Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Б. С. Павлов, Л. Д. Фаддеев, Теория рассеяния и автоморфные функции, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1972, том 27, 161–193

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 195.218.150.2
30 июня 2017 г., 15:36:25

Б.С.Павлов, Л.Д.Фаддеев

ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ И АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Неаналитические автоморфные формы, введенные впервые Маассом [I] определяются теперь обычно как решения уравнения

$$A\varphi = y^2(\varphi_{xx}+\varphi_{yy}) = s(1-s)\varphi, \quad s=\frac{1}{2}+i\kappa, \qquad (I)$$

удовлетворяющие условию автоморфности относительно фиксированной дискретной подгруппы $\Gamma \subset SL(2,R)$ и не слишком быстро растущие в окрестности параболической вершины фундаментальной области F_Γ. В дальнейшем теория неаналитических автоморфных форм получила глубокое развитие в связи с изучением представлений группы $SL(2,R)$ в работах Сельберга [2], Гельфанда-Пятецкого [3,4] и Годемана [5]. При этом оказалась полезной связь этой теории с теорией возмущений на непрерывном спектре [6,7] и теорией рассеяния. Методы стационарной теории рассеяния были использованы в работе одного из авторов [8] для доказательства теоремы разложения по неаналитическим автоморфным формам.

В современной теории рассеяния существует несколько подходов: стационарный, общий нестационарный и специальный нестационарный подход, связанный с именами Лакса и Филлипса [9]. Подход Лакса и Филлипса имеет более узкую область применимости, чем первые два, однако приводит к более детальным результатам. Так, в условиях применимости этого подхода удаётся судить об аналитических свойствах матрицы рассеяния непосредственно по свойствам рассматриваемой унитарной группы. Именно, существует простой критерий того, что матрица рассеяния - внутренняя функция [I0], а условия регулярности и ограниченности матрицы рассеяния в полосе около вещественной оси просто выражаются в терминах ассоциированной с задачей полугруппы, описывающий диссипацию волновых пакетов. Обратно, имея сведения о матрице рассеяния, можно судить о спектральных свойствах ассоциированной полугруппы. В частности, удаётся вычислить линейную оболочку её корневых векторов, которые играют роль резонансных состояний в процессах рассеяния.

Цель нашей работы - рассмотрение спектральных характеристик уравнения (I) с точки зрения подхода Лакса-Филлипса. Мы ограничимся здесь случаем, когда фундаментальная область F_Γ имеет одну параболическую вершину, которую расположим в точке $y=\infty$. В этом случае непрерывный спектр оператора A однократен. Основные конкретные результаты касаются поведения коэффициента отражения $S_R(\kappa)$, участвующего в асимптотике решения φ уравнения (I) при $y \to \infty$,

$$\varphi(x,y;k)=y^{1/2+ik}+S_R(k)\,y^{1/2-ik}+o(1).$$

Полученное вложение в схему Лакса-Филлипса позволяет нам утверждать, что при некотором $d>1$ функция

$$S(k)=S_R^{-1}(k)\prod_{\ell=0}^{N}\left(\frac{k-i\mu_\ell}{k+i\mu_\ell}\right)^2 d^{2ik}$$

является в н у т р е н н е й [II] в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,k>0$. Здесь $\mu_0=1/2$ и $\frac{1}{4}-\mu_\ell^2=\lambda_\ell$ – дискретные собственные значения оператора A, расположенные в промежутке $(0,\ 1/4)$. Пользуясь подходом Лакса-Филлипса, мы связываем возможность продолжения $S(k)$ в полосу $-\gamma<\mathrm{Im}\,k\leq 0$ в нижней полуплоскости с условием экспоненциальной диссипации некоторых волновых пакетов.

План работы таков. В первом параграфе мы формулируем основные известные факты о спектре и собственных функциях оператора A и о коэффициенте отражения S_R, следуя работе [8]. Далее, в § 2 вводятся основные конструкции метода Лакса-Филлипса: волновое уравнение, связанное с оператором A, и отвечающая ему унитарная группа, обладающая п р и х о д я щ и м и и у х о д я щ и м и п о д п р о с т р а н с т в а м и, а также ассоциированная с ней полугруппа сжатий. В третьем параграфе матрица рассеяния $S(k)$ появляется как х а р а к т е р и с т и ч е с к а я ф у н к ц и я этой полугруппы (см. [I2]). Сформулированные выше свойства этой функции получаются как следствие доказанных там же общих утверждений, являющихся модификацией общих теорем [9] применительно к рассматриваемой ситуации. В последнем параграфе рассмотрен важный пример, когда Γ есть модулярная группа.

Авторы счастливы посвятить эту работу своей учительнице Ольге Александровне Ладыженской.

§ I. Факты о спектре.

Пусть S' – плоскость Лобачевского, реализованная как верхняя полуплоскость переменной z, $z = x + iy$, $y > 0$. S' является однородным пространством группы $G = SL(2, R)$, действующей в S' посредством дробно-линейных преобразований

$$z \longrightarrow zg = \frac{az+c}{bz+d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где a, b, c, $d \subset R$, $ad - bc = 1$. Дифференциальный оператор

$$A = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

и мера $y^{-2} dx dy = d\mu(z)$ инвариантны по отношению к этому действию. Рассмотрим дискретную подгруппу $\Gamma \subset G$, удовлетворяющую следующим требованиям

I. Пространство G/Γ некомпактно, но имеет конечный объём.

2. Γ содержит единственную параболическую подгруппу.

Как известно, в этом случае можно выбрать фундаментальную область $F_\Gamma = F$ для группы Γ такую, что

I'. F лежит в полосе $-X < x < X$, $y > Y > 0$.

2'. Пересечение $F \cap \{y > d\}$ при некотором d, $d > 1$, совпадает с полосой $-X_1 < x < X_1$, $y > d$. В дальнейшем мы считаем масштаб фиксированным таким образом, что $X_1 = 1/2$.

3'. Граница F кусочно гладкая и состоит из отрезков геодезических с конечным числом угловых точек.

В пространстве $L_2(F, d\mu) \equiv H$ рассмотрим симметрический оператор $\tilde{L}$, определенный дифференциальным выражением

$$-A - \frac{1}{4} = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{4}$$

на всех достаточно гладких и равномерно ограниченных в F функциях, удовлетворяющих условиям автоморфности, т.е. являющихся сужениями на F заданных на S' ограниченных гладких периодических функций u:

$$u(z) = u(z\gamma), \quad \gamma \in \Gamma.$$

Оператор $\tilde{L}$ имеет в H единственное самосопряженное расширение, которое мы обозначим через L. Спектр оператора L состоит из конечного набора конечнократных собственных значений, $\lambda_0 = -1/4$

(собственное число, отвечающее единичному представлению группы G), собственных чисел $\lambda_\ell = -\mu_\ell^2$, $\ell = 1, 2, \ldots, N$, лежащих в промежутке $(-1/4, 0)$ (дополнительная серия), счётного набора конечнократных положительных собственных значений λ_ℓ , $\ell = N+1, N+2, \ldots, \lambda_\ell \in (0, \infty)$ (основная серия), и однократной ветви абсолютно-непрерывного спектра $\lambda = k^2$, заполняющей полуось $[0, \infty)$. Вообще говоря, у оператора L может быть ещё собственное число в точке $\lambda = 0$. Наличие этого собственного значения не вызвало бы принципиальных затруднений в дальнейшем, однако оно приводит к усложнению некоторых формул. Чтобы не загромождать статью дополнительными выкладками, мы предположим, что $\lambda = 0$ не является собственным числом.

Отметим, что термины "единичное представление", "дополнительная серия" и "основная серия" соответствуют классификации представлений группы G , для которой оператор L служит оператором Лапласа. Слагаемое $-1/4$ введено в формулу (I) с таким расчётом, чтобы непрерывный спектр оператора L простирался от точки 0 до бесконечности. Это является необходимым условием существования функционально-инвариантных решений нужного типа у волнового уравнения, возникающего в подходе Лакса-Филлипса.

Интегралы по отрезкам орисфер , попавшим в F , от собственных функций v_ℓ основной серии равны нулю. В частности

$$\int_{-1/2}^{1/2} v_\ell(x, y)\, dx = 0, \quad y \geq d, \quad \ell \geq N+1 \quad . \tag{2}$$

Собственное значение $\lambda_0 = -\frac{1}{4}$ простое, а отвечающая ему собственная функция - постоянная:

$$v_0(x, y) = \mathrm{Const}.$$

Собственные функции непрерывного спектра принято нормировать, задав их асимптотику при $y \to \infty$, $z = x + iy$

$$\varphi(z, k) = \varphi_0(y) + \varphi_1(z, k), \qquad k^2 = \lambda \ , \tag{3}$$

где $\varphi_0(y, k) = y^{1/2 + ik} + S_R(k)\, y^{1/2 - ik}$ и $\varphi_1(z, k) = o(1)$ при $y \to \infty$. Коэффициент отражения $S_R(k)$ определяется условием (3) однозначно и является мероморфной функцией спектрального параметра k , равной по модулю единице на вещественной оси. Полюса $S_R(k)$ в нижней полуплоскости лежат в точках $-i\mu_\ell$ Функции φ_1 , входящие в формулу (3) удовлетворяют условию, аналогичному (2)

$$\int_{-1/2}^{1/2} \varphi_1(z, k)\, dx = 0 \quad , \quad y \geq d \tag{4}$$

Система $\{\varphi(z,\kappa)\}$ ортогональна в H и полна в абсолютно непрерывном подпространстве H^a оператора L. Спектральный проектор, отвечающий участку абсолютно непрерывного спектра $\Delta=(\kappa_1^2,\ \kappa_2^2)$, есть интегральный оператор с ядром

$$P_\Delta^a(z,z')=\frac{1}{2\pi}\int_{\kappa_1}^{\kappa_2}\varphi(z,\kappa)\,\overline{\varphi(z',\kappa)}\,d\kappa. \tag{5}$$

Соответствующие формулы обращения записываются в виде

$$\tilde f(\kappa)=\lim_{N\to\infty}\int_{F\cap\{y<N\}}\overline{\varphi(z,\kappa)}\,f(z)\,d\mu=Ef,$$

$$(P^a f)(z)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^N\varphi(z,\kappa)\tilde f(\kappa)\,d\kappa. \tag{6}$$

Здесь через P^a обозначен ортопроектор из H на H^a. Оператор E действует как частично изометрический из пространства H на пространство $\tilde H=L_2(0,\infty)$ с нормой

$$\|\tilde f\|_{\tilde H}^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty|\tilde f(\kappa)|^2\,d\kappa.$$

Отображение E, будучи сужено на H^a, становится взаимнооднозначным из H^a на $\tilde H$. Обратное отображение E^* изометрично действует из $\tilde H$ на H^a.

§ 2. Волновое уравнение.

В теории Лакса-Филлипса фундаментальную роль играет эволюционное уравнение вида

$$u_{tt}+Lu=0,\qquad u\in H. \tag{7}$$

Это уравнение естественным образом определяет группу $\tilde V_t$ преобразований (гладких и финитных) данных Коши $\mathcal{U}(z,t)=\begin{pmatrix}u(z,t)\\ \frac{\partial u}{\partial t}(z,t)\end{pmatrix}$, действующую по формуле

$$\mathcal{U}(z,t)=\tilde V_t\,\mathcal{U}(z,0).$$

Группа V_t оставляет инвариантной энергетическую форму, ассоциированную с уравнением (7):

$$E(\mathcal{U}) = \frac{1}{2}\left\{(Lu,u) + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_H^2\right\}. \qquad (8)$$

В нашем случае энергетическая форма индефинитна ввиду наличия у оператора L отрицательного дискретного спектра. Тем не менее мы введем на множестве гладких финитных данных индефинитную метрику с помощью формы E, и выделим линейное множество $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{H}_+ \oplus \tilde{H}_+$ данных, для которых выполнены условия ортогональности

$$(u, v_\ell) = (u_1, v_\ell) = 0, \quad \ell = 0, 1, \ldots, N. \qquad (9)$$

Множество $\tilde{\mathcal{H}}$ очевидным образом инвариантно относительно действия группы $\tilde{V}_t$ и энергетическая форма в $\tilde{\mathcal{H}}$ положительна. Это позволяет рассматривать $\tilde{\mathcal{H}}$ как предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$E(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \frac{1}{2}\left[(Lu,v) + (u_1, v_1)\right].$$

После замыкания в метрике E пространство $\tilde{\mathcal{H}}$ превращается в полное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ двухкомпонентных функций вида $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix}$, которое мы в дальнейшем называем для краткости пространством данных. Здесь вторая компонента данных, u_1 – произвольный элемент из подпространства $H_+ \subset H$, ортогонального к собственным функциям дополнительной серии, а первая компонента u – любой элемент из пространства H_+^E, получаемого замыканием $\tilde{H}_+$ в метрике квадратичной формы положительного оператора $L_+ = L|H_+$. Отметим, что u не обязано содержаться в H, однако u непрерывна в любой компактной подобласти F ([13]).

Распространяя по непрерывности операторы $\tilde{V}_t$ на всё пространство $\mathcal{H}$, мы получим группу изометрических операторов В действительности эта группа – унитарная в $\mathcal{H}$, что следует из плотности $\tilde{\mathcal{H}}$ в $\mathcal{H}$ и возможности обращения времени в уравнении (7).

Группа V_t обладает важным свойством, позволяющим применять к ней схему Лакса-Филлипса: у неё имеются ортогональные приходящие и уходящие подпространства то-есть такие подпространства $\mathcal{D}_-, \mathcal{D}_+ \subset \mathcal{H}$, что

I. $V_t \mathcal{D}_- \subset \mathcal{D}_-, \ t < 0; \quad V_t \mathcal{D}_+ \subset \mathcal{D}_+, \ t > 0;$

2. $\bigcap_{t<0} V_t \mathcal{D}_- = \bigcap_{t>0} V_t \mathcal{D}_+ = 0$;

3. $\bigcup_{t>0} V_t \mathcal{D}_- = \bigcup_{t<0} V_t \mathcal{D}_+$;

4. $\mathcal{D}_- \perp \mathcal{D}_+$.

Мы не требуем, чтобы подпространство $\mathcal{H}' = \bigcup_{t>0} V_t \mathcal{D}_- = \bigcup_{t<0} V_t \mathcal{D}_+$ совпадало со всем $\mathcal{H}$. В нашем случае $\mathcal{H}'$ является собственным подпространством $\mathcal{H}$. В дальнейшем мы опишем его подробнее. Подпространства $\mathcal{D}_-, \mathcal{D}_+$ строятся из данных Коши некоторого класса функционально-инвариантных решений уравнения (7).

Л е м м а I . Пусть Φ – произвольный элемент H_+^E, эквивалентный функции $\Phi(y)$, не зависящей от переменной x в области F и равной нулю при $y < d$. Тогда функции

$$u_\mp(y,t) = e^{\mp t/2} \Phi(ye^{\pm t}) \qquad (10)$$

удовлетворяют граничным условиям и уравнению (7) в смысле интегрального тождества и являются решениями уравнения (7) "с ограниченной энергией" $u_\mp(\cdot,t) \in H_+^E$.

Д о к а з а т е л ь с т в о нужного утверждения для случая гладкой финитной функции Φ получается путём подстановки выражения (10) в уравнение (7). Затем следует провести замыкание непосредственно в соответствующем интегральном тождестве, заменяющем уравнение (см. [I4]). При этом следует воспользоваться тем фактом, что, при $t<0$, $t>0$ соответственно, для гладких Φ имеет место равенство:

$$(Lu_\mp(\cdot,t), u_\mp(\cdot,t))_H = \left\|\frac{\partial}{\partial t} u_\mp(\cdot,t)\right\|^2 = (L\Phi, \Phi)_H =$$

$$= \left\| -\frac{1}{2}\Phi + y\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\|_H^2 . \qquad (11)$$

Доказательство непрерывной зависимости решения $u_-(\cdot,t)$ от времени в энергетической норме, в силу (11) сводится к проверке условия

$$\left\| \left(-\frac{1}{2} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_-(\cdot,t) - u_-(\cdot,t')) \right\|_H \xrightarrow[t \to t',\ t,t'<0]{} 0 ,$$

В свою очередь это условие следует из непрерывности квадратично-интегрируемых функций в среднем ☐ [ж)]

Функционально-инвариантные решения $u_{\mp}(y,t)$ имеют наглядный смысл волн, приходящих из бесконечности и волн, уходящих на бесконечность. Сопоставим этим волнам приходящее и уходящее подпространства $\mathcal{D}_-$, $\mathcal{D}_+$ относя к $\mathcal{D}_-$ данные Коши, порождающие приходящие волны вида $u_-(y,t)$, а к $\mathcal{D}_+$ – данные Коши, порождающие уходящие волны вида $u_+(y,t)$. Прямое вычисление с использованием формулы (10) показывает, что $\mathcal{D}_{\mp}$ состоит из данных вида

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u \\ \mp\frac{1}{2}u \pm y u_y \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

где u – произвольная функция из H_+^E, зависящая только от переменной y и $u(y)=0$, $y<d$. Другое удобное представление данных из $\mathcal{D}_{\mp}$ даётся формулой

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u \\ \pm u_1 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

где u_1 – произвольная функция из H_+, зависящая только от y, $u_1(y)=0$, $y<d$, и $u(y)=\sqrt{y}\int_a^y s^{-3/2}u_1(s)\,ds$. Легко проверить, что при этом

$$u \in H_+^E, \quad \|u\|^2_{H_+^E} = \|u_1\|^2_{H_+} = \|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}}$$

Мы отложим проверку свойств I–4 для введенных выше нами подпространств $\mathcal{D}_{\mp}$ на конец настоящего параграфа.

Нам понадобится ряд утверждений спектрального характера о группе V_t и её генераторе.

В схеме теории рассеяния Лакса–Филлипса матрица рассеяния определяется в терминах теории спектральных представлений. Сейчас мы переходим к их построению.

Л е м м а 2. Инфинитезимальный генератор $\mathcal{L}$ группы $V_t = \exp(i\mathcal{L}t)$ есть самосопряженный в $\mathcal{H}$ оператор, задаваемый операторной матрицей

$$\mathcal{L} = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ L_+ & 0 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

ж) Здесь и далее знак ☐ обозначает конец доказательства.

Спектральная мера $\mathcal{P}(\mu)$ оператора $\mathcal{L}$ связана со спектральной мерой $P(\lambda)$ оператора L_+ по формуле

$$\mathcal{P}(\Delta)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\int\limits_\Delta \operatorname{sgn}\mu\, dP(\mu^2) & -i\int\limits_\Delta \frac{1}{\mu}\cdot\operatorname{sgn}\mu\cdot dP(\mu^2)\\ i\int\limits_\Delta \operatorname{sgn}\mu\cdot\mu\cdot dP(\mu^2) & \int\limits_\Delta \operatorname{sgn}\mu\, dP(\mu^2)\end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Доказательство первой части утверждения и формулы (14) можно найти, например, в книге [9]. Для того, чтобы убедиться в справедливости второго утверждения леммы, нужно сначала проверить, что формула (15) задаёт выражение для некоторой системы спектральных проекторов. Пусть, например, $\Delta\subset(0,\infty)$ тогда

$$(\mathcal{P}_\Delta \mathcal{U},\mathcal{U})=\frac{1}{2}\left\|\int\limits_\Delta \mu\, dP(\mu^2)u-i\int\limits_\Delta dP(\mu^2)u_1\right\|^2\geq 0.$$

Отсюда следует симметричность $\mathcal{P}_\Delta$ в $\mathcal{H}$. Кроме того, на плотном *) в $\mathcal{H}$ множестве данных, финитных покомпонентно относительно $dP(\mu^2)$ вблизи $\mu=0$, $\mu=\infty$ имеем:

$$s\text{-}\lim\int_{\infty}^{s} d\mathcal{P}(s)\mathcal{U}=\frac{1}{2}s\text{-}\lim\begin{pmatrix}\int\limits_{-\infty}^{s}\operatorname{sgn}\mu\, dP(\mu^2)u-i\int\limits_{-\infty}^{s}\frac{1}{\mu}\cdot\operatorname{sgn}\mu\, dP(\mu^2)u_1\\ i\int\limits_{-\infty}^{s}\operatorname{sgn}\mu\cdot\mu\cdot dP(\mu^2)u+\int\limits_{-\infty}^{s}\operatorname{sgn}\mu\cdot dP(\mu^2)u_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{cases}0, & s\to-\infty,\\ \mathcal{U}, & s\to+\infty.\end{cases}$$

Доказательство ограниченности и ортогональности семейства $\mathcal{P}(\mu)$ предоставим читателю. Наконец, тот факт, что $\mathcal{P}(\mu)$ есть разложение единицы, отвечающее оператору $\mathcal{L}$ следует из формулы

$$\mathcal{L}\,d\mathcal{P}(\mu)=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\mu\cdot\operatorname{sgn}\mu\, dP(\mu^2) & -i\operatorname{sgn}\mu\, dP(\mu^2)\\ i\mu^2\operatorname{sgn}\mu\, dP(\mu^2) & \mu\operatorname{sgn}\mu\, dP(\mu^2)\end{Bmatrix}=\mu\, d\mathcal{P}(\mu)$$

$\boxtimes$

---

*) Т.к. $\lambda=0$ не является собственным числом оператора L.

Используя формулу (I5) нетрудно показать, что кратность спектра оператора $\mathcal{L}$ на промежутке $\Delta \subset [0,\infty)$ (или $\Delta \subset (-\infty, 0]$) совпадает с кратностью спектра оператора L на соответствующем промежутке. Отсюда и из результатон § I видно, что оператор $\mathcal{L}$ имеет однократную ветвь абсолютно-непрерывного спектра, заполняющую промежуток $(-\infty, \infty)$ и счётное число собственных значений, $\pm \mu_\ell$, $\ell = N+1, \ldots$. Отвечающие им (нормированные) собственные вектора $\mathcal{V}_\ell$ выражаются через (нормированные) собственные функции v_ℓ основной серии оператора L по формуле

$$\mathcal{V}_{\pm\ell} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{i\mu_\ell} v_\ell \\ v_\ell \end{pmatrix}, \quad \ell = N+1, \ldots \tag{I6}$$

Отметим, что, ввиду свойства (2) собственных функций основной серии оператора L, вектора $\mathcal{V}_{\pm\ell}$, $\ell = N+1, \ldots$, ортогональны к $\mathcal{D}_-$, $\mathcal{D}_+$. Таким образом, приходящее и уходящее подпространства лежат в абсолютно-непрерывном подпространстве $\mathcal{H}^a$ оператора $\mathcal{L}$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\bigcup_{t>0} V_t \mathcal{D}_- \subset \mathcal{H}^a, \quad \bigcup_{t<0} V_t \mathcal{D}_+ \subset \mathcal{H}^a. \tag{I7}$$

Далее мы покажем, что на самом деле в формулах (I7) включение заменяется равенством.

Формула (I6), дающая связь междусобственными векторами операторов L и $\mathcal{L}$, как оказывается, верна и для собственных функций непрерывного спектра, то есть, в качестве собственных функций непрерывного спектра оператора $\mathcal{L}$ можно взять векторы

$$\Phi(z,k) = \begin{pmatrix} 1/ik \; \varphi(z,k) \\ \varphi(z,k) \end{pmatrix}, \quad z \in F, \; -\infty < k < \infty. \tag{I8}$$

Здесь $\varphi(z,k)$ при $k>0$ определены формулой (3), и $\varphi(z,-k) = \overline{\varphi(z,k)}$, при $k \in (-\infty, \infty)$. Функции $\Phi(\cdot,k)$ ортогональны в $\mathcal{H}$ и нормированы на δ-функцию; точнее говоря, справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. Для данных $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ справедливы следующие формулы обращения

$$\mathcal{E}\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}(k) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{1}{2}\int\limits_{F\cap\{y<N\}} \left[ik\,\mathcal{U}(z) + \mathcal{U}_1(z)\right]\varphi(z,k)\,d\mu, \qquad /19/$$

$$\mathcal{P}_a\mathcal{U}(z) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\begin{pmatrix} 1/ik\ \varphi(z,k) \\ \varphi(z,k)\end{pmatrix}\tilde{\mathcal{U}}(k)\,dk = \mathcal{E}^*\tilde{\mathcal{U}}. \qquad /20/$$

Здесь $\mathcal{P}_a$ – ортопроектор из $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}_a$.

Отображение $\mathcal{E}$ есть частичная изометрия из $\mathcal{H}$ на $L_2(-\infty,\infty)$, аннулирующая подпространство натянутое на собственные вектора $\mathcal{U}_\ell$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{\mathcal{U}}(k)|^2 dk = \|\mathcal{P}_a\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}}. \qquad /21/$$

Обратное отображение $\mathcal{E}^*$ является изометрией из $L_2(-\infty,\infty)$ на $\mathcal{H}$

Доказательство всех сформулированных утверждений следует из формул /5/,/6/ первого параграфа, сформулированного там же утверждения об изометричности операторов E и E^*, а также из того факта, что абсолютно-непрерывная часть $\mathcal{P}^a(k)$ спектральной меры оператора $\mathcal{L}$ выражается через абсолютно-непрерывную часть $\mathcal{P}^a(\lambda)$ спектральной меры оператора $\mathcal{L}$ по формуле

$$d\mathcal{P}^a(\mu) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \operatorname{sgn}\mu\ dP^a(\mu^2) & -i/\mu\ \operatorname{sgn}\mu\ dP^a(\mu^2) \\ i\mu\ \operatorname{sgn}\mu\ dP^a(\mu^2) & \operatorname{sgn}\mu\ dP^a(\mu^2)\end{Bmatrix} \qquad \boxtimes$$

Все рассмотрения в дальнейшем будут происходить в абсолютно непрерывном подпространстве $\mathcal{H}_a$ оператора $\mathcal{L}$. Сужение группы V_t и её генератора $\mathcal{L}$ на это подпространство обозначим через V_t^a, $\mathcal{L}_a$ соответственно. С помощью формул /19/,/20/ обычным образом строится спектральное $\mathcal{E}$-представление группы V_t^a, ассоциированное с выбранной системой собственных функций непрерывного спектра /18/

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{U} & \longrightarrow & \tilde{u} = \mathcal{E}\mathcal{U} \\ \mathcal{H}^a & \longrightarrow & L_2(-\infty,\infty) \\ V_t^a\mathcal{U} & \longrightarrow & (\mathcal{E}V_t^a\mathcal{E}^*\tilde{u})(k) = e^{ikt}\tilde{u}(k), \\ & & -\infty<k<\infty \end{array}$$

Лемма 4. В $\mathcal{E}$-представлении подпространствам $\mathcal{D}_-$, $\mathcal{D}_+$ соответствуют подпространства $\tilde{\mathcal{D}}_-$, $\tilde{\mathcal{D}}_+ \subset L_2(-\infty,\infty)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_- &= B_d^{-1}\cdot H_-^2 \\ \tilde{\mathcal{D}}_+ &= S_R^{-1}\cdot B_d\cdot H_+^2. \end{aligned} \qquad /22/$$

Здесь $H_\mp^2$ – классы Харди функций, регулярных соответственно, в нижней $\operatorname{Im} k<0$ и верхней $\operatorname{Im} k>0$ полуплоскостях /см. [11] /, S_R – коэффициент отражения, введенный формулой /3/ и B_d – мероморфная функция

$$B_d(\kappa) = \prod_{\ell=0}^{N} \frac{\kappa - i\mu_e}{\kappa + i\mu_e}\, d^{i\kappa}, \qquad /23/$$

являющаяся внутренней в верхней полуплоскости.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ – произвольный элемент $\mathfrak{D}_-$,

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

По формуле /19/ вычислим соответствующий спектральный представитель сначала для гладких финитных данных $\mathcal{U}$:

$$\tilde{u}(\kappa) = 1/2 \int_F (i\kappa u + u_1)\bar{\varphi}\, d\mu =$$

$$= 1/2 \int_{F\cap\{y>d\}} (i\kappa u - \tfrac{1}{2} u + y u_y)\bar{\varphi}\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{F\cap\{y>d\}} [(i\kappa + 1/2)\bar{\varphi} - y\bar{\varphi}_y]\, u\, d\mu.$$

Последнее выражение с помощью представления /3/ и формулы /4/ преобразуется к виду

$$1/2 \int_{F\cap\{y>d\}} 2i\kappa y^{1/2-i\kappa} u\, d\mu + \frac{1}{2}\overline{S_R(\kappa)} \int_{F\cap\{y>d\}} [(i\kappa + 1/2) - (1/2 + i\kappa)]\, y^{1/2+i\kappa} u\, d\mu =$$

$$= \int_{F\cap\{y>d\}} i\kappa y^{1/2-i\kappa} u\, d\mu = \int_{F\cap\{y>d\}} y^{1/2-i\kappa} u_1\, d\mu = \int_{y>d} y^{1/2-i\kappa} u_1(y) \frac{dy}{y^2}.$$

Пользуясь тем фактом, что отображение [ж] E°

$$(E^\circ u_1)(\kappa) = \int_{y>d} y^{1/2-i\kappa} \frac{u_1(y)\,dy}{y^2}$$

является изометрией пространства с весом $L_2((-\infty,\infty), 1/y^2)$ на $L_2(-\infty,\infty)$ мы можем распространить формулу

$$\tilde{u}(\kappa) = \lim_{N\to\infty} \int_{F\cap\{d<y<N\}} y^{1/2-i\kappa} u_1\, d\mu \qquad /24/$$

на всё подпространство $\mathfrak{D}_-$. Теперь из теоремы Пэли-Винера следует, что образ $\mathfrak{D}_-$ приходящего подпространства содержится

[ж] Вполне аналогичное преобразованию Фурье.

/строго !/ в $\chi \cdot H^2$, где χ – внутренняя в нижней полуплоскости функция, $\chi(k) = d^{-ik}$. Дело в том, что u_1 не является произвольным элементом из $L_2((d,\infty), 1/y^2)$, а удовлетворяет условиям ортогональности к собственным функциям v_ℓ дополнительной серии:

$$\int u_1 v_\ell \, d\mu = \int_{y>d} u_1(y) \frac{dy}{y^2} \int_{-1/2}^{1/2} v_\ell(x,y) dx = 0, \quad \ell = 0,1,\ldots,N. \quad /25/$$

Нетрудно явно вычислить величину $\bar{v}_\ell = \int_{-1/2}^{1/2} v_\ell(x,y)\, dx$.

Действительно, функция $\bar{v}_\ell(y)$ удовлетворяет уравнению

$$-y^2 \frac{d^2 \bar{v}_\ell}{dy^2} - \frac{1}{4} \bar{v}_\ell = -\mu_\ell^2 \bar{v}_\ell, \qquad y > d$$

и принадлежит пространству $L_2((d,\infty), 1/y^2)$, т.к.

$$\int_d^\infty |v_\ell|^2 \, dy/y^2 \leq \int_d^\infty \int_{-1/2}^{1/2} |v_\ell|^2 \, 1/y^2 \, dx\, dy = \| v_\ell \|^2.$$

Отсюда видно, что $\bar{v}_\ell(y) = \mathrm{Const} \cdot y^{1/2 - \mu_\ell}$, $y > d$. Теперь условие ортогональности /25/ можно переписать в виде

$$0 = \int u_1 v_\ell \, d\mu = \int_{y>d} u_1(y) \; y^{1/2-\mu_\ell} \, dy/y^2 =$$

$$= i \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(k) \cdot \frac{1}{k + i\mu_\ell} \cdot dk \cdot a^{ik-\mu_\ell}, \quad \ell = 0,1,\ldots,N. \quad /26/$$

Пользуясь тем фактом, что функция $\tilde{u}(k)$, построенная по формуле /24/, принадлежит классу χH^2_- $\subset H^2_-$, мы можем придать условию ортогональности вид

$$\tilde{u}(-i\mu_\ell) = 0, \qquad \ell = 0,1,\ldots,N.$$

Таким образом, мы показали, что подпространству $\mathcal{D}_-$ в построенном спектральном представлении отвечает подпространство $\tilde{\mathcal{D}}_- \subset$ $\subset L_2(-\infty,\infty)$, состоящее из функций $\tilde{u}(k)$ принадлежащих χH^2_- и обращающихся в нуль в точках $-i\mu_\ell$, $\ell = 0,1,\ldots,N$. Такое подпространство /см. [II] / представимо в виде $B_0^{-1} \cdot H^2$, где

$$B_0(k) = \prod_{\ell=0}^{N} \frac{k - i\mu_\ell}{k + i\mu_\ell} \, d^{ik}.$$

Доказательство части утверждения леммы, касающейся $\mathcal{D}_+$, проводится аналогичным образом. Следует лишь заметить, что для гладких финитных данных $\tilde{u} \in \mathcal{D}_-$

$$\tilde{u}(\kappa) = \frac{1}{2} \int\limits_{F\cap\{y>d\}} \left[(i\kappa - \tfrac{1}{2})\bar{\varphi} - y\bar{\varphi}_y \right] u \, d\mu =$$

$$= \overline{S_R(\kappa)} \cdot \int\limits_{F\cap\{y>d\}} i\kappa \, y^{1/2+i\kappa} u \, d\mu =$$

$$= S_R^{-1}(\kappa) \cdot \int_a^\infty y^{1/2+i\kappa} \, u_1(y) \, dy/y^2 \equiv S_R^{-1}(\kappa) \cdot \tilde{v}(\kappa).$$

Записывая условия ортогональности u_1 к собственным функциям дополнительной серии в виде

$$\tilde{v}(i\mu_e) = 0,$$

и пользуясь теоремой Пэли-Винера, мы получаем требуем е утверждение ☐

В дальнейшем, наряду с $\mathcal{E}$–представлением мы используем ещё два спектральных представления: приходящее спектральное представление $\mathcal{E}_-$, связанное с $\mathcal{E}$ -представлением по формуле

$$\mathcal{E}_- u = \tilde{u}_- = B_0 \cdot \tilde{u} = B_0 \cdot \mathcal{E} u$$

и уходящее спектральное представление $\mathcal{E}_+$, связанное с $\mathcal{E}$ -представлением по формуле

$$\mathcal{E}_+ = \tilde{u}_+ = S_R B_0^{-1} \tilde{u} = S_R \cdot B_0 \cdot \mathcal{E} u.$$

В этих представлениях подпространствам $\mathcal{D}_-$, $\mathcal{D}_+$ отвечают подпространства $\mathcal{E}_+ \mathcal{D}_\mp$

$$\mathcal{E}_- \mathcal{D}_- = H_-^2, \quad \mathcal{E}_- \mathcal{D}_+ = S_R^{-1} B_0^2 \cdot H_+^2$$

$$\mathcal{E}_+ \mathcal{D}_- = S_R B_0^{-2} H_-^2 \; ; \quad \mathcal{E}_+ \mathcal{D}_+ = H_+^2 .$$

Отметим ещё, что переход от $\mathcal{E}_+$ представления к $\mathcal{E}_-$ представлению совершается путем умножения на функцию $S_R^{-1} B_0^2$

$$\tilde{u} = S_R^{-1} B_0^2 \cdot \tilde{u}_+ . \qquad /27/$$

Формула /27/ доказана нами пока что лишь для данных из $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$. Ниже мы покажем, что она распространяется на произвольные данные из $\mathcal{H}_a$.

Первоначальнс матрица рассеяния группы V_t^a относительно пары подпространств $\mathcal{D}_-, \mathcal{D}_+$ возникла у Лакса и Филлипса именно как коэффициент, на который нужно домножить $\mathcal{E}_-$ представитель данных u для того, чтобы получить соответствующий $\mathcal{E}_+$ – представитель. Нам, удобнее назвать S -матрицей обратную величину

$$S(\kappa) = S_R^{-1}(\kappa)\cdot B_0^2(\kappa), \qquad /28/$$

которая совпадает с характеристической функцией некоторой полугруппы сжатий. Отложив исследование аналитических свойств S-матрицы до следующего параграфа, мы вернемся к обсуждению приходящих и уходящих подпространств. Сейчас мы проверим свойства I-4 для подпространств $\mathcal{D}_-$, $\mathcal{D}_+$ введенных формулами /I2/,/I3/.

Свойство 1 легко получается из того факта, что $\mathcal{D}_\mp$ состоит из данных Коши приходящих /уходящих волн/ вида $e^{\mp t/2}\Phi(ye^{\pm t}) = u_\mp(y,t)$. Действительно, для таких волн при $t \lessgtr 0$, соответственно, имеют место равенства $u_\mp(y,t)=0$, $y<d$, и

$$\frac{\partial u_\mp}{\partial t}(y,t) = u_{1\mp}(y,t) = \mp\frac{1}{2}u_\mp(y,t) \pm y\frac{\partial u}{\partial y}(y,t)$$

и потому $\begin{pmatrix} u_\mp(y,t) \\ u_{1\mp}(y,t)\end{pmatrix} \subset \mathcal{D}_\mp$. $(t<0,\ t>0)$.

Свойство 4 легко проверить непосредственно, пользуясь представлением /I2/ для элементов $\mathcal{D}_-$, $\mathcal{D}_+$. Пусть $\mathcal{U}\in\mathcal{D}_-$, $\mathcal{V}\in\mathcal{D}_+$ - финитные данные. Тогда

$$(\mathcal{U},\mathcal{V})_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\int_{y>d}\left\{u_y\bar{v}_y - \frac{u\bar{v}}{4y^2}\right\}dy + \frac{1}{2}\int_{y>d}\left(-\frac{1}{2}u+yu_y\right)\overline{\left(\frac{1}{2}v-yv_y\right)}\cdot\frac{1}{y^2}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{y>d}\left\{u_y\bar{v}_y - \frac{u\bar{v}}{4y^2} - \frac{u\bar{v}}{4y^2} + \frac{1}{4y}u_y\bar{v} + \frac{1}{4y}u\bar{v}_y - u_y\bar{v}_y\right\}dy =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{y>d}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u\bar{v}}{y}\right)dy = 0.$$

Ввиду плотности в $\mathcal{D}_-$, $\mathcal{D}_+$ финитных данных этот результат верен и для произвольных $\mathcal{U}\in\mathcal{D}_-$, $\mathcal{V}\in\mathcal{D}_+$. Записывая свойство 4 в $\mathcal{E}_-$-представлении, получаем, в силу /27/

$$\mathcal{E}_-\mathcal{D}_+ = S_R^{-1}B_0^2\cdot H_+^2 \perp H_-^2 = \mathcal{E}_-\mathcal{D}_-, \qquad /28/$$

и, кроме того $|S_R^{-1}(\kappa)B_0^2(\kappa)| = 1$ на вещественной оси. Отсюда и из теоремы Берлинга об общем виде инвариантных подпространств оператора сдвига [11] заключаем, что $S_R^{-1}B_0^2$ есть внутренняя функция в верхней полуплоскости. Отметим в связи со сказанным, что связь между ортогональностью $\mathcal{D}_-$ и $\mathcal{D}_+$ и свойством S-матрицы быть внутренней функцией является общим местом в теории Лакса-Филлипса. Существуют также и более глубокие результаты об

аналитических свойствах матриц рассеяния /см.,например, [10] /.

Теперь проверка свойств 2 и 3 уже не представляет труда. Так, для $\mathfrak{D}_-$ дело сводится с помощью теоремы Пэли-Винера к тому элементарному факту, что $L_2(-\infty, a)$ стягивается к нулю при $a \to -\infty$ и превращается в $L_2(-\infty,\infty)$ при $a \to \infty$. Случай $\mathfrak{D}_+$ не представляет дополнительных осложнений, так как оператор умножения на внутреннюю функцию $S_R^{-1} B_0^2$ унитарен в $L_2(-\infty,\infty)$ и коммутирует с V_t^a в $\mathcal{E}_-$ - представлении,а потому

$$\lim_{t\to\pm\infty} \mathcal{E}_- V_t^a \mathcal{E}_-^* \; S_R^{-1} B_0^2 \; H_+^2 = S_R^{-1} B_0^2 \cdot \lim_{t\to\pm\infty} \mathcal{E} V_t \mathcal{E}_- \; 1_+ =$$

$$= \lim_{t\pm\infty} \mathcal{E}_- V_t \mathcal{E}_-^* \cdot H_+^2 = L_2(-\infty,\infty) \ominus \lim_{t\to\pm\infty} \mathcal{E}_- V_t \mathcal{E}^* \cdot H_-^2 .$$

Вместе с результатом леммы 3 это даёт следующее утверждение:

$$\bigcup_{t>0} V_t \mathfrak{D}_- = \bigcup_{t<0} V_t \mathfrak{D}_+ = \mathcal{H}^a .$$

На этом проверка свойств I - 4 подпространств $\mathfrak{D}_-$, $\mathfrak{D}_+$ заканчивается. Попутно нами установлены простейшие аналитические свойства S -матрицы, а вместе с тем и коэффициента отражения S_R .

§ 3. Полугруппа сжатий.

В предыдущем параграфе было введено понятие матрицы рассеяния в терминах спектральных представлений. Здесь мы, используя тот факт, что введенная выше S -матрица является характеристической функцией / [12] / некоторой полугруппы сжатий, свяжем аналитические свойства S -матрицы со спектральными и метрическими свойствами этой полугруппы.

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{H}^a \ominus (\mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{D}_+)$ и $\mathcal{P}_K$ - ортопроектор из $\mathcal{H}^a$ на $\mathcal{K}$. Упомянутая полугруппа Z_t строится следующим образом:

$$Z_t = \mathcal{P}_K V_t \mathcal{P}_K , \quad t>0. \qquad /29/$$

Полугрупповые свойства $\{Z_t\}_{t>0}$ легко проверяются на основании свойств I - 4 подпространств $\mathfrak{D}_-, \mathfrak{D}_+$. Полугруппа $Z(t)$ является полугруппой вполне неунитарных сжатий класса C_0 с единичным рангом неунитарности /см. [12] /. Будучи характеристической функцией этой полугруппы, определенная выше матрица рассеяния содержит полную информацию о спектральных свойствах $Z(t)$. Так,например, через неё легко выражаются собственные числа $z_s(t)$ и собственные функции Ψ_s оператора Z_t в $\mathcal{E}_-$ - представлении

$$z_s(t) = e^{i\kappa_s t}, \quad t > 0$$

$$\psi_s(\kappa) = \frac{S(\kappa)}{\kappa - \kappa_s}.$$

Здесь через κ_s обозначены корни S -матрицы в верхней полуплоскости. В нашем случае $S(\kappa)$ является мероморфной функцией переменной κ. Применение к $S(\kappa)$ условий полноты системы корневых векторов вполне неунитарного сжатия из [I5] дает следующий результат. Для того, чтобы система корневых векторов полугруппы Z_t была полна в K, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено:

$$d = \overline{\lim_{\varkappa \to \infty}} \frac{\ln |S(i\varkappa)|}{\varkappa} = 0.$$

Вообще же, при $d \neq 0$, линейная оболочка L системы корневых векторов полугруппы Z_t вычисляется по формуле /см. [I5] /

$$L = K \ominus (V_{-\alpha} D_- \ominus D_-).$$

Непосредственный подсчёт для случая модулярной группы даёт $\alpha = \ln d$ /см.§ 4 настоящей работы/.

Перейдем теперь к исследованию связи между "метрическими" свойствами полугруппы $Z(t)$ и аналитическим продолжением S - матрицы в нижнюю полуплоскость. Известный результат Лакса-Филлипса, касающийся этой связи, формулируется следующим образом /см. [9] гл. 3/.

Если S -матрица аналитически продолжима как регулярная ограниченная функция в полосу $0 > \operatorname{Im} \kappa \geqslant -\gamma$, $\gamma > 0$, то выполнена оценка

$$\|Z(t)\| \leqslant \exp(-\gamma t), \quad t > 0. \tag{30}$$

Обратно, если выполнена оценка /30 /, то S -матрица аналитически продолжима как ограниченная функция в любую полосу $0 > \operatorname{Im} \kappa \geqslant -\gamma'$, где $\gamma' < \gamma$.

Доказательство этого факта основано на том, что спектр оператора B совпадает со спектром внутренней функции S. К сожалению, цитированный результат Лакса-Филлипса не применим прямо к нашей ситуации. Дело в том, что нельзя ожидать аналитической продолжимости полученной S -матрицы /28 / в какую-либо полосу как ограниченной функции. Даже в простейшем случае модулярной группы $S(\kappa)$, в предположении отсутствия полюсов в полосе

12 875

$0 > \mathfrak{Im}\,\kappa > -\gamma$, оказывается растущей на бесконечности. Это заставляет нас модифицировать утверждение Лакса-Филлипса следующим образом:

Теорема I. Если функция $S(\kappa)\prod_{s=1}^{M}(\kappa-\mu_s)^{-1}$, $M<\infty$, $\mathfrak{Im}\,\mu_s>\gamma$, допускает аналитическое продолжение в некоторую полосу $0\geq\mathfrak{Im}\,\kappa\geq -\gamma$, $\gamma>0$, как ограниченная регулярная функция переменной κ, то справедлива оценка

$$\|\underline{\underline{Z}}_t\prod_{s=1}^{M}(B-\bar{\mu}_s)^{-1}\| \leq C\cdot e^{-\gamma t},\quad t>0. \tag{31}$$

Обратно, пусть выполнена оценка (31) для какого-либо набора $\{\mu_s\}_{s=1}^{M}$, $\mathfrak{Im}\,\mu_s>\gamma$ $s=1,2,\ldots,M<\infty$. Тогда функция $S(\kappa)\prod_{s=1}^{M}(\kappa-\bar{\mu}_s)^{-1}$ аналитически продолжима как ограниченная и регулярная в полосу $0\geq\mathfrak{Im}\,\kappa\geq-\gamma'$ при любом $\gamma'<\gamma$.

Доказательство теоремы основано на следующем вспомогательном утверждении /Лакс, Филлипс [9]/

Лемма 5. Пусть $\mathfrak{Im}\,\mu>0$. Тогда имеют место оценки

$$|\Theta(\mu)|^{-1} \leq 8\left(1+2|\mathfrak{Im}\,\mu|\cdot\|(B-\mu)^{-1}\|\right) \tag{32}$$

$$|\mathfrak{Im}\,\mu|\,\|(B-\mu)^{-1}\| \leq 1+|\Theta(\mu)|^{-1}. \tag{33}$$

Доказательство*/ оценки (33) основано на следующей легко проверяемой формуле:

$$(B-\mu)^{-1}u = \frac{1}{\kappa-\mu}\left(u - \Theta\,\frac{u(\mu)}{\Theta(\mu)}\right),\quad u\in\mathcal{K},\ \mathfrak{Im}\,\mu>0,\ \mathfrak{Im}\,\kappa>0.$$

Пользуясь разложением

$$\frac{u(\kappa)}{\kappa-\mu} = \frac{u(\kappa)-u(\mu)}{\kappa-\mu} + \frac{u(\mu)}{\kappa-\mu},$$

где первый член в правой части принадлежит H_+^2, а второй H_-^2, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{u(\kappa)}{\kappa-\mu}\right|^2 d\kappa = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{u(\kappa)-u(\mu)}{\kappa-\mu}\right|^2 d\kappa + |u(\mu)|^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\kappa-\mu)^2}\,d\kappa .$$

---

*/ Мы приводим здесь доказательство, так как формулировка леммы слегка отличается от того, что имеется в книге [9] .

Отсюда находим

$$\|(B-\mu)^{-1}u\| \leq \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{u(k)}{k-\mu}\right|^2 dk\right\}^{1/2} + |\Theta(\mu)|^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\left|\frac{u(k)}{k-\mu}\right|^2 dk\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mathrm{Im}\,\mu}\,\|u\|\,\left\{1+|\Theta(\mu)|^{-1}\right\}.$$

Для доказательства оценки (32) воспользуемся разложением /при $\mathrm{Im}\,\mu>0$, $\Theta(\mu)\neq 0$ /:

$$\frac{\Theta(k)}{k-\mu} = \frac{\Theta(k)-\Theta(\mu)}{k-\mu} + \frac{\Theta(\mu)}{k-\mu} \equiv a+b, \qquad (34)$$

где первый член в правой части принадлежит H^2_+, а второй H^2_-. Очевидно

$$\|b\|^2 = \frac{1}{2\,\mathrm{Im}\,\mu}\,|\Theta(\mu)|^2; \quad \|a\|^2 = \frac{1}{2\,\mathrm{Im}\,\mu}\,(1-|\Theta(\mu)|^2).$$

Элемент $\Theta(k)/k-\mu$ является собственным для оператора $(1-P_{\mathcal{D}_+})V_t$, $t>0$ / в $\mathcal{E}_-$ - представлении/:

$$(1-P_{\mathcal{D}_+})e^{ikt}\frac{\Theta(k)}{k-\mu} = (1-P_{\mathcal{D}_+})\frac{e^{ikt}-e^{i\mu t}}{k-\mu}\Theta(k) + (1-P_{\mathcal{D}_+})\frac{e^{i\mu t}\Theta(k)}{k-\mu} = e^{i\mu t}\,\frac{\Theta(k)}{k-\mu}.$$

Отсюда находим, пользуясь разложением /34 /

$$-(Z_t - e^{i\mu t})a = \Theta(\mu)\left\{(1-P_{\mathcal{D}_+})\frac{e^{ikt}}{k-\mu} - \frac{e^{i\mu t}}{k-\mu}\right\},$$

$$\|(Z_t - e^{i\mu t})a\| \leq 2\,\|b\| \leq \frac{2|\Theta(\mu)|}{\sqrt{1-|\Theta(\mu)|^2}}\,\|a\|.$$

Ввиду того, что $\|Z_t\|<1$, последнюю оценку можно уточнить */

$$\|(Z_t - e^{i\mu t})a\| \leq 2\min\left(1, \frac{|\Theta(\mu)|}{\sqrt{1-|\Theta(\mu)|^2}}\right)\cdot\|a\| \leq 4\,|\Theta(\mu)|\,\|a\|.$$

---

*/ Мы пользуемся неравенством $\min(1, y/1-y) < 2y$, $0<y<1$.

Отсюда легко выводится требуемое неравенство.

$$\left\| \int_0^\infty (Z_t - e^{i\mu t}) a e^{-i\lambda t} dt \right\| = \|(B-\mu)(B-\lambda) a\| \frac{1}{|\mu-\lambda|} \leq$$

$$\leq \frac{4}{|\mathrm{Im}\,\lambda|} |\Theta(\mu)| \cdot \|a\| , \qquad \mathrm{Im}\,\lambda < 0.$$

Выбрав $\lambda = \bar{\mu}$ и обозначив $(B-\mu)(B-\bar{\mu})^{-1} a = c$, получаем окончательно

$$\|c\| \leq 8 |\Theta(\mu)| \cdot \left(1 + 2\,\mathrm{Im}\,\mu \|(B-\mu)^{-1}\|\right) \|c\| \qquad \boxtimes$$

Доказательство теоремы I удобно провести в $\mathcal{E}_-$ -представлении, где $\mathcal{K}$ совпадает с подпространством элементов v, $v \in H^2_+$ представимых в виде Sg, $g \in H^2_-$. Тогда при $\mathrm{Im}\,\mu_s > 0$ имеем

$$\left| \left(Z_t \prod_{s=1}^{M} (B-\mu_s)^{-1} u, v \right) \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa t} \prod_{s=1}^{M} (\kappa - \bar{\mu}_s)^{-1} u(\kappa) \bar{S}(\kappa) \bar{g}(\kappa) d\kappa \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\mathrm{Im}\,\kappa = -\gamma} \left| S(\kappa) \prod_{s=1}^{M} (\kappa - \mu_s)^{-1} \right| \|u\| \cdot \|g\| e^{-\gamma t} =$$

$$= e^{-\gamma t} \sup_{\mathrm{Im}\,\kappa = -\gamma} \left| S(\kappa) \prod_{s=1}^{M} (\kappa - \mu_s)^{-1} \right| \|u\| \cdot \|v\|.$$

Тем самым доказано первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения мы воспользуемся леммой 5 и следующим тождеством, вытекающим из полугрупповых свойств Z_t и верном при $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$:

$$i\left((B-\lambda)^{-1} \prod_{s=1}^{M} (B-\mu_s)^{-1} u, v\right) = \int_0^\infty \left(Z \prod_{s=1}^{M} (B-\bar{\mu}_s)^{-1} u, v \right) e^{-i\lambda t} dt,$$

Условие (31) показывает, что правая часть, а вместе с ней и левая, аналитически продолжается в полосу $\mathrm{Im}\,\lambda < \gamma$. При этом верна оценка

$$\left\| (B-\lambda)^{-1} \prod_{s=1}^{M} (B-\mu_s)^{-1} \right\| \leq \mathrm{Const}\,(\gamma - \mathrm{Im}\,\lambda)^{-1},$$

показывающая, что резольвента генератора $\mathcal{D}$ аналитически продолжима в полосу $\mathrm{Im}\,\lambda < \gamma$. Отсюда следует, что $S^{-1}(\lambda)$ также продолжима в полосу $\mathrm{Im}\,\lambda < \gamma$ как регулярная функция. Остаётся получить требуемую оценку, показывающую, что $S^{-1}(\lambda)$ растёт внутри этой полосы не быстрее $|\lambda|^M$ при $\mathrm{Re}\,\lambda \to \pm\infty$. Воспользуемся тождеством Гильберта в форме

$$\prod_{s=0}^{M}(B-\lambda_s)^{-1} = \sum_{s=0}^{M} \alpha_s (B-\lambda_s)^{-1}, \qquad \lambda_s = \mu_s, \ s \geq 1, \quad \lambda_0 = \lambda,$$

$$\alpha_s = \left[W(\lambda_0,\ldots,\lambda_M)\right]^{-1}\cdot(-1)^{s+1} W_s(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\hat{\lambda}_s,\ldots,\lambda_M).$$

Здесь $W(\lambda_0,\ldots,\lambda_M)$ определитель Вронского от переменных $\lambda_0,\ldots,\lambda_M$, а W_s – определитель Вронского порядка $s-1$, зависящий лишь от переменных $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{s-1}, \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_M$. Отметим, что при $\lambda_0 \to \infty$

$$|W(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_M)| \sim |\lambda_0|^M \cdot |W(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)|,$$

$$|W_s(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\hat{\lambda}_s,\ldots\lambda_M)| \leq \mathrm{Const}\cdot|\lambda_0|^{M-1}$$

Поэтому верна оценка

$$\|(B-\lambda)^{-1}\| \leq \mathrm{Const}\cdot(\gamma-\mathrm{Im}\,\lambda)^{-1}\cdot|\lambda|^M\Big(|W(\mu_1,\ldots,\mu_M)| +$$

$$+\frac{C}{|\lambda|}\Big) \leq \mathrm{Const}\,(\gamma-\mathrm{Im}\,\lambda)^{-1}\,(1+|\lambda|^M).$$

Используя лемму 5, находим отсюда

$$\frac{1}{|S(\lambda)|} \leq 8\left[1+2\,\mathrm{Im}\,\lambda\cdot\frac{\mathrm{Const}}{\gamma-\mathrm{Im}\,\lambda}(1+|\lambda|^M)\right].$$

Опираясь на тот факт, что S –внутренняя функция и, следовательно, $S^{-1}(\lambda) = \overline{S(\bar{\lambda})}$, получаем при $-\gamma < \mathrm{Im}\,\lambda < 0$

$$\left|S(\lambda)\prod_{s=1}^{M}(\lambda-\bar{\mu}_s)^{-1}\right| \leq$$

$$\leq 8\left[1+2\,\mathrm{Im}\,\lambda\,\frac{\mathrm{Const}}{\gamma+\mathrm{Im}\,\lambda}\right] \quad \square$$

С л е д с т в и е. Так как при $\mathcal{Im}\,\mu_s > 0$ выполнено

$$\prod_{s=1}^{M}\left(B-\bar{\mu}_s\right)^{-1} = P_K \prod_{s=1}^{M}(\mathcal{L}-\bar{\mu}_s)^{-1} P_K, \qquad (35)$$

то из оценки

$$\| Z_t \prod_{s=1}^{M}(B-\bar{\mu}_s)^{-1}\mathcal{U}\| \leq e^{-\gamma t}\,\|\mathcal{U}\|\cdot \mathrm{Const},\ t>0, \qquad (36)$$

следует оценка

$$\| Z_t\, \mathcal{V}\| \leq \mathrm{Const}\cdot \|\prod_{s=1}^{M}(\mathcal{L}-\bar{\mu}_s)\mathcal{V}\|\, e^{-\gamma t} \qquad (37)$$

$$\mathcal{V} = \prod_{s=1}^{M}(\mathcal{L}-\bar{\mu}_s)^{-1}\mathcal{U},\quad \mathcal{U}\in\mathcal{K},\ t>0.$$

Обратно, если выполнена оценка (37) для всех $\mathcal{V}\in\mathcal{H}^a$, ортогональных к $\mathcal{D}_-$ и таких, что правая часть в формуле (37) конечна, то верна также и оценка (36). Действительно, в $\mathcal{E}_-$ -представлении множество тех $\mathcal{V}\subset\mathcal{H}$, для которых правая часть в формуле (37) конечна и $\mathcal{V}\perp\mathcal{D}_-$, совпадает с плотным в H^2_+ линеалом функций $\mathcal{V}$ вида

$$\prod_{s=1}^{M}(\kappa-\bar{\mu}_s)^{-1}\cdot u(\kappa), \qquad u\in H^2_+.$$

На таких элементах оценка (37) запишется в виде

$$\| Z_t \prod_{s=1}^{M}(\mathcal{L}-\bar{\mu}_s)^{-1}(1-P_{\mathcal{D}_-})\mathcal{U}\| \leq e^{-\gamma t}\,\mathrm{Const}\,\|\mathcal{U}\|. \quad t>0$$

В силу (35) на векторах $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}\in\mathcal{K}$ эта оценка сводится к (36).

§ 4. Пример.

Пусть теперь Γ – модулярная группа и F – отвечающая ей фундаментальная область на плоскости лобачевского вида $F:\{y > \sqrt{1-x^2},\ |x|<\frac{1}{2}\}$. Оператор Лапласа L, порожденный в $H = L_2(F, 1/y^2)$ дифференциальным выражением

$$-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{4}.$$

и периодическими /относительно Γ / граничными условиями, является самосопряженным. Его абсолютно-непрерывный спектр однократен и заполняет промежуток $[0,\infty]$. Он имеет также счётное множество собственных чисел на промежутке $(0,\infty)$ /основная серия/ и лишь одно отрицательное собственное число $\lambda = -1/4$. Соответствующая

/нормированная/ собственная функция есть тождественная постоянная $v_0(z) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$. Собственные функции непрерывного спектра получаются путем аналитического продолжения суммы ряда

$$\varphi(z,k) = y^{\frac{1}{2}+ik} + \sum_{(c,d)=1} \frac{y^{\frac{1}{2}+ik}}{|cz+d|^{1+2ik}}$$

из области $\mathrm{Im}\, k < -1/2$ на вещественную ось k. Выпишем выражение для коэффициента отражения в рассматриваемом случае /см. [16] /

$$S_R(k) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(ik)}{\Gamma(\frac{1}{2}+ik)} \cdot \frac{\zeta(2ik)}{\zeta(2ik+1)}.$$

Здесь $\Gamma(s)$ -гамма-функция и $\zeta(s)$ -дзета-функция Римана.

Ввиду наличия у оператора Лапласа лишь одного отрицательного собственного числа описание уходящих и приходящих подпространств становится теперь более явным. Пусть $d \geq 1$. Тогда $\mathcal{D}_{\mp}$ состоит из двухкомпонентных вектор-функций вида $\begin{pmatrix} \pm u \\ u_1 \end{pmatrix}$, где u_1 -произвольный элемент из H, эквивалентный функции, зависящий лишь от одной переменной y, обращающийся в нуль при $y < d$, и подчиненной единственному условию ортогональности

$$(u_1, v_0) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_{y>0} \frac{u_1(y)}{y^2}\, dy = 0.$$

Первая компонента u вычисляется, как обычно, по правилу /см. § 2/.

$$u = \sqrt{y} \int_a^y u_1(s)\, s^{-3/2}\, ds.$$

Обозначим через N_d гильбертово пространство двухкомпонентных векторов, получаемое замыканием в энергетической метрике

$$E(u,v) = \frac{1}{2} \int_{y>d} \left(u_y^2 - \frac{u^2}{4y^2} + \frac{u_1^2}{y^2} \right) dy \qquad (38)$$

данных $\begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix}$, зависящих лишь от переменной y, финитных на бесконечности и покомпонентно ортогональных к единице:

$$\int^{\infty} u(y)\, dy/y^2 = \int^{\infty} u_1(y)\, dy/y^2 = 0. \qquad (39)$$

Условие (39) обеспечивает положительность энергетической формы.

Пространство N_d полностью аналогично пространству $\mathcal{H}$, если

вместо оператора L взять оператор L_d, порождаемый в $L_2([d,\infty),\frac{1}{y^2})$ дифференциальным выражением

$$-y^2\frac{d^2}{dy^2}-\frac{1}{4}.$$

и граничным условием Неймана в точке $y=d$. Оператор L_d имеет единственное отрицательное собственное число $\lambda=-1/4$. Отвечающая ему собственная функция равна тождественной постоянной, Отметим еще, что оператор L_d может играть роль невозмущенного оператора при постановке задачи рассеяния, несколько отличной от принятой выше /см. [10] /.

Подпространства $\mathcal{D}_-$ и $\mathcal{D}_+$, очевидно, изометрически вкладываются в $\mathcal{N}_d$.

Лемма 6. $\mathrm{Codim}_{\mathcal{N}_d}(\mathcal{D}_-\oplus\mathcal{D}_+)=1$. Подпространство $\mathcal{N}_d\ominus(\mathcal{D}_-\oplus\mathcal{D}_+)$ порождается вектором $\mathcal{U}_d=\binom{v_d}{0}$, где $v_d(y)=\sqrt{y}-2\sqrt{d}$, $y>d$. Ортогональный проектор $\mathcal{P}_d$ из $\mathcal{H}$ на $\mathcal{D}_-\ominus\mathcal{D}_+$ действует по правилу

$$\mathcal{P}_d\begin{pmatrix}u\\u_1\end{pmatrix}=\chi_d\cdot\begin{pmatrix}\bar{u}-\frac{3}{\pi^2}\int\limits_{y>d}u\,d\mu+\left[\bar{u}(a)-\frac{3}{\pi^2}\int\limits_{y>a}4\,d\mu\right]\frac{v_d}{\sqrt{d}}\\ \bar{u}_1-\frac{3}{\pi^2}\int\limits_{y>d}u_1\,d\mu\end{pmatrix},$$

где $\bar{u}(y)=\int\limits_{|x|<\frac{1}{2}}u(x,y)\,dx$ и χ_d – характеристическая функция промежутка (d,∞).

Доказательство. Подпространство $\mathcal{D}_-\oplus\mathcal{D}_+$ содержит векторы вида $\binom{0}{u_1}$, где u_1 – произвольный элемент из $L_2((d,\infty),1/y^2)$, ортогональный к постоянной. Отсюда видно, что элемент $\mathcal{U}\in\mathcal{N}_d$, лежащий в $\mathcal{N}_d\ominus(\mathcal{D}_-\oplus\mathcal{D}_+)$ имеет вид

$$\mathcal{U}=\binom{v}{0},$$

где v удовлетворяет условию

$$\int\limits_a^\infty\left[v_y\left(\sqrt{y}\int\limits_a^y u_1(s)\,s^{-3/2}ds\right)_y-v\sqrt{y}\int\limits_a^y\frac{u_1(s)\,s^{-3/2}ds}{4y^2}\right]dy=0 \quad (40)$$

при произвольном $u_1\in(L_2(d,\infty)\,1/y^2)$, ортогональном к единице. Другими словами, $v(y)$ есть обобщенное решение /в смысле интегрального тождества /40/ / уравнения

$$v_{yy}-\frac{v}{4y^2}=-\frac{\mathrm{Const}}{4y^2}. \qquad (41)$$

Присоединяя к уравнению /41/ условие принадлежности v области определения квадратичной формы оператора L_d и требуя ортогональности к единице, находим

$$v = \mathrm{Const} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{y} - \sqrt{d}\right).$$

Отсюда следуют первое и второе утверждения леммы.

Для доказательства последнего утверждения заметим, что выражение для ортогонального проектора из $\mathcal{H}$ на N_d дается формулой

$$\mathcal{P}_N\begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix} = X_d \begin{pmatrix} \bar{u} - \frac{3}{\pi^2}\int_{y>a} u\,d\mu \\ \bar{u}_1 - \frac{3}{\pi^2}\int_{y>a} u_1\,d\mu \end{pmatrix}$$

С другой стороны, ортопроектор из N_d на $\mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+$ записывается в виде

$$\mathcal{P}\begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix} + \mathcal{U}_d \cdot {}^{1}\!/_{\sqrt{d}}\; u(a). \tag{42}$$

Перемножив операторы $\mathcal{P}_N$ и $\mathcal{P}$, получим искомый результат ☐

Выражение для матрицы рассеяния, отвечающей выбранной паре подпространств $\mathcal{D}_{\mp}$, получается, согласно результатам предыдущего параграфа, в виде:

$$S_d(K) = S_R(-K)\cdot\left(\frac{K - i/2}{K + i/2}\right)^2 d^{2iK} \equiv$$

$$\equiv \frac{\xi(-2iK)}{\xi(2iK)}\cdot d^{2iK}\left(\frac{K - i/2}{K + i/2}\right). \tag{43}$$

Здесь через $\xi(S)$ обозначена введенная Риманом целая функция, связанная с дзета-функцией по формуле /см. [17]/

$$\xi(S) = S(S-1)\pi^{-1/2 S}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}S\right)\zeta(S).$$

Отметим, что функция ξ экспоненциального типа первого порядка и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\xi(S) = \xi(1-S). \tag{44}$$

Все ее нули расположены в полосе $0 < \mathrm{Re}\,S < 1$, и совпадают с нулями дзета-функции, лежащими в этой полосе. Множество корней функции имеет две оси симметрии: $\mathrm{Re}\,S = 1/2$ и $\mathrm{Im}\,S = 0$.

Из утверждений предыдущего параграфа видно, что матрица рассеяния S является внутренней функцией в верхней полуплоскости / при любом $d \geq 1$ / и все ее корни, за исключением одного,

$\kappa = i/2$, лежат в полосе $0 < \mathrm{Im}\,\kappa < 1/2$ и расположены симметрично относительно прямых $\mathrm{Im}\,\kappa = 1/4$, $\mathrm{Re}\,\kappa = 0$. Корни κ_n матрицы рассеяния однозначно связаны с корнями s_n дзета-функции Римана, лежащими в "критической" полосе $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$: $-2i\kappa_n = s_n$

Л е м м а 7. При различных значениях параметра d , $d \geq 1$, матрицы рассеяния S_d связаны равенством

$$S_d(\kappa) = S_1(\kappa) \cdot d^{2i\kappa},$$

причём $S_1(\kappa)$ является произведением Бляшке.

Д о к а з а т е л ь с т в о опирается на следующее утверждение /см. [15] /

Если внутренняя функция $S_1(\kappa)$, являющаяся отношением двух целых, удовлетворяет при некотором ℓ , $\ell > 0$, условию

$$\overline{\lim_{\varkappa \to +\infty}} \; \varkappa^{-\ell} \, | S_1(i\varkappa) |^{-1} < \infty, \qquad (45)$$

то она есть произведение Бляшке.

Условие /45/ проверяется с помощью функционального уравнения /44 / и формулы Стирлинга

$$\overline{\lim_{\varkappa \to \infty}} \; \varkappa^{-1/2} \, | S_1^{-1}(i\varkappa) | = \pi^{1/2} \lim_{\varkappa \to \infty} \frac{\zeta(2\varkappa+1)}{\zeta(2\varkappa)} \cdot \lim_{\varkappa \to \infty} \frac{\Gamma(\varkappa + 1/2)}{\Gamma(\varkappa) \cdot \varkappa^{1/2}} = \pi^{1/2} \; \boxtimes$$

Конечно, наши утверждения об аналитических свойствах матрицы рассеяния S были бы значительно полнее, если бы мы обладали более глубокими сведениями о дзета-функции, входящей в выражение для S . Имеет место следующее условное утверждение.

Л е м м а 8. При условии справедливости гипотезы Римана */ о корнях дзета-функции, матрица рассеяния $S_1(\kappa)$ аналитически продолжима в полосу $-1/4 < \mathrm{Im}\,\kappa \leq 0$ как регулярная функция, ограниченная в каждой компактной подобласти этой полосы. Кроме того S_1 удовлетворяет серии оценок

$$C^{-1}(\varkappa, \varepsilon)(|\lambda|+1)^{2\varkappa-\varepsilon} \leq | S_1(\lambda - i\varkappa) | \leq C(\varkappa, \varepsilon)(|\lambda|+1)^{2\varkappa+\varepsilon} . \qquad (46)$$

Здесь $C(\varkappa, \varepsilon)$ – некоторая функция переменных $\varkappa, \varepsilon$, конечная при $\varkappa \in [0, 1/4)$, $\varepsilon \subset (0, 1]$, $\varepsilon \ll 1$.

---

*/ Мы принимаем гипотезу Римана в той формулировке, в какой она приведена в книге /[17] /: функция $\ln(\zeta(s)/(s-1))$ регулярна при $\mathrm{Re}\, s > 1/2$.

Доказательство основано на следующем условном результате из книги / [17] гл.5/: если верна гипотеза Римана, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\tilde{C}^{-1}(\varepsilon,\sigma)\,(|t|+1)^{-\varepsilon} \le |\zeta(\sigma+it)| \le \tilde{C}(\varepsilon,\sigma)(|t|+1)^{\varepsilon};$$

здесь $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1)$, $-\infty < t < \infty$, $0 < C(\varepsilon,\sigma) < \infty$.
Используя функциональное уравнение для дзета-функции, получим аналогичную оценку в полосе $0 < \sigma < \frac{1}{2}$:

$$\tilde{C}^{-1}(\varepsilon,1-\sigma)\,(|t|+1)^{\frac{1}{2}-\sigma-\varepsilon} \le |\zeta(\sigma+it)| \le \tilde{C}(\varepsilon,1-\sigma)(|t|+1)^{\frac{1}{2}-\sigma+\varepsilon}.$$

Теперь, принимая во внимание неравенства

$$\zeta(2\sigma)\zeta^{-1}(\sigma) < |\zeta(s)| < \zeta(\sigma), \quad \sigma > 1$$

и асимптотику при $s = \sigma + it$, $t \to \pm\infty$

$$\left| \frac{s(s-1)\,\pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)}{(s+1)\,s\,\pi^{-(s+1)/2}\,\Gamma(1/2+s/2)} \right| \sim |t|^{-1/2},$$

Найдем асимптотическую оценку при $s=\sigma+it$, $t \to \pm\infty$, $0 \le \sigma < 1/2$:

$$C^{-1}(\varepsilon,\sigma)\left(1+|t|^{-\sigma-\varepsilon}\right) \le \left|\frac{\xi(s)}{\xi(1+s)}\right| \le C(\varepsilon,\sigma)\left(1+|t|\right)^{-\sigma+\varepsilon} \qquad (47)$$

с некоторой новой функцией $C(\varepsilon,\sigma)$. Неравенство (47) с помощью замены $s = -2ik = 2\varkappa - 2i\lambda$ приводит к оценке для матрицы рассеяния S_1 в полосе $0 \le \operatorname{Im} k < 1/4$:

$$C^{-1}(\varepsilon,\varkappa)\left(1+|\lambda|\right)^{-2\varkappa-\varepsilon} \le |S_1(k)| \le C^{1}(\varepsilon,\varkappa)\left(1+|\lambda|\right)^{-2\varkappa+\varepsilon}.$$

Пользуясь тем фактом, что S_1 – внутренняя функция, не имеющая корней в полосе $0 < \operatorname{Im} k < 1/4$, и являющаяся отношением двух целых функций, мы видим, что она продолжима в полосу $-1/4 < \operatorname{Im} k < 0$ по формуле $S_1(\bar{k}) = S_1^{-1}(k)$. Она очевидно не имеет особенностей на вещественной оси и для неё выполнена оценка /46/ ☐

Следствие. Для того, чтобы была справедлива гипотеза Римана о корнях дзета-функции, необходимо и достаточно, чтобы "энергия" полугруппы Z_t убывала экспоненциально с показателем $1/4$, т.е.

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ t^{-1}\ln\|Z_t(B+i)^{-1}\| = -1/4,\ u\in K. \quad (48)$$

Необходимость. Если гипотеза Римана верна, то функция $S_d(K)\cdot(K+i)^{-1}$ аналитически продолжима, в силу леммы 8, как ограниченная регулярная функция в каждую полосу $-\gamma < \mathrm{Im}\,K < 0$, $\gamma < 1/4$. Отсюда, пользуясь теоремой I, заключаем, что верна оценка

$$\|Z_t(B+i)^{-1}\| \le c(\gamma)e^{-\gamma t},\ \gamma<\frac{1}{4},\ t\to\infty \quad (49)$$

Это означает, что

$$\overline{\lim}\ 1/t\ \ln\|Z_t(B+i)^{-1}\| \le -\gamma.$$

Пользуясь произволом в выборе γ, получаем требуемый результат.

Достаточность. Пусть выполнена оценка /48 /. Тогда при любом $\gamma<\frac{1}{4}$, с некоторой постоянной $C(\gamma)$, выполнена также и оценка / 49 /. В силу теоремы I, это влечёт аналитическую продолжимость $S(K)/K+i$ как ограниченной и регулярной функции в полосу $-\gamma < \mathrm{Im}\,K < 0$. Тогда у функции $S(K)$ отсутствуют корни в полосе $0<\mathrm{Re}\,s<2\gamma$, а у $\zeta(s)$ - в полосе $0<\mathrm{Re}\,s<2\gamma$. Пользуясь произволом в выборе γ, и симметрией расположения корней $\zeta(s)$, видим, что все корни дзета-функции лежат на прямой $\mathrm{Re}\,s=1/2$ ☐

Если же удалось доказать, что энергия полугруппы Z_t убывает экспоненциально с показателем $\gamma<\frac{1}{4}$,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ 1/t\ \ln\|Z_t(B+i)^{-1}\| = -\gamma,\quad u\in K,$$

то отсюда мы извлекли бы справедливость гипотезы Римана в ослабленном варианте: у дзета-функции нет корней вне полосы $2\gamma \le \mathrm{Re}\,s \le 1-2\gamma$. Доказательство этого условного результата также основано на теореме I.

Условие /48/ носит теоретико-операторный характер. Можно видоизменить его таким образом, чтобы полностью исключить полугруппу Z_t и связанные с ней проекторы на подпространство $\mathcal{K}$, неявно присутствующие в формуле /48 /.

Обозначим через $\mathcal{D}_-^T$ подпространство данных из $\mathcal{D}_-$ с носителем на промежутке (d, d^T), $T>0$

$$\mathcal{D}_-^T \subset \mathcal{D}_- \ominus V_{-T}\mathcal{D}_-.$$

Будем говорить, что данные $\in \mathcal{D}_-^T$ гладкие /относительно $\mathcal{L}$ /, если $\mathcal{U} \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$.

Теорема 2. Для того, чтобы функция $S(\kappa)(\kappa+i)^{-1}$ допускала аналитическое продолжение в полосу $-\gamma < \operatorname{Im}\kappa < 0$, $\gamma < 1/4$, как регулярная функция, равномерно ограниченная в каждой полосе $-\gamma' < \operatorname{Im}\kappa < 0$, $\gamma' < \gamma$, необходимо и достаточно, чтобы для всех гладких финитных данных $\in \mathcal{D}_-^T$ была выполнена оценка

$$\| (I - P_{\mathcal{D}_-} - P_{\mathcal{D}_+}) V_{t+T}\, \mathcal{U} \| \leq c(\gamma') \| (\mathcal{L}-i)\mathcal{U} \| e^{-\gamma' t} \qquad (50)$$

$\gamma' < \gamma$, с одной и той же постоянной $C(\gamma')$.

Необходимость. Воспользуемся приходящим спектральным представлением группы V_t. Пусть $\mathcal{U} \in \mathcal{D}_-^T$, $v \in K$. Тогда функции $e^{i\kappa T}\tilde{u}(\kappa)$, $S^{-1}(\kappa)\tilde{v}(\kappa) \equiv g(\kappa)$ $(-\infty < \kappa < \infty)$ аналитически продолжимы в верхнюю полуплоскость и принадлежат классу Харди H_+^2. Поэтому

$$((I - P_{\mathcal{D}_-} - P_{\mathcal{D}_+}) V_{t+T}\, \mathcal{U}, \mathcal{V}) = (V_{t+T}\, \mathcal{U}, \mathcal{V}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa t}\, e^{i\kappa T} \tilde{u}(\kappa) \cdot S^{-1}(\kappa)\, \overline{S^{-1}(\kappa)\tilde{v}(\kappa)}\, d\kappa =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa t}\, e^{i\kappa T} (\kappa - i)\tilde{u}(\kappa) \cdot \frac{S^{-1}(\kappa)}{\kappa - i}\, \overline{\tilde{g}(\kappa)}\, d\kappa.$$

По предположению, функция $\frac{S^{-1}(\kappa)}{\kappa - i} = \frac{\overline{S(\bar{\kappa})}}{\bar{\kappa} + i}$, $\operatorname{Im}\kappa = 0$, аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость, в полосу $0 < \operatorname{Im}\kappa < \gamma'$, $\gamma' < \gamma$ как равномерно-ограниченная регулярная функция. Тогда

$$|(V_{t+T}\, \mathcal{U}, \mathcal{V})| \leq \sup_{-\gamma' < \operatorname{Im}\kappa < 0} \left| \frac{S(\kappa)}{\kappa + i} \right| \cdot \| g \| \, \| (\mathcal{L}-i)\mathcal{U} \| e^{-\gamma' t} =$$

$$= \sup_{-\gamma' < \operatorname{Im}\kappa < 0} \left| \frac{S(\kappa)}{\kappa + i} \right| \, \| (\mathcal{L}-i)\mathcal{U} \| \, \| \mathcal{V} \| e^{-\gamma' t}.$$

Отсюда непосредственно следует оценка /50/.

Достаточность. Пусть, обратно, выполнена оценка /50/. Получим оценку для резольвенты оператора B. Заметим, что при $\operatorname{Im}\lambda<0$, $\mathcal{U}\in\mathcal{K}$

$$(B-\lambda)^{-1}\mathcal{U}=(1-P_{\mathcal{D}_+})(\mathcal{L}-\lambda)^{-1}(I-P_{\mathcal{D}_-})\mathcal{U}. \qquad (51)$$

Правая часть формулы имеет смысл для всех $\mathcal{U}\in\mathcal{H}^a$. Мы условимся считать оператор $(B-\lambda)^{-1}$ расширенным по формуле /51/ на все пространство $\mathcal{H}^a$ /что соответствует продолжению $(B-\lambda)^{-1}$ нулем на ортогональное дополнение $\mathcal{K}$ /. При $\operatorname{Im}\lambda<0$, $\mathcal{V}\in\mathcal{K}$ для гладких $\mathcal{U}\in\mathcal{D}_-^T$ имеем

$$\int_0^\infty (V(t+T)\mathcal{U},\mathcal{V})e^{-i\lambda t}=i((B-\lambda)^{-1}V_T\mathcal{U},\mathcal{V})$$

$$=i\int_{-\infty}\frac{1}{k-\lambda}e^{ikT}\tilde{u}(k)\cdot\bar{\tilde{v}}(k)\,dk=$$

$$=i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(k-\lambda)(k+i)}e^{ikT}(k+i)\tilde{u}\cdot\bar{\tilde{v}}(k)\,dk=$$

$$=i\left((B-\lambda)^{-1}(B+i)^{-1}V_T(\mathcal{L}+i)\mathcal{U},\mathcal{V}\right).$$

Первый член в написанной цепочке равенств, в силу оценки /50/, есть регулярная ограниченная функция в полуплоскости $\operatorname{Im}k<\gamma'$. Отсюда следует регулярность выражения $((B-\lambda)^{-1}(B+i)^{-1}V_T(\mathcal{L}+i)\mathcal{U},\mathcal{V})$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda<\gamma'$ и оценка

$$\|(B-\lambda)^{-1}(B+i)^{-1}V_T(\mathcal{L}+i)\mathcal{U}\|\le(\gamma'-\operatorname{Im}\lambda)^{-1}\times$$

$$\times[C(\gamma')+2]\ \|V_T(\mathcal{L}+i)\mathcal{U}\|,\quad \operatorname{Im}\lambda<\gamma'.$$

Если $\mathcal{U}$ – гладкий элемент из $\mathcal{D}_-^T$; то, $V_T(\mathcal{L}+i)\mathcal{U}\perp\mathcal{D}_-$. Нетрудно видеть, что такие элементы /при различных T / образуют плотное множество в $\mathcal{H}^a\ominus\mathcal{D}_-$. Отсюда выводится оценка

$$\|(B-\lambda)^{-1}(B+i)^{-1}\|\le(\gamma'-\operatorname{Im}\lambda)^{-1}[C(\gamma')+2]$$

Пользуясь тождеством Гильберта и леммой 5 из § 3, получаем требуемую оценку для S -матрицы:

$$\left|\frac{S(\bar\lambda)}{\bar\lambda+i}\right| = \left|\frac{S^{-1}(\lambda)}{\lambda-i}\right| \leq \frac{C(\gamma')+2}{\gamma'-\operatorname{Im}\lambda}\cdot \mathrm{Const}\ , \quad \operatorname{Im}\lambda<\gamma',$$

где Const уже не зависит от выбора γ' , $\gamma'<1/4$ ☒

З а м е ч а н и е I. Все величины, входящие в оценку /50/ могут быть записаны совершенно явно. Действительно, оператор проектирования на $\mathcal{D}_-\oplus\mathcal{D}_+$ вычислен в лемме 6. Действие же группы V_t на элемент $\mathcal{U}=\begin{pmatrix}u(y)\\ u_1(y)\end{pmatrix}, u\in\mathcal{D}_-^T$, записывается формулой

$$(V_t\mathcal{U})(\lambda,t)=\begin{pmatrix}u(x,t)\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\end{pmatrix}\ , \text{ где}$$

$$u(z,t)=\sum_{(c,d)=1} e^{-\frac{t}{2}}\, u\left(\frac{ye^t}{|cz+d|^2}\right)+e^{-\frac{t}{2}}\,u(ye^t), \qquad (52)$$

Сходимость ряда в формуле / 52 / и возможность его почленного дифференцирования не вызывают сомнения ввиду гладкости и финитности данных $\mathcal{U}$.

З а м е ч а н и е 2. Поставив в оценке /50/ справа более сильную норму $\|(\mathcal{L}-i)^{\tau}\mathcal{U}\|$, $\tau>1$ и рассуждая в точности так же, как и выше, мы могли бы получить условия аналитической продолжимости функции $S(k)(k+i)^{-\tau}$ в полосу $-\gamma<\operatorname{Im}k<0$ как ограниченной регулярной функции. Ввиду леммы 8 эти, внешне более слабые, условия также влекут отсутствие корней дзета-функции вне полосы $[2\gamma,\ 1-2\gamma]$, $\gamma\leq 1/4$.

В заключение обсудим вкратце вопрос о полноте системы корневых векторов оператора B в подпространстве $\mathcal{K}$. Оператор B будучи генератором полугруппы вполне-неунитарных сжатий Z_t , является простым диссипативным оператором класса C_0 /см. [I2]/ В действительности он лишь одномерным слагаемым отличается от некоторого самосопряженного оператора. Вопрос о полноте системы собственных векторов такого диссипативного оператора может быть полностью решен в терминах соответствующей характеристической функции, которая в данном случае совпадает с $S(k)$. Опираясь на общие теоремы из книги / [I2] / и лемму 7 настоящей работы, получаем следующий результат:

Для того, чтобы система корневых векторов оператора B была полна в подпространстве $\mathcal{K}=\mathcal{H}^2\ominus(\mathcal{D}_-\oplus\mathcal{D}_+)$, необходимо и достаточно, чтобы $d=1$.

Другие факты о полноте, связанные с оператором B, могут быть получены методами работы / [I5] /. Все они являются в сущности

утверждениями о полноте /в том числе, о двукратной полноте/ некоторой системы растущих решений уравнения

$$-y^2(u_{xx}+u_{yy})-\frac{1}{4}u=\lambda_\ell^2 u, \quad \zeta(\lambda_\ell)=0,$$

в различных подпространствах пространства H .

Впрочем авторы не хотят второпях говорить о таких интересных вещах и надеются вернуться к ним в другой раз.

ЛИТЕРАТУРА

I. Maass H. Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen. Math. Ann.I2I, № 2 (I949), I4I-I83.

2. Selberg A. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly simmetric Rimannian spaces with applications to Dirichlet series. Indian Journ.Math.Soc.20 (I956),47-87. (русский перев. Математика I:4 (I957),3-28).

3. Гельфанд И.М., Пятецкий-Шапиро И.И. Теория представлений и теория автоморфных функций УМН, I4, вып.2 (I959),I7I-I94.

4. Гельфанд И.М., Пятецкий-Шапиро И.И. Автоморфные функции и теория представлений. Труды Моск.математического общества, I2 (I963),389-4I2.

5. Р.Годеман. Спектральное разложение параболических форм в сб. Арифметические группы и автоморфные функции, изд.Мир, Москва, I969, стр.I46-I58.

6. Roelcke W. Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. Sitzungsberichte Heidelberg. Acad.Wiss. 4, Abh. (I953/1955), I6I-267.

7. Roelcke W. Analytische Fortsetzung der Eisensteinreihen zu den parabolische Spitzen von Grenzkreisgruppen erster Art. Math.Ann. 132, № 2 (1956) 121-129.

8. Л.Д.Фаддеев. Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского. Труды Московского математического общества, т.I7 (I967г.), 323-350.

9. П.Лакс, Р.Филлипс. Теория рассеяния Изд.Мир, Москва I97I.

I0. В.М.Адамян, Д.З.Аров. Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов. Математические исследования, АН Молд.ССР, т.I, вып.2, (I966г), 3-64.

II. К.Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, М., И.Л. I963.

I2. Б.С.Надь, Ч.Фойаш. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Изд. Мир, I970 г.

13. М.Ш.Бирман. О спектре сингулярных граничных задач. Матем. сборник, т.55, № 2(1961), 125-174.
14. О.А.Ладыженская. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.Гостехиздат, 1953.
15. Б.С.Павлов. О совместной полноте системы собственных функций сжатия и его сопряженного в сб."Проблемы математической физики" вып.5, изд.ЛГУ, 1971.
16. Р.Годеман. Разложение представления в пространстве $L_2(G/\Gamma)$ для $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ в сб.Арифметические группы и автоморфные функции, изд. МИР, М., 1969, 127-145.
17. Е.К.Титчмарш. Дзета-функция Римана, ГИИЛ, Москва, 1947.