Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

П. П. Кулиш, С. В. Манаков, Л. Д. Фаддеев, Сравнение точных квантовых и квазиклассических ответов для нелинейного уравнения Шредингера, *ТМФ*, 1976, том 28, номер 1, 38–45

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 195.218.150.2
5 июля 2017 г., 17:08:27

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 28, № 1
июль, 1976

СРАВНЕНИЕ ТОЧНЫХ КВАНТОВЫХ И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ ОТВЕТОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

П. П. Кулиш, С. В. Манаков, Л. Д. Фаддеев

Проведено сравнение точных квантовых и квазиклассических ответов для нелинейного уравнения Шредингера.

Последнее время благодаря быстрому развитию метода обратной задачи для решения нелинейных уравнений [1, 2] появился большой набор точно решаемых одномерных нелинейных задач [3—6]. Похоже, что все известные к настоящему времени примеры представляют собой вполне интегрируемые гамильтоновы системы [6—9]. Именно для них удается найти переменные типа действие — угол, явно описать асимптотическое движение и найти каноническое преобразование, отображающее начальные данные при $t\to-\infty$ на конечные данные при $t\to+\infty$. Возникает заманчивая идея использовать эти формулы для вычисления характеристик соответствующих квантовых динамических систем. Вообще говоря, нет оснований считать, что квантование в переменных действие — угол должно совпасть с обычным квантованием в терминах начальных данных в заданный момент времени. Тем не менее в силу простоты и общности метода обратной задачи полезно знать, насколько два таких подхода к квантованию близки.

В настоящей работе мы приводим результаты сравнения двух этих подходов к системе, описываемой нелинейным уравнением:

$$i\partial\psi(x,t)/\partial t=-\partial^2\psi(x,t)/\partial x^2\mp\varkappa|\psi(x,t)|^2\psi(x,t), \tag{1}$$

где $-\infty<x,\ t<\infty$ и $\psi(x,t)$ — комплексная функция в классическом и оператор-функция в квантовом случаях. Постоянная $\varkappa$ играет роль константы связи и будет считаться положительной. Знаки $-$ и $+$ в (1) относятся к случаю притяжения и отталкивания соответственно.

Уравнение (1), которое мы будем называть нелинейным уравнением Шредингера, порождается гамильтонианом

$$H=\int\left(|\psi_x(x)|^2\mp\frac{\varkappa}{2}|\psi(x)|^4\right)dx,$$

если считать, что ψ и ψ^* являются в классическом случае канонически-сопряженными комплексными координатами со скобкой Пуассона

$$\{\psi(x,t),\psi^*(y,t)\}=i\delta(x-y),$$

а в квантовом случае удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\psi(x,t),\psi^+(y,t)]=\delta(x-y).$$

Удобство этого примера состоит в том, что он может быть точно исследован как в классическом, так и в квантовом вариантах. Действительно, в квантовом случае уравнение (1) описывает систему с произвольным числом одномерных частиц с δ-образным парным взаимодействием. Такие системы исследованы в [10—13]. Классический вариант систем был подробно разобран в работах [3, 4, 8]. Таким образом, нам остается только выбрать нужные формулы и сопоставить их. Это и сделано в настоящей работе. Мы почти никогда не будем приводить ставших уже стандартными в данной тематике выводов и ограничимся перечислением формул и их подходящей интерпретацией.

Мы признательны В. Е. Захарову, В. Н. Попову и Л. А. Тахтаджяну за обсуждение рассмотренных здесь вопросов.

1. СПЕКТР В СЛУЧАЕ ПРИТЯЖЕНИЯ

Приведем известные результаты для уравнения (1) в классическом варианте [3, 8] в удобной для нас форме. Переход к задаче рассеяния определим при помощи оператора L, действующего в пространстве пар функций

$$L=i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{d}{dx}+i\sqrt{\frac{\varkappa}{2}}\begin{pmatrix}0 & \psi^*(x)\\ \psi(x) & 0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Будем считать $\psi(x)$ гладкой, быстро убывающей функцией. Данные рассеяния для этого оператора состоят из пары функций $a(k)$, $b(k)$ $(-\infty<k<\infty)$, удовлетворяющих условию $|a(k)|^2+|b(k)|^2=1$, и характеристик дискретного спектра k_n, b_n, где k_n — собственные значения (несамосопряженного) оператора L в верхней полуплоскости, а b_n — соответствующие нормировочные множители. Функция $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, имеет асимптотику $a(k)=1+o(1)$, $|k|\to\infty$ и k_n — ее нули. В остальном данные рассеяния произвольны, они однозначно определяют комплексный коэффициент $\psi(x)$ в операторе L.

В [8] найдены переменные действие — угол, выражающиеся через данные рассеяния и имеющие следующий вид:

$$n(p)=-\frac{2}{\varkappa\pi}\ln\left|a\left(-\frac{p}{2}\right)\right|,\qquad \varphi(p)=\arg b\left(-\frac{p}{2}\right),$$

$$x_n=\frac{8}{\varkappa}\operatorname{Re}k_n,\qquad y_n=-\ln|b_n|;\qquad \lambda_n=\frac{8}{\varkappa}\operatorname{Im}k_n.\qquad \mu_n=\arg b_n,$$

здесь $n=1, 2, \ldots, A$, где A — произвольное неотрицательное целое число. Приведенные выражения образуют канонически-сопряженные пары переменных, так что среди их скобок Пуассона имеем следующие нетривиальные:

$$\{n(p),\ \varphi(p')\}=\delta(p-p'),\ \{x_n,\ y_m\}=\delta_{n,m},\ \{\lambda_n,\ \mu_m\}=\delta_{nm}.$$

В той же работе [8] получены выражения интегралов движения для системы (1) через переменные типа действие. Приведем выражения инте-

гралов числа частиц, импульса и энергии:

$$N=\int\psi^*\psi\,dx=\int n(p)\,dp+\sum_{n=1}^{A}\lambda_n,$$

$$P=\frac{1}{2i}\int(\psi^*\psi_x-\psi_x^*\psi)\,dx=\int pn(p)\,dp+\sum_{n=1}^{A}-\frac{\varkappa}{4}x_n\lambda_n,$$

$$H=\int\left(|\psi_x|^2-\frac{\varkappa}{2}|\psi|^4\right)dx=\int p^2n(p)\,dp+\sum_{n=1}^{A}\frac{\varkappa^2}{48}(3x_n^2\lambda_n-\lambda_n^3).$$

При квантовании переменные $n(p)$ становятся операторами, которые мы обозначим через $\hat{n}(p)$, а скобки Пуассона заменяются коммутаторами соответствующих операторов. Для того чтобы определить собственные значения этих операторов, следует принять во внимание топологию фазового пространства, т. е. тот факт, что переменные $n(p)$ и $\varphi(p)$ меняются в областях $[0, \infty)$, $[0, 2\pi]$, переменные λ_n, μ_n — в областях $[0, \infty)$, $[0, 2\pi]$, а x_n, y_n — в областях $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, \infty)$. Оператор $\hat{n}(p)$ в качестве собственных значений имеет $\sum_i \delta(p-p_i)$, собственными значениями операторов $\hat{\lambda}_n$ являются неотрицательные целые числа, и лишь собственные значения операторов $\hat{x}_n$ заполняют всю ось $(-\infty, \infty)$.

Сравнивая выражения для собственных значений операторов импульса и энергии, мы видим, что вклад в них дают различные частицы. Непрерывные переменные $\hat{n}(p)$, $\hat{\varphi}(p)$ соответствуют частице с законом дисперсии $E=p^2$, т. е. частице с массой $^1/_2$. Дискретные переменные соответствуют бесконечному числу частиц с массами $N/2$, где N — положительное целое число. Действительно, закон дисперсии для них следующий:

$$E=\frac{p^2}{\lambda}-\frac{\varkappa^2}{48}\lambda^3 \qquad p=-\frac{\varkappa}{4}x\lambda. \tag{3}$$

Первый член в этой формуле — кинетическая энергия частицы массы $\lambda/2=N/2$, которую при $N>1$ можно интерпретировать как связанное состояние N частиц с массой $^1/_2$. В этом случае второй член является энергией связи. Формулу (3) легко модифицировать так, чтобы частица с массой $^1/_2$ имела обычный закон дисперсии. Этого можно добиться, определяя энергию как $H+\frac{\varkappa^2}{48}N$. Отметим, что добавку можно интерпретировать как упорядочение операторов ψ и ψ^+ при квантовании. Закон дисперсии приобретает форму

$$E=\frac{p^2}{\lambda}-\frac{\varkappa^2}{48}(\lambda^3-\lambda),$$

и энергия связи в точности совпадает с выражением, полученным в [10, 11]. Полное совпадение точного квантового ответа для спектра с квазиклассическим несомненно является следствием полной интегрируемости рассматриваемой классической системы.

2. АСИМПТОТИКА КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

В предыдущем пункте мы видели, что солитоны для уравнения (1) в отношении энергетического спектра соответствуют точечным частицам с потенциалом $-\varkappa\delta(x_i-x_j)$ в квантовой теории. Рассмотрим, как обстоит дело с теорией рассеяния при квазиклассическом квантовании. В работе [3] показано, что при $t\to\pm\infty$ N-солитонное решение, определяемое N собственными значениями k_n оператора L и нормировочными коэффициентами b_n, распадается на суперпозицию односолитонных решений. Каждое решение характеризуется парой переменных $b_n^{\pm}$, $k_n^{\pm}$, и при переходе к каноническим переменным их значения при $t\to+\infty$ выражаются через значения при $t\to-\infty$ соотношениями

$$k_n^+=k_n^-, \qquad k=\frac{\varkappa}{8}(x+i\lambda),$$

$$y_n^+=y_n^-+2\left(\sum_{j=1}^{n-1}\ln\left|\frac{k_n-k_j}{k_n-k_j^*}\right|-\sum_{j=n+1}^{N}\ln\left|\frac{k_n-k_j}{k_n-k_j^*}\right|\right),$$

$$\mu_n^+=\mu_n^--2\left(\sum_{j=1}^{n-1}\arg\frac{k_n-k_j}{k_n-k_j^*}-\sum_{j=n+1}^{N}\arg\frac{k_n-k_j}{k_n-k_j^*}\right).$$

Видно, что дополнительные слагаемые зависят только от вещественной и мнимой частей собственных значений k_n, т. е. от обобщенных импульсов. Это преобразование можно рассматривать как каноническое с производящей функцией

$$\Phi(x_n,\lambda_n)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\{(l_i-l_j)\ln(l_i-l_j)-(l_i-l_j^*)\ln(l_i-l_j^*)+\text{c. c.}\},$$

где $l=\frac{8}{\varkappa}k=x+i\lambda$. Тогда $y_n^+=y_n^-+\partial\Phi/\partial x_n$ и $\mu_n^+=\mu_n^-+\partial\Phi/\partial\lambda_n$. Обобщенные импульсы не меняются, что соответствует в квантовой теории сохранению импульсов всех частиц.

Пусть при квазиклассическом квантовании мы имеем N исходных частиц ($\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_N=1$), импульсы которых упорядочены:

$$p_1=-\frac{\varkappa}{4}x_1\lambda_1<p_2<\ldots<p_N=-\frac{\varkappa}{4}x_N\lambda_N.$$

В силу принципа соответствия матрицу рассеяния можно представить в виде

$$S(\{p_n'\};\{p_n\})=\prod_{n=1}^{N}\delta(p_n'-p_n)\exp(i\Phi(p_1,\ldots,p_N)).$$

Вычисляя показатель экспоненты для выбранных значений p_n и λ_n, получаем

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\left(\frac{4}{\varkappa}(p_i-p_j)\ln\left(1+\frac{\varkappa^2}{4(p_i-p_j)^2}\right)-2i\ln\frac{|p_i-p_j|+i\varkappa/2}{|p_i-p_j|-i\varkappa/2}\right);$$

в пределе малых $\varkappa$ при фиксированных импульсах p_n член порядка $\varkappa$ в этом выражении совпадает с соответствующим членом квантовой S-матрицы.

Если рассматривать уравнение (1) в случае отталкивания $(+\varkappa)$ с нулевыми асимптотиками для $\psi(x, t)$, то солитонов в такой системе не возникает. Оператор L самосопряжен и выглядит так же, как (2), только без множителя i перед вторым слагаемым. У оператора L отсутствует дискретный спектр, а пара функций $a(k)$, $b(k)$ удовлетворяет условию $|a(k)|^2-|b(k)|^2=1$.

Канонические переменные типа действие — угол выражаются через эти функции:

$$n(p)=\frac{2}{\varkappa\pi}\ln\left|a\left(-\frac{p}{2}\right)\right|,\qquad \varphi(p)=\arg b\left(-\frac{p}{2}\right).$$

Они аналогичны переменным $|c(p)|^2$ и $\arg c(p)$, которые можно ввести для свободного уравнения Шредингера $i\psi_t(x, t)=-\psi_{xx}(x, t)$:

$$\psi(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int c(p)\,e^{ipx-ip^2t}\,dp.$$

В частности, бесконечное число сохраняющихся функционалов для уравнения (1) имеет в переменных $n(p)$ в точности такой же вид $\int p^k n(p)\,dp$, как и для свободного уравнения

$$\int \psi^*\hat{p}^k\psi\,dx=\int p^k|c(p)|^2\,dp.$$

Асимптотика решения свободного уравнения при $|t|\to\infty$

$$\psi_{as}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2|t|}}\,c\left(\frac{x}{2t}\right)\exp\left(i\frac{x^2}{4t}-i\,\mathrm{sign}\,t\cdot\frac{\pi}{4}\right) \tag{4}$$

описывается переменными $|c(p)|^2$ и $\arg c(p)$. Аналогичное утверждение справедливо и для уравнения (1). Однако зависимость старшего члена асимптотики решения уравнения (1) не совпадает с (4), а имеет вид

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2|t|}}\,f\left(\frac{x}{2t}\right)\exp\left(i\frac{x^2}{4t}-i|f|^2\,\mathrm{sign}\,t\cdot\ln|t|\right). \tag{5}$$

Если $f(x/2t)$ — постоянная, то формула (5) определяет точное решение уравнения (1) при $t\neq0$. Используя метод, предложенный одним из авторов (С.М), удается найти явный вид функции $f(p)$ при $x=vt=2pt$ и $t\to\pm\infty$, при этом асимптотика решения уравнения (1) будет следующей:

$$\psi_{as}(x,t)=\frac{n^{1/2}(p)}{\sqrt{2|t|}}\exp\left(ip^2t-i\,\mathrm{sign}\,t\cdot\left[\frac{\varkappa}{2}n(p)\ln 8|t|-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\arg\Gamma\left(1+i\frac{\varkappa}{2}n(p)\right)+\frac{\pi}{4}\right]+i\varphi^{\pm}(p)\right),$$

$$\varphi^{\pm}(p)=\varphi(p)\pm K(p),\qquad \varphi^{+}(p)=\varphi^{-}(p)+2K(p),$$

$$K(p)=\frac{\varkappa}{2}\int\mathrm{sign}(p-l)\ln|p-l|\,\frac{d}{dl}n(l)\,dl.$$

Связь асимптотических фаз функции $\psi(x, t)$ при $t\to\pm\infty$ за вычетом фаз свободных асимптотик (5) определяет рассеяние в этом случае. Как и в случае солитонов, видно, что изменение фазы зависит только от переменных $n(p)$, и это изменение можно записать посредством производящей функции $(\varphi^+(p)=\delta\Phi(n^+, \varphi^-)/\delta n^+(p)$:

$$\Phi(n(p), \varphi^-(p)) = \int n(p)\varphi^-(p)\,dp - \frac{\varkappa}{2}\int \frac{n(p)n(q)}{|p-q|}\,dp\,dq. \tag{6}$$

Второе слагаемое в (6) нужно понимать как первообразную от $K(p)$, наша запись позволяет произвести прямое сравнение с квантовой S-матрицей для одномерных частиц, взаимодействующих посредством потенциала $\varkappa\delta(x)$,

$$\hat{S}=\exp\left(\frac{1}{2}\int \ln\frac{|p-q|-i\varkappa/2}{|p-q|+i\varkappa/2} :\hat{n}(p)\hat{n}(q): dp\,dq\right). \tag{7}$$

Видно, что при малых $\varkappa$ в показателе экспоненты (7) возникает в точности второе слагаемое из (6).

3. СПЕКТР В СЛУЧАЕ ОТТАЛКИВАНИЯ

Если выбрать асимптотики $\psi(x, t)$ ненулевыми:

$$\psi(x)\to\rho^{1/2},\ x\to+\infty;\ \psi(x)\to\rho^{1/2}e^{i\alpha},\ x\to-\infty, \tag{8}$$

то спектр задачи становится интереснее. Такая задача соответствует системе с конечной плотностью ρ. Для того чтобы асимптотики (8) сохранялись, необходимо модифицировать уравнение (1) за счет добавки химического потенциала: $H\to H-\mu N$, $\mu=\varkappa\rho$. Основное уравнение приобретает форму

$$i\psi_t(x, t) = -\psi_{xx}(x, t) + \varkappa|\psi(x, t)|^2\psi(x, t) - \varkappa\rho\psi(x, t),$$

а в качестве функционалов N, импульса P и энергии H используются следующие регуляризованные выражения:

$$N=\int(|\psi|^2-\rho)\,dx, \quad P=\frac{1}{2i}\int(\psi^*\psi_x-\psi_x^*\psi)\,dx+\rho\alpha,$$

$$H=\int\left(|\psi_x|^2+\frac{\varkappa}{2}|\psi|^4-\varkappa\rho|\psi|^2+\frac{\varkappa}{2}\rho^2\right)dx.$$

Предложенные модификации могут быть обоснованы при более детальном исследовании структуры фазового пространства, образованного функциями ψ и ψ^* с заданными граничными условиями. Оператор L для этого уравнения эрмитов:

$$L=i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\sqrt{\frac{\varkappa}{2}}\begin{pmatrix}0 & \psi^*(x)\\ \psi(x) & 0\end{pmatrix},$$

и его непрерывный спектр заполняет полуоси $(-\infty, -\sigma]$ и $[\sigma, \infty)$, а собственные значения k_n лежат в интервале $(-\sigma, \sigma)$, где $\sigma^2=\varkappa\rho/2$. Данные рассеяния и в этом случае состоят из функций $a(k)$, $b(k)$; $k\in(-\infty, -\sigma]$ или $[\sigma, \infty)$, удовлетворяющих условию $|a(k)|^2-|b(k)|^2=1$, и характеристик дискретного спектра k_n, b_n. Функция $a(k)$ аналитична в плоскости k с раз-

резами $(-\infty, -\sigma]$ и $[\sigma, \infty)$, для нее справедливо представление

$$a(k)=\prod_{n=1}^{N}\frac{k+\lambda-k_n-\lambda_n}{k+\lambda-k_n+\lambda_n}\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\frac{\ln|a(p)|}{\mu}\left(1+\frac{\lambda}{p-k}\right)dp\right\},$$

где интеграл берется по верхним берегам разрезов, $\lambda=\sqrt{k^2-\sigma^2}$, $\mu=\sqrt{p^2-\sigma^2}$ и всюду в плоскости k $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$.

Переменные действие — угол выражаются через данные рассеяния следующим образом:

$$n(k)=\frac{4}{\varkappa\pi}\ln|a(k)|,\qquad \varphi(k)=-\arg b(k)+\left(1-\frac{k}{\lambda}\right)\alpha;$$

$$x_n=-\frac{4}{\varkappa}k_n,\qquad y_n=\ln b_n-i\left(1-\frac{k_n}{\lambda_n}\right)\frac{\alpha}{2},$$

где α — асимптотическая фаза:

$$\alpha=-\frac{2}{\pi}\int\frac{\ln|a(p)|}{\mu}dp-i\sum_{n=1}^{N}\ln\frac{k_n+\lambda_n}{k_n-\lambda_n},\qquad \lambda_n=\sqrt{\sigma^2-k_n^2}.$$

Интегралы движения, вычисленные через новые канонические переменные, имеют вид

$$N=\int\frac{k}{\lambda}n(k)\,dk-\frac{4}{\varkappa}\sqrt{\sigma^2-k_0^2},$$

$$P=\int 2\lambda(k)n(k)\,dk+\frac{4}{\varkappa}\left(\sigma^2\arccos\frac{k_0}{\sigma}-k_0\sqrt{\sigma^2-k_0}\right),$$

$$H=\int 4\lambda(k)kn(k)\,dk+\frac{16}{3\varkappa}(\sigma^2-k_0^2)^{3/2}.$$

Часть, зависящую от дискретного спектра, мы выписали для случая одного собственного значения k_0; если их несколько, то возникнут суммы выписанных выражений.

Переменные $n(k)$ и $\varphi(k)$ имеют ту же область изменения, что и в предыдущем случае, с тем лишь отличием, что интервал $(0, 2\pi)$ сдвигается по оси в зависимости от параметра k. Дискретные переменные меняются в полосе $\left(-\frac{4}{\varkappa}\sigma, \frac{4}{\varkappa}\sigma\right)\times(-\infty, \infty)$, так что при квантовании переменная k_0 может принимать любые значения из интервала $(-\sigma, \sigma)$.

Рассмотрим зависимость энергии от импульса для возбуждений, соответствующих переменной $n(k)$:

$$p(k)=2\sqrt{k^2-\sigma^2},\quad \omega_1(k)=4k\sqrt{k^2-\sigma^2},\quad \omega_1(p)=|p|\,(p^2+2\varkappa\rho)^{1/2}.$$

Для возбуждений, соответствующих k_0, имеем

$$p(k_0)=\frac{4}{\varkappa}\left(\sigma^2\arccos\frac{k_0}{\sigma}-k_0\sqrt{\sigma^2-k_0^2}\right),\qquad \omega_2(k_0)=\frac{16}{3\varkappa}(\sigma^2-k_0^2)^{3/2}.$$

Явно зависимость $\omega_2(p)$ вычислить не удается, однако ее характер следующий:

а) импульс меняется в ограниченном интервале $(-\pi\rho, \pi\rho)$;

б) при малых импульсах p, $\omega_2(p)\simeq\sqrt{2\varkappa\rho}\,|p|$;

в) $d\omega_2/dp=2k_0\geqslant 0$ и монотонно убывает при возрастании p от $\sqrt{2\varkappa\rho}$ до нуля.

В квантовом случае система, описываемая уравнением (1) с условием $|\psi(x)|^2\to\rho$ при $|x|\to\infty$, соответствует бозе-газу конечной плотности. Она исследовалась в работах [12, 13], где были найдены две ветви возбуждений, с которыми построенные нами хорошо согласуются. Более того легко показать, используя уравнения, полученные в [13], что классические дисперсии являются асимптотиками точных квантовых в пределе $\varkappa\to 0$. Другой предел $\hbar\to 0$, $N\to\infty$, $\hbar N=n$ фиксировано, при котором квантовая дисперсия второй ветви переходит в классическую, рассмотрен в работе [14].

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
27 января 1976 г.

Литература

[1] C. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura. Phys. Rev. Lett., **19**, 1095, 1967.
[2] P. D. Lax. Commun. Pure and Appl. Math., **21**, 467, 1968.
[3] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. ЖЭТФ, **61**, 118, 1971.
[4] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. ЖЭТФ, **64**, 1627, 1973.
[5] M. Y. Ablowitz, D. Y. Kaup, A. C. Newel, H. Segur. Phys. Rev. Lett., **30**, 1262, 1973.
[6] В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. ДАН СССР, **219**, 1334, 1974.
[7] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев. Функц. анализ, **5**, вып. 4, 18, 1971.
[8] В. Е. Захаров, С. В. Манаков. ТМФ, **19**, 332, 1974.
[9] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. ТМФ, **21**, 160, 1974.
[10] Ф. А. Березин, Г. П. Похил, В. М. Финкельберг. Вестн. МГУ, сер. 1, № 1, **21**, 1964.
[11] J. B. McGuire. J. Math. Phys., **5**, 622, 1964.
[12] E. H. Lieb, W. Liniger. Phys. Rev., **130**, 1605, 1963.
[13] E. H. Lieb. Phys. Rev., **130**, 1616, 1963.
[14] Ю. С. Тюпкин, В. А. Фатеев, А. С. Шварц. ЯФ, **22**, 622, 1975.

COMPARISON OF THE EXACT QUANTUM AND QUASICLASSICAL RESULTS FOR THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

P. P. Kulish, S. V. Manakov, L. D. Faddeev

Comparison of the exact quantum and quasiclassical results for the nonlinear Schrödinger equation is carried out.

П. П. Кулиш, С. В. Манаков, Л. Д. Фаддеев

Сравнение точных квантовых и квазиклассических ответов для нелинейного уравнения Шредингера

Теоретическая и математическая физика, 1976, **28**:1, 38–45

Список литературы

[1] C. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1095 crossref ads*

[2] P. D. Lax, *Commun. Pure and Appl. Math.*, **21** (1968), 467 crossref MathSciNet ZentralblattMATH

[3] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **61** (1971), 118

[4] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **64** (1973), 1627

[5] M. Y. Ablowitz, D. Y. Kaup, A. C. Newel, H. Segur, *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973), 1262 crossref MathSciNet ads*

[6] В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ДАН СССР*, **219** (1974), 1334 ZentralblattMATH

[7] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, *Функц. анализ*, **5**:4 (1971), 18 Math-Net.Ru MathSciNet ZentralblattMATH

[8] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, *ТМФ*, **19** (1974), 332 Math-Net.Ru ZentralblattMATH

[9] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **21** (1974), 160 Math-Net.Ru

[10] Ф. А. Березин, Г. П. Похил, В. М. Финкельберг, *Вестн. МГУ, сер. 1*, 1964, № 1, 21 MathSciNet

[11] J. B. McGuire, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 622 crossref MathSciNet ZentralblattMATH

[12] E. H. Lieb, W. Liniger, *Phys. Rev.*, **130** (1963), 1605 crossref MathSciNet ZentralblattMATH ads*

[13] E. H. Lieb, *Phys. Rev.*, **130** (1963), 1616 crossref MathSciNet ads*

[14] Ю. С. Тюпкин, В. А. Фатеев, А. С. Шварц, *ЯФ*, **22** (1975), 622 MathSciNet