Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. Я. Арефьева, А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, Производящий функционал для S-матрицы в калибровочно-инвариантных теориях, *ТМФ*, 1974, том 21, номер 3, 311–321

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 195.218.150.2
30 июня 2017 г., 15:47:35

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 21, № 3
декабрь, 1974

ПРОИЗВОДЯЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ ДЛЯ S-МАТРИЦЫ В КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫХ ТЕОРИЯХ

И. Я. Арефьева, А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев

Получено выражение для производящего функционала матричных элементов матрицы рассеяния. Показано, что в электродинамике и в теории Янга – Миллса все ультрафиолетовые расходимости устраняются перенормировкой заряда. В предлагаемом формализме зависящие от калибровки контрчлены вообще не возникают.

Для вычисления S-матрицы в калибровочно-инвариантных теориях обычно используют формализм функций Грина [1, 2]. Основным объектом в этом формализме является производящий функционал $Z(J)$, вариационные производные которого по J определяют функции Грина, связанные с матричными элементами S-матрицы на массовой поверхности известными формулами приведения. Функционал Z не есть непосредственно наблюдаемая величина и поэтому не обязан быть калибровочно-инвариантным. Вследствие этого на промежуточных этапах вычисления S-матрицы приходится иметь дело с неинвариантными величинами, что приводит к осложнениям при проведении перенормировки. Чтобы обеспечить калибровочную инвариантность наблюдаемых величин, перенормировочная процедура должна удовлетворять определенным условиям. В электродинамике это хорошо известные тождества Уорда [3, 4]. В неабелевых калибровочных теориях соответствующие соотношения [5, 6] имеют гораздо более сложный вид, и практически работать с ними в таких, например, теориях, как гравитация, весьма затруднительно.

Возможный путь обхода этой трудности состоит в построении явно ковариантного формализма, в котором обобщенные тождества Уорда выполнялись бы тривиальным образом. Эта идея была, по-видимому, впервые высказана Де Виттом [2] (см. также [7]). Для простейших классов диаграмм соответствующая техника развивалась в работах [8, 9]. Произвольные диаграммы рассмотрены в работе [10], в которой предложена инвариантная перенормировочная процедура для самодействующего поля Янга – Миллса.

По нашему мнению, методика, развивавшаяся во всех этих работах, недостаточно последовательна, поскольку основным объектом в них, как и в стандартном формализме, является производящий функционал для функций Грина. Присутствие внешних источников не позволяет окончательно изгнать из теории не калибровочно-инвариантные величины, что приводит к усложнению формализма и вызывает трудности при попытке включения взаимодействия с полями материи.

В настоящей работе мы предлагаем формализм, позволяющий непо-

средственно вычислять матричные элементы S-матрицы. На всех этапах перенормировочной процедуры отсутствуют неинвариантные величины. В частности, нам не приходится вводить зависящие от калибровки константы перенормировки полей материи — все ультрафиолетовые расходимости устраняются перенормировкой заряда.

В первом разделе описан производящий функционал для S-матрицы. Второй раздел посвящен построению перенормировочной процедуры для квантовой электродинамики, в третьем разделе рассмотрена теория Янга — Миллса.

1. ПРОИЗВОДЯЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ ДЛЯ S-МАТРИЦЫ

Наше основное утверждение состоит в том, что для теории, описываемой лагранжианом $L(\varphi)$, матрица рассеяния может быть представлена в виде континуального интеграла

$$S(\varphi_0)=N^{-1}\int \exp\{iA(\varphi)\}d\mu, \quad A(\varphi)=A_0(\varphi)+A_I(\varphi)= \tag{1}$$
$$=\int L_0(x)\,dx+\int L_I(x)\,dx.$$

В простейшем случае скалярного поля мера $d\mu$ есть просто произведение дифференциалов $\prod\limits_x d\varphi(x)$. Интегрирование в формуле (1) ведется по полям φ в окрестности классических решений уравнений Лагранжа — Эйлера $\delta A/\delta\varphi(x)=0$, причем классические поля $\varphi_{кл}$ параметризоны полями φ_0, являющимися решениями свободных уравнений движения $\delta A_0/\delta\varphi(x)=0$,

$$\varphi_{кл}=\varphi_0+\tilde{\varphi}_{кл}=\varphi_0(x)+\int D^c(x-y)\frac{\delta A_I}{\delta\varphi(y)}\,dy, \tag{2}$$

$D_c(x)$ — фейнмановская функция Грина, определяемая квадратичной формой $L_0(x)$. Коэффициентные функции в разложении функционала S по φ_0 совпадают с коэффициентными функциями в разложении S-матрицы по нормальным произведениям асимптотических полей.

Более явно формулу (1) можно записать в виде

$$S(\varphi_0)=N^{-1}\int \exp\{iA(\varphi+\varphi_{кл})\}d\mu, \tag{3}$$

где интегрирование ведется уже по всем полям φ, убывающим на бесконечности.

Можно показать, что формула (1) является обобщением известной квантовомеханической формулы для оператора эволюции, причем выбор фейнмановского правила обхода полюсов правильно учитывает граничные условия в задаче рассеяния. Мы не будем, однако, заниматься здесь соответствующими эвристическими выкладками, а вместо этого покажем, что коэффициентные функции S-матрицы, определяемые формулами (1)—(3), совпадают с коэффициентными функциями, вычисленными с помощью производящего функционала для функций Грина

$$Z(J)=N^{-1}\int \exp\left\{i\left[A(\varphi)+\int J(x)\varphi(x)\,dx\right]\right\}d\mu. \tag{4}$$

Сделанное утверждение нуждается в уточнении. В определении функционала $S(\varphi_0)$ имеется неоднозначность, связанная с тем, что его функциональные аргументы — свободные поля $\varphi_0(x)$ — недостаточно хорошо убывают на бесконечности. Поэтому лагранжианы, отличающиеся на полную дивергенцию, будут, вообще говоря, приводить к разным ответам. Эта неоднозначность скажется прежде всего в определении древесных диаграмм. Выбирая, например, свободные лагранжианы в виде $^1/_2\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi$ или $-^1/_2\varphi\Box\varphi$, мы получим S-матрицы, отличающиеся в приближении деревьев членом $^1/_2\partial_\mu\varphi_0\partial_\mu\varphi^{кл}+^1/_2\varphi_0\Box\varphi^{кл}$, отличным от нуля, так как интеграция по частям с отбрасыванием граничных членов незаконна. Корректное решение этой проблемы требует более аккуратного учета граничных условий. С прагматической точки зрения для ликвидации этой неоднозначности достаточно доопределить функционал (1) следующим образом: в теории, в которой свободный лагранжиан имеет вид $^1/_2D_1\varphi D_2\varphi$, где D_i — некоторый дифференциальный оператор, S-матрица определяется формулой

$$S(\varphi_{кл})=N^{-1}\int\exp\{i\int L(x)\,dx\}\,d\mu\,\exp\{\tfrac{-i}{2}\int[D_1\varphi_0D_2\varphi_{кл}+ +D_1\varphi_{кл}D_2\varphi_0-2D_1\varphi_0D_2\varphi_0]\,dx\}. \tag{5}$$

Эта формула обеспечивает однозначность ответа при любом выборе $L_0(\varphi)$ и, как мы покажем, согласуется с определением S-матрицы через $Z(J)$.

Дополнительная неоднозначность возникает при вычислении радиационных поправок во внешние линии. Это хорошо известная проблема, связанная с неассоциативностью умножения обобщенных функций $(k^2-a)^{-1}(k^2-a)\,\delta(k^2-a)$. Как и в первом случае, эта неопределенность может быть раскрыта при корректном учете граничных условий. Мы покажем, однако, что она вообще не влияет на значение перенормированных величин, и при любом доопределении этого выражения перенормированные функции, определяемые формулами (4) и (5), совпадают (неперенормированные коэффициентные функции, разумеется, зависят от способа доопределения и могут не совпадать).

Покажем, что определения (4) и (5) приводят к одинаковой матрице рассеяния. С этой целью разложим подинтегральное выражение в формуле (4) вблизи стационарной точки φ_J, где φ_J — решение классического уравнения движения

$$\varphi_J=\varphi_J{}^0+\tilde\varphi_J\equiv\varphi_J{}^0+\int D^c(x-y)\frac{\delta A_I}{\delta\varphi(y)}\,dy, \tag{6}$$
$$\varphi_J{}^0=\int D^c(x-y)J(y)\,dy.$$

$Z(J)$ будет иметь вид

(7)

$$Z(J)=N^{-1}\int\exp\Big\{i\int[^1/_2\partial_\mu\varphi_J{}^0\partial_\mu\varphi_J{}^0+\partial_\mu\varphi_J{}^0\partial_\mu\tilde\varphi_J+^1/_2\partial_\mu\tilde\varphi_J\partial_\mu\tilde\varphi_J+J\varphi_J+L_I(\varphi_J)]\,dx+ +i\int\frac{1}{2}\frac{\delta^2A}{\delta\varphi(x)\,\delta\varphi(y)}\Big|_{\varphi=\varphi_J}\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy+\ldots\Big\}d\mu.$$

В квадратных скобках явно выписаны члены, дающие вклад в приближении деревьев. Остальные члены дают квантовые поправки.

Пользуясь определением $\varphi_J{}^0$ и интегрируя по частям (это можно делать, так как J — основная функция), преобразуем выражение, выписан-

ное в первой строке, к виду

$$(8)\qquad \int \exp\left\{ i\int {}^1/_2 J(x) D^c(x-y) J(y)\,dx\,dy + i\int \left[{}^1/_2 \partial_\mu \tilde{\varphi}_J \partial_\mu \tilde{\varphi}_J + L_I(\varphi_J)\right] dx \right\}.$$

Преобразуем к аналогичному виду формулу (5), разлагая подынтегральное выражение вблизи точки $\varphi_{кл}$,

$$(9)\qquad S(\varphi_0) = N^{-1} \int \exp\left\{ i\int \left[{}^1/_2 \partial_\mu \tilde{\varphi}_{кл} \partial_\mu \tilde{\varphi}_{кл} + L_I(\varphi_{кл})\right] dx + \right.$$

$$\left. + i\int \frac{1}{2} \frac{\delta^2 A}{\delta\varphi(x)\,\delta\varphi(y)}\Big|_{\varphi=\varphi_{кл}} \varphi(x)\varphi(y) + \ldots \right\} d\mu.$$

Это выражение после отождествления $\varphi_J = \varphi_{кл}$ отличается от (7) лишь множителем $\exp\{i\int {}^1/_2 J(x) D^c(x-y) J(y)\}$. Как известно, этот множитель всегда возникает при переходе от функций Грина к коэффициентным функциям S-матрицы. Отождествление $\varphi_J = \varphi_{кл}$ в точности соответствует формулам приведения, согласно которым для получения матричных элементов матрицы рассеяния нужно в производящем функционале $Z(J)$ произвести замену $\int D^c(x-y) J(y)\,dy = \varphi_0$, где φ_0 — свободное поле.

Таким образом, доказано совпадение S-матриц, определяемых формулами (4) и (5). Это доказательство было пока формальным, так как мы не сказали, как мы ликвидируем неоднозначность, возникающую из-за радиационных поправок во внешние линии. Однако нетрудно понять, что эта неоднозначность относится лишь к бесконечным перенормировкам, а значение конечной части, определяемое условием вычитания на массовой поверхности, от нее не зависит. Мы можем определить, например, величину $k^{-2}\Pi(k)\varphi_0(k)$ как $(Z-1)\varphi_0(k)$, 0, ${}^1/_2(Z-1)\varphi_0(k)$ или каким-либо другим способом. В зависимости от этого для устранения расходимостей придется по-разному перенормировать внешние линии. Конечные же части, т. е. перенормированные матричные элементы, определямые формулами (4) и (5), в любом случае совпадают. В дальнейшем мы будем доопределять указанную неоднозначность требованием калибровочной инвариантности соответствующих контрчленов. Это позволит нам на всех этапах перенормировочной процедуры оперировать лишь с явно инвариантными величинами.

2. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

В этом разделе мы проиллюстрируем описанный выше формализм на примере простейшей калибровочно-инвариантной теории — квантовой электродинамики. Мы будем заниматься вычислением квантовых поправок к амплитудам рассеяния. Поэтому мы выделим с самого начала древесные диаграммы. Тогда производящий функционал для радиационных поправок к S-матрице можно записать в виде

$$(10)\qquad S(\psi_{кл}, A_{кл}) = N^{-1} \int \exp\left\{ i\int \left[L(\psi+\psi_{кл}, A+A_{кл}) + \frac{1}{2\alpha}(\partial A) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \delta m(\bar{\psi}+\bar{\psi}_{кл})(\psi+\psi_{кл}) - L(\psi_{кл}, A_{кл})\right] dx \right\} d\mu,$$

где

$$L(\psi, A) = -\frac{1}{4e^2} f_{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\hat{\partial} + \hat{A})\psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{11}$$

$A_{\text{кл}}$ и $\psi_{\text{кл}}$ суть решения классических уравнений

$$(i\hat{\partial} + \hat{A} - m)\psi = 0, \quad \frac{1}{e^2}(\Box g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

Из-за вырожденности лагранжиана (11) представление $A_\mu^{\text{кл}}$ в виде

$$A_\mu^{\text{кл}} = A_\mu^0 + \int D_c^{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y)\, dy$$

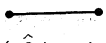
неоднозначно. Однако эта неоднозначность не влияет на физические следствия, так как в силу сохранения классического тока продольная часть функции $D_c^{\mu\nu}$ вообще не дает вклада.

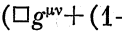
В формуле (10) m — физическая масса. Контрчлен перенормировки массы выделен с самого начала. Классический лагранжиан (11) записан в виде, соответствующем определению заряда как единицы измерения электромагнитного поля. Он приводится к стандартному виду заменой $A_\mu \to eA_\mu$.

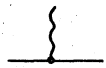
Разложение S-матрицы вблизи классического решения порождает диаграммную технику, элементами которой являются функции Грина во внешнем классическом поле, определяемые квадратичной формой

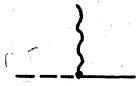
$$-\frac{1}{4e^2} f_{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\hat{\partial} + \hat{A}_{\text{кл}})\psi + \bar{\psi}\hat{A}\psi_{\text{кл}} + \bar{\psi}_{\text{кл}}\hat{A}\psi. \tag{12}$$

Эта квадратичная форма недиагональна, поэтому наряду с функциями Грина $\overline{\bar{\psi}\psi}$ и $\overline{AA}$ возникнут смешанные спаривания $\overline{\psi A}$. Это усложняет сравнение с обычной диаграммной техникой, поэтому, чтобы ликвидировать недиагональные спаривания, мы отнесем два последних члена в формуле (12) к лагранжиану взаимодействия. Тогда диаграммная техника будет состоять из следующих элементов:

 — $G(x, y)$, функция распространения электрона,
$(i\hat{\partial} + m + \hat{A}_{\text{кл}})(G(x, y) = \delta(x-y)$,

 — $D_{\mu\nu}^\alpha(x-y)$, свободная функция распространения фотона,
$(\Box g^{\mu\nu} + (1-\alpha)\partial^\mu\partial^\nu) D_{\nu\rho}^\alpha(x-y) = g^{\mu\rho}\delta(x-y)$,

 — вершина, отвечающая взаимодействию $\bar{\psi}\hat{A}\psi$,

 — вершина $\bar{\psi}_{\text{кл}}\hat{A}\psi$ (— — — — внешняя линия).

С формальной точки зрения это просто диаграммная техника в картине Фарри при наличии внешних полей $\psi_{\text{кл}}$ и $A_\mu^{\text{кл}}$. S-матрица определяется совокупностью «вакуумных» диаграмм, т. е. диаграмм, у которых все внешние линии — классические поля. Невакуумные диаграммы непосредственного физического смысла не имеют. Они понадобятся нам лишь при построении перенормировочной процедуры.

Функционал (10) инвариантен относительно преобразований

$$\bar{\psi}_{\text{кл}} \to \bar{\psi}_{\text{кл}}' = e^{-i\varphi(x)}\bar{\psi}_{\text{кл}}(x), \quad \psi_{\text{кл}} \to \psi_{\text{кл}}' = e^{i\varphi(x)}\psi_{\text{кл}}(x), \tag{13}$$
$$A_{\text{кл}}^{\mu} \to A_{\text{кл}}'^{\mu} = A_{\text{кл}}^{\mu} + \partial_{\mu}\varphi.$$

Действительно, поскольку лагранжиан (11) инвариантен относительно калибровочных преобразований своих аргументов, делая в интеграле (10) одновременно с преобразованием (13) замену переменных

$$\bar{\psi} \to e^{-i\varphi(x)}\bar{\psi}(x), \quad \psi \to e^{i\varphi(x)}\psi(x), \quad A_{\mu} \to A_{\mu}, \tag{14}$$

мы получим, что $S(\psi', A') = S(\psi, A)$.

При преобразованиях (13), (14) функции Грина преобразуются как ковариантные величины. Ковариантная процедура устранения расходимостей может быть сформулирована с помощью метода конечных частей Адамара. При этом существенно, что хотя функции Грина $G(x, y)$ не являются трансляционно-инвариантными объектами, они допускают в окрестности светового конуса разложение вида

$$G(x, y) = \sum_{n,m} \frac{f_{m,n}}{|x-y|^m} \ln^n |x-y| + G^{\text{reg}}(x, y), \tag{15}$$

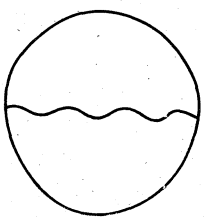
где $G^{\text{reg}}(x, y)$ конечна в окрестности светового конуса, а функции f_{mn} при калибровочных преобразованиях преобразуются ковариантным образом.

Рассмотрим вначале несколько простых примеров. Как известно, в обычном формализме на промежуточных этапах возникают зависящие от калибровки константы перенормировки Z_1 и Z_2, исчезающие лишь в окончательном ответе после перенормировки внешних линий и учета тождеств Уорда. В нашем формализме эти неинвариантные контрчлены вообще не нужны. Для однопетлевых диаграмм это очевидно. Поскольку совокупность однопетлевых диаграмм инвариантна относительно преобразований (13), этим же свойством должна обладать их локальная расходящаяся часть. Наиболее общий вид локальной калибровочно-инвариантной структуры

$$-\frac{1}{4}\frac{(Z_3-1)}{e^2} f_{\mu\nu}^{\text{кл}} f_{\mu\nu}^{\text{кл}} + (Z_2-1)\left[\bar{\psi}_{\text{кл}}(i\hat{\partial} + \hat{A}_{\text{кл}} + m)\psi_{\text{кл}}\right] + \delta m \bar{\psi}_{\text{кл}}\psi_{\text{кл}}. \tag{16}$$

В силу классических уравнений движения, член, содержащий Z_2, обращается в нуль.

Рассмотрим теперь двухпетлевую диаграмму, изображенную на рисунке. Эта диаграмма содержит расходящиеся подграфы, и в соответствии с



предписаниями R-операции нужно вначале сделать вычитание в подграфе, в результате чего возникнет выражение вида

$$(Z_2-1)\int \delta(x-y)\,(i\hat{\partial} + \hat{A}_{\text{кл}} + m)\,G(x, y)\,dx\,dy. \tag{17}$$

Входящий в эту формулу дифференциальный оператор, действуя на функцию Грина, дает δ-функцию, и, следовательно, все это выражение вносит лишь несущественный постоянный вклад, который можно включить в постоянную нормировки.

Нетрудно провести аналогичное доказательство и для произвольных диаграмм. Как мы уже видели, в однопетлевом приближении член, содержащий Z_2, обращается в нуль. Мнимая часть двухпетлевых диаграмм однозначно восстанавливается по однопетлевым диаграммам и, следовательно, не зависит от Z_2. Z_2 может дать вклад лишь в локальную расходящуюся часть двухпетлевых диаграмм, которая по соображениям инвариантности должна иметь вид (16). Повторяя эти рассуждения для диаграмм с произвольным числом петель, легко убедиться, что контрчлен $\sim(Z_2-1)$ вообще выпадает из выражения для перенормированной S-матрицы (отметим, что расходимости, ответственные за перенормировку вершины и волновой функции фермиона, сокращаются лишь в сумме диаграмм данного порядка. Отдельные диаграммы при этом могут расходиться).

Контрчлен (16) устраняет расходимости из «вакуумных» диаграмм. Чтобы найти полный контрчлен, устраняющий расходимости также из невакуумных диаграмм (которые могут входить в качестве расходящихся подграфов в вакуумные), достаточно рассмотреть структуру собственно расходящихся диаграмм. Из вида лагранжиана взаимодействия в формуле (10) следует, что соответствующие аналитические выражения зависят лишь от сумм $\psi+\psi_{\text{кл}}$, $A+A_{\text{кл}}$. Следовательно, полный контрчлен получается из «вакуумного» заменой $A_{\text{кл}}\to A_{\text{кл}}+A$, $\psi_{\text{кл}}\to\psi_{\text{кл}}+\psi$ и имеет вид

$$-\frac{1}{4}\frac{(Z_3-1)}{e^2}(f_{\mu\nu}^{\text{кл}}+f_{\mu\nu})(f_{\mu\nu}^{\text{кл}}+f_{\mu\nu}). \tag{18}$$

Единственная перенормировка (помимо перенормировки массы), которую нужно сделать в нашем формализме для устранения ультрафиолетовых расходимостей в квантовой электродинамике,— это перенормировка заряда.

С точки зрения обычного формализма этот результат можно объяснить следующим образом. Как известно, существует калибровка (т. е. можно указать такое $\alpha=\alpha_0+e^2\alpha_1+\ldots$), в которой $Z_1=Z_2=1$. В этой калибровке обычный формализм естественно приводит к тому же результату, что и наш. В то же время функционал (10) вообще не зависит от выбора α. Заменой переменных интегрирования

$$\psi(x)\to e^{i\varphi(x)}\psi(x)+\psi_{\text{кл}}(e^{i\varphi(x)}-1),\quad \bar\psi(x)\to e^{-i\varphi(x)}\bar\psi(x)+ \tag{19}$$
$$+\bar\psi_{\text{кл}}(e^{-i\varphi(x)}-1),\quad A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial_\mu\varphi,$$

где функция φ удовлетворяет уравнению

$$\Box\varphi=-\frac{\delta\alpha}{\alpha}(\partial_\mu A_\mu),$$

интеграл (10) приводится к виду

$$S=N^{-1}\int\exp\left\{i\int\left[L(\psi+\psi_{\text{кл}},A+A_{\text{кл}})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2(\alpha+\delta\alpha)}(\partial A)^2-L(A_{\text{кл}},\psi_{\text{кл}})\right]dx\right\}d\mu.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $L(\psi+\psi_{кл}, A+A_{кл})$ инвариантен относительно преобразований (19), а якобиан этой замены единичный. Следовательно, в функционале (10) в любой калибровке можно положить $Z_1=Z_2=1$, что совпадает с полученным ранее результатом.

3. ПОЛЕ ЯНГА — МИЛЛСА

Производящий функционал для радиационных поправок к S-матрице в теории Янга — Миллса можно записать, например, в виде

$$S(B_0)=N^{-1}\int \exp\left\{i\int [L(B+B_{кл})-L(B_{кл})]dx\right\}\det M\prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu)\,dB, \tag{20}$$

где

$$L=\frac{1}{8g^2}\operatorname{Tr}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{21}$$

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu+[B_\mu, B_\nu], \qquad B_\mu=\tau^a B_\mu{}^a,$$

матрицы τ образуют ортонормированный базис присоединенного представления алгебры Ли рассматриваемой калибровочной группы G, $\operatorname{Tr}\tau^a\tau^b=-2\delta^{ab}$. Лагранжиан (21) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$B_\mu\to B_\mu+[B_\mu, \varphi]+\partial_\mu\varphi. \tag{22}$$

Оператор M определяется формулой

$$Mu=\Box u+[B_\mu, \partial_\mu u], \tag{23}$$

$\det M$ является значением калибровочно-инвариантного функционала $\Delta(B+B_{кл})$ на поверхности $\partial_\mu B_\mu=0$, где

$$\Delta^{-1}(B+B_{кл})=\int \delta(\partial_\mu B_\mu{}^\Omega)\,d\Omega. \tag{24}$$

$\Omega(x)$ при каждом x есть элемент группы G, $d\Omega$ — инвариантная мера на группе,

$$B_\mu{}^\Omega=\Omega(B_\mu+B_\mu{}^{кл})\Omega^{-1}+\Omega\,\partial_\mu\Omega^{-1}-B_\mu{}^{кл}. \tag{25}$$

Действительно,

$$\delta(\partial_\mu B_\mu{}^\Omega)=\delta(\partial_\mu B_\mu+\Box\varphi+\partial_\mu[(B_\mu+B_\mu{}^{кл}), \varphi]+o(\varphi^2)). \tag{26}$$

На поверхности $\partial_\mu B_\mu=0$ аргумент δ-функции обращается в нуль лишь при $\varphi=0$. Следовательно, вклад в интеграл (24) дает только окрестность единичного элемента. Интеграл легко вычисляется, и в результате получаем

$$\prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu)\det M=\prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu)\Delta(B_\mu+B_\mu{}^{кл}). \tag{27}$$

Поле $B_\mu{}^{кл}$ реализует экстремум классического действия: $\delta A/\delta B_\mu(x)=0$. Как и в электродинамике, представление

$$B_\mu{}^{кл}=B_\mu{}^0+\int D_c{}^{\mu\nu}(x-y)\frac{\delta A_I}{\delta B_\nu(y)}\,dy \tag{28}$$

неоднозначно, однако по тем же причинам эта неоднозначность не сказывается на физических результатах.

В формуле (20) мы для определенности выбрали дополнительное условие в виде $\partial_\mu A_\mu=0$. При этом правила Фейнмана выглядят наиболее просто, однако из явного вида функционала (20) не очевидна его инвариантность относительно калибровочных преобразований полей $B_\mu^{\text{кл}}$. Эта кажущаяся неинвариантность обусловлена выбором нековариантного дополнительного условия. В действительности функционал $S(B^{\text{кл}})$, конечно, не зависит от конкретного выбора дополнительного условия, и как мы покажем ниже, может быть преобразован к явно инвариантному виду.

С этой целью введем функционал $\tilde{\Delta}(B, B_{\text{кл}})$, определяемый условием

$$(29)\qquad 1=\int\prod_x \delta(\nabla_\mu^{B_{\text{кл}}} B_\mu^\Omega - c(x))\,d\Omega, \qquad \nabla_\mu^{B_{\text{кл}}}=\partial_\mu+[B_\mu^{\text{кл}}],$$

здесь $c(x)$ — произвольная функция, $\nabla_\mu^{B_{\text{кл}}}$ — ковариантная производная, в которой роль связности играет поле $B_\mu^{\text{кл}}$.

Домножим функционал (20) на постоянный множитель (29) и сделаем замену переменных

$$(30)\qquad B_\mu^\Omega=B_\mu'.$$

При преобразованиях (30) $(B_\mu+B_\mu^{\text{кл}})$ преобразуется согласно (22), и, следовательно, лагранжиан и функционал $\Delta(B+B_{\text{кл}})$ не меняются при такой замене. Якобиан преобразования (30) единичный. Поэтому зависимость от Ω в преобразованном интеграле появляется лишь в аргументе δ-функции. Интеграл по $d\Omega$ берется, и, принимая во внимание (24), получаем

$$(31)\qquad S=N^{-1}\int \exp\left\{i\int[L(B^{\text{кл}}+B)-L(B^{\text{кл}})]\,dx\right\}\delta(\nabla_\mu^{B_{\text{кл}}} B_\mu - c)\,\tilde{\Delta}(B_{\text{кл}}, B)\,dB.$$

Воспользовавшись тем, что интеграл (31) в действительности не зависит от $c(x)$, его можно умножить на произвольную функцию от c и проинтегрировать по c. Интегрируя с функцией $\exp\{i\int\frac{c^2(x)}{2\alpha}dx\}$, получаем

$$(32)\qquad S=N^{-1}\int \exp\left\{i\int\left[L(B_{\text{кл}}+B)+\frac{1}{2\alpha}(\nabla_\mu^{B_{\text{кл}}} B_\mu)^2-L(B_{\text{кл}})\right]dx\right\}\times$$
$$\times\tilde{\Delta}(B_{\text{кл}}, B)\prod_x dB.$$

Функционал $\tilde{\Delta}(B_{\text{кл}}, B)$ вычисляется так же, как функционал $\Delta(B)$,

$$(33)\qquad \tilde{\Delta}(B_{\text{кл}}, B)=\det\{\nabla_\mu^{B_{\text{кл}}}, \nabla_\mu^{B_{\text{кл}}+B}\}.$$

$\tilde{\Delta}(B_{\text{кл}}, B)$ можно записать в виде добавки к действию, если ввести вспомогательное поле $a(x)$ ($a(x)$ антикоммутирует с $\bar{a}(x)$):

$$(34)\qquad \tilde{\Delta}=\int\exp\left\{i\int[\nabla_\mu^{B_{\text{кл}}}\bar{a}\nabla_\mu^{B_{\text{кл}}+B}a]\,dx\right\}d\bar{a}\,da.$$

S-матрица, записанная в виде (32), явным образом инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$(35)\qquad B_\mu^{\text{кл}}\to B_\mu^{\text{кл}}+[B_\mu^{\text{кл}}, \varphi]+\partial_\mu\varphi.$$

Действительно, если мы одновременно с преобразованием (35) сделаем замену переменных интегрирования

$$B_\mu \to B_\mu + [B_\mu, \varphi], \quad a \to a + [a, \varphi], \quad \bar{a} \to \bar{a} - [\bar{a}, \varphi], \tag{36}$$

то интеграл (32) не изменится в силу инвариантности подынтегрального выражения относительно совместных преобразований (35), (36).

Рассуждая так же, как и в случае электродинамики, можно сделать вывод, что локальная расходящаяся часть «вакуумных» диаграмм должна быть калибровочно-инвариантна и, следовательно, иметь вид

$$\mathrm{Tr}\frac{1}{8g^2}(Z-1)F_{\mu\nu}^{\text{кл}}F_{\mu\nu}^{\text{кл}}. \tag{37}$$

Однако в отличие от электродинамики лагранжиан взаимодействия в формуле (32) уже не есть функция лишь от суммы $(B+B_{\text{кл}})$, поэтому на первый взгляд не очевидно, что «невакуумные» контрчлены будут иметь такую же структуру. Тем не менее это так, поскольку функционал (32) был получен путем тождественных преобразований интеграла (20), в котором L_I зависит лишь от суммы $(B+B_{\text{кл}})$.

Помимо расходящихся диаграмм с векторными внешними линиями, в теории Янга — Миллса есть расходящиеся диаграммы, в которых внешними являются вспомогательные поля a, $\bar{a}$. Рассуждая, как и раньше, легко понять, что соответствующий контрчлен должен иметь структуру

$$\tilde{Z}\nabla_\mu^{B_{\text{кл}}}\bar{a}\nabla_\mu^{(B_{\text{кл}}+B)}a$$

(если бы поля a присутствовали в асимптотических состояниях, то контрчлен зависел бы от $(\bar{a}+\bar{a}_{\text{кл}})$, но в данном случае $a_{\text{кл}}\equiv 0$). Заменой переменных интегрирования $a \to \tilde{Z}^{-1/2}a$ константу $\tilde{Z}$ можно полностью изгнать.

Итак, единственная перенормировка, которую нужно сделать для устранения ультрафиолетовых расходимостей,— это перенормировка заряда. Полный контрчлен имеет вид, аналогичный (37),

$$\frac{1}{8}\frac{(Z-1)}{g^2}\mathrm{Tr}\{(F_{\mu\nu}^{\text{кл}}+F_{\mu\nu})(F_{\mu\nu}^{\text{кл}}+F_{\mu\nu})\}. \tag{38}$$

Этот результат легко понять и с точки зрения обычного формализма. В этом формализме константы Z_1 и Z_2 зависят от калибровки, и, в частности, можно выбрать калибровку, в которой $Z_1=Z_2$. В этой калибровке стандартный подход приводит к тем же результатам, что и описанный выше. В силу независимости функционала (32) от выбора калибровки он всегда обладает этим свойством.

Не представляет никаких трудностей включение взаимодействия с полями материи. Вводя калибровочно-инвариантное взаимодействие с полем материи $\bar{\psi}(i\hat{\partial}+\hat{B}_aT^a)\psi$, и рассуждая так же, как в случае электродинамики, легко убедиться, что соответствующий контрчлен не дает вклада в матричные элементы S-матрицы, и все расходимости по-прежнему убираются перенормировкой заряда.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разобранные выше примеры показывают, что предлагаемый формализм позволяет проводить процедуру перенормировки более экономным способом, чем стандартный подход, основанный на производящем функционале для функций Грина. В теории вообще не появляются неинвариантные величины типа перенормировки волновой функции электрона. Единственная остающаяся перенормировка — перенормировка заряда — допускает простую физическую интерпретацию как эффект экранировки.

Наибольшие преимущества предлагаемый подход может дать в теориях со сложной структурой контрчленов, например в моделях со спонтанно нарушенной симметрией и особенно в гравитации. Развитая выше методика непосредственно обобщается на эти теории. В моделях со спонтанно нарушенной симметрией она позволяет сразу же выписать все необходимые контрчлены (отметим, что в отличие от работы [10] включение взаимодействия с полями материи не вызывает в нашем подходе никаких трудностей). Что касается квантовой теории гравитации, то на сегодня мы можем лишь сказать, что необходимые контрчлены представляют собой ряд по инвариантным структурам. Вопрос о перенормируемости этой теории пока открыт.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 апреля 1974 г.

Литература

[1] Л. Д. Фаддеев, В. Н. Попов. Phys. Lett., **25B**, 29, 1967; препринт ИТФ-67-36, Киев, 1967.
[2] B. S. De Witt. Phys. Rev., **162**, 1195, 1239, 1967.
[3] J. S. Ward. Phys. Rev., **77**, 293, 1950.
[4] Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, **29**, 258, 1955.
[5] А. А. Славнов. Preprint ITP 71-83E, Kiev, 1971; ТМФ, **10**, 153, 1972.
[6] J. C. Taylor. Nucl. Phys., **B33**, 436, 1971.
[7] Л. Д. Фаддеев. Труды семинара «Векторные мезоны и электромагнитные взаимодействия», Дубна, 1969.
[8] T. Honnerkamp. Nucl. Phys., **B48**, 269, 1972.
[9] G't Hooft. Preprint CERN TH-1692, 1973.
[10] R. Kallosh. Preprint Lebedev Physical Institute, Moscow, 1974.

GENERATING FUNCTIONAL FOR THE *S*-MATRIX IN GAUGE-INVARIANT THEORIES

I. Ya. Arefyeva, A. A. Slavnov, L. D. Faddeev

The expression for generating functional of the matrix elements of the scattering matrix is obtained. It is shown that in the electrodynamics and the Yang – Mills theory all the ultra-violet divergencies can be removed by means of charge renormalization. The counter-terms depending on the gauge do not appear at all in the formalism proposed.