsymbol{y})\} = \delta_{kl}\delta^{ab}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \tag{7.28}$$

что скобки Пуассона гамильтониана и связей имеют вид (7.15)–(7.16):

$$\{H, G^a(\boldsymbol{x})\} = 0 \quad \text{и} \quad \{G^a(\boldsymbol{x}), G^b(\boldsymbol{y})\} = \sum_{c=1}^{n} f_c^{ab} G^c(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \qquad a, b = 1, \ldots, n.$$

На фазовом пространстве $\mathscr{X}$ действует калибровочная группа $\mathcal{G} = \mathrm{Map}(\mathbb{R}^3, G)$:

$$\boldsymbol{A}^g = g\boldsymbol{A}g^{-1} + dgg^{-1}, \quad \boldsymbol{E}^g = g\boldsymbol{E}g^{-1}, \qquad g \in \mathcal{G}, \tag{7.29}$$

где

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{n} A_k^a(\boldsymbol{x}) t^a\, dx^k, \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \sum_{a=1}^{n} E_k^a(\boldsymbol{x}) t^a\, dx^k.$$

Действие калибровочной группы $\mathcal{G}$ на $\mathscr{X}$ гамильтоново, и гамильтонианы, отвечающие элементам $u = \sum_{a=1}^{n} u^a(\boldsymbol{x}) t^a$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы $\mathcal{G}$, – это функционалы

$$H_u = \sum_{a=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^3} G^a(\boldsymbol{x}) u^a(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x}, \tag{7.30}$$

удовлетворяющие скобкам Пуассона (7.20):

$$\{H_u, H_v\} = H_{[u,v]}.$$

Таким образом, к теории Янга–Миллса полностью применим изложенный выше формализм Дирака, где в качестве дополнительного условия можно выбрать так называемую кулоновскую калибровку

$$\chi_a^C(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{3} \partial_k A_k^a(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Из (7.28) следует, что обобщенная функция $\{G^a(\boldsymbol{x}), \chi_b(\boldsymbol{y})\}$ – это ядро $M^C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_b^a$ дифференциального оператора

$$M^C(A)_b^a = -\delta_b^a \Delta + \sum_{c=1}^{n} \sum_{k=1}^{3} f_{bc}^a A_k^c(\boldsymbol{x}) \partial_k, \tag{7.31}$$

где

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$$

– оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, аналогом $\det \|\{\varphi^a, \chi_b\}\|$ в конечномерном случае является регуляризованный детерминант $\det M^C(A)$ оператора $M^C(A)$.

Окончательно функциональный интеграл для S-матрицы в гамильтоновой формулировке имеет вид

$$\int \exp\biggl\{-\frac{i}{2} \sum_{k=1}^{3} \int \operatorname{tr}\Bigl(E_k \partial_0 A_k - \frac{1}{2}(E_k^2 + B_k^2) + A_0 G\Bigr)\, d^4x\biggr\}\, d\mu(A, E),$$

где

$$d\mu(A, E) = d\mu(A) \det M^C(A) \prod_{x \in M_4} \prod_{a=1}^{n} \prod_{i=1}^{3} \delta(\chi_a^C(x))\, dE_i^a(x),$$

а “мера” $d\mu(A)$ была введена в (7.5). Выполняя гауссово интегрирование по переменным $E_i^a(\boldsymbol{x})$, получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{in}|S|\mathrm{out}\rangle &= \int \exp\{i\mathcal{S}(A)\} \det M^C(A) \prod_{x \in M_4} \prod_{a=1}^{n} \delta(\chi_a^C(x))\, d\mu(A) \\ &= \int \exp\biggl\{i\mathcal{S}(A) + i \int_{M_4} \langle \bar{c}(x), M^C(A) c(x)\rangle\, d^4x\biggr\}\, d\mu^C(A, \bar{c}, c), \end{aligned} \tag{7.32}$$

где мы ввели духи Фаддеева–Попова и положили

$$d\mu^C(A, \bar{c}, c) = \prod_{x \in M_4} \prod_{a=1}^{n} \delta(\chi_a^C(x))\, d\bar{c}(x)\, dc(x)\, d\mu(A). \tag{7.33}$$

Функциональный интеграл (7.32)–(7.33) является производящим для фейнмановских диаграмм в теории возмущений для S-матрицы, которая по построению удовлетворяет условию унитарности. Хотя кулоновская калибровка не является явно лоренц-инвариантной, Л. Д. Фаддеев доказывает в [22], что

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{in}|S|\mathrm{out}\rangle &= \int e^{i\mathcal{S}(A)} \det M^L(A) \prod_{x\in M_4} \delta(\partial_\mu A^\mu(x))\, d\mu(A) \\ &= \int e^{i\mathcal{S}(A)} \det M^C(A) \prod_{x\in M_4} \prod_{a=1}^{n} \delta(\chi_a^C(x))\, d\mu(A),\end{aligned}$$

так что построенная теория возмущений лоренц-инвариантна.

Другими словами, в [22] Л. Д. Фаддеев вывел квантование Фаддеева–Попова [21] из явно унитарного гамильтонова подхода. Статья [22], открывавшая первый номер основанного в 1969 г. Н. Н. Боголюбовым журнала "Теоретическая и математическая физика", сразу стала классической. Она оказала огромное влияние на развитие не только теории калибровочных полей, но и всей теоретической физики.

7.6. Квантовые аномалии. Квантовые аномалии в четырехмерной квантовой теории поля были открыты в конце 1960-х годов[81] в работах С. Адлера, Д. Белла и Р. Джакива. Наличие аномалии означает, что калибровочная симметрия классической теории не сохраняется при квантовании, так как квантовые поправки ее нарушают[82].

Более конкретно, квантовая (калибровочная) аномалия возникает в следующей ситуации. Рассмотрим главное G-расслоение $P \to M^{2n}$ над $2n$-мерным многообразием M^{2n}, играющим роль пространства-времени, где по-прежнему G – это компактная группа Ли. Пусть $E \to M^{2n}$ – комплексное векторное расслоение, ассоциированное с конечномерным представлением группы G. Обозначим через $\mathcal{A}$ бесконечномерное аффинное пространство связностей в расслоении E. Квантовая аномалия – это утверждение, что статистическая сумма теории вейлевских фермионов во внешнем калибровочном поле $A \in \mathcal{A}$, формально задаваемая функциональным интегралом[83]

$$Z(A) = \int \exp\left\{ i \int_{M^{2n}} \psi^\dagger(x) \not{D}(A) \psi(x)\, d^{2n}x \right\} \prod_{x\in M^{2n}} \mathscr{D}\psi(x)\, \mathscr{D}\psi^\dagger(x), \tag{7.34}$$

не инвариантна при калибровочных преобразованиях[84]

$$A \mapsto A^g = g^{-1}Ag + g^{-1}\,dg, \quad \text{где} \quad g \in \mathcal{G} = \mathrm{Map}(M^{2n}, G).$$

Здесь $\not{D}(A)$ – проекция оператора Дирака во внешнем поле на вейлевские спиноры. Физики любят говорить, что квантовая калибровочная аномалия – это утверждение о неинвариантности фермионной меры интегрирования в (7.34),

[81] Ранее, в 1949 г., Дж. Стейнбергер (будущий нобелевский лауреат по экспериментальной физике), изучая распад нейтрального пиона, проделал вычисление, в котором предвидел существование квантовой калибровочной аномалии.

[82] Основополагающий принцип внутренней самосогласованности квантовой теории поля (например, Стандартной модели) состоит в отсутствии аномалий.

[83] В евклидовом функциональном интеграле следует заменить $\psi^\dagger$ на $\chi^\dagger$, независимый от ψ вейлевский фермион противоположной киральности.

[84] В отличие от пп. 7.3 и 7.5, здесь мы следуем работе [48] и под связностью понимаем $d + A$, а под A^g – правое действие калибровочной группы $\mathcal{G}$.

так как подынтегральное выражение не меняется при калибровочном преобразовании

$$A \mapsto A^g, \quad \psi \mapsto g^{-1}\psi, \quad \psi^\dagger \mapsto \psi^\dagger g, \qquad g \in \mathcal{G}.$$

Математически формулу (7.34) следует понимать как “регуляризованный детерминант” оператора $\not{D}(A)$, при этом $Z(A)$ есть не функция, а сечение детерминантного расслоения над $\mathcal{A}$. Именно, $Z(A)$ – это “квадратный корень” из детерминанта оператора Дирака во внешнем калибровочном поле A. Легко показать, что существует регуляризация (например, через ζ-функцию), при которой детерминант оператора Дирака калибровочно инвариантен, из чего следует, что статистическая сумма $Z(A)$ определена с точностью до фазы.

Наличие аномалии можно записать через простую и изящную формулу

$$Z(A^g) = \exp\{-iW(A,g)\}Z(A), \qquad g \in \mathcal{G}, \tag{7.35}$$

где $W(A,g)$ – это так называемый функционал действия Весса–Зумино, определенный по модулю $2\pi\mathbb{Z}$. Отметим, что изначально физики вывели инфинитезимальный вариант этой формулы. Именно, пусть $\mathfrak{G}$ – алгебра Ли калибровочной группы $\mathcal{G}$, действующая на $\mathcal{A}$ по правилу

$$A \mapsto du + [A,u], \qquad u \in \mathfrak{G}.$$

Если в (7.35) положить $g = e^{tu}$ и продифференцировать по t при $t = 0$, то при всех $u \in \mathfrak{G}$ получим

$$\int_{M^{2n}} \left\langle \nabla_A \frac{\delta Z(A)}{\delta A(x)} + i\mathfrak{A}(x), u(x) \right\rangle d^{2n}x = 0.$$

Здесь $\delta/\delta A(x)$ – производная Фреше, $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – форма Киллинга в заданном представлении группы G и

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} W(A, e^{tu}) = \int_{M^{2n}} \langle \mathfrak{A}(x), u(x)\rangle\, d^{2n}x.$$

Через образующие t^a алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и коэффициенты связности $A^a_\mu(x)$ полученное соотношение можно переписать в виде

$$(T^a(x) + i\mathfrak{A}^a(x))Z(A) = 0, \tag{7.36}$$

где полином $\mathfrak{A}^a(x)$ от коэффициентов связности A^a_μ и их первых производных в точке $x \in M^{2n}$ – это квантовая аномалия, а

$$T^a(x) = -(\nabla_A)_\mu \frac{\delta}{\delta A^a_\mu(x)} = -\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A^a_\mu} - \sum_{c=1}^n f^{ab}_c A^c_\mu \frac{\delta}{\delta A^b_\mu} \tag{7.37}$$

– генератор калибровочных преобразований в пространстве функционалов на $\mathcal{A}$. Генераторы $T^a(x)$ являются операторами закона Гаусса в $(2n+1)$-мерной теории Янга–Миллса.

Наличие расходимостей в квантовой теории поля с неизбежностью приводит к различным схемам регуляризации. Изменение схемы регуляризации приводит к замене

$$Z(A) \mapsto \exp\{i\beta(A)\}Z(A),$$

где "контрчлен" $\beta(A)$ – это локальный функционал (т. е. он задается интегралом по M^{2n} от плотности, локально зависящей от коэффициентов связности A). При этом

$$W(A,g) \to W(A,g) + \delta\beta(A,g), \quad \text{где} \quad \delta\beta(A,g) = \beta(A^g) - \beta(A). \tag{7.38}$$

Если переопределением (7.38) можно сократить $W(A,g)$, то сечение $Z(A)$ корректно определено и инвариантно. Для некоторых представлений группы G такое сокращение возможно, но в общей ситуации – нет. Таким образом, в общей ситуации не существует схемы регуляризации, которая сохраняла бы калибровочную симметрию в функциональном интеграле (7.34) по вейлевским фермионам.

Формула (7.36) и привлекла внимание Людвига Дмитриевича и его молодого ученика С. Л. Шаташвили. В середине 1980-х годов они начали заниматься математическими аспектами аномалий в калибровочных теориях. Уже их первая работа на эту тему [48] содержала ключевое наблюдение, что действие Весса–Зумино – это 1-коцикл группы калибровочных преобразований $\mathcal{G}$ (а аномалия – это 1-коцикл алгебры Ли $\mathfrak{G}$), действующей на функционалах на пространстве $\mathcal{A}$ полей Янга–Миллса! Это открытие оказало большое влияние на развитие этой важной тематики, актуальной в связи с необходимостью изучать калибровочные и гравитационные аномалии в квантовых теориях поля с размерностью пространства-времени, большей чем 4, и в теориях суперструн. В работе [48] для вычисления коциклов калибровочной группы была предложена ставшая популярной так называемая "процедура спуска"[85] и был найден 2-коцикл, отвечающий абелеву расширению бесконечномерной алгебры Ли (так называемой "трехмерной алгебры токов") одновременных коммутационных соотношений квантового закона Гаусса в четырехмерном пространстве-времени. Людвиг Дмитриевич очень гордился тем, что применил в квантовой теории поля результаты своего отца, Дмитрия Константиновича Фаддеева, который в 1940-е годы открыл когомологии групп!

Именно, пусть G – абстрактная группа, а M – правый G-модуль. Рассмотрим комплекс $C^\bullet(G,M)$ с коцепями $C^n(G,M)$, пространствами функций на $M \times G^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и с дифференциалом

$$\delta_n \colon C^n(G,M) \to C^{n+1}(G,M),$$

определенным формулой

$$\begin{aligned}(\delta_n\alpha_n)(m, g_1, \dots, g_{n+1}) = \alpha_n(m \cdot g_1, g_2, \dots, g_{n+1}) \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \alpha_n(m, g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2} \dots, g_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1}\alpha_n(m; g_1, \dots, g_n),\end{aligned} \tag{7.39}$$

[85] В комбинации с результатом Л. Алвареса-Гауме и Э. Виттена о гравитационных аномалиях 1983 г. процедура спуска использовалась в знаменитой работе М. Грина и Дж. Шварца для доказательства существования математически самосогласованных моделей теории суперструн.

так что $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$. Этот комплекс и использовался в работе [48] для случая, когда G – это группа $\mathcal{G}$ калибровочных преобразований, действующих на пространстве $M = \mathcal{A}$ полей Янга–Миллса – связностей в расслоении $E \to M^{2n}$, а коцепи $\alpha_n(A, g_1, \dots, g_n)$ – локальные функционалы от A и g. Из сравнения этих формул с (7.35) следует ключевое замечание, сделанное в [48], что действие Весса–Зумино $W(A, g)$ – это 1-коцикл калибровочной группы $\mathcal{G}$, задающий ненулевой класс когомологий, а его инфинитезимальная версия $\mathfrak{A}^a(A)$ – это 1-коцикл соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{G}$. При этом относительно действия $\mathcal{G}$ на функционалах от A, задаваемого формулой

$$U(g)\Psi(A) = e^{iW(A,g)}\Psi(A^g),$$

калибровочная инвариантность восстанавливается:

$$U(g)Z(A) = Z(A).$$

В работе [48] также была высказана гипотеза, обсуждавшаяся детально в [49], что соответствующий 2-коцикл должен возникать в гамильтоновом подходе к полной квантовой теории, в которой калибровочное поле A уже не внешнее, а динамическое. Соответствующие генераторы калибровочных преобразований, участвующие в законе Гаусса, отличаются от генераторов $T^a(x)$ в (7.37) сдвигом на генератор калибровочных преобразований в фермионном фоковском пространстве, т. е. на фермионный ток $J^a(x)$:

$$G^a(x) = T^a(x) + J^a(x), \quad \text{где} \quad J^a(x) = \psi^\dagger(x) t^a \psi(x),$$

и реализуют проективное представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Для построения действия Весса–Зумино, т. е. 1-коцикла, и 2-коцикла, связанного с законом Гаусса, в [48] был предложен совершенно общий и красивый метод, основанный на бикомплексе с операторами δ и d (d – оператор внешнего дифференцирования, возникающий в теории вторичных характеристических классов Черна–Саймонса[86]).

Именно, начнем с многообразия M^{2n+2} размерности $2n+2$ и рассмотрим инвариантный полином[87] $w_{2n+2}(F)$ степени $n+1$ от формы кривизны

$$F = dA + A^2$$

связности A. Поскольку для формы $\omega_{2n+2} = w_{2n+2}(F)$

$$d\omega_{2n+2}(F) = 0 \quad \text{и} \quad \delta\omega_{2n+2}(F) = 0, \tag{7.40}$$

то существует определенная локально на M^{2n+2} дифференциальная форма ω_{2n+1} степени $2n+1$ такая, что

$$d\omega_{2n+1} = \omega_{2n+2}.$$

[86] Этот подход был частично мотивирован работами С. Дезера, Р. Джакива и С. Темплтона начала 1980-х годов о трехмерной абелевой калибровочной теории с добавкой члена Черна–Саймонса. В статье [48] в гамильтоновом подходе изучалась физическая неабелева теория Янга–Миллса в нечетномерном пространстве с добавкой действия Черна–Саймонса. Метод статьи [48] используется в современных работах по теории твердого тела, физике высоких энергий и теории струн.

[87] например, $\mathrm{Tr}(iF/(2\pi))^{n+1}$.

Согласно С. П. Новикову, глобально на M^{2n+2} это многозначная форма

$$\omega_{2n+1} = d^{-1}\omega_{2n+2}.$$

Пусть $M^{2n+1} = \partial B^{2n+2}$ есть $(2n+1)$-мерный цикл в M^{2n+2}, являющийся границей $(2n+2)$-мерного подмногообразия B^{2n+2} в M^{2n+2}. Функционал Черна–Саймонса $I_{\mathrm{CS}}(A)$ для полей Янга–Миллса на M^{2n+1} определяется следующим образом:

$$I_{\mathrm{CS}}(A) = 2\pi \int_{B^{2n+2}} \omega_{2n+2}(A') = 2\pi \int_{M^{2n+1}} \omega_{2n+1}(A), \tag{7.41}$$

где выбрано какое-то продолжение A' связности A на M^{2n+1} в B^{2n+2}. Так как для двух таких продолжений разность

$$\int_{B^{2n+2}} \omega_{2n+2}(A') - \int_{B^{2n+2}} \omega_{2n+2}(A'')$$

есть интеграл от ω_{2n+2} по циклу старшей размерности в M^{2n+2}, то, предполагая целочисленность класса когомологий

$$[\omega_{2n+2}] \in H^{2n+2}(M^{2n+2}, \mathbb{R}),$$

мы видим, что функционал $e^{iI_{\mathrm{CS}}(A)}$ корректно определен и зависит только от значения калибровочного поля на M^{2n+1}. Легко проверить, что $(2n+1)$-форма

$$\delta\omega_{2n+1} = \omega_{2n+1}(A^g) - \omega_{2n+1}(A)$$

замкнута:

$$d\delta\omega_{2n+1} = d\delta d^{-1}\omega_{2n+2} = \delta\omega_{2n+2} = 0. \tag{7.42}$$

Из этого следует, что, в отличие от самого действия Черна–Саймонса (7.41), его калибровочная вариация

$$\alpha_1(A, g) = I_{\mathrm{CS}}(A^g) - I_{\mathrm{CS}}(A)$$

корректно определена (по модулю $\mathbb{Z}$) и в случае, когда M^{2n+1} – это не цикл, а цепь с границей: $\partial M^{2n+1} = M^{2n}$. Тем самым,

$$\alpha_1(A, g) = 2\pi \int_{M^{2n+1}} \delta\omega_{2n+1}(A) = 2\pi \int_{M^{2n}} d^{-1}\delta\omega_{2n+1}(A) \tag{7.43}$$

является искомым 1-коциклом, $\delta\alpha_1 = 0 \bmod \mathbb{Z}$. Это означает, что α_1 является многозначным функционалом в смысле С. П. Новикова.

Замечательным образом $e^{i\alpha_1(A,g)}$ зависит только от значении A и g на M^{2n} и не зависит от их продолжения на M^{2n+1}. Действительно, из явного вычисления следует, что зависимость от A в (7.43) полиномиальная и является локальным функционалом от A на M^{2n}. Однако не зависящее от A слагаемое $\alpha_1(0, g)$ в (7.43) нелокально и не может быть записано только в терминах элемента калибровочной группы на M^{2n}. Это слагаемое и есть знаменитое действие

Весса–Зумино–Новикова–Виттена, которое в наших обозначениях пропорционально

$$\int_{M^{2n}} d^{-1}\,\mathrm{Tr}(dgg^{-1})^{2n+1}. \tag{7.44}$$

Аналогично действию Черна–Саймонса, неоднозначность действия (7.44) пропадает при экспоненцировании: разность двух продолжений из M^{2n} в M^{2n+1} пропорциональна

$$\int_{M^{2n+1}} \mathrm{Tr}(dgg^{-1})^{2n+1}$$

и поэтому целочисленна (коэффициент пропорциональности определяется изначальной нормировкой ω_{2n+2}).

Только что описанная процедура спуска может быть продолжена и дальше. На $(k+1)$-м шаге получаем замкнутую $(2n+1-k)$-форму

$$\delta d^{-1}\delta\cdots d^{-1}\delta d^{-1}\omega_{2n+2},$$

и интеграл от нее по циклу соответствующей размерности является k-коциклом. В работе [48] были впервые получены явные формулы для группового и Ли-алгебраического коциклов. Например, для случаев $k=2$ и $n=2$ была получена формула

$$\mathfrak{A}_2(A;u,v)=\frac{1}{12\pi^2}\int_{M^3}\mathrm{Tr}(du\wedge dv\wedge A), \qquad u,v\in\mathfrak{G}, \tag{7.45}$$

где M^3 – трехмерное многообразие. Открытые в [48] формулы привели к развитию нового направления в теории представлений бесконечномерных групп и алгебр Ли, а соответствующий 2-коцикл (7.45) и его групповой аналог сейчас называются коциклами Микельсона–Фаддеева–Шаташвили.

Высказанная в [48] гипотеза формулируется следующим образом:

$$[G(u),G(v)]=G([u,v])+\mathfrak{A}_2(A,u,v), \quad G(u)=\int_{M^3}u^a(x)G^a(x)\,d^3x. \tag{7.46}$$

Тут важно отметить, что из-за зависимости 2-коцикла от калибровочного поля обычная алгебра фермионных токов (во внешнем поле A) должна быть заменена на закон Гаусса с динамическим калибровочным полем. При этом, в отличие от случая $n=1$, отвечающего одномерному центральному расширению группы петель LG группы G, в случае $n=2$ мы уже имеем дело с новым математическим объектом, а именно с абелевым расширением калибровочной группы $\mathcal{G}$ – группы отображений M^3 в G. Хотя в работе [51] и не удалось вывести формулу (7.46) в операторном подходе к квантовой теории поля[88], там был разработан эффективный метод квантования систем со связями второго рода для приложения к квантованию аномальных калибровочных теорий, называемый сейчас квантованием Фаддеева–Шаташвили. В формализме функционального интеграла формула (7.46) была доказана в [55].

[88] До сих пор неизвестно, как это сделать.

7.7. Метод орбит и функциональный интеграл. Метод орбит был разработан А. А. Кирилловым для описания унитарных представлений унипотентных групп Ли. Новаторская идея этого метода состоит в том, что унитарным представлениям (т. е. алгебраическим объектам) ставятся в соответствие орбиты коприсоединенного действия (геометрические объекты). Такой подход к теории представлений оказался очень плодотворным и лег в основу геометрической теории представлений.

Более детально, пусть G – связная компактная редуктивная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли и $\mathfrak{g}^*$ – двойственное пространство. Орбиты коприсоединенного действия G на $\mathfrak{g}^*$ параметризуются положительной камерой Вейля W_+. Точке $\lambda \in W_+$ ставится в соответствие орбита O_λ. Например, в случае $G = \mathrm{U}(n)$ положительная камера Вейля параметризуется наборами упорядоченных вещественных чисел

$$\lambda = \{\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n\}.$$

Пространство $\mathfrak{g}^*$ можно отождествить с эрмитовыми $(n \times n)$-матрицами, а орбиты O_λ состоят из матриц с заданными собственными значениями λ.

Коприсоединенные орбиты несут каноническую симплектическую форму – форму Кириллова. Для упрощения обозначений будем считать группу G и ее алгебру Ли $\mathfrak{g}$ матричными. Тогда произвольный элемент орбиты $x \in O_\lambda$ допускает представление в виде

$$x = g^{-1}\lambda g,$$

а форма Кириллова может быть записана так:

$$\omega = \frac{1}{2}\langle \lambda, [dgg^{-1}, dgg^{-1}]\rangle = \frac{1}{2}\langle x, [g^{-1}dg, g^{-1}dg]\rangle.$$

В случае, если λ – это вес G, форма ω принадлежит к целочисленному классу когомологий и определяет положительное линейное расслоение L_λ над орбитой. По теореме Бореля–Вейля–Ботта орбите O_λ можно поставить в соответствие неприводимое представление V_λ, которое реализуется в когомологиях L_λ. А. А. Кириллов предложил универсальную формулу, выражающую характер неприводимого представления V_λ в терминах интеграла по коприсоединенной орбите с мерой Лиувилля канонической симплектической формы от экспоненциальной функции.

Л. Д. Фаддеев и его ученики С. Л. Шаташвили и А. Ю. Алексеев поставили задачу получения формулы для характера представления V_λ в терминах функционального интеграла. Этот вопрос важен по нескольким причинам. С одной стороны, квантово-механическое описание характеров с помощью функционального интеграла дает новый взгляд на теорию представлений (и отвечает на вопрос, поставленный А. А. Кирилловым). С другой стороны, такой формализм позволяет рассматривать в рамках классической теории поля частицы со спином и голономии связностей (вильсоновские петли) в неабелевых калибровочных теориях.

Ответ, полученный в работе [58], выглядит следующим образом:

$$Z(A) = \int \mathcal{D}g \exp\left\{ i \int_\gamma \langle \lambda, dgg^{-1} + gAg^{-1} \rangle \right\}, \tag{7.47}$$

где γ – одномерное многообразие (отрезок или окружность), а $A \in \Omega^1(\gamma, \mathfrak{g})$ – калибровочное поле. Формула (7.47) допускает несколько интересных интерпретаций.

Во-первых, в случае, когда γ – окружность, функционал действия

$$S(g, A) = \int_\gamma \langle \lambda, dgg^{-1} + gAg^{-1} \rangle$$

может быть записан с помощью теоремы Стокса как двумерный интеграл следующего вида:

$$S(g, A) = \int_\Sigma F.$$

Здесь Σ – двумерная поверхность с границей γ, а $F = dA$ – кривизна связности A для группы G_λ, сохраняющей λ. Заметим, что $F/(2\pi i)$ – это первая форма Черна. Таким образом, $S(g, A)$ – это простейший пример действия Черна–Саймонса, полученного методом спуска!

Во-вторых, в случае, когда γ – окружность, возникает естественная гипотеза

$$Z(A) = \chi_\lambda(\mathrm{Hol}(A, \gamma)),$$

где χ_λ – характер неприводимого представления группы G со старшим весом λ, а $\mathrm{Hol}(A, \gamma) \in G$ – голономия связности A вдоль γ. В работе [58] эта гипотеза доказана для случаев $G = \mathrm{SU}(n)$ и $G = \mathrm{SO}(n)$ с использованием интегрируемых систем Гельфанда–Цетлина[89] на орбитах O_λ, при помощи которых вводятся переменные "действие-угол" и вычисляется функциональный интеграл.

В-третьих, как впоследствии показали А. Ю. Алексеев и С. Л. Шаташвили, формула (7.47) может быть легко перенесена на более сложные примеры бесконечномерных алгебр и групп Ли. В частности, для аффинных алгебр Ли соответствующий функционал действия совпадает с киральным действием Весса–Зумино–Новикова–Виттена, которое получается методом спуска, описанным в предыдущем пункте, из второго класса Черна. А в случае алгебры Вирасоро получается действие Полякова, описывающее одну из моделей двумерной гравитации, которая теперь находит применение в теории вероятностей.

В-четвертых, формула (7.47) предоставляет интересную возможность для исследования природы функционального интеграла. С одной стороны, это простая квантово-механическая система с компактным фазовым пространством. С другой стороны, ответ для статистической суммы дается характером неприводимого представления редуктивной алгебры Ли, а это выражение содержит очень богатую комбинаторику. Наконец, третий подход позволяет интерпретировать эту систему как двумерную топологическую квантовую теорию поля.

Как и многие формулы Л. Д. Фаддеева, выражение (7.47) выглядит просто, но содержит неожиданную глубину и не перестает удивлять.

[89] Эти интегрируемые системы были введены В. Гийеминым и С. Стернбергом.

8. Квантовая теория поля. Проблемы теории рассеяния

8.1. Волновые операторы в квантовой теории поля. На протяжении всей своей научной деятельности Л. Д. Фаддеев обдумывал ситуацию с неизбежными при обычном подходе в квантовой теории поля расходимостями. Он приводил в этом контексте высказывание Л. Ван-Хова [125], [118], который считал, что перенормировки возникают в теории поля из-за использования разложения по собственным функциям свободного гамильтониана. В работе [14] Л. Д. Фаддеев предложил способ исключения из расчетов S-матрицы собственных функций свободного гамильтониана. Основная идея этого подхода состоит в следующем. Пусть гамильтониан H задан в представлении вторичного квантования

$$H = H_0 + V$$

и взаимодействие V является полиномом Вика, в коэффициентные функции которого входит δ-функция, обеспечивающая сохранение импульса:

$$V = \sum_{n,m} V_{n,m},$$

$$V_{n,m} = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} v_{n,m}(k_1, \dots, k_n; p_1, \dots, p_m) \prod_{i=1}^{n} a^\dagger(k_i)\, dk_i \prod_{j=1}^{m} a(p_j)\, dp_j,$$

$$v_{n,m}(k_1, \dots, k_n; p_1, \dots, p_m) = \delta\biggl(\sum_{i=1}^{n} k_i - \sum_{j=1}^{m} p_j\biggr) \widetilde{v}_{n,m}(k_1, \dots, k_n; p_1, \dots, p_m),$$

где $a^\dagger(k)$ и $a(k)$ – операторы рождения и уничтожения. Наличие δ-функции позволяет рассматривать динамику в подпространстве с фиксированным импульсом, и если $v_{n,1} \neq 0$ при $n > 1$, то имеется взаимодействие между дискретным и непрерывным спектрами. Также из-за наличия δ-функции слагаемые $v_{n,0}$, $n > 1$, приводят к трудностям, связанным с определением V как оператора. Согласно [14], если V содержит слагаемые с числом операторов уничтожения, меньшим двух, то для построения теории рассеяния нужно сначала найти такой унитарный оператор W (который естественно назвать одевающим оператором в смысле Гринберга–Швебера [100]), что

$$H' = W^{-1} H W = H_0' + V' + cI,$$

где H_0' – оператор перенормированной энергии, c – постоянная, V' содержит только потенциальные члены, т. е. представляется полиномом Вика, не содержащим слагаемых с числом операторов уничтожения и рождения, меньшим двух. При этом собственные функции оператора H_0' можно брать в качестве асимптотических состояний. Волновые операторы в работе [14] предлагается рассматривать для пары операторов H_0' и $H_0' + V'$. Они определяются стандартным образом по формуле (1.4) как сильные пределы

$$U'_\pm = \lim_{t \to \pm\infty} e^{it(H_0' + V_0')} e^{-itH_0'},$$

а S-матрица определяется как оператор

$$S = U_+'^* U_-' .$$

При таком подходе матрица рассеяния получается сразу же унитарной, т. е. исчезает необходимость в перенормировке волновых функций, и имеет нетривиальные матричные элементы только между состояниями, содержащими не менее двух частиц. Такая программа была реализована для модели Ли [84]. Расходимости, связанные с перенормировкой заряда, имеют другую математическую природу [11].

8.2. Инфракрасные расходимости и асимптотические условия в квантовой электродинамике. Наличие инфракрасных расходимостей (инфракрасная катастрофа) в квантовой электродинамике было известно начиная с классической работы Ф. Блоха и А. Нордсика 1937 г. [89]. В учебниках по квантовой электродинамике предлагалось бороться с инфракрасными расходимостями, суммируя вероятности перехода из данного начального состояния во все конечные состояния, содержащие, помимо детектируемых частиц, еще произвольное количество “мягких” фотонов. Однако такая общепринятая формальная трактовка инфракрасной катастрофы не являлась полностью удовлетворительной, поскольку при таком подходе начальные и конечные состояния трактуются несимметрично, а определение оператора рассеяния вообще отсутствует. В совместной работе П. П. Кулиша и Л. Д. Фаддеева [23] был поставлен вопрос, является ли отсутствие оператора рассеяния неизбежным и обусловленным физической сущностью проблемы, или же существует альтернативный подход к инфракрасным расходимостям, при котором можно определить оператор рассеяния. В [23] показано, что избежать инфракрасных расходимостей можно, если одновременно модифицировать и пространство асимптотических состояний, и само определение оператора рассеяния. Это связано с тем, что для корректного определения волновых операторов нужно правильно учесть асимптотическую динамику. Предложенная в [23] процедура подсказана нерелятивистской теорией рассеяния на дальнодействующем потенциале и имеет простую физическую интерпретацию, поэтому, вслед за работой [23], естественно начать с этого случая.

8.2.1. *Нерелятивистское кулоновское рассеяние.* Поясним основную идею подхода [23] на примере рассеяния нерелятивистской частицы на дальнодействующем кулоновском потенциале с гамильтонианом

$$H = H_0 + V = -\frac{1}{2m}\Delta + \frac{g}{|\boldsymbol{r}|}\,.$$

В представлении взаимодействия потенциал

$$V(t) = e^{-iH_0 t} V e^{iH_0 t}$$

имеет следующую асимптотику при $|t| \to \infty$:

$$V_{\mathrm{as}}(t) = \frac{mg}{p|t|}\,, \quad \text{где } p = \sqrt{-\Delta}\,.$$

Поскольку $V_{\mathrm{as}}(t)$ неинтегрируем по t в окрестности ∞, то и асимптотическую динамику описывает не свободный гамильтониан H_0, а явно зависящий от времени оператор

$$H_{\mathrm{as}}(t) = H_0 + V_{\mathrm{as}}.$$

Решения $\psi(t)$ асимптотического уравнения Шрёдингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_{\mathrm{as}}(t)\psi$$

с начальным условием $\psi(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=t_0} = \psi(\boldsymbol{r})$ представляются в виде

$$\psi(t) = U_{\mathrm{as}}(t)\psi, \quad \text{где} \quad U_{\mathrm{as}}(t) = e^{-iH_0(t-t_0)} \exp\left\{-i\frac{mg}{p}(\operatorname{sign} t)\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right\}. \tag{8.1}$$

Как показал Дж. Доллард [95], в $L^2(\mathbb{R}^3)$ существуют сильные пределы

$$U_{\pm} = \lim_{t\to\pm\infty} e^{iH\,t}U_{\mathrm{as}}(t)$$

– аналоги волновых операторов в быстро убывающем случае, задаваемые формулой (1.4). Оператор рассеяния определяется соответственно:

$$S = U_+^* U_-,$$

не зависит от выбора t_0 и дает известные выражения для дифференциальных сечений рассеяния на кулоновском потенциале. В работе [23] подчеркивается, что гамильтониан асимптотической динамики следует определять из физического смысла задачи[90], а не использовать слепо привычные рецепты теории рассеяния на быстро убывающем потенциале (см. раздел 1). Именно эти соображения и были применены в [23] к релятивистской квантовой электродинамике.

8.2.2. *Построение $V_{\mathrm{as}}(t)$ и S-матрицы в квантовой электродинамике.* В работе [23] для определенности рассмотрена спинорная электродинамика [83], описывающая систему взаимодействующих электронов, позитронов и фотонов: $\bar\psi(\boldsymbol{x})$, $\psi(\boldsymbol{x})$ – это операторы электронно-позитронного поля, $A_\mu(\boldsymbol{x})$ – оператор электромагнитного поля, а

$$b_i^\dagger(\boldsymbol{p}),\ b_i(\boldsymbol{p}), \quad d_i^\dagger(\boldsymbol{p}),\ d_i(\boldsymbol{p}), \quad a_\mu^\dagger(\boldsymbol{k}),\ a_\mu(\boldsymbol{k}), \qquad i=1,2, \quad \mu=0,1,2,3,$$

– соответствующие операторы рождения и уничтожения электронов, позитронов и фотонов. Операторы поля $\bar\psi$, ψ и A_μ выражаются через операторы

[90] Анализируя формулу Долларда для $U_{\mathrm{as}}(t)$, Л. Д. Фаддеев и В. С. Буслаев предложили общую схему построения волновых операторов для дальнодействующих потенциалов, использующую асимптотики классического движения при $|t| \to \infty$. Эта красивая идея была реализована в работе [91].

рождения и уничтожения следующим образом:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} \sum_{l=1}^{2} (b_l(\boldsymbol{p}) w_l(\boldsymbol{p}) e^{i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})} + d_l^\dagger(\boldsymbol{p}) v_l(\boldsymbol{p}) e^{-i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})})\, d^3\boldsymbol{p},$$

$$\bar\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} \sum_{l=1}^{2} (b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) \overline{w}_l(\boldsymbol{p}) e^{-i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})} + d_l(\boldsymbol{p}) \overline{v}_l(\boldsymbol{p}) e^{i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})})\, d^3\boldsymbol{p},$$

$$A_\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} (a_\mu^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} + a_\mu(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})})\, \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}}\,,$$

где

$$p_0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}\,, \quad k_0 = |\boldsymbol{k}|,$$

а $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – это стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Соответствующий оператор взаимодействия имеет вид

$$V = -e \int_{\mathbb{R}^3} :\!\bar\psi(\boldsymbol{x})\gamma^\mu\psi(\boldsymbol{x})\!: A_\mu(\boldsymbol{x})\, d^3\boldsymbol{x},$$

где e – заряд электрона, γ^μ – гамма-матрица Дирака, а символ $:\cdot:$ означает нормальное упорядочение по отношению к операторам рождения и уничтожения (см. п. 5.2). Замечательным образом оказывается, что

$$e^{-iH_0t}V(t)e^{iH_0t} = V_{\mathrm{as}}(t) + o(1), \qquad t \to \pm\infty,$$

где $V_{\mathrm{as}}(t)$ можно представить в виде

$$V_{\mathrm{as}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} J^\mu_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{k},t)\big(a_\mu^\dagger(-\boldsymbol{k}) + a_\mu(\boldsymbol{k})\big) \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}}$$

с оператором тока

$$J^\mu_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{k},t) = -e \int_{\mathbb{R}^3} p^\mu\, e^{i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k})/p_0} \rho(\boldsymbol{p})\, \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2p_0}$$

и плотностью

$$\rho(\boldsymbol{p}) = \sum_{l=1}^{2} (b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) b_l(\boldsymbol{p}) - d_l^\dagger(\boldsymbol{p})\, d_l(\boldsymbol{p})).$$

Состояния заряженных частиц с заданными импульсами является собственными для оператора $J^\mu_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{k},t)$.

Как и в рассмотренном выше случае, асимптотическая динамика системы описывается гамильтонианом

$$H_{\mathrm{as}}(t) = H_0 + V_{\mathrm{as}}(t)$$

и оператором эволюции $U_{\mathrm{as}}(t)$,

$$i\frac{dU_{\mathrm{as}}(t)}{dt} = H_{\mathrm{as}}(t)U_{\mathrm{as}}(t).$$

Как показано в работе [23], общее решение этого уравнения имеет вид

$$U_{\mathrm{as}}(t) = e^{-iH_0 t} Z(t),$$

где

$$Z(t) = \exp\biggl\{ -i \int^t e^{iH_0\tau} V_{\mathrm{as}}(\tau) e^{-iH_0\tau}\, d\tau - \frac{1}{2}\int^t \biggl(\int^\tau [V^I_{\mathrm{as}}(\tau), V^I_{\mathrm{as}}(s)]\, ds \biggr)\, d\tau \biggr\},$$

при этом нижний предел интегрирования выбирается так[91], чтобы

$$\int^t e^{is\tau}\, d\tau = \frac{1}{is} e^{ist}.$$

Оператор $Z(t)$ можно переписать в виде

$$Z(t) = \exp\{R(t)\} \exp\{i\Phi(t)\},$$

где

$$\begin{aligned} R(t) = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{p^\mu}{k\cdot p} \biggl(a^\dagger_\mu(\boldsymbol{k}) \exp\biggl\{ i\frac{k\cdot p}{p_0} t \biggr\} \\ - a_\mu(k) \exp\biggl\{ -i\frac{k\cdot p}{p_0} t \biggr\} \biggr) \rho(\boldsymbol{p})\, d^3\boldsymbol{p}\, \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}}\,, \\ \Phi(t) = \frac{e^2}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} {:}\rho(\boldsymbol{p})\rho(\boldsymbol{q}){:}\, \frac{p\cdot q}{((p\cdot q)^2 - m^4)^{1/2}} (\operatorname{sign} t) \ln\frac{|t|}{t_0}\, d^3\boldsymbol{p}\, d^3\boldsymbol{q} \end{aligned}$$

и

$$k\cdot p = k^\mu p_\mu, \quad p\cdot q = p^\mu q_\mu, \quad \text{где} \quad q_0 = \sqrt{\boldsymbol{q}^2 + m^2}\,.$$

Оператор Φ является естественным аналогом фазы в формуле (8.1).

Операторы $R(t)$ и $\Phi(t)$ коммутируют, и окончательное выражение для оператора эволюции асимптотической динамики имеет вид

$$U_{\mathrm{as}}(t) = \exp\{-iH_0 t\} \exp\{R(t) + i\Phi(t)\},$$

а оператор рассеяния Кулиша–Фаддеева определяется следующим образом:

$$S = \lim_{\substack{t_1\to\infty \\ t_2\to-\infty}} S(t_1, t_2),$$

где

$$S(t_1,t_2) = U^\dagger_{\mathrm{as}}(t_1) \exp\{-iH(t_1 - t_2)\} U_{\mathrm{as}}(t_2).$$

Выражение $S(t_1,t_2)$ отличается от дайсоновской S-матрицы для конечных времен

$$S_{\mathrm{D}}(t_1,t_2) = \exp\{iH_0 t_1\} \exp\{-iH(t_1 - t_2)\}\, \exp\{-iH_0 t_2\}$$

окаймляющими множителями $\exp\{R(t) + i\Phi(t)\}$.

[91] В частности, это отвечает условию, что в выражение для $U_{\mathrm{as}}(t)$ не должны давать вклада интегралы от $V_{\mathrm{as}}(t)$ по конечным t.

Для построения содержательной теории необходимо выяснить, в каком гильбертовом пространстве действует оператор S. Нетривиальный факт состоит в том, что он действует в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_{\mathrm{as}}$ асимптотических состояний[92], отличном от пространства Фока $\mathscr{H}_{\mathrm{F}}$ для заряженных частиц и фотонов. Поясним это подробнее. Рассмотрим оператор

$$W(t) = \exp\{R(t)\}.$$

Поскольку он сохраняет число, импульсы и спины заряженных частиц, его действие на вектор

$$b^\dagger_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)\cdots b^\dagger_{s_n}(\boldsymbol{p}_n)d^\dagger_{i_1}(\boldsymbol{q}_1)\cdots d^\dagger_{i_m}(\boldsymbol{q}_m)|0\rangle\otimes\Psi_\gamma$$

определяется действием на Ψ_γ – вектор состояния фотонов – и задается оператором

$$W_{n,m}(t) = \exp\biggl\{\frac{e}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}(f^\mu_{n,m}(\dots|\boldsymbol{k},t)a^\dagger_\mu(\boldsymbol{k}) - \overline{f}^\mu_{n,m}(\dots|\boldsymbol{k},t)a_\mu(\boldsymbol{k}))\,\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}}\biggr\},$$

где многоточие $\dots$ символизирует зависимость от $\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n,\boldsymbol{q}_1,\dots,\boldsymbol{q}_m$ и

$$\begin{aligned} f^\mu_{n,m}(\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n,\boldsymbol{q}_1,\dots,\boldsymbol{q}_m \mid \boldsymbol{k},t) = \sum_{i=1}^n \frac{p^\mu_i}{k\cdot p_i}\exp\biggl\{i\frac{k\cdot p_i}{p_{i0}}t\biggr\}& \\ -\sum_{i=1}^m \frac{q^\mu_i}{k\cdot q_i}\exp\biggl\{i\frac{k\cdot q_i}{q_{i0}}t\biggr\}&. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Таким образом, $W(t)$ является оператором типа экспоненты от линейной формы по операторам рождения и уничтожения фотонов. Его дискретный аналог имеет вид

$$\begin{aligned} W_\alpha &= \exp\biggl\{\sum_i(\overline{\alpha}_i a_i - \alpha_i a^\dagger_i)\biggr\} \\ &= \exp\biggl\{-\frac{1}{2}\sum_i|\alpha_i|^2\biggr\}\exp\biggl\{-\sum_i\alpha_i a^\dagger_i\biggr\}\exp\biggl\{\sum_i\overline{\alpha}_i a_i\biggr\} \end{aligned}$$

и теряет смысл в исходном пространстве Фока, если

$$\sum_i|\alpha_i|^2 = \infty.$$

Однако ему можно придать смысл как оператору, действующему из пространства Фока в новое пространство. Это новое пространство естественно рассмотреть как пространство $\mathscr{H}_\alpha$, являющееся образом пространства Фока $\mathscr{H}_{\mathrm{F}}$ при

[92] В 1969 г. Людвиг Дмитриевич рассказывал определение пространства асимптотических состояний в квантовой электродинамике Владимиру Александровичу Фоку, беседа происходила в помещении ректорского флигеля, где располагались тогда кафедры теоретической физики физического факультета ЛГУ. “В пространстве асимптотических состояний столько же векторов, сколько и в Вашем”, – Фаддеев пояснял Фоку!

действии W_α. Свойства $\mathscr{H}_\alpha$ и его континуальных аналогов были детально изучены в работе [23] в контексте определения пространства асимптотических состояний в квантовой электродинамике, а также – в более общем контексте – в работе И. Я. Арефьевой и П. П. Кулиша [85]. Как показано в [23], в пространстве $\mathscr{H}_\alpha$ действует естественным образом представление группы Пуанкаре [23], а также в нем можно выделить лоренц- и градиентно инвариантное подпространство с неотрицательной метрикой, т. е. физическое асимптотическое подпространство $\mathscr{H}_{\rm as}$. При этом, как показано в [23],

$$\mathscr{H}_{\rm as} = W(t)\mathscr{H}_{\rm F} \quad \text{для всех } t.$$

Теперь можно точно охарактеризовать оператор рассеяния как оператор в пространстве $\mathscr{H}_{\rm as}$. Именно, записывая $S(t_1, t_2)$ в виде

$$S(t_1, t_2) = W^\dagger(t_1)\widetilde{S}_{\rm D}(t_1, t_2)W(t_2),$$

где

$$\widetilde{S}_{\rm D}(t_1, t_2) = \exp\{-i\Phi(t)\}\, S_{\rm D}(t_1, t_2) \exp\{i\Phi(t)\},$$

получаем следующую последовательность отображений:

$$\mathscr{H}_{\rm as} \xrightarrow{W} \mathscr{H}_{\rm F} \xrightarrow{\widetilde{S}} \mathscr{H}_{\rm F} \xrightarrow{W^\dagger} \mathscr{H}_{\rm as}.$$

Присутствие операторов $W^\dagger(t_1)$ и $W(t_2)$ в определении оператора S и приводит к использованию пространства асимптотических состояний $\mathscr{H}_{\rm as}$ в определении S-матрицы. Как отмечено в [23], асимптотические состояния вместе с заряженными частицами должны содержать бесконечное число фотонов, низкочастотный спектр которых определяется состоянием зарядов. Переопределение оператора рассеяния сводится к выделению “фазовых” операторных множителей. Первое обстоятельство имеет релятивистский характер, второе необходимо даже в случае нерелятивистского рассеяния на кулоновском потенциале.

В работе [23] также проводится сравнение полученных результатов с результатами работы В. Чанга [92], в которой фазовые множители $\exp\{\pm i\Phi(t)\}$ были выведены из анализа феймановских диаграмм, что дает проверку того, что матричные элементы $\langle\Psi|S|\Psi'\rangle$ оператора рассеяния S между произвольными состояниями $|\Psi\rangle$ и $|\Psi'\rangle$ не содержат инфракрасных расходимостей во всех порядках разложения по заряду e^2.

Аналогичные рассмотрения были проведены П. П. Кулишом для рассеяния мягких гравитонов [106], что дало множители, аналогичные ранее полученным в работе С. Вайнберга [126]. Методы работы [23] Л. Д. Фаддеева и П. П. Кулиша в настоящее время активно используются в различных областях теоретической физики (см., например, [102]). Формула (8.2) ведет к возникновению полюса при нулевой частоте k_0 излученных фотонов, а это в свою очередь приводит к “эффекту памяти” в электромагнетизме и гравитации (что для гравитации изначально было открыто Я. Б. Зельдовичем и А. Г. Полнаревым в 1973 г.).

9. Заключение

Математическое наследие Людвига Дмитриевича Фаддеева будет определять развитие математической и теоретической физики еще многие десятилетия. При всем его огромном разнообразии оно объединено глубокой верой в единство математики и физики, в их взаимное проникновение, в возможность понять фундаментальные законы природы, исходя из критерия математической красоты и естественности. Л. Д. Фаддеев понимал важность глубоких идей, пришедших из физики, для развития чистой математики, и, возможно, он первый великий математик, чье творчество всецело исходило из идей квантовой теории. Как Людвиг Дмитриевич любил повторять, квантовая механика проще классической. Его работы по квантовой теории поля подготовили революцию в физике элементарных частиц, связанную с появлением калибровочных теорий, – но те же работы, с появлением моделей топологической квантовой теории поля, сыграли важнейшую роль в развитии топологии.

Его технический арсенал включал как методы функционального анализа, разработанные в первой половине XX в. и составившие математический аппарат квантовой механики, так и более современные методы симплектической геометрии, алгебраического анализа и квантовой теории поля. Так, виртуозно используя метод голоморфного представления, Л. Д. Фаддеев дал исчерпывающую формулировку матрицы рассеяния в формализме функционального интеграла. Еще одна фундаментальная идея Л. Д. Фаддеева была связана с ролью теории групп, в особенности бесконечномерных, как источника точных решений в классической и квантовой физике. Эта роль симметрии до сих пор остается отчасти загадочной, но интуиция Людвига Дмитриевича, почти всегда безошибочная, и в этом отношении указывала на очень глубокие и плодотворные связи между различными областями математики и физики.

Идеи Л. Д. Фаддеева продолжают играть определяющую роль в математической физике. Они живут в работах его учеников, будут жить дальше в работах их учеников, и так до тех пор, пока будут существовать математика и теоретическая физика.

Список литературы

Цитированные работы Л. Д. Фаддеева

[1] "Единственность решения обратной задачи рассеяния", *Вестн. ЛГУ. Сер. матем. мех. астрон.*, **11**:7 (1956), 126–130.

[2] "О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора Шредингера", *Вестн. ЛГУ. Сер. матем. мех. астрон.*, **12**:7 (1957), 164–172.

[3] "О выражении для следа разности двух сингулярных дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля", *Докл. АН СССР*, **115**:5 (1957), 878–881.

[4] "О дисперсионных соотношениях нерелятивистской теории рассеяния", *ЖЭТФ*, **35**:2(8) (1958), 433–439; англ. пер.: "Dispersion relations in non-relativistic scattering theory", *Soviet Physics. JETP*, **8** (1959), 299–303.

[5] "О связи S-матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера", *Докл. АН СССР*, **121**:1 (1958), 63–66; англ. пер.: "On the relation between the S-matrix and potential for the one-dimensional Schrödinger operator", *Soviet Phys. Dokl.*, **3** (1959), 747–751.

[6] “К теории возмущений непрерывного спектра”, *Докл. АН СССР*, **120**:6 (1958), 1187–1190 (совм. с О. А. Ладыженской).

[7] “Обратная задача квантовой теории рассеяния”, *УМН*, **14**:4(88) (1959), 57–119; англ. пер.: “The inverse problem in the quantum theory of scattering”, *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 72–104.

[8] “Теория рассеяния для системы из трех частиц”, *ЖЭТФ*, **39**:5 (1960), 1459–1467; англ. пер.: “Scattering theory for a three-particle system”, *Soviet Physics. JETP*, **12** (1961), 1014–1019.

[9] “О формулах следов для дифференциального сингулярного оператора Штурма–Лиувилля”, *Докл. АН СССР*, **132**:1 (1960), 13–16 (совм. с В. С. Буслаевым); англ. пер.: “Formulas for traces for a singular Sturm–Liouville differential operator”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 451–454 (with V. S. Buslaev).

[10] “Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц с парным взаимодействием”, *Докл. АН СССР*, **138**:3 (1961), 565–567; англ. пер.: “The resolvent of the Schroedinger operator for a system of three particles interacting in pairs”, *Soviet Phys. Dokl.*, **6** (1961), 384–386.

[11] “Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом”, *Докл. АН СССР*, **137**:5 (1961), 1011–1014 (совм. с Ф. А. Березиным); англ. пер.: “A remark on Schrödinger’s equation with a singular potential”, *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 372–375 (with F. A. Berezin).

[12] “Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц и задача рассеяния”, *Докл. АН СССР*, **145**:2 (1962), 301–304; англ. пер.: “The construction of the resolvent of the Schrödinger operator for a three-particle system, and the scattering problem”, *Soviet Phys. Dokl.*, **7** (1963), 600–602.

[13] “Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц”, Тр. МИАН СССР, **69**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1963, 3–122; англ. пер.: *Mathematical aspects of the three-body problem in the quantum scattering theory*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem; Daniel Davey & Co., Inc., New York, 1965, iii+110 pp.

[14] “О разделении эффектов самодействия и рассеяния по теории возмущений”, *Докл. АН СССР*, **152**:3 (1963), 573–576; англ. пер.: “Distinction between interaction and scattering effects in perturbation theory”, *Soviet Phys. Dokl.*, **8** (1964), 881–883.

[15] “О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра”, *Краевые задачи математической физики.* 2, Сборник работ. Посвящается памяти Владимира Андреевича Стеклова в связи со столетием со дня его рождения, Тр. МИАН СССР, **73**, Наука, М.–Л., 1964, 292–313; англ. пер.: “On the Friedrichs model in the theory of perturbations of a continuous spectrum”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1967, 177–203.

[16] “Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шрёдингера”, *Краевые задачи математической физики.* 2, Сборник работ. Посвящается памяти Владимира Андреевича Стеклова в связи со столетием со дня его рождения, Тр. МИАН СССР, **73**, Наука, М.–Л., 1964, 314–336; англ. пер.: “Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **65**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1967, 139–166.

[17] “Растущие решения уравнения Шредингера”, *Докл. АН СССР*, **165**:3 (1965), 514–517; англ. пер.: “Increasing solutions of the Schrödinger equation”, *Soviet Phys. Dokl.*, **10 (1965)** (1966), 1033–1035.

[18] “Факторизация S-матрицы многомерного оператора Шредингера”, *Докл. АН СССР*, **167**:1 (1966), 69–72; англ. пер.: “Factorization of the S-matrix for the multidimensional Schrödinger operator”, *Soviet Phys. Dokl.*, **11** (1966), 209–211.

[19] “Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского”, Тр. ММО, **17**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1967, 323–350; англ. пер.: “Expansion in eigenfunctions of the Laplace operator on the fundamental domain of a discrete group on the Lobachevskij plane”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **17** (1967), 357–386.

[20] *Теория возмущений для калибровочно-инвариантных полей*, Препринт ИТФ-67-036, ИТФ АН УССР, Киев, 1967, 28 с. (совм. с В. Н. Поповым); англ. пер.: *Perturbation theory for gauge-invariant fields*, Preprint NAL-THY-57, 1972 (with V. N. Popov); 50 *years of Yang–Mills theory*, ed. G. t'Hooft, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, 40–60.

[21] “Feynman diagrams for the Yang–Mills field”, *Phys. Lett. B*, **25**:1 (1967), 29–30 (with V. N. Popov).

[22] “Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов”, *ТМФ*, **1**:1 (1969), 3–18; англ. пер.: “The Feynman integral for singular Lagrangians”, *Theoret. and Math. Phys.*, **1**:1 (1969), 1–13.

[23] “Асимптотические условия и инфракрасные расходимости в квантовой электродинамике”, *ТМФ*, **4**:2 (1970), 153–170 (совм. с П. П. Кулишом); англ. пер.: “Asymptotic conditions and infrared divergences in quantum electrodynamics”, *Theoret. and Math. Phys.*, **4**:2 (1970), 745–757 (with P. P. Kulish).

[24] “Уравнение Кортевега–де Фриса – вполне интегрируемая гамильтонова система”, *Функц. анализ и его прил.*, **5**:4 (1971), 18–27 (совм. с В. Е. Захаровым); англ. пер.: “Korteweg–de Vries equation: a completely integrable Hamiltonian system”, *Funct. Anal. Appl.*, **5**:4 (1971), 280–287 (with V. E. Zakharov).

[25] “Трехмерная обратная задача квантовой теории рассеяния”, *Обратные задачи для дифференциальных уравнений*, Сб. тр. всесоюзн. симпозиума (Новосибирск, 1971), ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1972, 14–30.

[26] “Теория рассеяния и автоморфные функции”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 6, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **27**, Изд-во “Наука”, Ленингр. отд., Л., 1972, 161–193 (совм. с Б. С. Павловым); англ. пер.: “Scattering theory and automorphic functions”, *J. Soviet Math.*, **3**:4 (1975), 522–548 (with B. S. Pavlov).

[27] “Неарифметический вывод формулы следа Сельберга”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **37**, Изд-во “Наука”, Ленингр. отд., Л., 1973, 5–42 (совм. с А. Б. Венковым, В. Л. Калининым); англ. пер.: “A non-arithmetic derivation of the Selberg trace formula”, *J. Soviet Math.*, **8**:2 (1977), 171–199 (with A. B. Venkov, V. L. Kalinin).

[28] “Обратная задача квантовой теории рассеяния. II”, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., **3**, ВИНИТИ, М., 1974, 93–180; англ. пер.: “Inverse problem of quantum scattering theory. II”, *J. Soviet Math.*, **5**:3 (1976), 334–396.

[29] “Полное описание решений ‘sine-Gordon’ уравнения”, *Докл. АН СССР*, **219** (1974), 1334–1337 (совм. с В. Е. Захаровым, Л. А. Тахтаджяном); англ. пер.: “Complete description of solutions of the ‘sine-Gordon’ equation”, *Soviet Phys. Dokl.*, **19**:12 (1974), 824–826 (with V. E. Zakharov, L. A. Takhtadzhyan).

[30] “Существенно-нелинейная одномерная модель классической теории поля”, *ТМФ*, **21**:2 (1974), 160–174 (совм. с Л. А. Тахтаджяном); англ. пер.: “Essentially nonlinear one-dimensional model of classical field theory”, *Theoret. and Math. Phys.*, **21**:2 (1975), 1046–1057 (with L. A. Takhtadzhyan).

[31] “Квантование солитонов”, *Письма в ЖЭТФ*, **21**:5 (1975), 302–305 (совм. с В. Е. Корепиным, П. П. Кулишом); англ. пер.: “Soliton quantization”, *JETP Lett.*, **21**:5 (1975), 138–139 (with V. E. Korepin, P. P. Kulish).

[32] "Квантование солитонов", *ТМФ*, **25**:2 (1975), 147–163 (совм. с В. Е. Корепиным); англ. пер.: "Quantization of solitons", *Theoret. and Math. Phys.*, **25**:2 (1975), 1039–1049 (with V. E. Korepin).

[33] "Существенно-нелинейная одномерная модель классической теории поля (Дополнение)", *ТМФ*, **22**:1 (1975), 143 (совм. с Л. А. Тахтаджяном); англ. пер.: "Essentially nonlinear one-dimensional model of classical field theory (Addendum)", *Theoret. and Math. Phys.*, **22**:1 (1975), 100 (with L. A. Takhtadzhyan).

[34] "Course 1. Introduction to functional methods", *Méthodes en théorie des champs – Methods in field theory* (École d'Été Phys. Théor., Session XXVIII, Les Houches, 1975), North-Holland, Amsterdam, 1976, 1–40.

[35] "About the zero mode problem in the quantization of solitons", *Phys. Lett. B*, **63**:4 (1976), 435–438 (with V. E. Korepin).

[36] "Сравнение точных квантовых и квазиклассических ответов для нелинейного уравнения Шредингера", *ТМФ*, **28**:1 (1976), 38–45 (совм. с П. П. Кулишом, С. В. Манаковым); англ. пер.: "Comparison of the exact quantum and quasiclassical results for a nonlinear Schrödinger equation", *Theoret. and Math. Phys.*, **28**:1 (1976), 615–620 (with P. P. Kulish, S. V. Manakov).

[37] "Гамильтонова система, связанная с уравнением $u_{\xi\eta} + \sin u = 0$", *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его восьмидесятипятилетию, Тр. МИАН СССР, **142**, 1976, 254–266 (совм. с Л. А. Тахтаджяном); англ. пер.: "The Hamiltonian system connected with the equation $u_{\xi\eta} + \sin u = 0$", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **142** (1979), 277–289 (with L. A. Takhtadzhyan).

[38] "Quantum theory of solitons", *Phys. Rep.*, **42**:1 (1978), 1–87 (with V. E. Korepin).

[39] "Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля", *Докл. АН СССР*, **243**:6 (1978), 1430–1433 (совм. с Е. К. Скляниным); англ. пер.: "Quantum mechanical approach to completely integrable field theory models", *Soviet Phys. Dokl.*, **23** (1978), 902–904 (with E. K. Sklyanin).

[40] "Квантовый метод обратной задачи. I", *ТМФ*, **40**:2 (1979), 194–220 (совм. с Е. К. Скляниным, Л. А. Тахтаджяном); англ. пер.: "Quantum inverse problem method. I", *Theoret. and Math. Phys.*, **40**:2 (1979), 688–706 (with E. K. Sklyanin, L. A. Takhtadzhyan).

[41] "Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга", *УМН*, **34**:5 (1979), 13–63 (совм. с Л. А. Тахтаджяном); англ. пер.: "The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model", *Russian Math. Surveys*, **34**:5 (1979), 11–68 (with L. A. Takhtadzhan).

[42] "Quantum completely integrable models in field theory", *Mathematical physics reviews*, v. 1, Soviet Sci. Rev. Sect. C: Math. Phys. Rev., **1**, Harwood Academic, Chur, 1980, 107–155.

[43] "Two-dimensional integrable models in quantum field theory", *Phys. Scripta*, **24**:5 (1981), 832–835.

[44] "Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга", *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. IV*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **109**, Изд-во "Наука", Ленингр. отд., Л., 1981, 134–178 (совм. с Л. А. Тахтаджяном); англ. пер.: "Spectrum and scattering of excitations in the one-dimensional isotropic Heisenberg model", *J. Soviet Math.*, **24**:2 (1984), 241–267 (with L. A. Takhtadzhyan).

[45] "What is the spin of a spin wave?", *Phys. Lett. A*, **85**:6-7 (1981), 375–377 (with L. A. Takhtajan).

[46] "Гамильтоновы структуры для интегрируемых моделей теории поля", *ТМФ*, **56**:3 (1983), 323–343 (совм. с Н. Ю. Решетихиным); англ. пер.: "Hamiltonian

structures for integrable models of field theory", *Theoret. and Math. Phys.*, **56**:3 (1983), 847–862 (with N. Yu. Reshetikhin).

[47] "Integrable models in $(1+1)$-dimensional quantum field theory", *Recent advances in field theory and statistical mechanics* (Les Houches, 1982), North-Holland, Amsterdam, 1984, 561–608.

[48] "Алгебраические и гамильтоновы методы в теории неабелевых аномалий", *ТМФ*, **60**:2 (1984), 206–217 (совм. с С. Л. Шаташвили); англ. пер.: "Algebraic and Hamiltonian methods in the theory of non-Abelian anomalies", *Theoret. and Math. Phys.*, **60**:2 (1985), 770–778 (with S. L. Shatashvili).

[49] "Operator anomaly for the Gauss law", *Phys. Lett. B*, **145**:1-2 (1984), 81–84.

[50] *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985, 399 с. (совм. с С. П. Меркурьевым); англ. пер.: *Quantum scattering theory for several particle systems*, Math. Phys. Appl. Math., **11**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, xiv+404 pp. (with S. P. Merkuriev).

[51] "Realization of the Schwinger term in the Gauss law and the possibility of correct quantization of a theory with anomalies", *Phys. Lett. B*, **167**:2 (1986), 225–228 (with S. L. Shatashvili).

[52] *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986, 528 с. (совм. с Л. А. Тахтаджяном); англ. пер.: *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1987, ix+592 pp. (with L. A. Takhtajan); Classics Math., Springer, Berlin, 2007, xiv+592 pp.

[53] "Liouville model on the lattice", *Field theory, quantum gravity and strings* (Meudon/Paris, 1984/1985), Lecture Notes in Phys., **246**, Springer, Berlin, 1986, 166–179 (with L. A. Takhtajan).

[54] "30 лет в математической физике", *Математическая физика и комплексный анализ*, Сборник обзорных статей 4. К 50-летию Института, Тр. МИАН СССР, **176**, 1987, 4–29; англ. пер.: "30 years in mathematical physics", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **176** (1988), 3–28.

[55] "Вывод аномального коммутатора в формализме функционального интеграла", *ТМФ*, **73**:2 (1987), 187–190 (совм. с А. Ю. Алексеевым, Я. Мадайчиком, С. Л. Шаташвили); англ. пер.: "Derivation of anomalous commutator in the functional integral formalism", *Theoret. and Math. Phys.*, **73**:2 (1987), 1149–1151 (with A. Yu. Alekseev, Ya. Madaichik, S. L. Shatashvili).

[56] "Quantization of Lie groups and Lie algebras", *Algebraic analysis*, v. I, Academic Press, Boston, MA, 1988, 129–139 (with N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhan).

[57] *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, 2-е изд., Наука, М., 1988, 270 с. (совм. с А. А. Славновым); англ. пер.: *Gauge fields. Introduction to quantum theory*, Frontiers Phys., **83**, Addison-Wesley Publishing Co., Redwood City, CA, 1991, xviii+217 pp. (with A. A. Slavnov).

[58] "Quantization of symplectic orbits of compact Lie groups by means of the functional integral", Dedicated to I. M. Gelfand on his 75th birthday, *J. Geom. Phys.*, **5**:3 (1988), 391–406 (with A. Alekseev, S. Shatashvili).

[59] "Квантование групп Ли и алгебр Ли", *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178–206 (совм. с Н. Ю. Решетихиным, Л. А. Тахтаджяном); англ. пер.: "Quantization of Lie groups and Lie algebras", *Leningrad Math. J.*, **1** (1990), 193–225 (with N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan).

[60] "On the exchange matrix for WZNW model", *Comm. Math. Phys.*, **132**:1 (1990), 131–138.

[61] "Lectures on quantum inverse scattering method", *Integrable systems*, Nankai Lectures Math. Phys. (Tianjin, 1987), World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1990, 23–70.

[62] "$(T^*G)_t$: a toy model for conformal field theory", *Comm. Math. Phys.*, **141**:2 (1991), 413–422 (with A. Yu. Alekseev).

[63] “Hidden quantum groups inside Kac–Moody algebra”, *Comm. Math. Phys.*, **149**:2 (1992), 335–345 (with A. Alekseev, M. Semenov-Tian-Shansky).

[64] “Квантовый метод обратной задачи на дискретном пространстве-времени”, *ТМФ*, **92**:2 (1992), 207–214 (совм. с А. Ю. Волковым); англ. пер.: “Quantum inverse scattering method on a spacetime lattice”, *Theoret. and Math. Phys.*, **92**:2 (1992), 837–842 (with A. Yu. Volkov).

[65] “Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice”, *Phys. Lett. B*, **315**:3-4 (1993), 311–318 (with A. Yu. Volkov).

[66] “Quantum dilogarithm”, *Modern. Phys. Lett. A*, **9**:5 (1994), 427–434 (with R. M. Kashaev).

[67] “Hirota equation as an example of an integrable symplectic map”, *Lett. Math. Phys.*, **32**:2 (1994), 125–135 (with A. Yu. Volkov).

[68] “Algebraic aspects of the Bethe ansatz”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:13 (1995), 1845–1878.

[69] “Instructive history of the quantum inverse scattering method”, KdV’95 (Amsterdam, 1995), *Acta Appl. Math.*, **39**:1-3 (1995), 69–84.

[70] “Discrete Heisenberg–Weyl group and modular group”, *Lett. Math. Phys.*, **34**:3 (1995), 249–254.

[71] “High-energy QCD as a completely integrable model”, *Phys. Lett. B*, **342**:1-4 (1995), 311–322 (with G. P. Korchemsky).

[72] “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Symétries quantiques* (Les Houches, 1995), North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–219.

[73] “Modular double of a quantum group”, *Conférence Moshé Flato* 1999: *Quantization, deformation, and symmetries*, v. 1 (Dijon), Math. Phys. Stud., **21**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, 149–156.

[74] “Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. I. Algebraic approach and duality”, *Comm. Math. Phys.*, **219**:1 (2001), 199–219 (with R. M. Kashaev, A. Yu. Volkov).

[75] “Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. II. Geometric interpretation of the evolution operator”, *J. Phys. A*, **35**:18 (2002), 4043–4048 (with R. M. Kashaev).

[76] “Замечания о расходимостях и размерной трансмутации в теории Янга–Миллса”, *ТМФ*, **148**:1 (2006), 133–142; англ. пер.: “Notes on divergences and dimensional transmutation in Yang–Mills theory”, *Theoret. and Math. Phys.*, **148**:1 (2006), 986–994.

[77] “Algebraic lessons from the theory of quantum integrable models”, *The unity of mathematics*, Progr. Math., **244**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, 305–320.

[78] “Дискретная серия представлений для модулярного дубля квантовой группы $U_q(\mathrm{sl}(2,\mathbb{R}))$”, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:4 (2008), 98–104; англ. пер.: “Discrete series of representations for the modular double of the quantum group $U_q(\mathrm{sl}(2,\mathbb{R}))$”, *Funct. Anal. Appl.*, **42**:4 (2008), 330–335.

[79] “Новая жизнь полной интегрируемости”, *УФН*, **183**:5 (2013), 487–495; англ. пер.: “The new life of complete integrability”, *Phys. Usp.*, **56**:5 (2013), 465–472.

[80] “Моя жизнь среди квантовых полей”, *Вестн. РАН*, **84**:9 (2014), 797–804; *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*, 2014, № 3, 9–19.

[81] “Спектральная теория одного функционально-разностного оператора конформной теории поля”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **79**:2 (2015), 181–204 (совм. с Л. А. Тахтаджяном); англ. пер.: “The spectral theory of a functional-difference operator in conformal field theory”, *Izv. Math.*, **79**:2 (2015), 388–410 (with L. A. Takhtajan).

Цитированные работы других авторов

[82] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, "Method for solving the sine-Gordon equation", *Phys. Rev. Lett.*, **30**:25 (1973), 1262–1264.

[83] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, 4-е перераб. изд., Наука, М., 1981, 428 с.; англ. пер. 1-го изд.: A. I. Akhiezer, V. B. Berestetsky, *Quantum electrodynamics*, Consultants Bureau, Inc., New York, 1957, 549 pp.

[84] И. Я. Арефьева, "Перенормированная теория рассеяния для модели Ли", *ТМФ*, **12**:3 (1972), 331–348; англ. пер.: I. Ya. Aref'eva, "Renormalized scattering theory for the Lee model", *Theoret. and Math. Phys.*, **12**:3 (1972), 859–872.

[85] И. Я. Арефьева, П. П. Кулиш, "Представления канонических перестановочных соотношений в пределе бесконечного объема", *ТМФ*, **17**:1 (1973), 3–18; англ. пер.: I. Ya. Aref'eva, P. P. Kulish, "Representations of canonical commutation relations in the limit of an infinite volume", *Theoret. and Math. Phys.*, **17**:1 (1973), 945–955.

[86] R. J. Baxter, "Partition function of the eight-vertex lattice model", *Ann. Physics*, **70** (1972), 193–228.

[87] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, 2-е изд., доп., Наука, М., 1986, 320 с.; англ. пер. 1-го изд.: F. A. Berezin, *The method of second quantization*, Pure and Applied Physics, **24**, Academic Press, New York–London, 1966, xii+228 pp.

[88] H. Bethe, "Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette", *Z. Phys.*, **71**:3-4 (1931), 205–226.

[89] F. Bloch, A. Nordsieck, "Note on the radiation field of the electron", *Phys. Rev.*, **52** (1937), 54–59.

[90] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, 4-е изд., Наука, М., 1984, 598 с.; англ. пер. 1-го изд.: N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*, Interscience Monographs in Physics and Astronomy, **3**, Interscience Publishers Ltd., New York, London, 1959, xvi+720 pp.

[91] В. С. Буслаев, В. Б. Матвеев, "Волновые операторы для уравнения Шредингера с медленно убывающим потенциалом", *ТМФ*, **2**:3 (1970), 367–276; англ. пер.: V. S. Buslaev, V. B. Matveev, "Wave operators for the Schrödinger equation with a slowly decreasing potential", *Theoret. and Math. Phys.*, **2**:3 (1970), 266–274.

[92] V. Chung, "Infrared divergence in quantum electrodynamics", *Phys. Rev.*, **140**:4B (1965), 1110–1122.

[93] P. Deift, E. Trubowitz, "Inverse scattering on the line", *Comm. Pure Appl. Math.*, **32**:2 (1979), 121–251.

[94] P. A. M. Dirac, "Generalized Hamiltonian dynamics", *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, **246**:1246 (1958), 326–332.

[95] J. D. Dollard, "Asymptotic convergence and the Coulomb interaction", *J. Math. Phys.*, **5**:6 (1964), 729–738.

[96] K. O. Friedrichs, *Mathematical aspects of the quantum theory of fields*, Interscience Publishers Ltd., New York–London, 1953, viii+272 pp.

[97] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро, *Теория представлений и автоморфные функции*, Обобщенные функции, **6**, Наука, М., 1966, 512 с.; англ. пер.: I. M. Gel'fand, M. I. Graev, I. I. Pyatetskii-Shapiro, *Representation theory and automorphic functions*, W. B. Saunders Co., Philadelphia, PA–London–Toronto, ON, 1969, xvi+426 pp.

[98] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, 2-е изд., Обобщенные функции, **1**, Физматгиз, М., 1959, 470 с.; нем. пер.: I. M. Gelfand, G. E. Schilow, *Verallgemeinerte Funktionen* (*Distributionen*), v. I: *Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen*, Hochschulbücher für Math., **47**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960, 364 pp.

[99] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965, 448 с.; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969, xv+378 pp.

[100] O. W. Greenberg, S. S. Schweber, "Clothed particle operators in simple models of quantum field theory", *Nuovo Cimento* (10), **8**:3 (1958), 378–406.

[101] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, "Method for solving the Korteveg–de Vries equation", *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097.

[102] D. Kapec, M. Perry, A.-M. Raclariu, A. Strominger, *Infrared divergences in QED, revisited*, 2017, 21 pp., arXiv: 1705.04311.

[103] A. G. Izergin, V. E. Korepin, "Lattice versions of quantum field theory models in two dimensions", *Nuclear Phys. B*, **205**:3 (1982), 401–413.

[104] И. М. Кричевер, "Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия", *Функц. анализ и его прил.*, **15**:2 (1981), 22–35; англ. пер.: I. M. Krichever, "Baxter's equations and algebraic geometry", *Funct. Anal. Appl.*, **15**:2 (1981), 92–103.

[105] Т. Кубота, *Элементарная теория рядов Эйзенштейна*, Наука, М., 1986, 136 с.; пер. с англ.: T. Kubota, *Elementary theory of Eisenstein series*, Kodansha Ltd., Tokyo; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York–London–Sydney, 1973, xi+110 pp.

[106] П. П. Кулиш, "Инфракрасные расходимости квантованного гравитационного поля", *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **77**, Изд-во "Наука", Ленингр. отд., Л., 1978, 106–123; англ. пер.: P. P. Kulish, "Infrared divergences of quantized gravitational field", *J. Soviet Math.*, **22**:5 (1983), 1608–1620.

[107] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, "Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордон и высшие представления", *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*. 2, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **101**, Изд-во "Наука", Ленингр. отд., Л., 1981, 101–110; англ. пер.: P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, "Quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations", *J. Soviet Math.*, **23**:4 (1983), 2435–2441.

[108] Л. Д. Ландау, "Фундаментальные проблемы", *Теоретическая физика* 20 *века*, Памяти Вольфганга Паули, ИЛ, М., 1962, 285–289; пер. с англ.: L. D. Landau, "Fundamental problems", *Theoretical physics in the twentieth century*, A memorial volume to Wolfgang Pauli, Interscience Publishers Ltd., New York, London, 1960, 245–248.

[109] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, 2-е изд., Физматлит, М., 1963, 702 с.; англ. пер. 1-го изд.: L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics*, v. 3: *Quantum mechanics*: *non-relativistic theory*, Addison-Wesley Series in Advanced Physics, Pergamon Press Ltd., London–Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, MA, 1958, xii+515 pp.

[110] С. Ленг, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, Мир, М., 1977, 430 с.; пер. с англ.: S. Lang, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, MA–London–Amsterdam, 1975, xvi+428 pp.

[111] P. D. Lax, "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", *Comm. Pure Appl. Math.*, **21**:5 (1968), 467–490.

[112] П. Д. Лакс, Р. С. Филлипс, *Теория рассеяния*, Мир, М., 1971, 312 с.; пер. с англ.: P. D. Lax, R. S. Phillips, *Scattering theory*, Pure Appl. Math., **26**, Academic Press, New York–London, 1967, xii+276 pp.

[113] П. Д. Лакс, Р. С. Филлипс, *Теория рассеяния для автоморфных функций*, Мир, М., 1979, 324 с.; пер. с англ.: P. D. Lax, R. S. Phillips, *Scattering theory for automorphic functions*, Ann. of Math. Stud., **87**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976, x+300 pp.

[114] А. Лихнерович, *Теория связностей в целом и группы голономий*, ИЛ, М., 1960, 216 с.; пер. с фр.: A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Paris, Dunod; Edizioni Cremonese, Roma, 1955, xv+282 pp.

[115] L. N. Lipatov, "High energy asymptotics of multi-color QCD and two-dimensional conformal field theories", *Phys. Lett. B*, **309**:3-4 (1993), 394–396.

[116] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977, 331 с.; англ. пер.: V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **22**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986, xii+367 pp.

[117] J. Marsden, A. Weinstein, "Reduction of symplectic manifolds with symmetry", *Rep. Math. Phys.*, **5**:1 (1974), 121–130.

[118] Th. W. Ruijgrok, L. Van Hove, "Exactly renormalizable model in the quantum theory of fields", *Physica*, **22** (1956), 880–886.

[119] A. Selberg, "Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series", *J. Indian Math. Soc.* (*N. S.*), **20** (1956), 47–87; рус. пер.: А. Зельберг, "Гармонический анализ и дискретные группы в слабосимметрических римановых пространствах; приложения к теории рядов Дирихле", *Математика*, **1**:4 (1957), 3–28.

[120] M. A. Semenov-Tian-Shansky (ed.), *L. D. Faddeev's seminar on mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **201**, Adv. Math. Sci., 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, viii+321 pp.

[121] Е. К. Склянин, "Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния", *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. III*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **95**, Изд-во "Наука", Ленингр. отд., Л., 1980, 55–128; англ. пер.: E. K. Sklyanin, "Quantum version of the method of inverse scattering problem", *J. Soviet Math.*, **19**:5 (1982), 1546–1596.

[122] Е. К. Склянин, "О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера", *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 27–34; англ. пер.: E. K. Sklyanin, "Some algebraic structures connected with the Yang–Baxter equation", *Funct. Anal. Appl.*, **16**:4 (1982), 263–270.

[123] Е. К. Склянин, "Об одной алгебре, порожденной квадратичными соотношениями", в ст. "Заседания Ленинградского математического общества", *УМН*, **40**:2(242) (1985), 214.

[124] Л. А. Тахтаджян, "Точная теория распространения ультракоротких оптических импульсов в двухуровневых средах", *ЖЭТФ*, **66**:2 (1974), 476–489; англ. пер.: L. A. Takhtadzhyan, "Exact theory of propagation of ultrashort optical pulses in two-level media", *JETP*, **39**:2 (1974), 228–233.

[125] L. Van Hove, "Energy corrections and persistent perturbation effects in continuous spectra", *Physica*, **21** (1955), 901–923.

[126] S. Weinberg, "Infrared photons and gravitons", *Phys. Rev.* (2), **140** (1965), B516–B524.

[127] Д. Р. Яфаев, "О сингулярном спектре в системе трех частиц", *Матем. сб.*, **106(148)**:4(8) (1978), 622–640; англ. пер.: D. R. Yafaev, "On the singular spectrum in a system of three particles", *Math. USSR-Sb.*, **35**:2 (1979), 283–300.

[128] C. N. Yang, R. L. Mills, "Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance", *Phys. Rev.* (2), **96** (1954), 191–195.

[129] А. Б. Замолодчиков, "Точная двухчастичная S-матрица квантовых солитонов модели Sine-Gordon", *Письма в ЖЭТФ*, **25**:10 (1977), 499–502; англ. пер.: A. B. Zamolodchikov, "Exact two-particle S matrix of quantum solitons of the sine-Gordon model", *JETP Lett.*, **25**:10 (1977), 468–471.

[130] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, "Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models", *Ann. Physics*, **120**:2 (1979), 253–291.

Поступила в редакцию
28.08.2017

Леон Арменович Тахтаджян
(Leon A. Takhtajan)
Международный математический институт
им. Л. Эйлера;
Stony Brook University, USA
E-mail: leontak@math.sunysb.edu

Антон Юрьевич Алексеев
(Anton Yu. Alekseev)
University of Geneva, Switzerland
E-mail: Anton.Alekseev@unige.ch

Ирина Ярославна Арефьева
(Irina Ya. Aref'eva)
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: arefeva@mi.ras.ru

Михаил Арсеньевич Семенов-Тян-Шанский
(Michael A. Semenov-Tian-Shansky)
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук;
Institut de Mathématiques de Bourgogne, Université
de Bourgogne, Dijon, France
E-mail: semenov@pdmi.ras.ru,
semenov@u-bourgogne.fr

Евгений Константинович Склянин
(Evgeny K. Sklyanin)
University of York, York, UK
E-mail: evgeny.sklyanin@york.ac.uk

Федор Александрович Смирнов
(Fedor A. Smirnov)
Sorbonne Université, UPMC Univ Paris 06, CNRS,
UMR 7589, LPTHE
E-mail: smirnov@lpthe.jussieu.fr

Самсон Лулиевич Шаташвили
(Samson L. Shatashvili)
The Hamilton Mathematics Institute,
The School of Mathematics,
Trinity College Dublin, Ireland;
Simons Center for Geometry and Physics,
Stony Brook University, USA;
Institut des Hautes Études Scientifiques,
Bures-sur-Yvette, France;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук,
Лаборатория № 5
E-mail: samson@maths.tcd.ie