Л. Д. Фаддеев

Математический взгляд на эволюцию физики

Людвиг Дмитриевич Фаддеев, академик, заместитель директора Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, директор Международного математического института им. Л. Эйлера. Основные научные интересы связаны с современной математикой, физикой. Лауреат Государственной премии СССР, премии им. Д. Хейнемана по математической физике Американского физического института и Международной премии по математике Парижского страхового общества. Иностранный член Американской академии наук и искусств, Финской академии наук и литературы, Польской академии наук.

РАСКРЫТИЕ тайны структуры материи является прерогативой физики, экспериментальной и теоретической. Исторический ход новых открытий идет по уже ставшей привычной линии: ключевой эксперимент — абстракция и создание теоретической картины — новые предсказания — подтверждение их на опыте. Типичный и поучительный пример — создание классической теории тяготения от Галилея и Ньютона до успехов вычислительной астрономии в прошлом веке и опытов Этвеша. Теоретическая механика и классическая электродинамика также возникли на этом пути развития физики. Более или менее то же самое можно сказать и об основных достижениях физики начала нашего века — формулировке релятивистской динамики и квантовой теории. Исключение составляет третье важнейшее открытие того же времени — теория тяготения Эйнштейна, появившаяся как теоретическое изобретение человеческого ума и лишь впоследствии подтвержденная на опыте.

Сформировавшаяся физическая теория наиболее адекватно формулируется на математическом языке. И если законы механики еще можно выразить обычными, понятными словами («действие равно противодействию»)[1], то для электродинамики сделать это уже труднее, а для квантовой механики просто невозможно. Существующие попытки популяризации квантовой механики состоят в основном в обсуждении парадоксов, но не дают ее содержательного описания. Таким образом, именно в нашем веке окончательно определилась роль математики как незаменимого языка физики.

Эта роль математики часто поражает (а иногда и раздражает) представителей физических наук. Известный физик Ю. Вигнер написал специальное эссе под названием «Непостижимая эффективность математики в естественных науках»[2]. Большое внимание этой теме уделял в последние годы своей жизни В. Гейзенберг. Мою статью можно рассматривать как продолжение дискуссии о взаимоотношениях физики и математики, вызывающей все более глубокий интерес в последнее время.

Не будучи философом, я не стану брать на себя задачу объяснить, почему фундаментальные физические законы формулируются только на математическом языке.

---

[1] Не могу удержаться и сделаю замечание об образности физического языка. К примеру, сочетание слов «степень свободы» у непрофессионала вызывает ассоциации о большей или меньшей свободе, в то время как для профессионала это то же самое, что и сухой математический термин «координата».

[2] См. в кн.: Этюды о симметрии. М., 1971. С. 182.

Замечу, что на первый взгляд убедительный довод о том, что математика, являясь абстракцией реальных отношений в окружающем мире, тем самым оказывается приспособленной для окончательной формулировки этих отношений, слишком прямолинеен и наивен. Это убедительно иллюстрируют два классических примера из истории науки.

Геометрия, появившаяся в древнее время для измерения земельных участков, навигации и других практических дел, была превращена в абстрактную логическую схему трудами египетских и греческих ученых. Постулаты Евклида завершили формулировку этой схемы. Средневековые ученые потратили неимоверные усилия на доказательство логической зависимости пятого постулата Евклида от первых четырех. Это внутреннее развитие математики не имело никакого отношения к практике. Его кульминацией стало построение непротиворечивой геометрии, в которой пятый постулат не выполнялся. Это было сделано Н. И. Лобачевским в начале прошлого века. Первые примеры неевклидовой геометрии были обобщены Б. Риманом, что привело к созданию римановой геометрии, доведенной до совершенства трудами итальянских и немецких ученых. Подчеркнем еще раз, что это было внутренним логическим развитием чисто математических идей, т. е. продуктом человеческого ума, а не отражением объективных закономерностей природы. Конечно, и Лобачевскому, и Риману — гениальным ученым — было очевидно, что их создание найдет место в описании природы, скажем в построении космогонии. Однако фундаментальное приложение их идей к физике нашлось лишь в теории тяготения Эйнштейна. Итак, приверженцы критикуемого довода должны ответить на вопрос: почему язык, созданный для собственных нужд математики как игры ума, нашел свое место в физике — теории тяготения, которая к тому же во всей своей полноте никаким другим средством не может быть описана.

Второй пример, ведущий к аналогичному вопросу, связан с развитием алгебры. Алгебраические уравнения как средство решения конкретных жизненных проблем были абстрагированы арабскими учеными в начале средневековья, и сотни лет затем специалисты искали способы решения уравнений в радикалах. Конец этой драматической истории был положен работами Э. Галуа, который доказал несостоятельность надежд на такое решение и одновременно заложил основы новой алгебраической отрасли — теории групп. Трудами многих ученых прошлого века эта теория была развита, в частности С. Ли перенес ее на дифференциальные уравнения, положив начало теории непрерывных групп. И вот уже в прошлом веке теория групп послужила основой описания структуры кристаллов, а в наше время ее язык незаменим при описании всевозможных симметрий. Более того, динамика, т. е. развитие системы со временем, самым естественным образом описывается в терминах динамической группы. Так, описание релятивистского движения отличается от классического лишь выбором такой группы — неоднородной группы Лоренца (или группы Пуанкаре) и группы Галилея, соответственно.

Подобные примеры можно множить, но и приведенных достаточно для демонстрации «непостижимой» эффективности математики в физике. Не будем пытаться объяснить это свойство математики и примем за факт то, что по мере все более глубокого понимания структуры материи законы физики будут неизбежно формулироваться на языке математики. Отправляясь от этой посылки, естественно попытаться погадать, как может развиваться физика в будущем[3]. К сожалению, даже в популярной статье нельзя этого сделать, если не сформулировать основные структуры физической теории. И сделать это придется, конечно, на языке математики. Для читателя, следующего за нами, это уже не удивительно.

Основными понятиями, участвующими в формулировке физической теории, являются наблюдаемые и состояния. Наблюдаемые (термин, впервые введенный Дираком при описании основ квантовой механики) — это всевозможные характеристики физической системы (координаты, моменты, энергия и т. п.). Набор наблюдаемых, характеризующих данную систему, обозначим буквой Г, а за конкретными наблюдаемыми закрепим буквы А, В, С и т. д. Возможные измерения наблюдаемых описываются при помощи состояний. Множество состояний обозначим через Ω а его элементы через ω, μ и т. д. Каждое состояние ω сопоставляет каждой наблюдаемой результат ее измерения в определенных условиях эксперимента — функцию распределения $\omega_A(\lambda)$. Численно $\omega_A(\lambda)$ равна вероятности получить значение, не превосходящее λ при измерении

[3] В поучительной беседе, происходившей в поезде Ленинград — Москва, мой уважаемый коллега академик Б. Б. Пиотровский назвал меня самоуверенным человеком, когда я сказал ему, что для меня математика позволяет предсказывать будущее на основании опыта, накопленного в прошлом нашими предками. Такова разница исторического и математического взглядов на природу и ее познание.

наблюдаемой A в состоянии ω. Таким образом, $\omega_A(\lambda)$ есть монотонная положительная функция переменной λ, пробегающей вещественную ось, причем $\omega_A(-\infty)=0$; $\omega_A(+\infty)=1$. Среднее значение величины A в состоянии ω дается числом[4]

$$\langle\omega|A\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\omega_A(\lambda).$$

Естественно считать, что состояний достаточно много для разделения множества наблюдаемых, т. е. две наблюдаемых считаются совпадающими, если они имеют одинаковые средние значения во всех состояниях. Если угодно, в этом состоит познаваемость мира.

Уже из сказанного следует, что множество наблюдаемых является вещественным линейным пространством, т. е. наблюдаемые можно складывать и умножать на вещественные числа. Наблюдаемые $A+B$ и kA, где k — вещественное число, определяются как имеющие средние

$$\langle\omega|A+B\rangle = \langle\omega|A\rangle + \langle\omega|B\rangle,$$
$$\langle\omega|kA\rangle = k\langle\omega|A\rangle.$$

Более того, мы понимаем, что значит функциональная зависимость между наблюдаемыми. Если $\varphi(\lambda)$ — вещественная функция вещественной переменной λ, то наблюдаемая $\varphi(A)$ определяется посредством формулы

$$\langle\omega|\varphi(A)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, d\omega_A(\lambda).$$

Независимое и интуитивно менее ясное требование связано с формулировкой динамики системы. Для этого в множестве наблюдаемых вводится бинарная операция: каждой паре наблюдаемых B и A сопоставляется наблюдаемая $\{B, A\}$, обладающая свойствами, определяемыми чуть ниже. Эта операция позволяет строить эволюцию всех наблюдаемых, если задать некоторую выделенную наблюдаемую B и соответствующий ей параметр эволюции s. Это движение $A \to A(s)$ задается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dA}{ds} = \{B, A(s)\},\ A(0)=A.$$

Естественно требовать, чтобы выделенная величина B не менялась при порожденном им движении, т. е. $\{B, B\}=0$. Согласованность движений с уже введенными в алгебре наблюдаемых структурами приводит к соотношениям:

$$\{aA+bB, C\} = a\{A, C\} + b\{B, C\}$$

и

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0,$$

т. е. превращает множество наблюдаемых в алгебру Ли[5]. Кроме того, должно выполняться свойство инвариантности функциональной зависимости

$$\varphi(A(s)) = \varphi(A)(s).$$

Приведенные формулы должны дать читателю некоторое ощущение, как самые общие закономерности физики записываются на языке математики. Необходимый для понимания объем математических знаний в основном не выходит за рамки курса математики технического вуза.

Важно, что существующие основные физические теории являются конкретными реализациями этой схемы. Возьмем классическую механику. С точки зрения математики основную роль в ней играет фазовое пространство, определяемое обобщенными координатами q и импульсами p системы. Наблюдаемые — это вещественные функции $f(p, q)$ на фазовом пространстве. Ясно, как их складывать и умножать на числа. Если $\varphi(f)$ понимать как последовательное действие (суперпозицию) функций φ и f, то состояния, обладающие введенными выше свойствами, определяются однозначно (замечательное и нетривиальное математическое утверждение) и задаются мерами в фазовом пространстве. Функция распределения наблюдаемой f строится по мере ω следующим образом:

$$\omega_f(\lambda) = \int_{f(p,\,q)\leqslant\lambda} d\omega,$$

т. е. как мера части фазового пространства, ограниченной линией уровня $f(p, q) = \lambda$.

Структура фазового пространства позволяет ввести так называемую скобку Пуассона $\{f, g\}$ наблюдаемых f и g. Для нас

[4] Обозначение $\langle\omega|A\rangle$ для среднего значения наблюдаемой не следует путать с часто используемым в квантовой механике обозначением Дирака для скалярного произведения векторов. (Прим. ред.)

[5] Простейшим примером операции $\{A, B\}$, для которой выполняется последнее из выписанных соотношений, является векторное произведение векторов в трехмерном пространстве.

не важна ее явная запись, скажем только, что все условия согласованности, о которых говорилось выше, для нее выполняются. Развитие системы со временем t дается уравнением Гамильтона

$$\frac{df}{dt}=\{H, f\},$$

где роль выделенной наблюдаемой, связанной со временем, играет наблюдаемая H, называемая энергией.

Квантовая механика является другой реализацией этой схемы. Здесь мне придется обратиться к понятиям, выходящим за рамки курса математики технического вуза. Ничего не поделаешь, современная физика требует математики во всем ее современном объеме. Для понимания основной линии этой статьи знание смысла каждого термина следующего абзаца не существенно. Важно поверить, что в квантовой механике действует та же самая общая схема, что и в классической, и именно та, которую мы уже описали в общем виде.

В наиболее привычной записи квантовой теории роль наблюдаемых играют самосопряженные операторы A, B, C в некотором (вспомогательном) гильбертовом пространстве. Состояниям соответствуют положительно определенные операторы M, N,... со следом, равным 1. Функция распределения наблюдаемой A в состоянии M дается формулой

$$\omega_A(\lambda) = \mathrm{tr}(MP_A(\lambda)),$$

где символом tr обозначен след в гильбертовом пространстве, а $P_A(\lambda)$ — спектральная функция оператора A. Число степеней свободы определяется как число функционально независимых коммутирующих наблюдаемых.

Итак, классическая и квантовая механики систем с конечным числом степеней свободы представляют собой реализации одной и той же общей схемы. Электродинамика также является ее реализацией, но число степеней свободы здесь уже бесконечно. Классическая и квантовая реализации, конечно, неэквивалентны; это очевидно хотя бы потому, что конкретные предсказания этих теорий по одному и тому же поводу, как правило, различны. Мы рассмотрим их взаимоотношение подробнее.

Сделаем, однако, сначала несколько замечаний по поводу нашей общей схемы после того, как описаны главные ее реализации.

1. Тот факт, что классическая механика является такой реализацией, наводит на мысль, что эту схему можно было бы сформулировать еще в прошлом веке. Далее, если бы это было сделано, скажем, У. Гамильтоном или Дж. Гиббсом, то попытки найти другие ее реализации можно было бы начать умозрительно. Однако до сих пор физика так не развивалась, и квантовая механика была открыта на другом, традиционном пути.

2. Сама схема появилась уже после открытия квантовой механики при описании ее общей структуры. Основополагающую роль здесь сыграл П. Дирак. Только затем было осознано, что классическая механика является другой реализацией той же схемы. Лично я познакомился с этими соображениями по работам моих американских коллег И. Сигала и Дж. Мэкки.

3. Часто приходится слышать, что квантовая механика «недетерминистична», поскольку в ее формулировке используется понятие вероятности. Это явное заблуждение. Мы уже видели, что функция распределения как состояние появляется как в квантовой, так и в классической механике. Отличительной чертой классического случая является лишь то, что в чистых (неразложимых) состояниях все наблюдаемые имеют точные значения, в то время как в квантовом случае наблюдаемые имеют точные значения лишь в собственных чистых состояниях. Возможно, что это замечание слишком профессионально. Пропуская специальные термины, читатель должен просто поверить, что с детерминистичностью в квантовой механике все в порядке.

После этих замечаний вернемся к более подробному обсуждению взаимоотношения классической и квантовой механики. Для этого удобно описывать их по возможности одинаковыми объектами. Мы уже отмечали, что наблюдаемые фактически определяют состояния (математик скажет, что множество Ω двойственно Γ). Поэтому мы сосредоточимся на наблюдаемых. Существует способ описывать наблюдаемые квантовой механики функциями $f(p, q)$ в классическом фазовом пространстве. Но, конечно, основные структуры — понятие функции $\varphi(f)$ и скобка $\{f, g\}$ — отличаются от суперпозиции функций и скобки Пуассона. Более того, в конкретной записи этих структур в квантовом случае появляется параметр — знаменитая константа Планка h. Другими словами, существует однопараметрическое семейство таких структур, и классической механике соответствует значение $\hbar$, равное нулю. Снабжая все структуры индексом $\hbar$, можно представить себе квантовые операции как ряд по

степеням $\hbar$ (вообще говоря, бесконечный):

$$\{f, g\}_\hbar = \{f, g\}_{\hbar=0} + \hbar\{f, g\}^{(1)} + \hbar^2\{f, g\}^{(2)} \ldots$$

и

$$\varphi(f)_\hbar = \varphi(f)_{\hbar=0} + \hbar\varphi^{(1)}(f) + \hbar^2\varphi^{(2)}(f) + \ldots,$$

где операции $\{f, g\}^{(i)}$, $\varphi^{(i)}(f)$, $i=1, 2, \ldots$ подобраны так, что как $\{f, g\}_{\hbar=0}$, $\varphi(f)_{\hbar=0}$, так и $\{f, g\}_\hbar$, $\varphi(f)_\hbar$ удовлетворяют требованиям нашей схемы.

Конечно, в настоящей квантовой механике параметр $\hbar$ имеет конкретное значение: $\simeq 10^{-27}$ гсм^2 с$^{-1}$; существование «семейства квантовых механик» есть еще один пример математической игры ума. При этом математики в подобных случаях говорят о деформации структур. Используя этот математический термин, можно сказать, что квантовая механика является деформацией классической, причем константа Планка $\hbar$ играет роль параметра деформации.

Сделанное утверждение представляет собой краткую и точную формулировку принципа соответствия. Для математика-профессионала в ней ничего не прибавишь и не убавишь. Многословное объяснение принципа соответствия в популярной литературе с этой точки зрения есть просто беллетристика.

Мы вплотную подошли к наиболее важному месту этой статьи. Дело в том, что в математической теории деформации алгебраических структур существует понятие устойчивой структуры. Говорят, что структура устойчива, если все близкие к ней ее деформации ей эквивалентны. Так вот, с этой точки зрения квантовая механика является устойчивой, в отличие от классической, допускающей неэквивалентную деформацию — квантовую механику. Именно с этой неустойчивостью, или, если угодно, вырожденностью классической механики, и связана ее переопределенность, заключающаяся в точности чистых состояний по отношению ко всем наблюдаемым. Переход к квантовой механике снимает это вырождение и приводит к устойчивой теории «общего положения», которую нельзя деформировать, оставаясь в рамках уже фиксированных структур.

Мы приходим к важному выводу: если классическая механика в процессе развития физики была закономерно заменена на квантовую, то для предсказания дальнейшего изменения квантовой механики у нас нет оснований.

Приложение математической теории деформации алгебраических структур для анализа представлений в физике на этом не заканчивается. Рассмотрим с этой точки зрения переход от нерелятивистской к релятивистской динамике. Как уже отмечалось выше, этот переход был связан с изменением группы движений пространства-времени — от преобразования Галилея к преобразованиям Лоренца — Пуанкаре.

Обе эти группы содержат 10 параметров. Мы сопоставим лишь преобразования координат $\vec{x}$ и времени t, соответствующие смене систем отсчета и содержащие в качестве параметров скорость относительного движения систем $\vec{v}$.

Преобразования Галилея:

$$\vec{x} \to \vec{x} + \vec{v}t, \quad t \to t.$$

Преобразования Лоренца:

$$\vec{x} \to \frac{\vec{x} + \vec{v}t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$t \to \frac{t + (\vec{v}\vec{x})/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

В преобразованиях Лоренца, помимо переменного параметра $\vec{v}$, содержится фиксированный параметр c — скорость света. Как мы знаем, он имеет конкретное значение, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, однако математически мы можем представить себе семейство воображаемых миров, нумерованное значениями c. Очевидно, что при $c \to \infty$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. В то же время оба семейства преобразований образуют одну и ту же алгебраическую структуру — группу. Итак, мы опять сталкиваемся с деформацией: группа релятивистской динамики есть деформация группы для нерелятивистского движения. Роль параметра деформации играет величина $1/c^2$. И опять переход к релятивизму является деформацией в устойчивую структуру: группа Лоренца не допускает неэквивалентных деформаций.

Прекратим на этом «математический поток сознания» и посмотрим, к чему приводит проведенный анализ. Две главные революции в физике и современном естествознании вообще с точки зрения математики являются деформациями неустойчивых структур в устойчивые. Модные разговоры о смене парадигм с этой точки зрения по меньшей мере тускнеют. Но суть дела от этого не проигрывает. Мне представляется, что более краткого и адекватного анализа эволюции наших взглядов на теорию материи не существует.

Естественно теперь спросить, позволяет ли этот анализ сказать что-либо о дальнейшем развитии таких взглядов. Сознавая

спекулятивность таких попыток[6], не могу удержаться от соблазна дать вариант такого предсказания.

Мы уже видели, что параметры деформации $\hbar$ и $1/c^2$ имеют конкретную размерность. В терминах трех базовых размерностей — длины L, массы M и времени T — имеем

$$[\hbar]=[L]^2[M][T]^{-1};\ [1/c^2]=[L]^{-2}[T]^2.$$

Ясно, что существует еще лишь один независимый размерный параметр, и основываясь на уже существующем опыте (сколь безрассудно это ни бывает), следует искать еще одну деформацию физических закономерностей, в которой этот параметр принял бы участие. Не нужны особые усилия, чтобы осознать, что такая возможность уже, видимо, реализована. Действительно, третье основное достижение физики нашего века — создание Эйнштейном теории тяготения — также может считаться деформацией в устойчивом направлении. Именно, в основе теории тяготения лежит замена плоского пространства-времени Минковского на искривленное псевдориманово пространство общего положения. Ясно, что в множестве таких пространств плоское пространство является вырождением, в то время как в окрестности криволинейного пространства лежат также криволинейные. Мера деформации определяется входящей в уравнения Гильберта — Эйнштейна гравитационной постоянной γ, унаследованной еще от Ньютона. Эта константа имеет размерность, функционально независимую от $\hbar$ и c, и вместе с ними составляет базис для всех размерных параметров.

Читателю уже ясно, куда я клоню. Объединение релятивизма, квантовых принципов и тяготения должно дать нам окончательную физическую теорию, которая устойчива и не поддается изменениям без действительно коренной ломки установившихся понятий, которые, как мы уже убедились, имеют очень общий характер. Я не вижу ничего крамольного в предсказании окончательной формулировки основ еще одной из естественных наук. Химия уже нашла свою фундаментальную основу в квантовой механике многоэлектронных систем, и нет ничего удивительного в том, что физику, возможно, ждет подобная участь.

К сожалению, в современной теоретической физике еще не найден естественный синтез принципов релятивизма, квантовой теории и тяготения. Мы можем строить достаточно последовательную квантовую теорию в пространстве Минковского ($\hbar$ и c) или классическую теорию тяготения (c и γ). Но последовательной теории, в которую органически входили бы все три параметра $\hbar$, c и γ, все еще не существует. Основные усилия физиков-теоретиков и специалистов по современной математической физике направлены на реализацию этого синтеза. Далеко не все участники этой работы сознают или соглашаются, что они трудятся над окончательной формулировкой структуры материи, которая будет дана лишь на математическом языке. Но для некоторых из них, в том числе и автора этой статьи, эта мысль является очевидной, неизбежной и, главное, путеводной.

[6] См. сноску 3.

ОБЪЯВЛЕНИЕ

Всесоюзный научно-исследовательский институт минерального сырья (ВИМС) просит сообщить годовую потребность в редкоземельных элементах (оксидах, их смесях, металлах) на XIII—XIV пятилетки для определения проектной производительности нового предприятия по попутным компонентам.

Ресурсные возможности производства позволяют удовлетворить любую потребность.

Цены продуктов планируется устанавливать на договорной основе при их значительном снижении по сравнению с действующими.

Адрес: 109017, Москва, Старомонетный пер., 31, ВИМС.
Телефон для справок: 233—15—37.