Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, М. А. Семенов-Тян-Шанский, Л. Д. Фаддеев, О калибровочных условиях для поля Янга–Миллса, *ТМФ*, 1979, том 38, номер 1, 3–14

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 195.218.150.2
6 июля 2017 г., 15:00:52

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 38, № 1
январь, 1979

О КАЛИБРОВОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ПОЛЯ ЯНГА — МИЛЛСА

А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, М. А. Семенов-Тян-Шанский, Л. Д. Фаддеев

Обсуждается проблема выбора условий, фиксирующих калибровку в формализме континуального интеграла по фазовому пространству. Предлагается использовать условия, включающие как вектор-потенциал A, так и канонически-сопряженную ему переменную E. Найдены условия, позволяющие явно решить связь и сформулировать теорию только в терминах физических степеней свободы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время найдены [1] и широко обсуждаются [2] ограничения на применение методов квантования поля Янга — Миллса [3], разработанных в расчете на теорию возмущений. Эти ограничения состоят в том, что для полей большой амплитуды обычные калибровочные условия (например, $\partial_i A_i=0$) могут стать сингулярными и не фиксировать однозначно представителя в классе калибровочно-инвариантных полей. В связи с этим снова стал актуальным вопрос о выборе калибровочного условия, позволяющего однозначно и достаточно явно выделить такого представителя. В настоящей работе эта проблема обсуждается в формализме континуального интеграла по фазовому пространству. При этом используется общая схема квантования в фазовом пространстве систем со связями и дополнительными условиями, предложенная в [4].

Отправным пунктом нашей работы является статья Голдстоуна и Джакива [5]. В этой работе авторам удалось, используя специфику группы $SU(2)$, явно разрешить связи для волновой функции $\Psi(E)$, описывающей квантовую систему Янга — Миллса в E-представлении, и сформулировать теорию в терминах только физических степеней свободы. В рамках нашего подхода рецепт Голдстоуна и Джакива имеет следующий смысл: дополнительное условие (калибровка) накладывается на компоненты электрического поля E, а не на вектор-потенциал A. С помощью нашего метода можно полностью исключить калибровочные степени свободы и для любой физически интересной калибровочной группы.

В разделе 2 рассматривается калибровочное поле с группой $SU(2)$. Производящий функционал S-матрицы представлен в виде континуального интеграла по физическим степеням свободы. При этом результаты Голдстоуна — Джакива получаются при некотором выборе дополнительного условия, накладываемого только на компоненты поля E.

В разделе 3 мы предлагаем другой выбор фиксирования калибровки. Предположенное дополнительное условие можно непосредственно обоб-

щить на любую физически интересную группу. В разделе 3 выкладки проводятся на примере группы $SU(N)$. Таким образом, и в общем случае калибровочную теорию можно сформулировать с помощью только физических степеней свободы.

2. ПОЛЕ ЯНГА — МИЛЛСА С ГРУППОЙ $SU(2)$

Рассмотрим поле Янга — Миллса с группой $SU(2)$. Потенциал A_μ является матрицей 2×2: $A_\mu = A_\mu{}^a \tau^a$, где τ^a — матрицы Паули. В калибровке $A_0=0$ динамика системы описывается при помощи обобщенной гамильтоновой формулировки со связью. Каноническими переменными являются поля A_i и E_i, имеющие следующие скобки Пуассона:

$$\{E_i{}^a(\mathbf{x}), A_k{}^b(\mathbf{y})\} = \delta_{ik}\delta_{ab}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{1}$$

Действие имеет вид

$$\begin{gathered} S = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\int d^4x \left[\partial_0 E_i A_i + \frac{g^2}{2}E_i{}^2 + \frac{1}{2g^2}B_i{}^2\right], \\ B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}, \qquad F_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j + \frac{1}{2i}[A_j, A_k]. \end{gathered} \tag{2}$$

К уравнениям движения, порожденным этим действием, добавляется связь

$$\Phi = 0, \tag{3}$$

где

$$\Phi = \partial_k E_k + \frac{1}{2i}[A_k, E_k] \equiv \nabla_k E_k. \tag{4}$$

Связь Φ является генератором калибровочных преобразований, не зависящих от времени. При бесконечно малых калибровочных преобразованиях с параметром $\omega(\mathbf{x})$ поля преобразуются так:

$$\delta E_k = \frac{1}{2i}[\omega, E_k] = \{\Phi_\omega, E_k\}, \qquad \delta A_k = \frac{1}{2i}[\omega, A_k] - \partial_k\omega = \{\Phi_\omega, A_k\}, \tag{5}$$

здесь $\Phi_\omega = {}^1/_2\operatorname{tr}\int d^3\mathbf{x}\Phi(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})$. Гамильтониан H системы

$$H = {}^1/_4\operatorname{tr}\int d^3\mathbf{x}(E_i{}^2 + B_i{}^2) \tag{6}$$

калибровочно-инвариантен, т. е. его скобки Пуассона со связью равны нулю: $\{\Phi, H\}=0$. Поэтому связь является интегралом движения. Если положить $\Phi=0$ в начальный момент времени, то она будет равна нулю и всегда.

Рецепт квантования такой системы со связями сводится к записи континуального интеграла для производящего функционала S-матрицы в виде [4]

$$Z = \int \prod_{x,t,i,k} dE_i dA_k \exp(iS) \prod_{x,t} \delta(\Phi(x))\delta(\chi(x))\det\|\{\Phi, \chi\}\|. \tag{7}$$

Здесь χ — дополнительное условие, выбор которого достаточно произволен; необходимо только, чтобы

$$\det\|\{\Phi, \chi\}\| \neq 0. \tag{8}$$

В (7) интегрирование ведется по полям, имеющим заданную асимптотику при $|t|\to\infty$ [6]. Обычно в качестве дополнительного условия выбирают условие $\chi=\partial_i A_i$ (кулоновская калибровка). При этом, однако, $\det\|\{\Phi,\chi\}\|=$ $=\det(\partial_i\nabla_i(A))$ для больших полей может обратиться в нуль. Действительно, как показано в работе [1], оператор $\partial_i\nabla_i(A)$ иногда имеет нулевые собственные значения.

Мы предложим такой выбор χ, для которого $\det\|\{\Phi,\chi\}\|=\mathrm{const}$. Для этого удобно разбить все степени свободы A и E на физические и калибровочные. Представим E и A в виде

$$E_i^a=U_{al}P_{li},\qquad A_i^a=U_{al}L_{li}. \tag{9}$$

Здесь $U\in SO(3)$, а P — симметричная знакоопределенная матрица (т. е. $P=P^T$ и матрица P или $-P$ положительна). На матрицу L никаких условий не накладывается. Матрицы U и P определяются по E однозначно. Матрица P является изоскаляром, матрица U преобразуется при изотопических вращениях так же, как E (5):

$$\begin{aligned}&\{\Phi^a(\mathbf{x}),E_k^b(\mathbf{y})\}=-\epsilon_{abc}E_k^c(\mathbf{y})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\&\{\Phi^a(\mathbf{x}),U_{bk}(\mathbf{y})\}=-\epsilon_{abc}U_{ck}(\mathbf{y})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned} \tag{10}$$

При пространственных поворотах матрицы P и L преобразуются подобно, строки матрицы U преобразуются как три-векторы, причем матрица U умножается справа на ортогональную матрицу вращений R: $P\to R^{-1}PR$, $L\to R^{-1}LR$, $U\to UR$. Вместо переменной L естественно ввести переменные Q и T, разбив матрицу L на симметричную и антисимметричную части:

$$Q_{ik}={}^1/_2(L_{ik}+L_{ki});\qquad T_i=\epsilon_{ikl}P_{km}L_{lm}=-\epsilon_{abc}U_{ai}A_k^bE_k^c. \tag{11}$$

Переменная L выражается через Q и T следующим образом:

$$\begin{aligned}&L_{li}=Q_{li}+\epsilon_{lin}(\widetilde{P}^{-1})_{nm}[T_m-\epsilon_{mkp}P_{kq}Q_{pq}],\\&\widetilde{P}_{mn}=P_{mn}-\delta_{mn}(\mathrm{tr}\,P).\end{aligned} \tag{12}$$

Переменная T имеет смысл плотности изоспина. Из дальнейшего будет видно, что переменные Q и T сопряжены переменным P и U, соответственно. Итак, мы перешли от переменных A и E к новым переменным P, Q, U, T.

В новых переменных действие (2) выражается так:

$$\begin{aligned}S=-\int d^4x\Big[&\partial_0P_{ai}Q_{ai}-\frac{1}{2}\epsilon_{knl}\partial_0U_{an}U_{al}T_k+\\&+\frac{g^2}{2}P_{ai}P_{ai}+\frac{1}{2g^2}B_i^aB_i^a\Big].\end{aligned} \tag{13}$$

Связь (4) в новых переменных запишется в виде

$$\Phi^a=\partial_k(U_{al}P_{lk})-U_{al}T_l. \tag{14}$$

Осталось пересчитать меру интегрирования $dAdE$ в континуальном интеграле (7). Можно показать (см. приложение 1), что

$$\prod_{a,i}dA_i^a\prod_{b,k}dE_k^b=d\mu(U)\,dP\,dQ\prod_n dT_n. \tag{15}$$

Здесь $d\mu(U)$ — инвариантная мера на группе ортогональных матриц; dP, dQ — это мера на симметричных матрицах:

$$dP=\prod_a dP_{aa}\prod_{b>a} dP_{ba},\quad dQ=\prod_a dQ_{aa}\prod_{b>a} dQ_{ba}.$$

Итак, мы можем переписать континуальный интеграл (7) в новых переменных:

$$Z=\int d\mu(U)\,dPdQdT\delta(\Phi)\,\delta(\chi)\det\|\{\Phi,\chi\}\|\exp(iS). \tag{16}$$

Теперь рассмотрим главный вопрос — вопрос о дополнительном условии χ. Выберем χ (матрицу (3×3)) в виде

$$\chi=U-U^0, \tag{17}$$

здесь U^0 — постоянная ортогональная матрица. Уравнение $\chi=0$ содержит три независимых условия. Матрица U^0 при пространственных вращениях преобразуется так: $U^0\to U^0R$. Как мы увидим в дальнейшем, окончательный ответ не будет содержать U^0. Вычислим скобку Пуассона $\{\Phi,\chi\}$ (10):

$$\{\Phi^a(\mathbf{x}),\chi_{ik}(\mathbf{y})\}=\{\Phi^a(\mathbf{x}),U_{ik}(\mathbf{y})\}=-\epsilon_{aic}U_{ck}(\mathbf{y})\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{18}$$

На поверхности дополнительного условия $\chi_{ik}=0$ скобки Пуассона имеют вид

$$\{\Phi^a(\mathbf{x}),\chi_{ik}(\mathbf{y})\}=-\epsilon_{ail}U_{lk}{}^0\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{19}$$

и определитель $\det\|\{\Phi^a,\chi_{ik}\}\|=\mathrm{const}$. Таким образом, определитель выносится за знак континуального интеграла.

Перепишем выражение для Z (16):

$$Z=\int d\mu(U)\,dPdQdT\delta(U_{ik}-U_{ik}{}^0)\,\delta(\partial_kP_{ak}-T_a)\exp(iS). \tag{20}$$

Здесь мы подставили выражение для связи Φ^a (14) на поверхности дополнительного условия $U_{ik}=U_{ik}{}^0$. Интегрирование по U и T можно выполнить явно с помощью соответствующих δ-функций. Получаем окончательно

$$Z=\int dPdQ\exp(iS). \tag{21}$$

Выражение для действия S получается из (2), (9), (12), (13) и из условий $T_a=\partial_kP_{ak}$, $U=U^0$:

$$S=-\int d^4x\left[\partial_0P_{ai}Q_{ai}+\frac{g^2}{2}P_{ai}P_{ai}+\frac{1}{2g^2}B_i{}^aB_i{}^a\right], \tag{22}$$

$$B_i{}^a=-{}^1/_2\epsilon_{ijk}F_{jk}{}^a,\qquad F_{jk}{}^a=\partial_jL_{ak}-\partial_kL_{aj}+\epsilon_{abc}L_{bj}L_{ck},$$

$$L_{ai}=Q_{ai}+\epsilon_{ain}(\tilde{P}^{-1})_{nl}[\partial_kP_{lk}-\epsilon_{lkm}P_{kq}Q_{mq}],$$

$$\tilde{P}_{nl}=P_{nl}-\delta_{nl}(\mathrm{tr}\,P).$$

Таким образом, зависимость от матрицы U^0 действительно исчезла. Выражение $\partial_kP_{lk}-\epsilon_{lkm}P_{kq}Q_{mq}$ равно плотности изоспина, поэтому второе слагаемое в выражении для L_{ai} имеет смысл потенциала, генерированного собственным распределением заряда калибровочного поля. Итак, мы получили теорию, в которой «координаты» и «импульсы» представляются симметричными (3×3)-матрицами. Другими словами, это теория взаимодействующих «полей с нерелятивистскими спинами 0 и 2».

Наши переменные близки к переменным Голдстоуна и Джакива, но не совпадают с ними. Континуальный интеграл в гамильтоновом виде можно записать и используя непосредственно разделение переменных, предложенное Голдстоуном и Джакивым [5] (см. приложение 2).

3. СЛУЧАЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ГРУППЫ $SU(N)$

В разделе 2 при выборе удобных переменных для поля Янга — Миллса с группой $SU(2)$ (9) мы вслед за Голдстоуном и Джакивым существенно использовали то обстоятельство, что E_i^a представляет собой квадратную матрицу (3×3). Для произвольной группы матрица E_i^a будет прямоугольной типа $(\dim G\times3)$. Для таких матриц не существует канонического представления, аналогичного (9). Таким образом, дополнительное условие (17) не обобщается на другие группы.

Здесь мы предлагаем дополнительное условие, полностью фиксирующее калибровочный произвол в любой физически интересной группе. Наш выбор дополнительного условия приводит к ответу, физика которого даже для группы $SU(2)$ существенно отличается от физики в формулировке Голдстоуна и Джакива. Конкретные выкладки мы будем проводить на примере группы $SU(N)$. В этом случае электрическое поле $\hat{E}_i$ представляет собой три эрмитовых бесследовых матрицы $N\times N$. Дополнительные условия, которые мы выберем, делятся на две группы. Во-первых, потребуем, чтобы некоторая линейная комбинация матриц $\hat{E}_i$ была диагональна. Это еще не фиксирует калибровочный произвол полностью. Остается калибровочная инвариантность относительно абелевой подгруппы (подгруппы Картана) группы $SU(N)$. Размерность этой подгруппы $N-1$. Таким образом, мы имеем $N-1$ «электромагнитное поле», взаимодействующее с заряженными частицами. Оставшийся калибровочный произвол мы фиксируем обычным образом — выбором кулоновой калибровки для картановских компонент вектор-потенциала.

Перейдем к техническому изложению. Будем использовать в (комплексифицированной) алгебре Ли группы $SU(N)$ следующий базис. Генераторы группы естественно разделить на два класса. Генераторы подгруппы Картана λ^α $(\alpha=1,\ldots,N-1)$ — диагональные матрицы с нулевым следом:

$\lambda_{ik}{}^\alpha=N(\alpha)\left(\sum\limits_{\beta=1}^{\alpha}\delta_{i\beta}\delta_{k\beta}-\alpha\delta_{i,\alpha+1}\delta_{k,\alpha+1}\right)$, $N^{-1}(\alpha)=\sqrt{\alpha(\alpha+1)}$. Здесь нет суммирования по α. Остальные генераторы λ^{ab} $(a,\ b=1,\ldots,N;\ a\neq b)$ имеют единственный ненулевой элемент $\lambda_{ik}{}^{ab}=\delta_{ia}\delta_{kb}$. Выпишем коммутационные соотношения между генераторами:

$$
\begin{aligned}
(23)\qquad & [\lambda^\alpha,\lambda^\beta]=0,\qquad [\lambda^\alpha,\lambda^{ab}]=q_{ab}{}^\alpha\lambda^{ab},\\
& [\lambda^{ab},\lambda^{ba}]=\sum_\alpha q_{ab}{}^\alpha\lambda^\alpha,\quad [\lambda^{ab},\lambda^{cd}]=\delta_{bc}\lambda^{ad}-\delta_{ad}\lambda^{cd},\\
& q_{ab}{}^\alpha=\lambda_{aa}{}^\alpha-\lambda_{bb}{}^\alpha=-\partial_{ba}{}^\alpha.
\end{aligned}
$$

Мы рассматриваем калибровочные поля со значениями в пространстве эрмитовых матриц. Матрицы $\hat{A}_i$ и $\hat{E}_k$ имеют вид

$$(24)\qquad \hat{A}_i=\sum_{\alpha}\mathscr{A}_i{}^{\alpha}\lambda^{\alpha}+\sum_{a\neq b}A_i{}^{ab}\lambda^{ab},\quad A_i{}^{ab}=\bar{A}_i{}^{ba},$$

$$\hat{E}_i=\sum_{\alpha}\mathscr{E}_i{}^{\alpha}\lambda^{\alpha}+\sum_{a\neq b}E_i{}^{ab}\lambda^{ab},\quad E_i{}^{ab}=\bar{E}_i{}^{ba}.$$

Действие калибровочного поля запишем в виде

$$(25)\qquad S=-\mathrm{tr}\int d^4x\left[\partial_0\hat{E}_k\hat{A}_k+\frac{g^2}{2}\hat{E}_k{}^2+\frac{1}{2g^2}\hat{B}_k{}^2\right]=$$

$$=-\int d^4x\left[\partial_0\mathscr{E}_k{}^{\alpha}A_k{}^{\alpha}+\partial_0E_k{}^{ab}A_k{}^{ba}+\frac{g^2}{2}(\mathscr{E}_k{}^{\alpha})^2+\frac{g^2}{2}E_k{}^{ab}E_k{}^{ba}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\,B_i{}^2\right]$$

$$(26)\qquad \hat{B}_i=-{}^1/_2\epsilon_{ikl}\hat{F}_{kl},\qquad \hat{F}_{kl}=\partial_k\hat{A}_l-\partial_l\hat{A}_k+i[\hat{A}_k,\hat{A}_l].$$

Выпишем ненулевые скобки Пуассона канонических переменных:

$$(27)\qquad \{\mathscr{E}_i{}^{\alpha}(\mathbf{x}),\mathscr{A}_k{}^{\beta}(\mathbf{y})\}=\delta_{ik}\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

$$\{E_i{}^{ab}(\mathbf{x}),A_k{}^{cd}(\mathbf{y})\}=\delta_{ik}\delta_{ad}\delta_{bc}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Связь $\hat{\Phi}$, $\hat{\Phi}=\partial_k\hat{E}_k+i[\hat{A}_k,\hat{E}_k]$ во введенном базисе имеет вид

$$(28)\qquad \varphi^{\alpha}=\partial_i\mathscr{E}_i{}^{\alpha}+i\sum_{a\neq b}q_{ab}{}^{\alpha}A_k{}^{ab}E_k{}^{ba},$$

$$\Phi^{ab}=\partial_iE_i{}^{ab}+i\sum_{\beta}q_{ab}{}^{\beta}\mathscr{A}_i{}^{\beta}E_i{}^{ab}-i\sum_{\beta}q_{ab}{}^{\beta}\mathscr{E}_i{}^{\beta}A_i{}^{ab}+$$

$$+i\sum_{c}(A_i{}^{ac}E_i{}^{cb}-E_i{}^{ac}A_i{}^{cb}).$$

Скобка Пуассона связи с гамильтонианом системы равна нулю. Из этой записи явно видна локальная калибровочная инвариантность относительно подгруппы Картана группы $SU(N)$ (максимальной абелевой подгруппы). Поля из подалгебры Картана в дальнейшем будут играть роль абелевых электромагнитных полей. Остальные поля играют роль заряженных полей в механизме Хиггса. Они несут электрические заряды $q_{ab}{}^{\alpha}$.

Для того чтобы наиболее просто записать дополнительные условия χ, не нарушая при этом инвариантности относительно пространственных поворотов, перейдем от переменных $\hat{E}$, $\hat{A}$ к новым переменным U, P, L:

$$(29)\qquad \hat{E}_i=U_{ik}\hat{P}_k,\quad \hat{A}_i=U_{ik}\hat{L}_k.$$

Здесь матрицы $\hat{P}_k$ удовлетворяют условию $\mathrm{tr}\,(\hat{P}_i\hat{P}_k)=0$ при $i\neq k$. Матрицы $\hat{P}$ являются пространственными скалярами. Переменная U — ортогональная матрица 3×3. Она преобразуется как вектор при пространственных вращениях и является изоскаляром. Переменные $\hat{P}$ и U — функции только E. Действие и связи в новых переменных представим в виде

$$(30)\qquad S=-\int d^4x\left[U_{il}\partial_0U_{ik}\mathscr{P}_k{}^{\alpha}\mathscr{L}_l{}^{\alpha}+U_{il}\partial_0U_{ik}P_k{}^{ab}L_l{}^{ba}+\partial_0\mathscr{P}_i{}^{\alpha}L_i{}^{\alpha}+\right.$$

$$\left.+\partial_0P_i{}^{ab}L_i{}^{ba}+\frac{g^2}{2}(\mathscr{P}_i{}^{\alpha})^2+\frac{g^2}{2}P_i{}^{ab}P_i{}^{ba}+\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\,\hat{B}^2\right],$$

$$(31)\qquad \varphi^{\alpha}=\partial_i(U_{ik}\mathscr{P}_k{}^{\alpha})+i\sum_{a\neq b} q_{ab}{}^{\alpha}L_i{}^{ab}P_i{}^{ba},$$

$$\Phi^{ab}=\partial_i(U_{ik}P_k{}^{ab})+i\sum_{\beta} q_{ab}{}^{\beta}\mathscr{L}_i{}^{\beta}P_i{}^{ab}-i\sum_{\beta} q_{ab}{}^{\beta}\mathscr{P}_i{}^{\beta}L_i{}^{ab}+$$

$$+i\sum_{c}(L_i{}^{ac}P_i{}^{cb}-P_i{}^{ac}L_i{}^{cb}).$$

Здесь рукописные буквы означают проекции полей на подалгебру Картана, а курсивные — на ортогональное дополнение. Выражение для B в (30) получается при подстановке (29) в (26).

Производящий функционал Z для S-матрицы в новых переменных имеет вид

$$(32)\qquad Z=\int d\hat{A}_i d\hat{E}_k \exp(iS)\,\delta(\Phi)\,\delta(\chi)\det\|\{\Phi,\chi\}\|=$$

$$=\int d\mu(U)\,d\hat{L}_i d\hat{P}_k\prod_{i>k}\delta(\mathrm{tr}(\hat{P}_i\hat{P}_k))D\exp(iS)\,\delta(\Phi)\,\delta(\chi)\det\|\{\Phi,\chi\}\|.$$

При переходе к интегрированию по новым переменным возник якобиан D (см. приложение 1)

$$(33)\qquad D=\prod_{x,t}\prod_{i>k}\mathrm{tr}(\hat{P}_i{}^2-\hat{P}_k{}^2).$$

Теперь мы подготовили все обозначения для того, чтобы перейти к основному вопросу — вопросу о выборе дополнительного условия. Мы выберем дополнительные условия χ^{α} ($\alpha=1,\ldots,N-1$); χ^{ab} ($a,\ b=1,\ldots,N$; $a\neq b$) следующим образом:

$$(34)\qquad \chi^{\alpha}=\partial_k\mathscr{A}_k{}^{\alpha},\quad \chi^{\alpha}=0,\quad \chi^{ab}=U_{j3}E_j{}^{ab}=P_3{}^{ab},\quad \chi^{ab}=0.$$

Последнее условие эквивалентно требованию диагональности матрицы $\hat{P}_3$. Таким образом, для диагональных (картановских) полей мы выбираем обычную кулоновскую калибровку, для некартановских — «заряженных» полей калибровочное условие мы накладываем на компоненты поля E. Число дополнительных условий совпадает с числом связей (31).

Единственным критерием при выборе дополнительного условия χ является требование $\det\|\{\Phi,\ \chi\}\|\neq 0$. Вычислим матрицу $\|\{\Phi,\ \chi\}\|$ на поверхности дополнительных условий и связей ($\chi=0$, $\Phi=0$). Матрица скобок Пуассона имеет вид

$$(35)\qquad \|\{\Phi,\chi\}\|=\begin{pmatrix}\{\varphi^{\alpha},\chi^{\beta}\}; & \{\varphi^{\alpha},\chi^{cd}\}\\ \{\Phi^{ab},\chi^{\beta}\}; & \{\Phi^{ab},\chi^{cd}\}\end{pmatrix}.$$

Скобки Пуассона удобно вычислять при помощи «старых» канонических переменных $\mathscr{E}_i{}^{\alpha}$, E_i^{ab}, $\mathscr{A}_i{}^{\alpha}$, $A_i{}^{ab}$ (27). Мы будем пользоваться следующим фактом:

$$(36)\qquad \{U_{ik},\ \varphi^{\alpha}\}=\{U_{ik},\ \Phi^{ab}\}=0.$$

Эти формулы — следствие того, что U — изоскаляр. Для элемента $\{\varphi^{\alpha},\ \chi^{\beta}\}$ имеем

$$(37)\qquad \{\varphi^{\alpha}(\mathbf{x}),\chi^{\beta}(\mathbf{y})\}=\{\varphi^{\alpha}(\mathbf{x}),\ \partial_j\mathscr{A}_j{}^{\beta}(\mathbf{y})\}=\{\partial_k\mathscr{E}_k{}^{\alpha},\ \partial_j\mathscr{A}_j{}^{\beta}\}=$$

$$=-\delta_{\alpha\beta}\partial_x{}^2\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad \partial_x{}^2=\Delta.$$

В выражении для φ^α (28) мы оставили только слагаемое, дающее ненулевой вклад. Рассмотрим теперь элемент $\{\varphi^\alpha, \chi^{ab}\}$:

$$\{\varphi^\alpha, \chi^{ab}\} = \{\varphi^\alpha, P_3{}^{ab}\} = \{\varphi^\alpha, U_{i3}E_i{}^{ab}\} = U_{i3}\{\varphi^\alpha, E_i{}^{ab}\}. \tag{38}$$

Мы воспользовались формулами (29) и (36). В выражении для φ^α оставим только слагаемое, дающее ненулевой вклад:

$$U_{j3}\{\varphi^\alpha, E_j{}^{ab}\} = iU_{j3}\left\{\sum_{c\neq d} q_{cd}{}^\alpha A_k{}^{cd}E_k{}^{dc}, E_j{}^{ab}\right\} = -iq_{ab}{}^\alpha P_3{}^{ab}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Таким образом, на поверхности дополнительного условия $P_3{}^{cd}=0$ (34) имеем

$$\{\varphi^\alpha, \chi^{ab}\} = 0. \tag{39}$$

Наконец, вычислим элемент $\{\Phi^{ab}, \chi^{cd}\}$. Аналогично (38) получим $\{\Phi^{ab}, \chi^{cd}\} = U_{j3}\{\Phi^{ab}, E_j{}^{cd}\}$. Используя для Φ^{ab} выражение (28) и учитывая только ненулевые вклады, получим

$$\{\Phi^{ab}, E_j{}^{cd}\} = i\left\{-\sum_\alpha q_{ab}{}^\alpha \mathscr{E}_k{}^\alpha A_k{}^{ab} + \sum_c (A_k{}^{ac}E_k{}^{cb} - E_k{}^{ac}A_k{}^{cb}), E_j{}^{cd}\right\} =$$

$$= i\left(\sum_\alpha q_{ab}{}^\alpha \mathscr{E}_j{}^\alpha\right)\delta_{ad}\delta_{bc}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + C_{mn}^{ab,cd}E_i{}^{mn}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Здесь C — некоторые постоянные. Отсюда получаем

$$\{\Phi^{ab}, \chi^{cd}\} = iQ_{ab}\delta_{ad}\delta_{bc}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{40}$$

Слагаемое с C не дает вклада в (40) на поверхности дополнительного условия. Величина Q_{ab} дается выражением

$$Q_{ab}(x) = \sum_\alpha q_{ab}{}^\alpha \mathscr{P}_3{}^\alpha. \tag{41}$$

Обратим внимание на то, что скобка (40) диагональна по индексам (ab), (cd). Таким образом, матрица скобок Пуассона (35) оказывается треугольной и полученных матричных элементов достаточно для вычисления ее определителя. Он равен произведению диагональных элементов:

$$\det\|\{\Phi, \chi\}\| = \prod_x \det \partial_x{}^2 \prod_{x,a,b} Q_{ab}(x) = \Delta_{\text{coul}} \prod_{x,a,b} Q_{ab}(x). \tag{42}$$

Итак мы видим, что определитель $\det\|\{\Phi, \chi\}\|$ постоянен с точностью до локальных множителей. От них можно было бы избавиться, выбрав вместо дополнительных условий χ (34), дополнительные условия в виде $\chi^{ab} = P_3{}^{ab}/Q_{ab}$. Это, однако, излишне. Мы увидим, что локальные множители Q_{ab} сокращаются при снятии интегрирования с помощью δ-функций $\delta(\Phi^{ab})$, $\delta(\chi^{ab})$ в функциональном интеграле (32). Таким образом, $\det\|\{\Phi, \chi\}\|$ фактически равен постоянной (Δ_{coul}) и никогда не обращается в нуль. Вклад духов в этой калибровке равен нулю. Введем дополнительное условие (34) в функциональный интеграл (32):

$$Z = \int d\mu(U)\, d\hat{L}_j d\hat{P}_l \prod_{i>k} \delta(\operatorname{tr}(\hat{P}_i\hat{P}_k)) D \prod_\alpha \delta(\varphi^\alpha)\delta(\chi^\alpha)\Delta_{\text{coul}} \times$$

$$\times \prod_{a\neq b} \delta(\Phi^{ab})\delta(\chi^{ab}) \prod_{x,cd} Q_{cd}(x) \exp(iS).$$

Дельта-функции $\delta(\Phi^{ab})$ и $\delta(\chi^{ab})$ можно убрать, явно выполнив интегрирование соответственно по $L_3{}^{ab}$ и $P_3{}^{ab}$. Эти переменные в действии выразятся через остальные динамические переменные. При интегрировании $\delta(\Phi^{ab})$ по $L_3{}^{ab}$ выделится локальная мера $\left[\prod\limits_{x,a,b} Q_{ab}(x)\right]^{-1}$, которая в точности сократит локальный множитель Q_{ab} в $\det\|\{\Phi, \chi\}\|$.

Таким образом, Z перепишется в виде

$$Z=\int d\mu(U)\, d\mathscr{P}_i{}^{\alpha} d\mathscr{L}_k{}^{\beta} dP_v{}^{ab} dL_u{}^{cd} \prod_{i>k} \delta(\mathrm{tr}(\hat{P}_i\hat{P}_k))\,\mathrm{tr}(\hat{P}_i{}^2-\hat{P}_k{}^2)\times \tag{43}$$

$$\times \prod_{x,\alpha} \delta(\partial_i(U_{ik}\mathscr{L}_k{}^{\alpha}))\,\delta\left(\partial_i(U_{ik}\mathscr{P}_k{}^{\alpha})+i\sum_{a\neq b} q_{ab}{}^{\alpha} L_v{}^{ab} P_v{}^{ba}\right)\exp(iS),$$

здесь $u=1, 2$; $v=1, 2$. Мы воспользовались явным выражением для меры D (33) и связи φ^{α} (31). Здесь

$$S=-\int d^4x\Big[U_{il}\partial_0 U_{ik}\mathscr{P}_k{}^{\alpha}\mathscr{L}_l{}^{\alpha}+U_{ik}\partial_0 U_{iv}P_v{}^{ab}L_k{}^{ba}+\partial_0\mathscr{P}_i{}^{\alpha}\mathscr{L}_i{}^{\alpha}+$$

$$+\partial_0 P_v{}^{ab}L_v{}^{ba}+\frac{g^2}{2}(\mathscr{P}_i{}^{\alpha})^2+\frac{g^2}{2}P_v{}^{ab}P_v{}^{ba}+\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\,\hat{B}_i{}^2\Big],$$

где

$$\hat{B}_i=-{}^1/_2\epsilon_{ikl}\{\partial_k(U_{lc}\hat{L}_c)-\partial_l(U_{kc}\hat{L}_c)+iU_{kc}U_{ld}[\hat{L}_c, \hat{L}_d]\},$$

$$\hat{L}_i=\sum_{\alpha}\mathscr{L}_i{}^{\alpha}\lambda^{\alpha}+\sum_{a\neq b}L_i{}^{ab}\lambda^{ab};$$

из условия $\chi^{ab}=0$ мы получим, что $P_3{}^{ab}=0$, а из условия $\Phi^{ab}=0$, что

$$L_3{}^{ab}=(iQ_{ab})^{-1}\Big\{\partial_j(U_{jk}\hat{P}_k{}^{ab})+\Big(\sum_{\alpha} q_{ab}{}^{\alpha}\mathscr{L}_i{}^{\alpha}\Big)P_i{}^{ab}- \tag{44}$$

$$-i\Big(\sum_{\alpha} q_{ab}{}^{\alpha}\mathscr{P}_v{}^{\alpha}\Big)L_v{}^{ab}+i\sum_{c}(L_v{}^{ac}P_v{}^{cb}-P_v{}^{ac}L_c{}^{cb})\Big\},$$

$$Q^{ab}=\sum_{\alpha} q_{ab}{}^{\alpha}\mathscr{P}_3{}^{\alpha}.$$

Оставшиеся в (43) δ-функции выражают обычную фиксацию калибровки в абелевой электродинамике, обращение с ними не представляет труда. Локальная мера D (33) под знаком функционального интеграла исчезнет, если перейти от интегрирования по L к интегрированию по переменным, сопряженным U и P.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что в рамках общей схемы квантования систем со связями (в формализме континуального интеграла по фазовому пространству) удается выбрать дополнительное условие, однозначно фиксирующее калибровку для поля Янга — Миллса. При таком выборе дополнительного условия не возникает принципиальных трудностей даже при рассмотрении больших полей. Теория Янга — Миллса сформулирована в терминах физических степеней свободы. Однако гамильтониан, описывающий динамику этих степеней свободы, чрезвычайно сложен и сейчас неясно, к каким динамическим следствиям для поля Янга — Миллса он приводит.

Из (44) видно, что гамильтониан сингулярен, когда «электромагнитное поле» Q_{ab} (41) обращается в нуль. Теория возмущений стабилизируется, если $\langle Q_{ab}\rangle \neq 0$ в вакууме.

Мы выражаем благодарность за содержательные обсуждения В. А. Франке и П. П. Кулишу.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Поясним пересчет меры (15):

(П.1) $$\bigwedge_{a,i,b,k} (dA_i{}^a \wedge dE_k{}^b).$$

Вычисления будем производить с точностью до несущественных числовых множителей, обозначаемых в формулах буквой C. Мы будем пользоваться тем, что в выражении для меры произведение дифференциалов полностью антисимметризовано. Другими словами, мера – внешнее произведение дифференциалов (на это и указывает знак $\bigwedge$ в (П.1)). Вычислим сначала dE (7)

$$dE_i{}^a = dU_{al}P_{li} + U_{al}dP_{li} = U_{al}(U_{bl}dU_{bm}P_{mi} + dP_{li}).$$

Отсюда получаем

(П.2) $$\bigwedge_{a,i} dE_i{}^a = \bigwedge_{a,i} (U_{ba}dU_{bm}P_{mi} + dP_{ai}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\det U = 1$. Полученную матрицу дифференциалов разложим на симметричную и антисимметричную части:

(П.3) $$U_{ba}dU_{bm}P_{mi} + dP_{ai} \equiv \mathcal{D}_{ai} = \mathcal{D}_{ai}{}^+ + \mathcal{D}_{ai}{}^-,$$

где

$$\mathcal{D}_{ai}{}^\pm = {}^1/_2[(U_{ba}dU_{bm}P_{mi} + dP_{ai}) \pm (U_{bi}dU_{bm}P_{ma} + dP_{ia})].$$

Для внешнего произведения элементов $\mathcal{D}$ имеем

(П.4) $$\bigwedge_{a,b} \mathcal{D}_{ab} = C((\bigwedge_{a} \mathcal{D}_{aa}{}^+) \wedge (\bigwedge_{a>b} \mathcal{D}_{ab}{}^+)) \wedge (\bigwedge_{a>b} \mathcal{D}_{ab}{}^-).$$

Пусть $\mathcal{D}_{ab}{}^- = \epsilon_{abc}X^c$, тогда

$$\bigwedge_{a>b} \mathcal{D}_{ab}{}^- = C \bigwedge_{b} X^b.$$

В нашем случае $X^c = \tilde{P}_{ck}\theta^k$, где

$$U_{ma}dU_{mb} = {}^1/_2\epsilon_{abc}\theta^c.$$

Тогда имеем

$$\bigwedge_{a>b} \mathcal{D}_{ab}{}^- = C \det \tilde{P} \bigwedge_{b} \theta^b.$$

Здесь $\bigwedge_b \theta^b$ – инвариантная мера на группе $SU(2)$. В произведении элементов $\mathcal{D}^+$ (П.3) в (П.4) оставим только дифференциалы, не содержащие dU (из-за антисимметрии): $\mathcal{D}_{ab}{}^+ \to dP_{ab}$.

Итак, получаем для (П.2), (П.4)

(П.5) $$\bigwedge_{a,i} dE_i{}^a = C(\bigwedge_{a,i} dP_{ai}) \wedge d\mu(U) \det \tilde{P}.$$

Вычислим теперь ту часть dA_i, которая дает вклад в (П.1):

$$dA_i{}^a = dU_{al}L_{li} + U_{al}dL_{li} \to dL_{ai}.$$

Здесь $\to$ означает, что в (П.1) dA можно заменить на dL (9):

$$\bigwedge_{a,i} dL_{ai} = (\bigwedge_{l,i} dQ_{li}) \wedge (\bigwedge_{n} d[(\tilde{P}^{-1})_{nm}(T_m - \epsilon_{mkp}P_{kq}Q_{pq})]).$$

Пользуясь антисимметрией внешнего произведения дифференциалов, окончательно получим

$$(\bigwedge dA_i{}^a)\wedge(\bigwedge dE_k{}^b)=(\bigwedge dL_{ai})\wedge(\bigwedge dE_k{}^b)=$$
$$=C(\bigwedge dQ_{li})(\det\tilde{P})^{-1}\wedge(\bigwedge dT_n)\wedge(\bigwedge dE_k{}^b)=$$
$$=C(\bigwedge dQ_{li})\wedge(\bigwedge dT_n)\wedge(\bigwedge dP_{ai})\wedge d\mu(U).$$

Таким образом, мы получили формулу (15).

Остановимся теперь на другом вопросе, как перейти к интегрированию по переменным U, L, P в интеграле (32). Определим D следующим образом:

$$1=D(\hat{E})\int d\mu(U)\prod_{i>k}\delta(U_{li}\,\mathrm{tr}(\hat{E}_l\hat{E}_m)U_{mk}). \tag{П.6}$$

Вставим эту единицу под знак функционального интеграла в (32). Произведем замену переменных интегрирования по формулам $E_i=U_{ik}\hat{P}_k$, $\hat{A}_i=U_{ik}\hat{L}_k$. Поскольку $\det U=1$, то $(\bigwedge d\hat{E}_i)\wedge(\bigwedge d\hat{A}_k)=(\bigwedge\hat{P}_i)\wedge(\bigwedge d\hat{L}_k)$. Пользуясь тем, что $D(\hat{E})=D(\hat{P})$, получим (32) для Z. Для вычисления D в (33) заметим, что интеграл в (П.6) можно переписать в виде

$$D^{-1}=\int d\mu(U)\prod_{i>k}\delta(U_{li}\,\mathrm{tr}(\hat{E}_l\hat{E}_m)U_{mk})=\int d\mu(U)\prod_{i>k}\delta(U_{li}\,\mathrm{tr}(\hat{P}_l\hat{P}_m)U_{mk}).$$

Матрицы $\hat{P}$ удовлетворяют условию $\mathrm{tr}\,(\hat{P}_i\hat{P}_k)=0$ при $i\neq k$; $\mathrm{tr}\,\hat{P}_i{}^2\equiv P_i{}^2$. Следовательно, в правой части интегрирование ведется фактически по $U\sim 1$:

$$U_{ik}=\delta_{ik}+\epsilon_{ikl}\theta_l.$$

Запишем выражение для D^{-1} так:

$$D^{-1}=C\int\prod_{i>k}\delta(U_{li}\,\mathrm{tr}(\hat{P}_l\hat{P}_m)U_{mk})\,d\theta_l=C\int\prod_{i>k}\delta(\epsilon_{ikm}(P_i{}^2-P_k{}^2)\theta^m)\,d\theta_l.$$

Получаем отсюда (33):

$$D=C\prod_{i>k}(P_i{}^2-P_k{}^2).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Для поля E используем представление [5]

$$E_i{}^a=R_{i\alpha}\pi_{\alpha\beta}U_{\alpha\beta} \tag{П.7}$$

вместо представления (7). Здесь (3×3)-матрицы R и U ортогональны, а π диагональна:

$$\pi_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\pi_\alpha,\quad \pi_\alpha\geqslant 0,\quad \pi_1\leqslant\pi_2\leqslant\pi_3. \tag{П.8}$$

Это разбиение также однозначно определяет U, R, π как функции от E. Запишем A через новые переменные φ, J, T. Здесь J – плотность спина, T – плотность изоспина:

$$R_{ka}J_a=\epsilon_{klm}A_l{}^aE_m{}^a,\qquad U_{ak}T_k=\epsilon_{abc}A_i{}^bE_i{}^c. \tag{П.9}$$

Потенциал A так выражается через эти переменные:

$$A_i{}^a=R_{i\alpha}U_{\alpha\beta}\tilde{A}_{\alpha\beta}, \tag{П.10}$$
$$\tilde{A}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\varphi_\alpha+X_{\alpha\beta}{}^nJ_n+Y_{\alpha\beta}{}^nT_n,$$
$$X_{\alpha\beta}{}^n=S_{\alpha\beta}{}^n\pi_\beta,\quad Y_{\alpha\beta}{}^n=\pi_\alpha S_{\alpha\beta}{}^n\quad\text{(без суммирования по }\alpha,\ \beta),$$
$$S_{\alpha\beta}{}^n=S_{\beta\alpha}{}^n,\qquad S_{12}{}^3=(\pi_2{}^2-\pi_1{}^2)^{-1},\qquad S_{23}{}^1=(\pi_3{}^2-\pi_2{}^2)^{-1},\qquad S_{31}{}^2=(\pi_1{}^2-\pi_3{}^2)^{-1}$$

(остальные элементы матриц S^n равны нулю).

Действие (2) и связь (4) через новые переменные выражаются так:

$$S=-\int d^4x\left[\partial_0\pi_\alpha\varphi_\alpha+\frac{1}{2}\epsilon_{abc}(U^{-1}\partial_0U)_{ab}T_l+\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}(R^{-1}\partial_0R)_{ik}J_l+\right.$$
$$\left.+\frac{g^2}{2}\pi_\alpha{}^2+\frac{1}{2g^2}B_i{}^aB_i{}^a\right], \tag{П.11}$$
$$\Phi^a=\partial_i(R_{i\alpha}U_{a\beta}\pi_{\alpha\beta})+U_{ak}T_k.$$

Рецепт квантования, предложенный Голдстоуном и Джакивом, получается при выборе дополнительного условия в виде $\chi_{ik}=U_{ik}-\delta_{ik}$. Скобки Пуассона дополнительных условий и связей (на поверхности дополнительного условия) даются формулами

$$\{\Phi^a(\mathbf{x}),\chi_{ik}(\mathbf{y})\}=-\epsilon_{aik}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\qquad \det\|\{\Phi^a,\chi_{ik}\}\|=\text{const}.$$

Чтобы записать континуальный интеграл, нужно выяснить, как выглядит мера в новых переменных. Оказывается, что $dAdE=d\mu(U)\,d\mu(R)\,d\pi dTdJd\varphi$.

Функционал Z (7) имеет вид

$$Z=\int d\mu(U)\,d\mu(R)\,d\pi dTdJd\varphi\delta(U_{ik}-\delta_{ik})\,\delta(\partial_l(R_{l\alpha}\pi_{\alpha\beta})+T_\beta)\exp(iS).$$

С помощью δ-функций выполним интегрирование по T и U и получим окончательно $Z=\int d\mu(R)\,d\pi dJd\varphi\exp(i\tilde{S})$. Выражение для действия $\tilde{S}$ получается из (П.11) с помощью (П.10) и выражения $T_i=-\partial_l(R_{l\alpha}\pi_{\alpha i})$:

$$\tilde{S}=-\int d^4x\left[\partial_0\pi_\beta\varphi_\beta+\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}(R^{-1}\partial_0R)_{kl}J_i+\frac{g^2}{2}\pi_a{}^2+\frac{1}{2g^2}B_i{}^aB_i{}^a\right],$$
$$B_i{}^a=-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}{}^a,\quad F_{jk}{}^a=\partial_jA_k{}^a-\partial_kA_j{}^a+\epsilon_{abc}A_j{}^bA_k{}^c,$$
$$A_i{}^a=R_{ia}\tilde{A}_{\alpha a}\quad \tilde{A}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\varphi_\alpha+X_{\alpha\beta}{}^nJ^n-\partial_l(R_{l\gamma}\pi_{\gamma i})Y_{\alpha\beta}{}^i.$$

Таким образом, мы приходим к рецепту Голдстоуна и Джакива.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 июня 1978 г.

Литература

[1] В. Н. Грибов. Препринт ЛИЯФ-367, Ленинград, 1977.
[2] M. B. Halpern, J. Koplik. Nucl. Phys., **B132**, 239, 1978. V. N. Popov. Preprint CERN Ref. TH-2323, 1977. H. Abarbanell, J. Bartels. FERMI-PUB 77/104-THY, Batavia, 1977. M. Daniel, G. M. Vialett. Preprint PAR-LPTHE 78/3, Paris, 1978.
[3] L. D. Faddeev, V. N. Popov. Phys. Lett., **25B**, 29, 1967.
[4] Л. Д. Фаддеев. ТМФ, **1**, 3, 1969.
[5] J. Goldstone, R. Jackiw. Preprint CTP-696, 1978.
[6] L. D. Faddeev. In: «Methods in field theory» (Les Houches Notes), North-Holland, Amsterdam, 1976.

ON GAUGE CONDITIONS FOR YANG-MILLS FIELD

A. G. Izergin, V. E. Korepin,
M. A. Semenov-Tyan-Shansky, L. D. Faddeev

The problem of choosing the conditions determining the gauge in the formalism of continual integration over phase space is considered. The suggestion is made to use the conditions including the vector-potential **A** as well as its canonically conjugate variable **E**. The conditions are found which make it possible to resolve the constraints explicitly and formulate the theory in terms of physical degrees of freedom only.