Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Б. Венков, В. Л. Калинин, Л. Д. Фаддеев, Неарифметический вывод формулы следа Сельберга, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1973, том 37, 5–42

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 195.218.150.2
30 июня 2017 г., 15:36:50

А.Б.Венков, В.Л.Калинин, Л.Д.Фаддеев

НЕАРИФМЕТИЧЕСКИЙ ВЫВОД ФОРМУЛЫ СЛЕДА СЕЛЬБЕРГА

Введение

В работе 1956 года [I] А.Сельберг получил ряд тождеств, которые можно рассматривать как далеко идущие обобщения формулы суммирования Пуассона. Возможности разнообразных приложений (вычисление размерностей пространств автоморфных форм; формулы для следов операторов Гекке; построение дзета-функций, для которых справедлив аналог гипотезы Римана) привлекли внимание к формуле следа Сельберга (такое название получил в литературе основной результат работы [I]) как специалистов по теории чисел, так и по функциональному анализу.

Формула следа Сельберга получается при сравнении спектрального и матричного следов некоторых интегральных операторов. Точнее, пусть G – вещественная полупростая группа Ли, K – её максимальная компактная подгруппа, $\Gamma \subset G$ – такая унимодулярная дискретная подгруппа, что инвариантный объём G/Γ конечен. В пространстве $L^2(K\backslash G/\Gamma)$ функций f на G, удовлетворяющих соотношению

$$f(kg\gamma) = f(g)$$

для всех $k \in K$, $\gamma \in \Gamma$, $g \in G$ и квадратично интегрируемых по инвариантной мере на G/Γ, действует представление π коммутативной банаховой алгебры $L^1(K\backslash G/K)$ сферических функций на G и представление алгебры $\mathcal{D}(G, K)$ инвариантных дифференциальных операторов на симметрическом пространстве группы G. Через $L^2_d(K\backslash G/\Gamma)$ обозначим замкнутое подпространство $L^2(K\backslash G/\Gamma)$, соответствующее дискретному спектру "операторов Лапласа" (т.е. операторов из $\mathcal{D}(G,K)$). Для "достаточно хороших" фучкций $\varphi \in L^1(K\backslash G/K)$ ограничение $\pi_d(\varphi)$ оператора $\pi(\varphi)$ на $L^2_d(K\backslash G/\Gamma)$ является ядерным интегральным оператором. В спектральном смысле $\pi(\varphi)$ совпадает с некоторой функцией h от операторов Лапласа. Тождество, полученное приравниванием спектрального и матричного следов оператора $\pi_d(\varphi)$ и выраженное через функцию h с одной стороны в виде суммы собственных значений, а с другой стороны в виде суммы ряда по классам сопряженных элементов группы Γ, называется формулой следа Сельберга.

За семнадцать лет, прошедших с момента публикации Сельберга, появилось немало работ, содержащих более или менее полные доказательства отдельных частных случаев формулы следа Сельберга (для дискретных подгрупп Γ с компактным факторпространством G/Γ;

для арифметических подгрупп $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ и т.д.).

Наша статья основана на дипломных работах первых двух авторов [I2], [II] и лекциях по формуле следа, прочитанных третьим автором в Вильнюсе в марте 1973 года. Мы поставили своей целью дать в ней доказательство формулы следа для произвольных дискретных подгрупп $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ таких, что пространство G/Γ некомпактно, но имеет конечный инвариантный объём. При выводе формулы следа мы последовательно придерживались идеологии теории возмущений самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, продолжая тем самым линию работы [2] (основные результаты этой статьи изложены в § I). Как и методы работы [2], наш неарифметический, спектральный, подход к формуле следа допускает обобщение на случай дискретных подгрупп Γ, действующих на симметрическом пространстве ранга I [I2].

При неарифметическом доказательстве формулы следа Сельберга возникают некоторые трудности, связанные с оценкой коэффициентов некоторой матрицы, участвующей в выражении для асимптотики собственных функций непрерывного спектра. По ассоциации с общей теорией рассеяния эта матрица в дальнейшем будет называться S-матрицей рассеяния. Для преодоления этих трудностей мы используем спектральную формулу следов М.Г.Крейна [3] (формулировка этой теоремы, а также других используемых в дальнейшем результатов о ядерных операторах приводится в § I). При этом функция спектрального сдвига вычисляется способом, характерным для стационарной теории рассеяния (§ 2). В § 3 мы завершаем вывод формулы следа Сельберга и приводим теорему о "регуляризованном" следе резольвенты оператора Лапласа, тесно связанном с дзета-функцией Сельберга. После того, как эта статья была завершена, нам стала известна недавно вышедшая в свет книга Куботы [5], в которой детализируется метод доказательства формулы следа, намеченный в работах Сельберга [I], [8]. Тем не менее мы решили публиковать статью, поскольку, по нашему мнению, предлагаемый в ней подход, основанный на общей теории рассеяния операторов с абсолютно непрерывным спектром, может оказаться полезным и в более сложных задачах.

При написании этой статьи мы ориентировались на широкий круг читателей, в том числе и на специалистов по функциональному анализу. В связи с этим в § I мы более подробно, чем это нужно для читателя-специалиста по теории чисел, - излагаем простые факты о дискретных группах движения полуплоскости Лобачевского.

В заключение заметим, что объем работы, к сожалению, вынудил нас в отдельных случаях опустить доказательства некоторых оценок, которые можно получить методами, аналогичными использованным в [2].

§ I. Вспомогательные предложения

Обозначим через $\mathcal{H}$ – верхнюю полуплоскость комплексной переменной $z = x + iy$, $y > 0$. Группа $SL(2, \mathbb{R})$ действует на $\mathcal{H}$ дробнолинейными преобразованиями:

$$z \longrightarrow zg = \frac{az+c}{bz+d}\ ;\ z \in \mathcal{H}\ ,\ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

При этом элементы g и $-g$ из $SL(2, \mathbb{R})$ осуществляют одно и то же преобразование $\mathcal{H}$. Инвариантную меру на поверхности $\mathcal{H}$ обозначим dz и нормируем следующим образом:

$$dz = \frac{dx\,dy}{y^2}\ .$$

В дальнейшем мы будем использовать инвариант пары точек

$$u(z,z') = \frac{|z-z'|^2}{yy'}\ ,\ u(zg, z'g) = u(z,z'),\ \ g \in SL(2, \mathbb{R}),$$

связанный с инвариантным расстоянием $\rho(z,z')$ формулой

$$u = 4\,sh^2 \frac{\rho}{2}\ .$$

Дифференциальный оператор второго порядка

$$L = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

инвариантен относительно сдвигов $z \longrightarrow zg$ и называется оператором Лапласа.

Рассмотрим дискретную группу $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R}) / \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = PSL(2, \mathbb{R}) = G$, такую, что пространство $\mathcal{H}/\Gamma$ некомпактно, но имеет конечный инвариантный объем. Тогда на $\mathcal{H}$ существует фундаментальная область F группы Γ со следующими свойствами:

а. Существует такое $X > 0$, что F расположена в полосе $-X \leqslant x \leqslant X$;

б. F можно представить в виде

$$F = F_0 + \bigcup_{\alpha=1}^{n} F_\alpha\ , \tag{I.I}$$

где F_0 – компактна (т.е. содержится в круге $u(z,i) \leqslant C$) и имеет кусочно-гладкую границу, а F_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ представляет собой образ полосы $\Pi_\alpha : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ a \leqslant y < \infty$ при преобразовании $z \longrightarrow zg_\alpha$ с некоторыми $g_\alpha \in G$ и до-

статочно большим a .

В соответствии с разбиением (I.I) каждой функции $f(z)$, заданной на F , сопоставим функции $f_0(z)$ на F_0 и $f_\alpha(z)$ на Π_α по следующему правилу:

$$f_0(z)=f(z)\,,\ z\in F_0\ ;\ f_\alpha(z)=f(z g_\alpha)\ ,\ z\in \Pi_\alpha\ .$$

Аналогично определяются компоненты $k_{\alpha\beta}(z,z')$ ядра $k(z,z')$, $z,z'\in F$, для всякого интегрального оператора K . Будем говорить, что такой оператор K диагонален, если отличны от нуля только компоненты $k_{\alpha\alpha}(z,z')$, $\alpha\neq 0$. Гильбертово пространство $\mathcal{L}_\gamma$ получается пополнением по норме

$$\|f\|=\Big(\int\limits_F |f(z)|^2 dz\Big)^{\frac{1}{2}}$$

множества гладких на $\mathcal{H}$ Γ -автоморфных функций $f(z)$. Через $\mathcal{B}_\mu$ мы обозначим банахово пространство комплексно значных функций $f(z)$, компоненты которых $f_0(z)$ и $f_\alpha(z)$ непрерывны в F_0 и Π_a соответственно, причем

$$|f_\alpha(z)|\leq C y^\mu\ ,\ z\in \Pi_a\ ,$$

где μ - вещественное число. Норма в $\mathcal{B}_\mu$ определена следующим образом:

$$\|f\|_\mu=\max_{z\in F_0}|f_0(z)|+\sum_{\alpha=1}^{n}\sup_{z\in \Pi_\alpha} y^{-\mu}|f_\alpha(z)|\ .$$

В работе [2] был исследован оператор A , полученный как единственное самосопряженное расширение симметричного оператора L , определенного на некотором плотном множестве в $\mathcal{L}_\gamma$. Приведем основные результаты, которые будут использоваться в дальнейшем. Через $R(s)=(A-s(1-s)E)^{-1}$ обозначим резольвенту оператора A . Это же обозначение мы будем сохранять и для интегрального оператора, совпадающего с резольвентой в регулярных точках. При $Re\, s=\sigma>2$ ядро оператора $R(s)$ получается усреднением по группе Γ функции

$$\varphi(u,s)=\int\limits_0^1 [t(1-t)]^{s-1}\left(t+\tfrac{1}{4}u\right)^{-s}\cdot\frac{dt}{4\pi}\ . \qquad (I.2)$$

Заметим, что для некоторой константы $C>0$

$$|\varphi(u,s)|\leq C(1+u)^{-\sigma} \qquad (I.3)$$

равномерно по $u \geq u_0 > 0$ и $t = Im\, s$.

При $u \to 0$ $\varphi(u,s)$ имеет асимптотику

$$\varphi(u,s) = -\frac{1}{4\pi} \ln u + O(1). \tag{I.4}$$

Оператор $R(s)$ можно представить в виде:

$$R(s) = T(s) + M(s) + N(s), \tag{I.5}$$

где оператор $T(s)$ диагонален, причем

$$t_{\alpha\alpha}(z,z';s) = t(y,y';s) = \frac{1}{2s-1} \begin{cases} y^s y'^{1-s}, & y < y' \\ y^{1-s} y'^s, & y > y' \end{cases} \tag{I.6}$$

и ограничен в $\mathcal{H}$ при $\sigma > \frac{1}{2}$ и в $\mathcal{L}_{-1} = \mathcal{L}$ при $0 < \sigma < \frac{1}{2}$. При $\sigma > 2$ операторы $M(s), N(s) \in \mathfrak{J}_2(\mathcal{H})$ ж).

При изучении спектра оператора Лапласа в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ полезно рассматривать оператор A как возмущение некоторого оператора B, заданного в замкнутом подпространстве $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$. По определению,

$$\tilde{\mathcal{H}} = \left\{ f(z) \in \mathcal{H} \;\middle|\; f_0(z) = 0 \;;\; f_\alpha(z) = f_\alpha(y),\; 1 \leq \alpha \leq n \right\}$$

и оператор

$$\tilde{P} : f(z) \longrightarrow \left\{ (\tilde{P}f)_0(z) = 0 \;;\; (\tilde{P}f)_\alpha(z) = \int_0^1 f_\alpha(z)\,dx,\; \alpha \neq 0 \right\} \tag{I.7}$$

является ортогональным проектором $\mathcal{H}$ на $\tilde{\mathcal{H}}$. Оператор B действует в отдельности на каждую компоненту $f_\alpha(z)$, и на любой из них задается как дифференциальный оператор $-y^2 \frac{d^2}{dy^2}$ в пространстве функций на полуоси $a \leq y < \infty$, квадратично интегрируемых по мере $dy \cdot y^{-2}$, удовлетворяющих граничному условию

$$\varphi(a) = \frac{a}{\varkappa} \varphi'(a), \quad \varkappa > 4. \tag{I.8}$$

Последний оператор самосопряжен.

Функции

$$\varphi(y,s) = y^s + a^{2s-1} \frac{s-\varkappa}{s+\varkappa-1}\, y^{1-s} \tag{I.9}$$

ж) Через $\mathfrak{J}_p$ $(1 < p \leq \infty)$ мы обозначаем соответствующие симметрично нормированные идеалы в кольце ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ [9].

при $s = \frac{1}{2} + i\tau$ образуют полную систему собственных функций этого оператора. Соответствующие собственные функции для оператора B определяются формулами:

$$\varphi^{\beta}(z,s) = \left\{ \varphi_0^{\beta}(z,s) = 0 \,;\; \varphi_{\alpha}^{\beta}(z,s) = \delta_{\alpha\beta}\, \varphi(y,s),\ 1 \leq \alpha \leq n \right\} \quad (I.10)$$

$\beta = 1, \ldots, n$.

Оператор $Q(s)$ с диагональным ядром $q(z,z';s)$, $\alpha\alpha$-компонента которого равна

$$q(y,y';s) = \frac{1}{2s-1} \begin{cases} \varphi(y,s)\, y'^{\,1-s}, & y < y' \\ y^{1-s}\, \varphi(y',s), & y > y' \end{cases} \quad (I.11)$$

приводится подпространством $\tilde{\mathcal{L}}$ и при сужении на него определяет резольвенту оператора B в $\tilde{\mathcal{L}}$.

Зафиксируем теперь достаточно большое $\varkappa > 0$; тогда

$$Q(s) = T + \omega(s)\, TQ(s), \quad (I.12)$$

где $T = T(\varkappa)$ и $\omega(s) = s(1-s) - \varkappa(1-\varkappa)$.

В банаховом пространстве $\mathcal{B}$ рассмотрим аналитически зависящее от s в полосе $\Phi : 0 < \sigma < 2$ семейство вполне непрерывных операторов

$$H(s) = V\left[E + \omega(s)\, Q(s)\right], \quad (I.13)$$

где $V = M(\varkappa) + N(\varkappa)$. Особыми точками называются такие s в полосе Φ, при которых однородное уравнение

$$v = \omega(s)\, H(s)\, v \quad (I.14)$$

имеет нетривиальное решение в $\mathcal{B}$. Тогда если s – особая точка, то при $\sigma \geq \frac{1}{2}$, $s \neq \frac{1}{2}$ функция

$$\psi = v + \omega(s)\, Q(s)\, v \quad (I.15)$$

является собственной функцией дискретного спектра оператора A с собственным значением $\lambda = s(1-s)$. В некотором смысле справедливо и обратное утверждение: если $\psi \in \mathcal{L}$ – собственная функция оператора A с собственным значением $\lambda \geq 0$, то

$$v = \psi - \omega(s)\, T\psi \in \mathcal{B} \quad (I.16)$$

и удовлетворяет уравнению (I.14) $(\lambda = s(1-s))$. Заметим, также, что оператор $\tilde{P}$ аннулирует все собственные функции дискретного спектра оператора A, за исключением конечного числа.

Для того, чтобы описать аналитическое продолжение ядра резольвенты оператора Лапласа в критическую полосу Φ, определим интегральный оператор $B(s)$:

$$B(s) = (E - \omega(s)T)(R(s) - Q(s))(E - \omega(s)T). \qquad (I.17)$$

Тогда для оператора

$$B_1(s) = B(s) - V \qquad (I.18)$$

выполняется соотношение

$$B_1(s) = \omega(s)V(E + \omega(s)Q(s))V + \omega(s)H(s)B_1(s), \qquad (I.19)$$

которое можно рассматривать как интегральное уравнение Фредгольма для ядра оператора $B_1(s)$ в банаховом пространстве $\mathcal{B}$. При помощи уравнения (I.19) ядро оператора $B(s)$ аналитически продолжается в критическую полосу Φ. Соотношение

$$R(s) = Q(s) + (E + \omega(s)Q(s))B(s)(E + \omega(s)Q(s)) \qquad (I.20)$$

позволяет теперь продолжить в полосу Φ и ядро резольвенты. В особых точках $s_0 \neq \frac{1}{2}$, $\sigma_0 = Re\, s_0 \geqslant \frac{1}{2}$, ядро $r(z, z'; s)$ резольвенты $R(s)$ имеет простой полюс:

$$r(z, z'; s) = \frac{1}{s_0(1-s_0) - s(1-s)} \sum_{i=1}^{m} \psi_i(z)\psi_i(z') + r_1(z, z'; s), \qquad (I.21)$$

где ψ_i – система ортонормированных вещественных собственных функций, которые можно выбрать из пространства $\mathcal{B}$, а $r_1(z, z'; s)$ аналитично по s в окрестности s_0. Аналогичное разложение $r(z, z'; s)$ имеет в точке $s_0 = \frac{1}{2}$. Используя равенства (I.20), (I.21) можно получить подобное разложение ядра $b(z, z'; s)$ оператора $B(s)$ в окрестности особой точки s_0, $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$.

Функции

$$\psi^{\beta}(z, s) = \varphi^{\beta}(z, s) + \omega(s)(E + \omega(s)Q(s))B(s)\varphi^{\beta}(z, s), \qquad (I.22)$$
$$(1 \leqslant \beta \leqslant n)$$

образуют полную систему собственных функций абсолютно непрерывного спектра оператора Лапласа. При $\sigma = \frac{1}{2}$

$$\psi_{\alpha}^{\beta}(z, s) = y^{s}\delta_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}(s)y^{1-s} + \vartheta_{\alpha\beta}(z, s), \qquad (I.23)$$

где

$$S_{\alpha\beta}(s) = S_{\alpha\alpha\beta}(s) + \frac{\omega^2(s)}{2s-1} \iint\limits_{FF} \varphi^{\alpha}(z,s)\, b(z,z';s)\, \varphi^{\beta}(z',s)\, dz\, dz' \quad (I.24)$$

и

$$S_{\alpha\alpha\beta}(s) = \delta_{\alpha\beta}\, a^{2s-1} \frac{s-\varkappa}{s+\varkappa-1} . \quad (I.25)$$

Через $S(s)$ и $S_{\alpha}(s)$ в дальнейшем мы будем обозначать матрицы, составленные из функций $S_{\alpha\beta}(s)$ и $S_{\alpha\alpha\beta}(s)$, соответственно. Для функций $\vartheta_{\alpha\beta}(s)$ выполняется соотношение

$$\vartheta_{\alpha\beta}(z,s) = O(1) \quad (I.26)$$

при $y \to \infty$. Функции $\psi^{\beta}(z,s)$ и $S_{\alpha\beta}(s)$ аналитичны на прямой $Re\, s = \frac{1}{2}$ (аналитичность в особой точке $s = \frac{1}{2}$ может быть доказана с использованием таких же рассуждений, при помощи которых доказывается аналитичность в особых точках $s \neq \frac{1}{2}$ в [2]) и удовлетворяют функциональным уравнениям:

$$\sum_{\gamma=1}^{n} S_{\alpha\gamma}(s)\, S_{\gamma\beta}(1-s) = \delta_{\alpha\beta} \quad (I.27)$$

$$\psi^{\beta}(z,s) = \sum_{\alpha=1}^{n} \psi^{\alpha}(z,1-s)\, S_{\alpha\beta}(s). \quad (I.28)$$

Аналогичные уравнения справедливы и для функций $\varphi^{\beta}(z,s)$ и $S_{\alpha\alpha\beta}(s)$.

При помощи функций $\psi^{\beta}(z,s)$ осуществляется аналитическое продолжение ядра резольвенты на всю комплексную s -плоскость:

$$r(z,z';s) - r(z,z';1-s) = \frac{1}{2s-1} \sum_{\beta=1}^{n} \psi^{\beta}(z;s)\, \psi^{\beta}(z';1-s). \quad (I.29)$$

На этом мы закончим краткий обзор результатов работы [2] . По мере надобности мы будем еще возвращаться к ней в основном тексте статьи.

В заключение этого параграфа приведем некоторые замечания о ядерных операторах.

I. Пусть $X, Y \subset R^2$ - две (быть может, неограниченные) области с мерами ρ_1 и ρ_2 , соответственно, причем $\rho_1(X) < \infty$. Если ядро $t(x,y)(x \in X, y \in Y)$ интегрального оператора

$$T : L^2(X,\rho_1) \longrightarrow L^2(Y,\rho_2)$$

удовлетворяет условиям:

а) при почти всех y $t(\cdot;y)$ принадлежит соболевскому пространству $W_2^2(X)$ и

в) $\int\limits_Y \| t(\cdot,y)\|^2_{W_2^2}\, d\rho_2(y) < \infty$,

то оператор T - ядерный [6].

2. Пусть H_0 и V - самосопряженные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $V \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ и $H_1 = H_0 + V$. Для любой функции φ, такой, что $\varphi' \in L^p(\mathbb{R}^1) \cap Lip\,\omega$ ($\omega > 0$, $1 \leq p < \infty$) оператор $\varphi(H_1) - \varphi(H_0) \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. Существует единственная функция $\xi \in L^1(\mathbb{R}^1)$ такая, что справедлива формула следов

$$Sp\left(\varphi(H_1) - \varphi(H_0)\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\lambda)\,\xi(\lambda)\,d\lambda . \qquad (I.30)$$

При этом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)|\,d\lambda = \|V\|_{\mathfrak{S}_1}, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)\,d\lambda = Sp\,V .$$

$\xi(\lambda)$ называется функцией спектрального сдвига для пары операторов H_0, H_1. Это утверждение представляет собой некоторое усиление теоремы Крейна [2] и приведено в [7].

3. Пусть интегральный оператор $K \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H} = L^2(F)$) и компоненты $k_{\alpha\beta}(z,z')$ ядра $k(z,z')$ непрерывны. Фиксируем $Y > a$ и через F_Y обозначим часть фундаментальной области F, оставшуюся после удаления окрестностей $\Pi_Y g_\alpha$ ($1 \leq \alpha \leq n$) параболических вершин. Тогда

$$Sp\,K = \lim_{Y\to\infty} \int\limits_{F_Y} k(z,z)\,dz . \qquad (I.31)$$

Доказательство этого утверждения следует из общих теорем, приведенных в [9].

§ 2. Спектральная формула следов.

В этом параграфе мы вычислим вклад от непрерывного спектра в формулу следа Сельберга. Для этого нам прежде всего потребуется

Лемма 2.I. Пусть $\lambda = s(1-s)$ - произвольная общая регулярная точка операторов A и B. Тогда оператор $R^2(s) - Q^2(s)$ - ядерный.

Доказательство. Множество общих регулярных точек операторов

A и B содержит область $Re\, s > \frac{1}{2}$, $s \notin [\frac{1}{2}, 1]$. В этой области

$$R(s) = T(s) + M(s) + N(s).$$

Обозначим через $P(s)$ разность $T(s) - Q(s)$. Покажем прежде всего, что $P(s) \in \gamma_1(\mathcal{H})$. Используя явное выражение для ядер $T(s)$ и $Q(s)$, мы получим, что ядро $p(z, z'; s)$ $(z, z' \in F)$ оператора $P(s)$ имеет отличными от нуля только диагональные компоненты

$$p_{\alpha\alpha}(z, z'; s) = c(s)\, y^{1-s} y'^{1-s} \quad (\alpha = 1, \dots, n);$$

где множитель $c(s)$ не зависит от z, z'. Таким образом, достаточно доказать ядерность оператора $P(s)$ в подпространстве $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_\alpha = \{ f \in \mathcal{H} \mid f_\beta = 0,\ \beta = 0, 1, \dots, n,\ \beta \neq \alpha \}$$

при фиксированном α, $1 \leq \alpha \leq n$. Поскольку $p_{\alpha\alpha}(z, \cdot\, ; s) \in W_2^2(\Pi_\alpha)$ (здесь и далее мы рассматриваем соболевские пространства W_2^2 по отношению к определенной фиксированной системе координат) при любом $z \in \Pi_\alpha$, то к оператору $P(s)$, ограниченному на $\mathcal{H}_\alpha$, можно применить критерий ядерности интегральных операторов (§ I, замечание I).

Поскольку

$$T^2(s) - Q^2(s) = P^2(s) + P(s)Q(s) + Q(s)P(s)$$

и при $Re\, s > 4$ оператор $Q(s)$ ограничен в $\mathcal{H}$ ([2] , § 3), то для доказательства леммы при $Re\, s > 4$ нам осталось показать ядерность оператора $R^2(s) - T^2(s)$. Последний оператор можно представить в виде:

$$R^2(s) - T^2(s) = (T(s) + M(s) + N(s))^2 - T^2(s) =$$

$$= (M(s) + N(s))^2 + T(s)N(s) + N(s)T(s),$$

так как ([2] , § 2)

$$M(s)T(s) = T(s)M(s) = 0$$

Поскольку $M(s) + N(s) \in \gamma_2(\mathcal{H})$ (§ I), то $(M(s) + N(s))^2 \in \gamma_1(\mathcal{H})$.

Теперь мы определим интегральный оператор $\widetilde{N}(s)$:

$$\begin{cases} \tilde{n}_{\alpha\beta}(z,z';s) = n_{\alpha\beta}(z,z';s) \text{ при } \alpha,\beta = 0,1,\dots,n \text{ и } (\alpha,\beta) \neq (0,0) \\ \tilde{n}_{00}(z,z';s) = 0 \end{cases}$$

где $n(z,z';s)$ – ядро оператора $N(s)$. Поскольку $T(s)$ –диагональный оператор, то

$$T(s)N(s) = T(s)\tilde{N}(s)$$

и

$$N(s)T(s) = \tilde{N}(s)T(s).$$

Покажем, что операторы $T(s)\tilde{N}(s), \tilde{N}(s)T(s)$ – ядерные в $\mathcal{H}$. Представим оператор $\tilde{N}(s)$ в виде:

$$\tilde{N}(s) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{n} \tilde{N}_{\alpha\beta}(s),$$

где ядро оператора $\tilde{N}_{\alpha\beta}(s)$ имеет единственную отличную от нуля компоненту $\tilde{n}_{\alpha\beta}(z,z';s)$.

Предположим сначала, что $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Тогда $\tilde{N}_{\alpha\beta}(s)$ можно рассматривать как оператор, действующий из $\mathcal{H}_\beta$ в $\mathcal{H}_\alpha$. Для доказательство его ядерности достаточно показать, что $\tilde{n}_{\alpha\beta}(z,\cdot;s) \in W_2^2(\Pi_\alpha)$. При $Re\, s > 4$ ядро $\tilde{n}_{\alpha\beta}(z,z';s)$ допускает представление в виде ряда ([2] , § 2):

$$\tilde{n}_{\alpha\beta}(z,z';s) = \sum_{\delta \in \Delta_{\alpha\beta}} \varphi(u(z,z'\delta);s)$$

если $\alpha \neq \beta$ и

$$\tilde{n}_{\alpha\beta}(z,z';s) = \sum_{\delta \in \Gamma_\alpha, \delta_{12} \neq 0} \varphi(u(z,z'\delta);s)$$

при $\alpha = \beta$. (Здесь функция φ определена в § I (I.2), $z,z' \in \Pi_\alpha$, $\Delta_{\alpha\beta} = g_\alpha \Gamma g_\beta^{-1}$, $\Gamma_\alpha = g_\alpha \Gamma g_\alpha^{-1}$). Из явного вида функции Грина $\varphi(u,s)$ следует, что частная производная от $\varphi(u(z,z');s)$ по любой из переменных x', y' (где $z' = x' + iy'$) есть $O(u(z,z')^{-\sigma})$ при $u \to \infty$ и $z' \in \Pi_\alpha$ $(\sigma = Re\, s)$. Отсюда легко получить, что $\tilde{n}_{\alpha\beta}(z,z';s)$ бесконечно дифференцируема по переменным x', y'. Из леммы I.2 [2] следует, что частная производная ядра $\tilde{n}_{\alpha\beta}(z,z';s)$ по любой из переменных x', y' по модулю не превосходит $C(yy')^{2+\varepsilon-\sigma}$, поэтому при любом $z \in \Pi_\alpha$ $\tilde{n}_{\alpha\beta}(z,\cdot;s) \in W_2^2(\Pi_\alpha)$. Тем самым доказана ядерность оператора $\tilde{N}_{\alpha\beta}(s)$ при $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

Пусть теперь α или β равно нулю. Рассмотрим для определенности оператор $\tilde{N}_{0\alpha}(s)\,T(s)$. Его ядро имеет вид

$$\int\limits_{\Pi_a} \tilde{n}_{0\alpha}(z, z''; s)\, t(y'', y'; s)\, \frac{dx''dy''}{y''^2}$$

Пусть $b > a > 0$. Определим ядро

$$t_b(y'', y'; s) = \begin{cases} t(y'', y'; s) & \text{при} \quad y'' > b > a \\ 0 & \text{при} \quad b > y'' > a \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что интегральный оператор с ядром

$$t(y'', y'; s) - t_b(y'', y'; s)$$

принадлежит $\gamma_2(\mathfrak{H}_\gamma)$. Ядерность оператора с ядром $\tilde{n}_{0\alpha}(z, z''; s)$ в области $\{z \in F_0,\ z'' \in \Pi_a \cap \{y'' > b\}\}$ доказывается так же, как и ядерность оператора $\tilde{N}_{\alpha\beta}(s)$ при $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Отсюда следует утверждение леммы при $Re\, s > 4$.

Общий случай следует из тождеств Гильберта для операторов $R(s)$ и $Q(s)$. Лемма доказана.

Применяя к операторам $R^2(s)$ и $Q^2(s)$ (где $s(1-s) = \eta < 0$) теорему Крейна (§ I, замечание 2), мы получим:

Следствие 2.I. Пусть $H_1 = R^2(s)$, $H_0 = Q^2(s)$ $(s(1-s) = \eta < 0)$. Тогда H_1 и H_0 – ограниченные самосопряженные операторы и для всякой функции $\varphi(\mu)$, такой, что $\varphi'(\mu) \in L^p(\mathbb{R}^1) \cap Lip\,\omega$ $(1 \leq p < \infty,\ \omega > 0)$

$$\varphi(H_1) - \varphi(H_0) \in \gamma_1(\mathfrak{H}_\gamma).$$

Второе утверждение теоремы Крейна нам удобнее применить к другой паре операторов. Обозначим через P_d и P_c – ортогональные проекторы $\mathfrak{H}_\gamma$ на замкнутые подпространства $\mathfrak{H}_{\gamma d}$ и $\mathfrak{H}_{\gamma c}$, соответствующие дискретному и непрерывному спектру оператора A; положим $A_d = A|\mathfrak{H}_{\gamma d}$, $A_c = A|\mathfrak{H}_{\gamma c}$ и через $R_d(s)$, $R_c(s)$ обозначим резольвенты операторов A_d и A_c в $\mathfrak{H}_{\gamma d}$ и $\mathfrak{H}_{\gamma c}$. Заметим, что для всякого ортогонального проектора P и самосопряженного оператора H в подпространстве $P\mathfrak{H}_\gamma$

$$\varphi(PHP) = P\varphi(H)P,$$

если $\varphi(0) = 0$. Поскольку $Q(s) = \tilde{P} R_B(s) \tilde{P}$, где $R_B(s)$ резольвента оператора B в $\mathfrak{H}_\gamma$ (§ I), то из предыдущего замечания, примененного к самосопряженному оператору $H = R_B(s)$, следует, что $Q^2(s) = \tilde{P} R_B^2(s) \tilde{P}$.

Аналогично, применяя это замечание к операторам H_1 и H_0 из следствия 2.I, мы получим: для всех функций φ, таких, что $\varphi(0)=0$

$$\varphi(R^2(s)) - \varphi(Q^2(s)) = P_d\,\varphi(R_d^2(s))P_d + P_c\,\varphi(R_c^2(s))P_c + \tilde{P}\,\varphi(R_B^2(s))\tilde{P}.$$

При этом, если $\varphi' \in L^p(\mathbb{R}^1) \cap Lip\,\omega$, то оператор, стоящий в правой части последнего равенства, ядерный в $\mathcal{L}_\gamma$. Отсюда следует, что

$$P_d\,(\varphi(R^2(s)) - \varphi(Q^2(s)))P_d = P_d\,\varphi(R_d^2(s))P_d + P_d\tilde{P}\,\varphi(R_B^2(s))\tilde{P}\,P_d.$$

Поскольку проектор $\tilde{P}$ аннулирует все собственные функции дискретного спектра оператора Лапласа, за исключением конечного числа, то операторы $P_d\tilde{P}$ и $\tilde{P}P_d$ – конечномерны. Поэтому для функций φ, таких, что $\varphi(0)=0$, и удовлетворяющих условиям следствия 2.I, оператор $P_d\,\varphi(R_d^2(s))P_d$ – ядерный и, по теореме Лидского, след его равен сумме собственных значений соответствующей функции от оператора A. Кроме того, ядерна разность операторов $P_c\cdot R_c^2(s)\cdot P_c$ и $\tilde{P}\cdot R_B^2(s)\cdot\tilde{P}$. Именно к этим операторам мы и применим вторую половину теоремы Крейна:

Следствие 2.2. Существует такая функция $\tilde{\xi}(\mu) \in L^1(\mathbb{R}^1)$, что для всех функций φ, удовлетворяющих условиям:

а) $\varphi(0)=0$;

в) $\varphi' \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap Lip\,\omega$ $(1 \le p < \infty,\ \omega > 0)$;

имеет место формула следов:

$$Sp\,[\,P_c\,\varphi(R_c^2(s))P_c - \tilde{P}\,\varphi(R_B^2(s))\tilde{P}\,] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\mu)\,\tilde{\xi}(\mu)\,d\mu \qquad (2.I)$$

Функция спектрального сдвига $\tilde{\xi}(\mu)$ равна нулю при $\mu < 0$.

Рассмотрим два класса функций.

I) $\tilde{h}(\lambda)$ – финитная бесконечно дифференцируемая функция на полуоси (ε, ∞), где $\eta < \varepsilon < 0$.

Для функций из этого класса функция

$$\varphi(\mu) = \begin{cases} 0 & при\ \ \mu \le 0 \\ \tilde{h}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \eta\right) & при\ \ \mu > 0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

полученная заменой спектральной переменной

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu}} + \eta ; \qquad \mu = \frac{1}{(\lambda-\eta)^2} , \tag{2.3}$$

удовлетворяет условиям а), в) следствия 2.2. При такой замене

$$\tilde{h}(A) = \varphi(R^2(s)) \; ; \quad \tilde{h}(B) = \varphi(R_B^2(s)) \tag{2.4}$$

и из (2.I) следует, что

$$Sp[\, P_c \tilde{h}(A_c) P_c - \tilde{P} \tilde{h}(B) \tilde{P}] = \int_{-|\varepsilon|}^{\infty} \tilde{h}'(\lambda)\, \tilde{\xi}(\lambda)\, d\lambda \tag{2.5}$$

2) Второй класс функций $\tilde{h}(\lambda)$ описывается в терминах функций

$$h(z) = \tilde{h}(\tfrac{1}{4} + z^2) .$$

Мы требуем, чтобы выполнялись условия:

а) $h(z)$ аналитична в полосе $|\, Im\, z| < 2+\delta$, $\delta > 0$;

в) $h(z) = h(-z)$ в этой полосе;

с) $h(z) = O(1+|z|^4)^{-1}$ в полосе $|\, Im\, z| < 2+\delta$ (2.6)

$h'(z) = O(1+|z|^5)^{-1-\vartheta}$ $(\vartheta > 0)$ при вещественных z.

Следуя Сельбергу, мы будем называть такие функции элементарными.

Через $\chi(\lambda)$ обозначим гладкую срезающую функцию:

$$\chi(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \lambda \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \leqslant \frac{3\varepsilon}{4} \end{cases}$$

Для элементарных функций $\tilde{h}(\lambda)$ введем функцию

$$\varphi(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mu < 0 \\ \chi(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \eta)\, \tilde{h}(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \eta) & \text{при} \quad \mu > 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Такие функции $\varphi(\mu)$ удовлетворяют условиям а), в) следствия 2.2 и соотношениям (2.4). Поэтому для них справедлива формула следов

$$Sp[\, P_c \tilde{h}(A_c) P_c - \tilde{P} \tilde{h}(B) \tilde{P}] = \int_{-|\varepsilon|}^{\infty} [\, \chi(\lambda) \tilde{h}(\lambda)]' \tilde{\xi}(\lambda)\, d\lambda , \tag{2.5'}$$

причем функция $\tilde{\xi}(\lambda)$ одна и та же в формулах (2.5) и (2.5′).

Собирая вместе полученные выше результаты, мы можем сформулировать лемму:

Лемма 2.2. Для всех элементарных функций

I) $$Sp\, P_d \tilde{h}(A_d) P_d = \sum_{\lambda_i \geq 0} \tilde{h}(\lambda_i), \qquad (2.8)$$

где λ_i – собственные значения оператора Лапласа и ряд в правой части (2.8) абсолютно сходится.

2) Существует такая локально суммируемая функция $\tilde{\xi}(\lambda)$, что

а) $\tilde{\xi}(\lambda)(1+|\lambda|^3)^{-1} \in L^1(-|\varepsilon|, \infty)$;

в) выполняется формула следов (2.5′);

с) функция спектрального сдвига $\tilde{\xi}(\lambda)$ определена формулой следов (2.5) для финитных функций $\tilde{h}(\lambda)$ с точностью до аддитивной постоянной.

Заметим, что в формуле (2.5′) функция $\chi(\lambda)$ не играет роли, поскольку в дальнейшем будет показано, что $\tilde{\xi}(\lambda)$ можно выбрать таким образом, что $\tilde{\xi}(\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$.

Оставшуюся часть параграфа мы посвятим вычислению функции спектрального сдвига. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_0$ вектор-функций $\xi(r) = (\xi_1(r), \dots, \xi_n(r))$ со скалярным произведением

$$(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha(r) \overline{\eta_\alpha(r)}\, dr.$$

На соответствующем плотном множестве в $\mathcal{H}_0$ определен самосопряженный оператор A_0:

$$A_0 \xi(r) = \left(\tfrac{1}{4} + r^2\right) \xi(r).$$

Как показано в § 4 [2], отображение

$$U : f \to \xi, \quad \text{где} \quad \xi_\alpha(r) = \int_F \psi^\alpha(z, \tfrac{1}{2} + ir) f(z)\, dz,$$

является изометрией $\mathcal{H}_c$ на $\mathcal{H}_0$, при которой оператор A_c переходит в A_0. Обратное отображение осуществляет оператор U^*:

$$(U^* \xi)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^n \overline{\psi^\alpha(z, \tfrac{1}{2} + ir)}\, \xi_\alpha(r)\, dr.$$

Оператор $P_c \tilde{h}(A_c) P_c$ равен $U^* \tilde{h}(A_0) U$, т.е.

$$P_c \tilde{h}(A_c) P_c f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tilde{h}\left(\tfrac{1}{4} + r^2\right) \left[\sum_{\alpha=1}^n \psi^\alpha(z, \tfrac{1}{2} - ir) \int_F \psi^\alpha(z', \tfrac{1}{2} + ir) f(z')\, dz'\right] dr \qquad (2.9)$$

для функций $\tilde{h}$ из широкого класса, включающего описанные выше

классы I и 2. Аналогично

$$\tilde{P}\tilde{h}(B)\tilde{P}f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \tilde{h}(\tfrac{1}{4}+r^2)\Big[\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi^\alpha(z,\tfrac{1}{2}-ir)\int_F \varphi^\alpha(z',\tfrac{1}{2}+ir)f(z')dz'\Big]dr \quad (2.10)$$

Лемма 2.3. Для финитных функций $h(r)=\tilde{h}(\frac{1}{4}+r^2)$

$$Sp[P_c\tilde{h}(A_c)P_c - \tilde{P}\tilde{h}(B)\tilde{P}] = \quad (2.11)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)\cdot Sp\frac{S'}{S}(\tfrac{1}{2}+ir)\,dr + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)\,Sp\frac{S_a'}{S_a}(\tfrac{1}{2}+ir)\,dr +$$

$$+\frac{h(0)}{4}Sp[S(\tfrac{1}{2})] - \frac{h(0)}{4}Sp[S_a(\tfrac{1}{2})],$$

где S -матрицы $S(s)$ и $S_a(s)$ определены в (I.24)-(I.25).

Доказательство. Для вычисления следа интегрального оператора, стоящего в правой части (2.II) воспользуемся замечанием 3 из § I. Тогда из (2.9)-(2.10) следует, что

$$Sp[P_c\tilde{h}(A_c)P_c - \tilde{P}\tilde{h}(B)\tilde{P}] =$$

$$= \lim_{Y\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)\Big[\int_{F_Y}\sum_{\beta=1}^{n}\big[|\psi^\beta(z,\tfrac{1}{2}+ir)|^2 - |\varphi^\beta(z,\tfrac{1}{2}+ir)|^2\big]dz\Big]dr.$$

Если s, s' лежат на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$, то интегралы

$$\int_{F_Y}\psi^\beta(z,s)\psi^\beta(z,s')\,dz, \quad \int_{F_Y}\varphi^\beta(z,s)\varphi^\beta(z,s')\,dz$$

абсолютно сходятся. Для вычисления первого из этих интегралов воспользуемся тождеством:

$$y^2(\psi^\beta(z,s)\Delta\psi^\beta(z,s') - \psi^\beta(z,s')\Delta\psi^\beta(z,s)) =$$

$$= (s(1-s) - s'(1-s'))\,\psi^\beta(z,s)\psi^\beta(z,s'),$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

– обычный оператор Лапласа. Интегрируя это тождество по области F_Y, получим:

$$\sum_{\beta=1}^{n} \int_{F_Y} \psi^{\beta}(z,s)\,\psi^{\beta}(z,s')\,dz = \tag{2.12}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n} \left(s(1-s)-s'(1-s')\right)^{-1} \int_{F_Y} \left(\psi^{\beta}(z,s)\,\Delta\psi^{\beta}(z,s') - \psi^{\beta}(z,s')\,\Delta\psi^{\beta}(z,s)\right)dx\,dy$$

Через ∂F_Y обозначим границу области F_Y, а через ν –внешнюю нормаль к ∂F_Y. Применяя к интегралу, стоящему в правой части тождества (2.12) формулу Грина, получим:

$$\int_{F_Y} \left(\psi^{\beta}(z,s)\,\Delta\psi^{\beta}(z,s') - \psi^{\beta}(z,s')\,\Delta\psi^{\beta}(z,s)\right)dx\,dy = \tag{2.13}$$

$$= \int_{\partial F_Y} \left(\psi^{\beta}(z,s)\,\frac{\partial}{\partial\nu}\psi^{\beta}(z,s') - \psi^{\beta}(z,s')\,\frac{\partial}{\partial\nu}\psi^{\beta}(z,s)\right)dF_Y\,,$$

где dF_Y – мера на ориентированной границе области F_Y. Граница области F_Y состоит из конечного числа попарно Γ –эквивалентных кусков и из орициклов, по которым отрезаны окрестности $\Pi_Y g_\alpha$ параболических вершин. Поскольку $\psi^{\beta}(z,s)$ – Γ – автоморфная функция и преобразования из группы Γ конформны, то в правую часть равенства (2.13) отличный от нуля вклад дают лишь интегралы по орициклам, следовательно,

$$\sum_{\beta=1}^{n} \int_{F_Y} \psi^{\beta}(z,s)\,\psi^{\beta}(z,s')\,dz =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left(s(1-s)-s'(1-s')\right)^{-1} \int_0^1 \left[\psi_\alpha^{\beta}(z,s)\,\frac{\partial}{\partial y}\psi_\alpha^{\beta}(z,s') - \psi_\alpha^{\beta}(z,s')\,\frac{\partial}{\partial y}\psi_\alpha^{\beta}(z,s)\right]\Big|_{y=Y} dx \tag{2.14}$$

В правой части тождества (2.14) представим $\psi_\alpha^{\beta}(z,s)$ в виде (1.23), тогда

$$\sum_{\beta=1}^{n} \int_{F_Y} \psi^{\beta}(z,s)\,\psi^{\beta}(z,s')\,dz = \left(s(1-s)-s'(1-s')\right)^{-1} \times \tag{2.15}$$

$$\times \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \int_0^1 \Big\{ \Big[Y^s \delta_{\alpha\beta} + Y^{1-s} S_{\alpha\beta}(s) + \vartheta_{\alpha\beta}(x+iY, s) \Big] \times$$

$$\times \Big[s' Y^{s'-1} \delta_{\alpha\beta} + (1-s') Y^{-s'} S_{\alpha\beta}(s') + \vartheta'_{\alpha\beta}(x+iY, s') \Big] -$$

$$-\Big[Y^{s'} \delta_{\alpha\beta} + Y^{1-s'} S_{\alpha\beta}(s') + \vartheta_{\alpha\beta}(x+iY, s') \Big] \times \tag{2.I5}$$

$$\times \Big[s Y^{s-1} \delta_{\alpha\beta} + (1-s) Y^{-s} S_{\alpha\beta}(s) + \vartheta'_{\alpha\beta}(x+iY, s) \Big] \Big\} dx,$$

где через $\vartheta'_{\alpha\beta}$ обозначена производная по y от функции $\vartheta_{\alpha\beta}$. В сумме в правой части (2.I5) можно выделить слагаемое

$$f(Y, s, s') = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Big\{ (s'-s) \Big[Y^{s+s'-1} \delta_{\alpha\beta} - Y^{1-s-s'} S_{\alpha\beta}(s) S_{\alpha\beta}(s') \Big] \tag{2.I6}$$

$$+ (1-s-s') \Big[Y^{s-s'} \delta_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}(s') - Y^{s'-s} \delta_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}(s) \Big] \Big\}$$

и остаток $g(Y, s, s')$, все члены которого пропорциональны $\vartheta_{\alpha\beta}$ или $\vartheta'_{\alpha\beta}$, и который мы не будем выписывать в явном виде.

Используя симметричность S -матрицы и тождество (I.27), нетрудно показать, что

$$f(Y, s, 1-s) = 0.$$

Поскольку

$$\int_{F_Y} |\psi^\beta(z, s)|^2 dz < \infty,$$

то существует предел правой части равенства (2.I5) при $s' \to 1-s$, и его можно вычислить по правилу Лопиталя:

$$\sum_{\beta=1}^{n} \int_{F_Y} \psi^\beta(z, s) \psi^\beta(z, 1-s) dz =$$

$$= \frac{1}{1-2s} \frac{\partial}{\partial s'} f(Y, s, s') \Big|_{s'=1-s} + \frac{1}{1-2s} \frac{\partial}{\partial s'} g(Y, s, s') \Big|_{s'=1-s} \tag{2.I7}$$

При этом

$$\frac{1}{1-2s} \frac{\partial}{\partial s'} f(Y, s, s') \Big|_{s'=(1-s)} = 2n \ln Y - \tag{2.I8}$$

$$- S_p [S'(1-s) S(s)] + \frac{1}{1-2s} [Y^{1-2s} S_p [S(s)] - Y^{2s-1} S_p [S(1-s)]] \quad (2.18)$$

Через $V(Y,s)$ обозначим второе слагаемое в правой части (2.17). Используя определение (1.22) функций $\psi^{\beta}(z,s)$ и интегральное уравнение (1.19) для нахождения порядка убывания по Y производных по y и s ядер интегральных операторов, стоящих в правой части (1.22), а тем самым и порядка убывания тех же производных от функций $\vartheta_{\alpha\beta}$, можно показать, что

$$V(Y,s) \xrightarrow[Y\to\infty]{} 0 \quad (2.19)$$

равномерно на каждом компакте по s при $\sigma = \frac{1}{2}$. Подробное доказательство необходимых оценок проведено в дипломной работе [11]. Далее,

$$\int_{F_Y} \varphi^{\beta}(z,s)\, \varphi^{\beta}(z,s')\, dz = \int_a^Y \varphi(y,s)\, \varphi(y,s')\, \frac{dy}{y^2} .$$

Используя дифференциальное уравнение

$$-y^2 \varphi'' = s(1-s)\varphi ,$$

получим

$$\int_a^Y \varphi(y,s)\, \varphi(y,s')\, \frac{dy}{y^2} = \quad (2.20)$$

$$= \left(s(1-s) - s'(1-s') \right)^{-1} \int_a^Y \left(\varphi(y,s)\, \varphi''(y,s') - \varphi(y,s')\, \varphi''(y,s) \right) dy .$$

Интегрируя правую часть равенства (2.20) по частям и учитывая краевые условия (1.8) для функций $\varphi(y,s)$, мы найдем, что:

$$\sum_{\beta=1}^{n} \int_{F_Y} \left| \varphi^{\beta}(z, \tfrac{1}{2}+i\tau) \right|^2 dz = 2n \ln Y - S_p \frac{S_a'}{S_a}(\tfrac{1}{2}+i\tau) - \quad (2.21)$$

$$- \frac{1}{2i\tau} \left[Y^{-2i\tau} S_p S_a(\tfrac{1}{2}+i\tau) - Y^{2i\tau} S_p S_a(\tfrac{1}{2}-i\tau) \right] .$$

Поскольку функция $h(\tau)$ финитна и

$$\frac{\sin 2\tau \ln Y}{\pi\tau} \xrightarrow[Y\to\infty]{} \delta(\tau)$$

в смысле обобщенных функций, то тождество (2.11) получается из равенств (2.17)-(2.21) предельным переходом при $Y \to \infty$. Дока-

зательство закончено.

Из тождества (2.5) и Леммы 2.2. следует, что для всех финитных функций $\tilde{h}$

$$\int_{-|\varepsilon|}^{0} \tilde{h}'(\lambda)\,\tilde{\xi}(\lambda)\,d\lambda + \int_{0}^{\infty} h'(r)\,\xi(r)\,dr =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} h(r)\,S_p\,\frac{S'}{S}\left(\tfrac{1}{2}+ir\right)dr + \frac{h(0)}{4}\,S_p\,S\left(\tfrac{1}{2}\right) \tag{2.22}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} h(r)\,S_p\,\frac{S_a'}{S_a}\left(\tfrac{1}{2}+ir\right)dr - \frac{h(0)}{4}\,S_p\,S_a\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Положим

$$\begin{cases} \xi_0(r) = \dfrac{1}{2\pi}\left[\displaystyle\int_0^r S_p\,\frac{S'}{S}\left(\tfrac{1}{2}+it\right)dt + \frac{\pi}{2}\,S_p\,S\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] \\ \xi_a(r) = \dfrac{1}{2\pi}\left[\displaystyle\int_0^r S_p\,\frac{S_a'}{S_a}\left(\tfrac{1}{2}+it\right)dt + \frac{\pi}{2}\,S_p\,S_a\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] \end{cases} \tag{2.23}$$

и

$$\xi(r) = \xi_0(r) - \xi_a(r).$$

Тогда

$$\int_0^\infty h'(r)\,\xi(r)\,dr = h(0)\cdot\xi(0) - \int_0^\infty h(r)\,\xi'(r)\,dr =$$

$$= \frac{h(0)}{4}\left[S_p\,S\left(\tfrac{1}{2}\right) - S_p\,S_a\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty h(r)\,S_p\,\frac{S'}{S}\left(\tfrac{1}{2}+ir\right)dr + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty h(r)\,S_p\,\frac{S_a'}{S_a}\left(\tfrac{1}{2}+ir\right)dr.$$

Таким образом,

$$\tilde{\xi}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad \lambda < \frac{1}{4} \\ \xi(r), & \text{при} \quad \lambda \geqslant \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \left(\lambda = \tfrac{1}{4} + r^2\right)$$

Итоги этого параграфа можно подвести в теореме:

Теорема 2.I. Если $\tilde{h}(\lambda)$ – элементарная функция, то оператор $\tilde{h}(A) - \tilde{P}\tilde{h}(B)\tilde{P} \in \gamma_1(\mathcal{H})$ и

$$Sp[\tilde{h}(A)-\tilde{P}\tilde{h}(B)\tilde{P}] = \sum \tilde{h}(\lambda_i) + \int_0^\infty h'(r)\,\xi_0(r)\,dr$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)\, Sp\,\frac{S_a'}{S_a}\left(\tfrac{1}{2}+ir\right)dr - \frac{h(0)}{4}\, Sp\, S_a\left(\tfrac{1}{2}\right), \tag{2.24}$$

где λ_i пробегает все собственные значения оператора Лапласа и все ряды и интегралы абсолютно сходятся.

Замечание. Зависящую от a часть $\xi(r)$ в (2.24) мы смогли выделить отдельно, используя явный вид матрицы $S_a(s)$.

§ 3. Формула следа Сельберга

Инвариант пары точек

$$k(z,z') = k(u(z,z'))$$

связан с элементарной функцией $h(r)$ интегральными преобразованиями Сельберга:

$$\int_w^\infty \frac{k(u)}{\sqrt{u-w}}\,du = Q(w) \;; \qquad k(u) = -\frac{1}{\pi}\int_u^\infty \frac{dQ(w)}{\sqrt{w-u}} \;;$$

$$Q(e^{v}+e^{-v}-2) = g(v); \tag{3.I}$$

$$h(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{irv}\, g(v)\,dv \;; \quad g(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-irv}\, h(r)\,dr\,.$$

Если функция $h(r)$ удовлетворяет условиям (2.6), то инвариант пары точек $k(u)$ существует, непрерывен на полуоси $0 \leqslant u < \infty$ и удовлетворяет неравенству:

$$|k(u)| \leqslant C(1+u)^{-\sigma}, \quad \sigma > 2. \tag{3.2}$$

Из оценки (3.2) и признака сходимости ряда по дискретной группе ([2], п.I.4) следует, что ряд

$$K(z,z') = \sum_{\gamma\in\Gamma} k(z,z'\gamma) \tag{3.3}$$

сходится абсолютно и равномерно по z, z' из компактной подобласти и, таким образом, функция $K(z,z')$ непрерывна. Интегральный оператор K, определенный ядром $K(z,z')$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, совпадает с оператором $\tilde{h}(A)$. Действительно, для любых $f, g \in \mathcal{H}$

$$(\tilde{h}(A)f, g) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \tilde{h}(z)(R(z)f, g)\, dz \tag{3.4}$$

где $z = s(1-s)$ и контур C охватывает спектр оператора A. В терминах переменной s в интеграле (3.4) мы будем производить интегрирование по прямой $Re\, s = \sigma > 2$. Из оценок

$$\begin{aligned} &\iint_{FF} |r(z,z';s)\, f(z)\, \overline{g(z')}|\, dz\, dz' \leq \\ &\leq \iint_{FF} |r(z,z';s) - q(z,z';s)|\, |f(z)\, g(z')|\, dz\, dz' + \iint_{FF} |q(z,z';s)|\, |f(z)\overline{g(z')}|\, dz\, dz' \\ &\leq \|R(s) - Q(s)\|_{\gamma_2} \|f\| \|g\| + \frac{C_1}{|2s-1|} + \left|\frac{s-\varkappa}{s+\varkappa-1}\right| \cdot C_2 , \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $C_1, C_2 \geqslant 0$ и зависят только от σ, f, g и $\tilde{h}$, и

$$\begin{aligned} \|R(s) - Q(s)\|_{\gamma_2} &\leq \|\omega(s)\, Q(s) + E\| \cdot \|(E - \omega(s)\, R(\varkappa))^{-1}\| \cdot \|R(\varkappa) - Q(\varkappa)\|_{\gamma_2} \\ &\leq \left(1 + \frac{|\omega(s)|}{|Im(s(1-s))|}\right) \cdot \left(\frac{|\omega(s)|}{|Im\, \omega(s)|}\right) \|R(\varkappa) - Q(\varkappa)\|_{\gamma_2} \end{aligned} \tag{3.6}$$

при достаточно больших $|s|$, следует, что в (3.4) мы можем соответствующим образом переставить порядок интегрирования и искать ядро интегрального оператора $\tilde{h}(A)$ в виде интеграла по прямой $Re\, s = \sigma$ от ядра резольвенты $r(z,z';s)$. Используя оценку (I.3) для функции Грина $\varphi(u,s)$, можно показать, что для внутренних точек z, z' области F, для которых $u(z,z') \geqslant u_0 > 0$ интеграл от ядра резольвенты совпадает с $K(z,z')$.

Теперь для вычисления следа оператора $\tilde{h}(A) - \tilde{P}\tilde{h}(B)\tilde{P}$ мы можем воспользоваться замечанием 3 из параграфа I:

$$Sp[\tilde{h}(A) - \tilde{P}\tilde{h}(B)\tilde{P}] = \lim_{Y\to\infty} \int_{F_Y} \left[K(z,z) - \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r) \sum_{\alpha=1}^{n} \left|\varphi^{\alpha}(z, \tfrac{1}{2}+ir)\right|^2 dr\right] dz . \tag{3.7}$$

В соответствии с разбиением (I.I) фундаментальной области F, интеграл в правой части (3.7) можно представить в виде суммы интегралов по подобластям $F_\alpha - \Pi_Y g_\alpha$:

$$\int\limits_{F_0} K_0(z,z)\,dz + \sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Pi_\alpha - \Pi_Y} \Big[K_{\alpha\alpha}(z,z) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(r)\,|\varphi(y, \tfrac{1}{2}+ir|^2 dr \Big] dz$$

Компонента $K_{\alpha\alpha}(z,z')$ получается усреднением функции $k(z,z')$ по дискретной подгруппе $\Gamma_\alpha = g_\alpha \Gamma g_\alpha^{-1}$. Подмножество элементов $\gamma \in \Gamma_\alpha$, для которых $\gamma_{12} = 0$, представляет собой группу $\Gamma_{\alpha\infty}$, состоящую из элементов вида

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для всех $\gamma \in \Gamma_\alpha - \Gamma_{\alpha\infty}$

$$\gamma_{12} \geq \vartheta > 0,$$

поэтому из неравенства (3.2) и леммы I.2 [2] следует, что вклад в $K_{\alpha\alpha}(z,z')$ от элементов из $\Gamma_\alpha - \Gamma_{\alpha\infty}$ не превосходит $C(yy')^{2+\varepsilon-\sigma}$ равномерно по z, z' в полосе Π_α с некоторой константой $C > 0$ и произвольно малым $\varepsilon > 0$. Следуя Сельбергу, мы представим ядро $K(z,z')$ в виде:

$$K(z,z') = k(z,z') + \sum_{\gamma}{}_{гип}\, k(z,z'\gamma) + \sum_{\gamma}{}_{элл}\, k(z,z'\gamma) + \sum_{\gamma}{}_{пар}\, k(z,z'\gamma)$$

где суммирование в правой части производится по множествам гиперболических, эллиптических и параболических элементов из группы Γ. Согласно предыдущему замечанию, правую часть (3.7) можно представить в виде:

$$\lim_{Y\to\infty} \int\limits_{F_Y} \Big(\sum_{\gamma}{}_{пар}\, k(z,z\gamma) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(r) \sum_{\alpha=1}^{n} |\varphi^\alpha(z, \tfrac{1}{2}+ir|^2 dr \Big) dz \tag{3.8}$$

$$+ \int\limits_{F} \Big(k(z,z) + \sum_{\gamma}{}_{гип}\, k(z,z\gamma) + \sum_{\gamma}{}_{элл}\, k(z,z\gamma) \Big),$$

причем последний интеграл абсолютно сходится.

Прежде всего мы найдем вклад в формулу следа Сельберга от параболических элементов. Из равенства (2.22) следует, что

$$\sum_{\alpha=1}^{n} -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{F_Y} \Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(r)\,|\varphi^\alpha(z, \tfrac{1}{2}+ir)|^2 dr \Big] dz = -n \ln Y \cdot g(0) + \tag{3.9}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(r)}{2ir}\left[Y^{-2ir}S_p\,S_a\left(\tfrac{1}{2}+ir\right)-Y^{2ir}S_p\,S_a\left(\tfrac{1}{2}-ir\right)\right]dr$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(r)\,S_p\,\frac{S_a'}{S_a}\left(\tfrac{1}{2}+ir\right)dr.$$

Далее, через $\{\gamma\}_\Gamma$ обозначим класс сопряженных элементов в Γ с представителем $\gamma\in\Gamma$, а через Γ^γ – централизатор элемента $\gamma\in\Gamma$. Из инвариантности ядра $k(z,z')$ следует, что

$$\sum_{\gamma\ \text{пар}}\int_{F_Y}k(z,z\gamma)\,dz=\sum_{\{\gamma\}_\Gamma\ \text{пар}}\int_{\bigcup\limits_{\bar\gamma\in\Gamma^\gamma\backslash\Gamma}F_Y\bar\gamma}k(z,z\gamma)\,dz\ , \qquad (3.10)$$

причем суммирование в правой части производится по классам сопряженных параболических элементов в Γ. Выберем в группе Γ примитивные параболические элементы $\gamma_1,\dots,\gamma_n$, соответствующие разбиению (I.I) фундаментальной области F, т.е.

$$g_\alpha\gamma_\alpha g_\alpha^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

Тогда правую часть (3.10) можно представить в виде:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\{\gamma_\alpha^l\}_\Gamma\ \text{пар}}\int_{\bigcup\limits_{\bar\gamma\in\Gamma^{\gamma_\alpha^l}\backslash\Gamma}F_Y\bar\gamma}k(z,z\gamma_\alpha^l)\,dz\qquad(l\neq 0) \qquad (3.11)$$

Рассмотрим часть суммы (3.11), отвечающую параболической вершине с номером α. Не уменьшая общности, можно считать, что $g_\alpha=e$ и

$$\gamma_\alpha=\gamma_0=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

Представителей

$$\gamma\in\{\bar\gamma\}\in\Gamma^{\gamma_0^l}\backslash\Gamma$$

можно выбрать таким образом, что

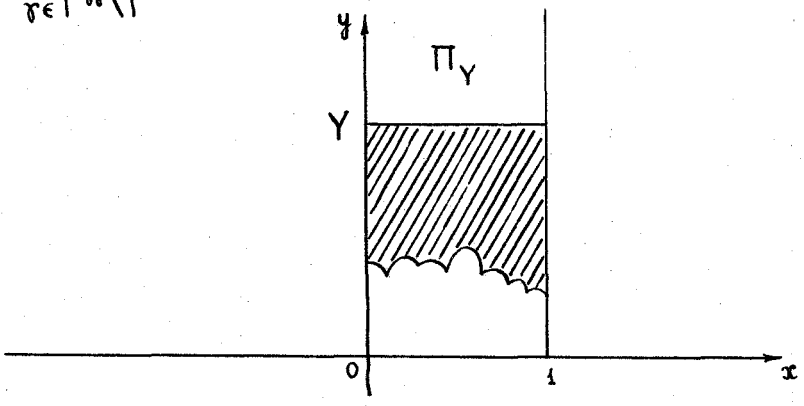
$$\bigcup_{\bar\gamma\in\Gamma^{\gamma_0^l}\backslash\Gamma}F_\gamma=\Pi=\{z\mid y>0,\ 0\le x\le 1\}.$$

(поскольку Π – фундаментальная область группы $\Gamma_{\alpha\infty}$)

Пусть

$$\bar{F}_Y = F - F_Y .$$

Тогда $\bigcup\limits_{\bar{\gamma}\in\Gamma^{\gamma_0^l}\setminus\Gamma} F_Y\gamma$ представляет собой следующую фигуру:



Здесь из полосы Π мы вырезали полосу Π_Y и множество

$$\tilde{F}_Y = \bigcup_{\substack{\bar{\gamma}\in\Gamma^{\gamma_0^l}\setminus\Gamma \\ \bar{\gamma}\neq\bar{e}}} \bar{F}_Y\gamma$$

Через $\mu_L(\tilde{F}_Y)$ обозначим меру Лебега множества $\tilde{F}_Y$, а через Φ_Y – прямоугольник $\Pi - \Pi_Y$.

Поскольку централизаторы всех элементов γ_0^l совпадают, то множество $\tilde{F}_Y$ одно и то же для всех l . Поэтому, вклад одной параболической вершины в сумму (3.II) равен

$$S_Y = 2\sum_{l=1}^{\infty}\int\limits_{\Phi_Y-\tilde{F}_Y} k\left(\frac{l^2}{y^2}\right)dz \qquad (3.12)$$

Заметим далее, что

$$\lim_{Y\to\infty} S_Y = \infty ,$$

однако, асимптотика S_Y при Y , стремящемся к бесконечности, равна $g(0)\ln Y$, т.е. равна вкладу от одной параболической

вершины в асимптотику интеграла (3.9) при $Y \to \infty$. Действительно, положим

$$S = \lim_{Y\to\infty} (S_Y - g(0)\ln Y).$$

Тогда

$$S = \lim_{Y\to\infty} \left[2\sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^Y k\left(\frac{\ell^2}{y^2}\right) \frac{dy}{y^2} - g(0)\ln Y \right]$$

$$- \lim_{Y\to\infty} \left[2\sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{\tilde F_Y} k\left(\frac{\ell^2}{y^2}\right) dz \right]. \tag{3.13}$$

Докажем, что второе слагаемое равно нулю. В силу неравенства (3.2) имеем оценки:

$$\left| \int_{\tilde F_Y} k\left(\frac{\ell^2}{y^2}\right) dz \right| \leqslant C \int_{\tilde F_Y} \frac{y^{2\sigma-2}}{(y^2+\ell^2)^{\sigma}}\, dx\, dy.$$

Поскольку для всех $z \in \tilde F_Y$ $y \leqslant a$, то

$$\left| \int_{\tilde F_Y} k\left(\frac{\ell^2}{y^2}\right) dz \right| \leqslant C \ell^{-2\sigma} \mu_L(\tilde F_Y).$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{\tilde F_Y} k\left(\frac{\ell^2}{y^2}\right) dz \right| \leqslant C \cdot \zeta(2\sigma) \cdot \mu_L(\tilde F_Y).$$

Но $\mu_L(\tilde F_Y) \xrightarrow[Y\to\infty]{} 0$, поэтому

$$\lim_{Y\to\infty} \left[2\sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{\tilde F_Y} k\left(\frac{\ell^2}{y^2}\right) dz \right] = 0.$$

Итак, нам достаточно вычислить первый из пределов (3.13). Рассмотрим абсолютно сходящийся ряд:

$$R = 2\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_{0}^{Y} k\left(\frac{\ell^2}{y^2}\right)\frac{dy}{y^2} \tag{3.14}$$

После замены переменной

$$u = \frac{\ell^2}{y^2}$$

в каждом из интегралов в (3.14), получим

$$R = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\ell}\int_{\frac{\ell^2}{Y^2}}^{\infty}\frac{k(u)}{\sqrt{u}}\,du = \tag{3.15}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\ell} - \ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right)\right]\int_{\frac{\ell^2}{Y^2}}^{\infty}\frac{k(u)}{\sqrt{u}}\,du + \sum_{\ell=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right)\int_{\frac{\ell^2}{Y^2}}^{\infty}\frac{k(u)}{\sqrt{u}}\,du .$$

В первой сумме правой части равенства (3.15) можно почленно перейти к пределу (поскольку соответствующие ряд и интеграл сходятся равномерно по Y) при $Y\to\infty$; тогда, учитывая, что

$$\lim_{Y\to\infty}\int_{\frac{\ell^2}{Y^2}}^{\infty}\frac{k(u)}{\sqrt{u}}\,du = g(0),$$

мы получим:

$$\lim_{Y\to\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\ell} - \ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right)\right]\int_{\ell^2/Y^2}^{\infty}\frac{k(u)}{\sqrt{u}}\,du = \gamma\cdot g(0), \tag{3.16}$$

где γ – постоянная Эйлера. Далее,

$$\lim_{Y\to\infty}\left[\sum_{\ell=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right)\int_{\frac{\ell^2}{Y^2}}^{\infty}\frac{k(u)}{\sqrt{u}}\,du - g(0)\ln Y\right] =$$

$$= \lim_{Y\to\infty}\left[\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\ln\frac{(\ell+1)^2}{Y^2}\int_{\frac{\ell^2}{Y^2}}^{\frac{(\ell+1)^2}{Y^2}}\frac{k(u)}{\sqrt{u}}\,du\right] + \tag{3.17}$$

$$+ \lim_{Y\to\infty}\left[\ln Y\cdot\int_{1/Y^2}^{\infty}\frac{k(u)}{\sqrt{u}}\,du - g(0)\ln Y\right]$$

Нетрудно видеть, что первый из пределов в правой части (3.I7) равен

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\ln u}{\sqrt{u}}\, k(u)\,du, \tag{3.I8}$$

тогда как второй предел равен нулю.

Приведем заимствованные у Куботы [4], вычисления интеграла (3.I8). Из формул преобразования Сельберга следует, что

$$\int_0^\infty \frac{\ln u}{\sqrt{u}}\, k(u)\,du = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln u}{\sqrt{u}}\left[\int_u^\infty \frac{dQ(w)}{\sqrt{w-u}}\right]du = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln u}{\sqrt{u}}\left[\int_u^\infty \frac{Q'(w)\,dw}{\sqrt{w-u}}\right]du,$$

поскольку в рассматриваемом нами случае функция $Q(w)$ дифференцируема. Далее,

$$\int_0^\infty \frac{\ln u}{\sqrt{u}}\, k(u)\,du = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_u^\infty \frac{\ln u\cdot Q'(w)}{\sqrt{u}\,\sqrt{w-u}}\,dw\,du =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^w \frac{\ln u\cdot Q'(w)}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{w-u}}\,dw\,du = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^1 \frac{\ln uw\cdot Q'(w)}{\sqrt{u}\,\sqrt{1-u}}\,dw\,du =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\pi\ln w + \int_0^1 \frac{\ln u}{\sqrt{u}\,\sqrt{1-u}}\,du\right) Q'(w)\,dw.$$

Как известно,

$$\int_0^1 \frac{\ln u}{\sqrt{u}\,\sqrt{1-u}}\,du = -2\pi\ln 2,$$

поэтому

$$\int_0^\infty \frac{\ln u}{\sqrt{u}}\, k(u)\,du = \int_0^\infty (-\ln w + 2\ln 2)\,Q'(w)\,dw =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{(-\ln w + 2\ln 2)\,Q(w)\Big|_\varepsilon^\infty + \int_\varepsilon^\infty \frac{Q(w)}{w}\,dw\right\} = \tag{3.I9}$$

$$= -2\ln 2\cdot g(0) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\varepsilon\cdot Q(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{Q(w)}{w}\,dw\right). \qquad (3.19)$$

Преобразуем последний интеграл в (3.19):

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{Q(w)}{w}\,dw = \int_{\delta}^{\infty}\frac{g(u)(e^{u}-e^{-u})}{e^{u}+e^{-u}-2}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{u/2}+e^{-u/2}}{e^{u/2}-e^{-u/2}}\,e^{-iuz}h(z)\,du\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-izu}+\frac{2e^{-u}}{u}-\frac{2e^{-u}}{u}+\frac{2e^{-u}}{1-e^{-u}}\right)h(z)\,du\,dz \qquad (3.20)$$

(здесь $\delta = e^{\varepsilon}+e^{-\varepsilon}-2$).

Продолжая вычисления, разобьём последний интеграл в (3.20) на два слагаемых:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-izu}+\frac{2e^{-u}}{u}\right)h(z)\,du\,dz - \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-u}}{u}-\frac{e^{-u(1+iz)}}{1-e^{-u}}\right)h(z)\,du\,dz. \qquad (3.21)$$

Рассмотрим первое слагаемое в (3.21):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(z)\left(\frac{2e^{-u}}{u}+e^{-izu}\right)du\,dz =$$

$$= \int_{\delta}^{\infty}g(u)\,du + 2g(0)\int_{\delta}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du =$$

$$= \int_{\delta}^{\infty}g(u)\,du - 2g(0)\ln\delta\cdot e^{-\delta} + 2g(0)\int_{\delta}^{\infty}\ln u\cdot e^{-u}\,du.$$

Поскольку

$$\int_{0}^{\infty}\ln u\cdot e^{-u}\,du = -\gamma,$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{-u}}{u}-\frac{e^{-u(1+iz)}}{1-e^{-u}}\right)du = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+iz)$$

3 571

и δ^2 и ε – малые одного порядка, то

$$\int_0^\infty \ln w \cdot Q'(w)dw = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\ln\varepsilon \cdot Q(\varepsilon) + \int_\varepsilon^\infty \frac{Q(w)}{w} dw = \right. \tag{3.22}$$

$$= \frac{1}{2} h(0) - 2\gamma \cdot g(0) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir)\, h(r)\, dr .$$

Итак, мы показали, что

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\ln u}{\sqrt{u}} k(u)du = -\ln 2 \cdot g(0) + \frac{1}{4} h(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir)\, h(r)\, dr . \tag{3.23}$$

Из приведенных выше вычислений следует, что

$$\lim_{Y\to\infty} \int_{F_Y} \left(\sum_{\gamma\ пар} k(z, z\gamma) - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \left| \varphi^{\alpha}(z, \tfrac{1}{2}+ir) \right|^2 dr \right) dz =$$

$$= -n \ln 2 \cdot g(0) + \frac{n}{4} h(0) - \frac{n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir)\, h(r)\, dr +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Sp \frac{S'_\alpha}{S_\alpha}\left(\tfrac{1}{2}+ir\right) h(r)\, dr - \frac{1}{4} h(0)\, Sp\, S_\alpha\left(\tfrac{1}{2}\right) . \tag{3.24}$$

Последние два слагаемых в формуле (3.24) получаются, как и в § 2, предельным переходом при $Y \to \infty$.

Кратко укажем, как вычислить второй из интегралов (3.8). Представим этот интеграл в виде

$$k(0) \cdot \mu(F) + \sum_{\{P\}_\Gamma} {}_{гип} \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{F_P} k(z, zP^\ell)\, dz + \sum_{\{R\}_\Gamma} {}_{эл\,л} \sum_{\ell=1}^{m-1} \int_{F_R} k(z, zR^\ell)\, dz . \tag{3.25}$$

Здесь R и P пробегают полные системы представителей всех примитивных эллиптических и гиперболических элементов, соответственно, $m = m(R)$ – порядок примитивного эллиптического класса, а интегрирование производится по фундаментальным областям F_R и F_P централизаторов в Γ примитивных элементов R и P.

Из формул преобразования Сельберга следует, что

$$k(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dQ(w)}{\sqrt{w}} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{g'(u)}{e^{u/2}-e^{-u/2}}\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty r\,h(r)\,\frac{\sin ru}{e^{u/2}-e^{-u/2}}\,du\,dr .$$

Далее,

$$\int_0^\infty \frac{\sin ru}{e^{u/2}-e^{-u/2}}\,du = \pi\, th\,\pi r ,$$

поэтому

$$k(0) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r\,h(r)\,th\,\pi r\,dr ,$$

и вклад единичного элемента в формулу следа Сельберга равен

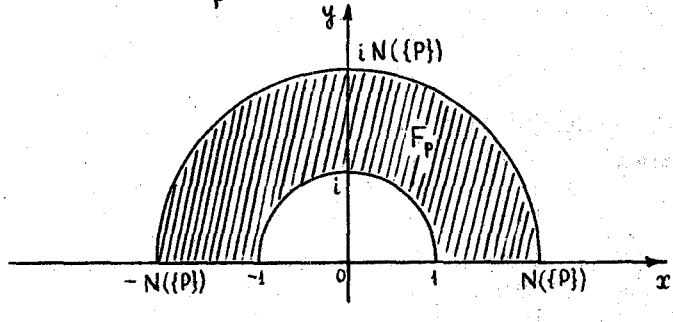
$$\frac{\mu(F)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r\,h(r)\,th\,\pi r\,dr. \qquad (3.26)$$

Представителей P и R примитивных классов гиперболических и эллиптических элементов мы можем выбрать в виде:

$$P = \begin{pmatrix} N(\{P\}) & 0 \\ 0 & N(\{P\})^{-1} \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos\frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \qquad (3.27)$$

соответственно. Здесь $N(\{P\}) > 1$ – норма примитивного гиперболического класса $\{P\}_\Gamma$.

В этом случае F_P имеет вид:



и при $\ell \geq 1$ вклад $\{P^\ell\}_\Gamma$ в формулу следа Сельберга равен

$$J(\ell) = \int\limits_{F_P} k(z, N(\{P\})^{\ell} \cdot z)\, dz .$$

Замена переменных

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases}$$

приводит последний интеграл к виду

$$J(\ell) = \ln N(\{P\}) \Big[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} k\Big(\frac{(N(\{P\})^{\ell} - 1)^2}{N(\{P\})^{\ell}} \cdot \frac{1}{\sin^2\vartheta} \Big) \frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta} \Big]$$

$$+ \ln N(\{P\}) \Big[\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} k\Big(\frac{(N(\{P\})^{\ell} - 1)^2}{N(\{P\})^{\ell}} \cdot \frac{1}{\sin^2\vartheta} \Big) \frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta} \Big] \qquad (3.28)$$

Положим

$$\lambda = (N(\{P\})^{\ell} - 1)^2 N(\{P\})^{-\ell} > 0$$

и в первом интеграле в квадратных скобках в (3.28) сделаем замену переменной

$$v = \frac{\lambda}{\sin^2\vartheta} ,$$

а во втором –

$$v = \frac{\lambda}{\cos^2\vartheta} .$$

После несложных преобразований получим:

$$J(\ell) = \frac{\ln N(\{P\})}{N(\{P\})^{\ell/2} - N(\{P\})^{-\ell/2}}\, g(\ell \cdot \ln N(\{P\})) .$$

Таким образом, вклад гиперболических элементов в формулу следа Сельберга равен

$$\sum_{\{P\}_\Gamma \text{ гип}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ln N(\{P\})}{N(\{P\})^{\ell/2} - N(\{P\})^{-\ell/2}}\, g(\ell \cdot \ln N(\{P\})) . \qquad (3.29)$$

Далее, преобразованием из группы G R^{ℓ} можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos\frac{\ell\pi}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos\vartheta \end{pmatrix},$$

где $\vartheta = \frac{\ell\pi}{m}$.

Поскольку верхнюю полуплоскость $\mathcal{H}$ можно представить в виде объединения m экземпляров области F_R, то

$$J(\vartheta) = \int\limits_{F_R} k(z, zR^{\ell})\,dz = \frac{1}{m}\int\limits_{\mathcal{H}} k(z, zR^{\ell})\,dz =$$

$$= \frac{1}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{0}^{\infty} k\left(\frac{|z^2 + 2z\cos\vartheta + 1|^2}{y^2}\right)\frac{dy}{y^2}.$$

После замены переменной

$$z + \cos\vartheta \longrightarrow z$$

последний интеграл приводится к виду:

$$J(\vartheta) = \frac{1}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{0}^{\infty} k\left(\frac{|z^2 + \sin^2\vartheta|^2}{y^2}\right)\frac{dy}{y^2}.$$

В сферических координатах (r, φ)

$$J(\vartheta) = \frac{1}{m}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{r\,dr}{r^2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{d\varphi}{\sin^2\vartheta}\, k\left(\frac{r^4 + 2r^2\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \sin^4\vartheta}{r^2\sin^2\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{m}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{r\,dr}{r^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k\left(t^2\left[r^2 + 2\sin^2\vartheta + \frac{\sin^4\vartheta}{r^2}\right] + \left[r^2 - 2\sin^2\vartheta + \frac{\sin^4\vartheta}{r^2}\right]\right)dt$$

(где $t = ctg\,\varphi$)

$$= \frac{1}{m}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dv}{v}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k\left(t^2\left(v + \frac{\sin^2\vartheta}{v}\right)^2 + \left(v - \frac{\sin^2\vartheta}{v}\right)^2\right)dt. \qquad (3.30)$$

Положим теперь в (3.30)

$$w = t\left(v + \frac{\sin^2\vartheta}{v}\right):$$

$$J(\vartheta) = \frac{1}{2m} \int_0^\infty \frac{dv}{v} \frac{1}{\left(v + \frac{\sin^2\vartheta}{v}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} k\left(w^2 + \left(v - \frac{\sin^2\vartheta}{v}\right)^2\right) dw. \tag{3.31}$$

Далее, заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\left(w^2 + \frac{(y-1)^2}{y}\right) dw = g(\ln y), \tag{3.32}$$

и, исходя из этих соображений, положим в (3.32)

$$\left(v - \frac{\sin^2\vartheta}{v}\right)^2 = \frac{(y-1)^2}{y}, \quad 0 < y < \infty.$$

Тогда (3.31) нетрудно привести к виду:

$$J(\vartheta) = \frac{1}{4m} \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}} \frac{y+1}{y^2 - 2y\cos\vartheta + 1} g(\ln y)$$

$$= \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} v(r) h(r)\, dr \quad ,$$

где

$$v(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{u/2}(e^u + 1)}{e^{2u} - 2e^u \cos 2\vartheta + 1} e^{iur}\, du =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{t+1}{t^2 - 2t\cos 2\vartheta + 1} t^{ir - \frac{1}{2}}\, dt \quad . \tag{3.33}$$

Вычисляя последний интеграл при помощи вычетов, мы окончательно получим:

$$J(\vartheta) = \frac{1}{2m\sin\vartheta} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \frac{e^{-2\vartheta r}}{1 + e^{-2\pi r}}\, dr.$$

Таким образом, вклад от эллиптических элементов в формулу следа Сельберга равен

$$\frac{1}{2} \sum_{\{R\}_\Gamma} \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{1}{m\sin(\ell\pi/m)} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \frac{e^{-2\pi r \ell/m}}{1 + e^{-2\pi r}}\, dr. \tag{3.34}$$

Итак, нами доказана

Теорема 3.I. (Формула следа Сельберга).

Пусть $\tilde{h}(\lambda)$ – элементарная функция (2.6). Тогда

$$\sum \tilde{h}(\lambda_i) = \frac{\mu(F)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r\, th\pi r\; h(r)\,dr$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\{R\}_\Gamma} \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{1}{m \sin(\ell\pi/m)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi r \ell/m}}{1 + e^{-2\pi r}}\, h(r)\,dr$$

$$+ \sum_{\{P\}_\Gamma} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ln N(\{P\})}{N(\{P\})^{\ell/2} - N(\{P\})^{-\ell/2}}\, g(\ell \cdot \ln N(\{P\})) \qquad (3.35)$$

$$- \int_0^{\infty} h'(r)\, \xi_0(r)\,dr - n \ln 2 \cdot g(0) + \frac{1}{4} n\, h(0) - \frac{n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir)\, h(r)\,dr,$$

причем суммирование в левой части производится по всем собственным значениям оператора Лапласа A. Все ряды и интегралы в (3.35) абсолютно сходятся.

Методы, использованные нами при выводе формулы следа Сельберга, позволяют ввести "регуляризованный" определитель $\Delta_A(s)$ оператора A, связанный с дзета-функцией Сельберга:

$$Z_\Gamma(s) = \prod_{\{P\}_\Gamma} \prod_{\ell=0}^{\infty} \left(1 - N(\{P\})^{-s-\ell}\right).$$

Мы ограничимся однако рассмотрением "регуляризованного" следа резольвенты оператора Лапласа. Как и раньше, пусть $\varkappa$ – достаточно большое положительное число. Тогда из леммы 2.I § 2 следует, что оператор

$$\tilde{R}_a(s) = R(s) - Q(s) - R(\varkappa) + Q(\varkappa) \in \gamma_1(\mathcal{H}_\gamma),$$

при всех неособых s, $\sigma > \frac{1}{2}$. По определению, "регуляризованный" след резольвенты равен

$$\Omega(s) = Sp\, \tilde{R}_a(s) + \frac{n \ln a}{2\varkappa - 1} - \frac{n \ln a}{2s-1} + \frac{a^{1-2s}}{(2s-1)^2} Sp\, S_a(s) - \frac{1}{(2s-1)^2} Sp\, S(\tfrac{1}{2}) \qquad (3.36)$$

Через $\tilde{r}_a(z, z'; s)$ обозначим аналитическое продолжение ядра оператора $\tilde{R}_a(s)$ в полосу $\mathcal{P}: 0 < \sigma < 2$. Нетрудно показать, что функция $\Omega(s)$ аналитична в неособых точках s, $\sigma > \frac{1}{2}$.

Теорема 3.2.

I. Функция $\Omega(s)$ не зависит от выбора параметра a и до-

пускает аналитическое продолжение на всю комплексную S-плоскость.

2. При $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ $\Omega(s)$ аналитична в неособых точках S.

В окрестности особой точки $s_0 \neq \frac{1}{2}$, $\sigma_0 \geqslant \frac{1}{2}$ функцию $\Omega(s)$ можно представить в виде

$$\Omega(s) = \frac{1}{2s_0 - 1} \frac{m}{s - s_0} + \Omega_{s_0}(s), \tag{3.37}$$

где m – кратность соответствующего собственного значения $\lambda_0 = s_0(1 - s_0)$ оператора Лапласа, а функция $\Omega_{s_0}(s)$ аналитична в окрестности точки s_0.

В точке $s_0 = \frac{1}{2}$ $\Omega(s)$ может иметь полюс не выше второго порядка.

3. Функция $\Omega(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению.

$$\Omega(1-s) = \Omega(s) + \frac{1}{2s-1} Sp \frac{S'}{S}(1-s) \tag{3.38}$$

Доказательство. Независимость функции $\Omega(s)$ от параметра a нетрудно получить, вычисляя при неособых s, $\sigma > \frac{1}{2}$ разность $Sp\,\tilde{R}_b(s) - Sp\,\tilde{R}_a(s)$ при различных a и b. Далее, аналитическое продолжение $\Omega(s)$ в критическую полосу $\Phi: 0 < \sigma < 2$ осуществляется при помощи интегрального представления:

$$\Omega(s) = \int_{F_0} \tilde{r}_{a00}(z,z;s)\,dz + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\Pi_a} \left[\tilde{r}_{a\alpha\alpha}(z,z;s) - \frac{y^{2-2s}}{2s-1}\left(S_{\alpha\alpha}(s) - S_{a\alpha\alpha}(s)\right)\right] dz$$

$$- \frac{n \ln a}{2s-1} + \frac{n \ln a}{2\varkappa - 1} + \frac{a^{1-2s}}{(2s-1)^2} Sp\, S_a(s) - \frac{1}{(2s-1)^2} Sp\, S\left(\tfrac{1}{2}\right), \tag{3.39}$$

причем все входящие в (3.39) интегралы сходятся абсолютно и равномерно по S на каждом компакте, не содержащем особых точек.

Результаты п.2 нетрудно получить, используя разложение ядра резольвенты $r(z,z';s)$ в особых точках ((I.2I)). Для аналитического продолжения $\Omega(s)$ на всю плоскость выведем функциональное уравнение (3.38). Для этого воспользуемся функциональным уравнением (I.27) для ядра резольвенты. При $Y > a$ рассмотрим функцию

$$\Omega_Y(s) = \int_{F_0} \tilde{r}_{a00}(z,z;s)\,dz + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\Pi_a - \Pi_Y} \left[\tilde{r}_{a\alpha\alpha}(z,z;s) - \frac{y^{2-2s}}{2s-1}\left(S_{\alpha\alpha}(s) - S_{a\alpha\alpha}(s)\right)\right] dz$$

$$- \frac{n \ln a}{2s-1} + \frac{n \ln a}{2\varkappa - 1} + \frac{a^{1-2s}}{(2s-1)^2} Sp\, S_a(s) - \frac{1}{(2s-1)^2} Sp\, S\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Тогда

$$\Omega(s) = \lim_{Y\to\infty} \Omega_Y(s)$$

и, используя (I.27), можно получить

$$\Omega_Y(s) - \Omega_Y(1-s) = \frac{1}{2s-1} \int_{F_Y} \psi^\beta(z,s)\psi^\beta(z,1-s)\,dz -$$

$$- \frac{2n\ln Y}{2s-1} + \frac{1}{(2s-1)^2}\left[Y^{1-2s} S_p S(s) - Y^{2s-1} S_p S(1-s)\right].$$

Из доказательства леммы 2.3 теперь мы получим, что (3.38) выполняется в неособых точках на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Теорема доказана. Поясним как функция $\Omega(s)$ связана с дзета-функцией Сельберга: логарифмическая производная $\frac{1}{2s-1}\frac{Z_\Gamma'}{Z_\Gamma}(s)$ совпадает с вкладом в $\Omega(s)$ от гиперболических элементов в представлении ядра $r(z,z';s)$ в виде суммы ряда по дискретной группе.

Литература

I Selberg A., Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, Indian Journ.Math.Soc., 20 (I956), 47-87, (русский перевод: Математика I:4(I957), 3-28.

2 Фаддеев Л.Д., Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского, Труды Моск. мат. об-ва, т.I7 (I966), 323-350.

3 Крейн М.Г., О некоторых новых исследованиях по теории возмущений самосопряженных операторов., В сборнике "Первая летняя математическая школа (г.Канев, июнь-июль I963 г)", "Наукова думка" (I964 г).

4 Кубота Т., Введение в теорию Сельберга. Препринт (на японском языке).

5 Kubota T., Elementary Theory of Eisenstein series, Kodansha, Tokyo (I973).

6 Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов, Ш, Вестник Ленинградского университета, № I (I969), 35-48.

7 Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Замечания о функции спектрального сдвига, Записки научн.семинаров ЛОМИ, т.27 (I972), 33-47.

8. Selberg A., Discrete subgroups, Report on the International Congress of Mathematicians, Stochgolm, 1962 (Частичный перевод в сборнике: "Арифметические группы и автоморфные функции", Москва, "Мир" (1969)).

9. Гохберг И.И., Крейн М.Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Москва, "Наука, (1965).

10. Венков А.Б., Разложение по автоморфным собственным функциям оператора Лапласа и формула следа Сельберга в пространстве $SO_0(n,1)/SO(n)$, ДАН СССР, 200, 2 (1971), 266-269.

11. Калинин В.Л., Регуляризованный след резольвенты оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы движений плоскости Лобачевского, Дипломная работа, ЛГУ (1969).

12. Венков А.Б., Регуляризованный след резольвенты оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы движений плоскости Лобачевского, Дипломная работа, ЛГУ (1969).