Н. Ю. Решетихин, Л. Д. Фаддеев, Гамильтоновы структуры для интегрируемых моделей теории поля, *ТМФ*, 1983, том 56, номер 3, 323–343

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 56, № 3
сентябрь, 1983

ГАМИЛЬТОНОВЫ СТРУКТУРЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Решетихин Н. Ю., Фаддеев Л. Д.

Показано, что для классических непрерывных интегрируемых моделей теории поля скобка Пуассона, заданная в r-матричном виде, допускает простую геометрическую интерпретацию в терминах алгебры токов. Фазовые пространства модели при такой интерпретации являются интегральными многообразиями стандартной симплектической структуры на алгебре токов. Для дискретных интегрируемых систем явно построены интегральные многообразия дискретной r-матричной скобки для рациональных r-матриц, связанных с классическими алгебрами Ли. Показано, что в дискретном случае имеется мультипликативная операция усреднения, позволяющая получать тригонометрические и эллиптические L-операторы из рациональных. Для однополюсного L-оператора, связанного с алгеброй $sl(2)$, такое усреднение вычислено явно.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что имеется класс нелинейных дифференциальных уравнений, в которых задачу Коши можно решить явно методом обратной задачи рассеяния [1, 2, 3]. В [4] было показано, что наиболее интересные уравнения такого типа гамильтоновы, причем соответствующие динамические системы являются вполне интегрируемыми, а преобразование к данным рассеяния эквивалентно преобразованию к переменным типа действие — угол.

Наиболее современным и эффективным подходом к интегрируемым системам с ультралокальной скобкой Пуассона является метод r-матрицы [5, 6]. Этот подход основывается на том, что скобку Пуассона между двумя L-операторами удается записать в так называемом r-матричном виде (3). Такой вид скобки Пуассона позволяет легко вычислить скобки между элементами матрицы монодромии, найти производящие функции для набора интегралов в инволюции. Для каждого из этих интегралов уравнения движения записываются в лаксовом виде, соответствующие M-операторы легко вычисляются. Единственным мистическим местом в таком подходе было существование самой r-матрицы. В конкретных моделях ее появление было удивительным вычислительным фактом.

В настоящей работе показано, что в непрерывных моделях r-матрица имеет простой геометрический смысл. Она оказывается эквивалентной скобке Ли — Пуассона[1] [7, 8] для некоторой алгебры Ли, просто связан-

[1] В литературе эта скобка известна также как скобка Березина — Кириллова — Костанта. Как недавно выяснилось, впервые она введена в работе Ли [7, ч. VI, гл. 25, § 115, формула (75)].

ной с алгеброй токов. Это позволяет классифицировать все L-операторы, имеющие скобку с данной r-матрицей, в терминах орбит алгебры токов. Сама r-матрица при такой интерпретации имеет смысл структурных констант соответствующей алгебры.

Вторая часть работы посвящена исследованию r-матричной скобки Пуассона в дискретном случае. Здесь не имеется такой завершенной орбитной интерпретации, как для непрерывных систем. Однако конечномерные интегральные многообразия также допускают простую классификацию. Показано, что в дискретном случае имеется мультипликативная операция усреднения, позволяющая получать тригонометрические и эллиптические L-операторы из рациональных.

Мы будем придерживаться следующего плана изложения. В разделе 1 сделан краткий обзор r-матричной схемы интегрирования непрерывных систем. В разделе 2 дана геометрическая интерпретация r-матричной скобки Пуассона для непрерывных систем с рациональной r-матрицей. В разделе 3 рассмотрен случай тригонометрических и эллиптических r-матриц. В разделе 4 получены конечномерные интегральные многообразия r-матричной скобки Пуассона в дискретном случае для рациональных r-матриц. В разделе 5 результаты предыдущего раздела переносятся на тригонометрический и эллиптический случаи.

1. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СКОБКА ПУАССОНА

Напомним кратко метод r-матрицы в теории интегрируемых непрерывных систем с ультралокальной скобкой Пуассона.

Вспомогательную линейную задачу будем записывать в виде матричного дифференциального оператора первого порядка:

$$L\Phi(x, \lambda) \equiv -i\partial_x \Phi(x, \lambda) + U(x, \lambda)\Phi(x, \lambda) = 0. \tag{1}$$

Матрица $U(x, \lambda)$ — это локальный функционал динамических переменных, зависящий от спектрального параметра λ. Как матрица $U(x, \lambda)$ действует в пространстве V.

Примем следующие обозначения. Пусть A и B — матрицы, матричные элементы которых являются функционалами динамических переменных. Через $\{A \underset{,}{\otimes} B\}$ обозначим матрицу скобок Пуассона между матричными элементами A и B:

$$\{A_{ij}, B_{kl}\} \equiv \{A \underset{,}{\otimes} B\}_{ik,jl}. \tag{2}$$

В этих обозначениях r-матричный вид скобки Пуассона между элементами матрицы $U(x, \lambda)$ в (1) означает, что существует матрица $r(\lambda)$, действующая в произведении двух пространств V, не зависящая от динамических переменных, такая что

$$\{U(x,\lambda) \underset{,}{\otimes} U(y,\mu)\} = [r(\lambda-\mu), U(x,\lambda)\otimes 1 + 1\otimes U(y,\mu)]\delta(x-y). \tag{3}$$

Ультралокальность, упоминавшаяся выше, означает, что в правой части (3) нет слагаемых с производными δ-функции. Скобку (3) мы будем также называть фундаментальной скобкой Пуассона (ФСП).

Соотношения (3) непротиворечивы, если матрица $r(\lambda)$ удовлетворяет уравнению Янга — Бакстера

$$(4)\qquad [r_{12}(\lambda),\, r_{13}(\lambda+\mu)]+[r_{12}(\lambda),\, r_{23}(\mu)]+[r_{13}(\lambda+\mu),\, r_{23}(\mu)]=0.$$

Здесь каждая матрица $r_{ij}(\lambda)$ действует в произведении $V\otimes V\otimes V$. Нижние индексы указывают на то, в какой паре пространств матрица действует нетривиально, например $r_{12}(\lambda)=r(\lambda)\otimes 1$, $r_{23}(\lambda)=1\otimes r(\lambda)$. Уравнение (4) играет роль тождества Якоби для скобки (3).

Матрица монодромии уравнения (1) на интервале $(-L, L)$ определяется как упорядоченная экспонента:

$$(5)\qquad T_L(\lambda)=P\exp\left(-i\int_{-L}^{L} U(x,\lambda)\,dx\right).$$

Если $\Phi(x, \lambda)$ — решение (1) с граничным условием $\Phi(-L, \lambda)=1$, то $\Phi(L, \lambda)=T_L(\lambda)$.

Из (4) для скобки Пуассона между элементами матрицы монодромии получаем

$$(6)\qquad \{T_L(\lambda)\overset{\otimes}{,} T_L(\mu)\}=-i[r(\lambda-\mu),\, T_L(\lambda)\otimes T_L(\mu)].$$

Отсюда следует коммутативность собственных значений матрицы $T_L(\lambda)$: $\{\lambda_i(T_L(\lambda)),\, \lambda_j(T_L(\mu))\}=0$. Это позволяет рассматривать собственные значения $T_L(\lambda)$ как производящие функции для набора инволютивных функционалов на фазовом пространстве системы. Если один из них выбрать в качестве гамильтониана динамической системы, то ее уравнения движения допускают лаксово представление. Во всех известных случаях упомянутый выше набор инволютивных функционалов оказывается полным и соответствующие динамические системы вполне интегрируемыми. Наиболее просто лаксово представление получается, если в качестве гамильтониана выбрать след матрицы монодромии в точке $\lambda=\lambda_0$:

$$H_{\lambda_0}=\operatorname{tr} T_L(\lambda_0),$$

$$\dot U(x,\lambda)=\{H_{\lambda_0}, U(x,\lambda)\}=-i\operatorname{tr}_1\int_{-L}^{L} dy\,(T_L^+(y,\lambda_0)\otimes 1)\times$$

$$\times\{U(y,\lambda_0)\overset{\otimes}{,} U(x,\lambda)\}\,(T_L^-(y,\lambda_0)\otimes 1).$$

Здесь tr_1 обозначает след по первому пространству

$$T_L^+(y,\lambda)=P\exp\left(-i\int_{y}^{L} U(x,\lambda)\,dx\right),$$

$$T_L^-(y,\lambda)=P\exp\left(-i\int_{-L} U(x,\lambda)\,dx\right).$$

Из (3) и (1) получаем лаксово представление [5, 9]

$$(7)\qquad \dot U(x,\lambda)=i\partial_x M(x,\lambda)+[M(x,\lambda),\, U(x,\lambda)],$$
$$M(x,\lambda)=-i\operatorname{tr}_1(T_L^-(x,\lambda_0)T_L^+(x,\lambda_0)\otimes 1 r(\lambda_0-\lambda)).$$

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СКОБКИ ПУАССОНА

Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли с генераторами X_a:

$$(8)\qquad [X_a, X_b]=C_{ab}{}^c X_c.$$

Элементами алгебры будут $x=x^aX_a$.

Двойственное к $\mathfrak{G}$ пространство линейных функционалов $\xi(x)=x^a\xi_a$ будем обозначать $\mathfrak{G}^*$. В пространстве функций на $\mathfrak{G}^*$ определена скобка Ли – Пуассона [7, 8]:

$$\{f(\xi), g(\xi)\}=-iC_{ab}{}^c\frac{\partial g}{\partial \xi_a}\frac{\partial f}{\partial \xi_b}\xi_c. \tag{9}$$

Применительно к базисным элементам ξ_a эта скобка имеет следующий вид:

$$\{\xi_a, \xi_b\}=iC_{ab}{}^c\xi_c. \tag{10}$$

Перейдем к объяснению ФСП через скобку Ли – Пуассона для алгебры токов. Под алгеброй токов C мы понимаем алгебру с базисными элементами $X_a(\lambda)$, $-\infty<\lambda<+\infty$:

$$[X_a(\lambda), X_b(\mu)]=2\pi C_{ab}{}^cX_c(\lambda)\delta(\lambda-\mu). \tag{11}$$

Элементами алгебры являются свертки вида

$$x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^a(\lambda)X_a(\lambda)\,d\lambda. \tag{12}$$

Рассмотрим двойственное к C пространство C^*. Оно состоит из линейных функционалов $\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^a(\lambda)\xi_a(\lambda)\,d\lambda$. На элементах $\xi_a(\lambda)$ задана скобка Ли – Пуассона

$$\{\xi_a(\lambda), \xi_b(\mu)\}=2\pi iC_{ab}{}^c\xi_c(\lambda)\delta(\lambda-\mu). \tag{13}$$

Алгебра Ли C как линейное пространство раскладывается в сумму двух подалгебр $C=C_+\dot{+}C_-$. Подалгебра C_+ (C_-) образована из функций $x^a(\lambda)$, аналитически продолжающихся в верхнюю (нижнюю) полуплоскость. В двойственном пространстве C^* имеется соответствующее разбиение: $C^*=C_+^*\dot{+}C_-^*$. Причем C_+^* (C_-^*) образовано функциями $\xi_a(\lambda)$, аналитически продолжающимися в нижнюю (верхнюю) полуплоскость. Разбиение явно осуществляется с помощью интеграла Коши:

$$\xi_a(\lambda)=\xi_a^+(\lambda)+\xi_a^-(\lambda), \tag{14}$$

$$\xi_a^+(\lambda)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\lambda-\mu+i0}\xi_a(\mu)\,d\mu, \tag{15}$$

$$\xi_a^-(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\lambda-\mu-i0}\xi_a(\mu)\,d\mu, \tag{16}$$

где $\xi^+\in C_-^*$, $\xi^-\in C_+^*$. Подставляя эти выражения в (13) для скобок Пуассона между компонентами $\xi^\pm$, получаем

$$\{\xi_a^+(\lambda), \xi_b^+(\mu)\}=\frac{C_{ab}{}^c}{\lambda-\mu}(\xi_c^+(\lambda)-\xi_c^+(\mu)), \tag{17}$$

$$\{\xi_a^+(\lambda), \xi_b^-(\mu)\}=\frac{C_{ab}{}^c}{\lambda-\mu}(\xi_c^-(\lambda)-\xi_c^-(\mu)), \tag{18}$$

$$(19)\qquad \{\xi_a^-(\lambda), \xi_b^+(\mu)\} = -\frac{C_{ab}{}^c}{\lambda-\mu}(\xi_c^-(\lambda)-\xi_c^+(\mu)) + \\ + i\pi C_{ab}{}^c(\xi_c^+(\mu)+\xi_c^-(\mu))\delta(\lambda-\mu).$$

Теперь вместо C рассмотрим алгебру[2] $C_0 = C_+ \oplus C_-$; она отличается от C тем, что в C_0 элементы C_+ коммутируют с элементами C_-. Из (17) и (18) для элементов сопряженного к C_0 пространства $C_0{}^*$ получаем

$$(20)\qquad \{\xi_a(\lambda), \xi_b(\mu)\} = \frac{C_{ab}{}^c}{\lambda-\mu}(\xi_c(\lambda)-\xi_c(\mu)),$$

здесь $\xi_a(\lambda)$ — элемент $C_0{}^*$.

Далее допустим, что существуют матрицы A^a и r такие, что

$$(21)\qquad [r, A^c\otimes 1 + 1\otimes A^c] = 0, \quad [r, A^c\otimes 1] = C_{ab}{}^c A^a\otimes A^b.$$

Образуем матрицу $\xi(\lambda) = \xi_a(\lambda)A^a$, тогда из (20) и (21) получаем, что

$$(22)\qquad \{\xi(\lambda)\overset{\otimes}{,}\xi(\mu)\} = \left[\frac{r}{\lambda-\mu}, \xi(\lambda)\otimes 1 + 1\otimes\xi(\mu)\right].$$

В левой части этого равенства использовано обозначение (2).

Матрицы A^a и r легко построить для простых алгебр Ли. В этом случае

$$(23)\qquad A^a = K^{ab}X_b, \quad r = K^{ab}X_a\otimes X_b,$$

где K^{ab} — матрица формы Киллинга — Картана.

Чтобы получить скобку (3), нужно рассмотреть алгебру $\tilde{C}_0 = \Pi_x C_{0,x}$. Элементами $\tilde{C}_0{}^*$ будут функции двух аргументов x и λ. Для скобки Ли — Пуассона на $\tilde{C}_0{}^*$ из (22) получаем

$$(24)\qquad \{\xi(\lambda, x)\overset{\otimes}{,}\xi(\mu, y)\} = \left[\frac{r}{\lambda-\mu}, \xi(\lambda, x)\otimes 1 + 1\otimes\xi(\mu, y)\right]\delta(x-y).$$

Таким образом, мы доказали, что скобка (3) с матрицей $r(\lambda)$ вида

$$(25)\qquad r(\lambda) = \frac{K^{ab}X_a\otimes X_b}{\lambda}$$

является специальным образом записанной скобкой Ли — Пуассона для алгебры C_0. Отсюда следует, что любая матрица $U(x, \lambda)$, удовлетворяющая (3) с r-матрицей (25), будет принадлежать $\tilde{C}_0$-орбите в $\tilde{C}_0{}^*$. Это делает возможным классификацию всех L-операторов с r-матрицей (25).

Ниже приведены $\tilde{C}_0$-орбиты с конечномерным фазовым пространством. Они соответствуют L-операторам динамических систем с конечным числом полей. Зависимость от координаты x будем для удобства опускать, подразумевая ультралокальность соответствующих скобок.

1. Элементарная орбита. Этой орбите соответствуют матрицы $\xi(\lambda)$ вида

$$(26)\qquad \xi(\lambda) = S/(\lambda+c), \quad S = K^{ab}S_aX_b.$$

Из (22) следует, что S_a принадлежат пространству $\mathfrak{G}^*$: $\{S_a, S_b\} = -C_{ab}{}^cS_c$.

[2] Введение алгебры C_0 и ее орбит тесно связано с так называемой схемой Адлера — Костанта (см., например, [10]). Связь алгебры токов и интегрируемых гамильтоновых систем (необязательно с ультралокальной скобкой Пуассона) впервые описана в работе [11].

Эта скобка будет невырожденной, если зафиксировать все независимые инварианты матрицы S. Для $\mathfrak{G}=\mathfrak{su}(2)$

$$K^{ab}=\delta^{ab}, \quad C_{ab}{}^{c}=\varepsilon_{abc}, \quad a, b, c=1, 2, 3, \tag{27}$$

достаточно положить $\sum_{a=1}^{3} S_a{}^2=R^2$. Эта орбита соответствует L-оператору изотропной модели Гейзенберга [12].

2. Конечномерная орбита общего положения. Ее элементы имеют вид

$$\xi(\lambda)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{n_j}\frac{S^{j,k}}{(\lambda-a_j)^{k+1}}, \quad S^{j,k}=K^{ab}S_a^{j,k}X_b. \tag{28}$$

Из (22) получаем следующую скобку между элементами $S_a{}^{j,k}$:

$$\{S_a^{j,k}, S_b^{i,l}\}=-\delta_{ij}C_{ab}{}^{c}S_c^{j,k+l}. \tag{29}$$

Здесь если $k>n_j$, то $S_a{}^{j,k}\equiv 0$.

В простейшем случае $N=1$, $n_1=1$ и $\mathfrak{G}=\mathfrak{su}(2)$ получаем

$$\{S_a{}^0, S_b{}^0\}=-\varepsilon_{abc}S_c{}^0, \quad \{S_a{}^0, S_b{}^1\}=-\varepsilon_{abc}S_b{}^1, \quad \{S_a{}^1, S_b{}^1\}=0. \tag{30}$$

L-оператор (28) с таким фазовым пространством описывает магнетик на алгебре $E(3)$.

Чтобы из (29) получить невырожденную скобку, нужно зафиксировать все независимые инварианты.

3. Простейшая предельная орбита. Она состоит из функций, линейных по λ:

$$\xi(\lambda)=J\lambda+Q. \tag{31}$$

Эта орбита получается вырождением из двухполюсной орбиты

$$\tilde{\xi}(\lambda)=S/(\lambda-p)+T/(\lambda+p). \tag{32}$$

При вырождении $S_a+T_a=p^2Q_a$, $S_a-T_a=pJ_a$, $p\to\infty$, Q_a и J_a конечны. В пределе из (29) получаем следующие скобки между J_a и Q_a:

$$\{J_a, J_b\}=\{J_a, Q_b\}=0, \quad \{Q_a, Q_b\}=-C_{ab}{}^{c}J_c. \tag{33}$$

Эта орбита при $\mathfrak{G}=\mathfrak{sl}(2)$ соответствует L-оператору нелинейного уравнения Шредингера [13] (в зависимости от выбора вещественной формы $\mathfrak{sl}(2)$ с притяжением или отталкиванием). Для других $\mathfrak{G}$ (31) описывает всевозможные векторные и матричные обобщения этой модели [14, 15].

Скобки между J_a и Q_a можно получить также непосредственно, подставив (31) в (22).

4. Предельная орбита общего положения. Ее элементами являются полиномы по λ

$$\xi(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}Q^j\lambda^j, \quad Q^j=K^{ab}Q_a{}^jX_b. \tag{34}$$

Подставляя это в (22) между элементами $Q_a{}^j$, получим следующие скобки Пуассона:

$$\{Q_a{}^j, Q_b{}^l\}=-C_{ab}{}^{c}Q_c^{j+l-1}. \tag{35}$$

Как и в (29), если $j>n$, то $Q_a{}^j\equiv 0$.

Такие орбиты, как и простейшая из примера 3, получаются вырождением из многополюсных орбит с одновременной деформацией скобок Пуассона.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СКОБКИ ПУАССОНА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ r-МАТРИЦ

Перейдем к описанию орбитной интерпретации потенциалов $U(x, \lambda)$, имеющих скобку Пуассона (3) с тригонометрическими и эллиптическими r-матрицами.

В алгебре токов C действует автоморфизм θ:

$$\theta X(\lambda) = AX(\lambda-\omega), \tag{36}$$

где A — автоморфизм алгебры $\mathfrak{G}$.

Для объяснения r-матричной скобки Пуассона в тригонометрическом случае нужно перейти к подалгебре алгебры токов, инвариантной относительно автоморфизма θ. Можно показать, что эта подалгебра допускает -градуировку и оказывается изоморфной одной $\mathbb{Z}$ из алгебр Каца — Муди, список которых приведен в [16].

Элементы алгебры C^θ можно получить из C с помощью операции усреднения. Эта операция использовалась в [17] для получения эллиптических и тригонометрических решений уравнения Янга — Бакстера и в [18] при исследовании редукций в лаксовом представлении. Для элементов базиса имеем

$$X^\theta(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\pm\infty} \theta^n X(\lambda). \tag{37}$$

Операция усреднения не влияет на коммутационные соотношения между элементами базиса:

$$[X_a{}^\theta(\lambda), X_b{}^\theta(\mu)] = 2\pi\delta(\lambda-\mu) C_{ab}{}^c X_c{}^\theta(\lambda) \tag{38}$$

при $0<\lambda, \mu\leqslant\omega$.

Для элементов базиса в $C^{\theta*}$ получаем

$$\{\xi^\theta(\lambda)\otimes\xi^\theta(\mu)\} = 2\pi i\delta(\lambda-\mu)[r, \xi^\theta(\lambda)\otimes 1]. \tag{39}$$

Обозначения те же, что и в (21) — (22), $0<\lambda, \mu\leqslant\omega$.

В C^θ, как и в C, можно выделить две подалгебры $C_+{}^\theta$ и $C_-{}^\theta$, элементы которых аналитически продолжаются соответственно в верхнюю и нижнюю полуполосы $0<\operatorname{Re}\lambda\leqslant\omega$.

Аналогичное разбиение имеется в двойственном пространстве $C^{\theta*}$. Для элементов $C^{\theta*}$ получаем разложение

$$\xi^\theta(\lambda) = \xi_+{}^\theta(\lambda) + \xi_-{}^\theta(\lambda), \tag{40}$$

$$\xi_+{}^\theta(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^\omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K^{ab}A^n X_a}{\lambda-\mu-n\omega+i0}\xi_b{}^\theta(\mu)\,d\mu, \tag{41}$$

$$\xi_-{}^\theta(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{K^{ab}A^n X_a}{\lambda-\mu-n\omega-i0}\xi_b{}^\theta(\mu)\,d\mu. \tag{42}$$

Нетрудно получить скобки между компонентами $\xi_{\pm}{}^{\theta}(\lambda)$:

$$(43)\qquad \{\xi_{+}{}^{\theta}(\lambda)\overset{\otimes}{,}\xi_{+}{}^{\theta}(\mu)\}=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(A^{n}\otimes 1)r}{\lambda-\mu-n\omega},\ \xi_{+}{}^{\theta}(\lambda)\otimes 1+1\otimes\xi_{+}{}^{\theta}(\mu)\right],$$

$$(44)\qquad \{\xi_{-}{}^{\theta}(\lambda)\overset{\otimes}{,}\xi_{+}{}^{\theta}(\mu)\}=-\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(A^{n}\otimes 1)r}{\lambda-\mu-n\omega},\ \xi_{-}{}^{\theta}(\lambda)\otimes 1+\right.$$

$$\left.+1\otimes\xi_{+}{}^{\theta}(\mu)\right]+i\pi\delta(\lambda-\mu)\,[r,\xi_{-}{}^{\theta}(\lambda)\otimes 1+\xi_{+}{}^{\theta}(\mu)\otimes 1],$$

$$(45)\qquad \{\xi_{-}{}^{\theta}(\lambda)\otimes\xi_{-}{}^{\theta}(\mu)\}=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(A^{n}\otimes 1)r}{\lambda-\mu-n\omega},\ \xi_{-}{}^{\theta}(\lambda)\otimes 1+1\otimes\xi_{-}{}^{\theta}(\mu)\right],$$

здесь $0<\lambda,\ \mu\leqslant\omega$.

Как и в рациональном случае, рассмотрим алгебру $C_0{}^{\theta}=C_{+}{}^{\theta}\oplus C_{-}{}^{\theta}$. В $C_0{}^{\theta*}$ элементы ξ_{+} и ξ_{-} коммутируют: $\{\xi_{+}{}^{\theta}(\lambda)\otimes\xi_{-}{}^{\theta}(\mu)\}=0$. Поэтому для элементов $\xi(\lambda)$ скобка в $C_0{}^{\theta*}$ имеет вид ФСП с тригонометрической r-матрицей:

$$(46)\qquad \{\xi(\lambda)\overset{\otimes}{,}\xi(\mu)\}=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(A^{n}\otimes 1)r}{\lambda-\mu-n\omega},\ \xi(\lambda)\otimes 1+1\otimes\xi(\mu)\right].$$

Таким образом, если ФСП с рациональными r-матрицами связаны с алгебрами токов, то ФСП с тригонометрическими r-матрицами соответствуют стандартной симплектической структуре на $\mathbb{Z}$-градуированных алгебрах Ли.

Перейдем к описанию ФСП для эллиптических r-матриц. Для существования эллиптической r-матрицы необходимо, чтобы в $\mathfrak{G}$ действовала пара коммутирующих автоморфизмов [17]. Единственной полупростой алгеброй с этим свойством является $\mathfrak{gl}(n)$.

Пусть ω_1 — вещественное число, а $\operatorname{Im}\omega_2\neq 0$. Рассмотрим подалгебру $C_0^{\theta\theta'}$ в $C_0{}^{\theta}$ функций, автоморфных по двум периодам:

$$\theta\xi(\lambda)\equiv A\xi(\lambda-\omega_1)=\xi(\lambda),\qquad \theta'\xi(\lambda)\equiv B\xi(\lambda-\omega_2)=\xi(\lambda).$$

Для элементов $C_0^{\theta\theta'*}$, усредняя элементы $C_0{}^{\theta*}$ по автоморфизму θ', получим

$$(47)\qquad \{\tilde{\xi}(\lambda)\otimes\tilde{\xi}(\mu)\}=\left[\sum_{n,m}\frac{(A^{n}B^{m}\otimes 1)r}{\lambda-\mu-n\omega_1-m\omega_2},\tilde{\xi}(\lambda)\otimes 1+1\otimes\tilde{\xi}(\mu)\right],$$

$$\tilde{\xi}(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\theta')^{n}\xi^{\theta}(\lambda).$$

Это и есть ФСП с эллиптической r-матрицей.

Алгебра $C_0^{\theta\theta'}$ в несколько ином виде возникала при построении эллиптических L-операторов в работе [18].

Итак, мы получили геометрическую интерпретацию ФСП для следующих r-матриц:

1) рациональные $r(\lambda)=\dfrac{K^{ab}X_a\otimes X_b}{\lambda}$,

2) тригонометрические $r(\lambda)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{(A^n\otimes 1)K^{ab}X_a\otimes X_b}{\lambda-n\omega}$,

3) эллиптические $r(\lambda)=\sum\limits_{n,\,m}\dfrac{A^nB^mX_a\otimes X_bK^{ab}}{\lambda-n\omega_1-m\omega_2}$, $\quad [A,\,B]=0$.

В [17] показано, что этими r-матрицами исчерпываются все r-матрицы с разумными аналитическими свойствами, т. е. в рациональном случае убывающие при $\lambda\to\infty$, в тригонометрическом случае ограниченные при $\lambda\to\pm i\infty$.

В заключение этого раздела приведем примеры интегральных многообразий скобок (46), (47). Как и в рациональном случае, они являются орбитами соответствующих алгебр C_0^{θ} и $C_0^{\theta\theta'}$. Конечномерные не предельные орбиты (46) и (47) получаются из (28) усреднением по соответствующей группе автоморфизмов. В тригонометрическом случае, как и в рациональном, существуют предельные орбиты, получающиеся вырождением из орбит общего положения. Приведем два примера.

1. Однополюсная орбита. Соответствующие функции $\xi(\lambda)$ получаются из (26) усреднением по группе автоморфизмов:

$$\xi(\lambda)=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\frac{B^nA^nS}{\lambda-n\omega_1-m\omega_2}. \tag{48}$$

Так, для $\mathfrak{G}=\mathfrak{sl}(2)$, $\omega_1=2K$, $\omega_2=2iK'$ получаем

$$\begin{gathered}AX_{1,\,2}=-X_{1,\,2},\quad BX_{2,\,3}=-X_{2,\,3},\quad AX_3=X_3,\quad BX_1=X_1,\\ \xi(\lambda)=\frac{X_1S_1}{\operatorname{sn}(\lambda,k)}+\frac{X_2S_2}{\operatorname{sn}(\lambda,k)}\operatorname{dn}(\lambda,k)+\frac{X_3S_3}{\operatorname{sn}(\lambda,k)}\operatorname{cn}(\lambda,k).\end{gathered} \tag{49}$$

Здесь для K^{ab} и $C_{ab}{}^{c}$ выбрана нормировка (27). Матрица (49) является L-оператором для уравнения Ландау – Лифшица [19].

Аналогично однополюсная орбита получается в тригонометрическом случае.

2. Предельная орбита. Простейшая предельная орбита состоит из элементов, получающихся вырождением из двухполюсной функции $\xi(\lambda)$. Пусть $\mathfrak{G}=\mathfrak{sl}(2)$, $\omega=1$, тогда двухполюсная функция имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}(\lambda)=&\frac{\pi}{\sin\pi(\lambda-p)}(X_1S_1+X_2S_2)+\operatorname{ctg}\pi(\lambda-p)X_3S_3+\\ &+\frac{\pi}{\sin\pi(\lambda+p)}(X_1T_1+X_2T_2)+\operatorname{ctg}\pi(\lambda+p)X_3T_3.\end{aligned} \tag{50}$$

При вырождении $p\to i\infty$, так что $U_{\pm}=2\pi e^{i\pi p}(S_1\pm iS_2)$, $W_{\pm}=2\pi e^{i\pi p}(T_1\pm iT_2)$, $P=S_3-T_3$ остаются конечными величинами. Предельные скобки Пуассона имеют вид

$$\begin{gathered}\{P,\,U_{\pm}\}=\mp iU_{\pm},\quad \{P,\,W_{\pm}\}=\pm iW_{\pm},\\ \{U_+,\,U_-\}=\{W_+,\,W_-\}=\{W_{\pm},\,U_+\}=\{W_{\pm},\,U_-\}=0.\end{gathered} \tag{51}$$

Такая скобка невырождена на многообразии $U_{\pm}=ce^{\mp iQ}$, $W_{\pm}=ce^{\pm iQ}$, $\{P,\,Q\}=1$. Подставляя это в (50), при $p\to i\infty$ получим

$$(52)\qquad \tilde{\xi}(\lambda)\to\xi(\lambda)=i\begin{pmatrix} P, & c(ze^{iQ}-z^{-1}e^{-iQ}] \\ c(ze^{-iQ}-z^{-1}e^{iQ}), & -P \end{pmatrix}\qquad z=e^{i\pi\lambda}.$$

Здесь в качестве генераторов X_a выбраны σ-матрицы Паули. Эта матрица является L-оператором модели синус-Гордон [20]. Аналогично получаются L-операторы двумеризованных цепочек Тоды и модели sh-Гордон.

4. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Как известно, метод обратной задачи рассеяния применим также для интегрирования дискретных динамических систем [21—23].

Вспомогательная линейная задача в этом случае имеет следующий вид:

$$(53)\qquad \Phi_{n+1}(\lambda)=L_n(\lambda)\Phi_n(\lambda).$$

Здесь n нумерует узлы решетки. Матрица $L_n(\lambda)$ называется дискретным L-оператором и является естественным дискретным аналогом $U(x, \lambda)$. В непрерывном пределе, когда шаг решетки Δ стремится к нулю,

$$(54)\qquad L_n(\lambda)=1-i\Delta U(n\Delta, \lambda).$$

Матрица монодромии задачи (53) является упорядоченным произведением L-операторов:

$$(55)\qquad T_N(\lambda)=L_N(\lambda)\ldots L_k(\lambda)\ldots L_{-N}(\lambda).$$

Матрица $L_n(\lambda)$ есть функционал на фазовом пространстве n-го узла цепочки. Полное фазовое пространство равно произведению фазовых пространств, отвечающих отдельным узлам цепочки.

В дискретном случае r-матричный вид скобки Пуассона между двумя L-операторами означает, что существует матрица $r(\lambda)$, такая, что

$$(56)\qquad \{L_n(\lambda)\otimes L_m(\mu)\}=[r(\lambda-\mu), L_n(\lambda)\otimes L_m(\mu)]\,\delta_{nm}.$$

Как и в непрерывном случае, r-матрица должна удовлетворять тождеству Якоби[3] (4). В этом смысле r-матрица не зависит от того, какую скобку она задает, (3) или (56). Скобку (56) будем также называть дискретной ФСП. Для таких систем из инвариантов матрицы $T_N(\lambda)$ можно устроить полный набор функционалов на фазовом пространстве системы, инволютивных относительно заданной симплектической структуры. Уравнения движения, порождаемые этими гамильтонианами, допускают лаксово представление [23], в котором M-оператор вычисляется по формулам, аналогичным (7).

Перейдем к описанию конечномерных интегральных многообразий (ИМ) скобки (56) с рациональными r-матрицами. Можно сказать, что мы будем решать задачу, обратную к традиционному подходу. Обычно по данному L-оператору вычислялась r-матрица. Мы будем искать все L-операторы с конечномерным фазовым пространством, удовлетворяющие (56) с заданной r-матрицей. Если учесть, что все r-матрицы с разумными аналитическими свойствами исчерпываются приведенными выше (раздел 3), то можно надеяться, что решение такой задачи позволит классифи-

[3] Аксиоматическая трактовка скобок Пуассона такого вида дана в [24].

пировать все наиболее интересные интегрируемые дискретные модели.

В отличие от непрерывного случая ИМ скобки (56) могут зависеть от того, в каком представлении выбраны генераторы X_a в r-матрице (25). Поэтому ниже будут рассматриваться только L-операторы в фундаментальном представлении соответствующей алгебры. Мы ограничимся случаем классических алгебр Ли.

Сначала приведем простейшие ИМ. Им соответствуют матрицы $L(\lambda)$, характеризующиеся тем, что они регулярны при $\lambda\to\infty$ и имеют один полюс при конечных значениях λ. Эти ИМ являются дискретными аналогами однополюсных орбит[4] (26).

1. $\mathfrak{G}=\mathfrak{gl}(\mathbf{n})$. Матрица $r(\lambda)$ в произведении двух фундаментальных представлений имеет вид

$$r(\lambda)=P/\lambda, \tag{57}$$

где P — матрица перестановки в $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n: Pf\otimes g=g\otimes f$. Однополюсный L-оператор имеет вид

$$L(\lambda)=(\lambda-S)/(\lambda-b). \tag{58}$$

Подставляя это выражение в (56), получим следующие скобки Пуассона между элементами матрицы S:

$$\{S_{ij}, S_{kl}\}=\delta_{il}S_{kj}-\delta_{kj}S_{il}. \tag{59}$$

Это стандартная скобка Ли — Пуассона на $\mathfrak{G}^*$. Она не вырождена на неприводимых $\mathfrak{G}$-орбитах в $\mathfrak{G}^*$. Таким образом, мы получили, что при $\mathfrak{G}^*=\mathfrak{gl}(n)$ фазовым пространством однополюсного L-оператора является $\mathfrak{G}^*$. Скобка (59) не вырождена на неприводимых $\mathfrak{G}$-орбитах в $\mathfrak{G}^*$, причем на вид орбиты не имеется никаких ограничений.

2. $\mathfrak{G}=\mathfrak{o}(\mathbf{n})$. В этом случае матрица — однополюсная матрица $L(\lambda)$, удовлетворяющая (56), существует в спинорном представлении. Для матриц $r(\lambda)$ и $L(\lambda)$ получаем следующие выражения:

$$r(\lambda)=(\gamma_a\gamma_b\overset{\bullet}{\otimes}\gamma_a\gamma_b)/\lambda, \tag{60}$$

$$L(\lambda)=(\lambda-\gamma_a\gamma_bS_{ab})/(\lambda-b), \tag{61}$$

где γ_a — клиффордовы элементы:

$$\gamma_a\gamma_b+\gamma_b\gamma_a=2\delta_{ab}, \quad a, b=1, 2, \ldots, n. \tag{62}$$

Подставляя (60) и (61) в (56), для S_{ab} получим

$$^1/_2\{S_{ab}, S_{cd}\}=\delta_{bc}S_{ad}-\delta_{ad}S_{cb}-\delta_{ac}S_{bd}+\delta_{bd}S_{ca}, \tag{63}$$

$$S^3={}^1/_2(\operatorname{tr}S^2)S. \tag{64}$$

Между элементами матрицы S, как и в предыдущем случае, получаем скобку Ли — Пуассона на $\mathfrak{G}^*$. Однако здесь на орбиты имеется ограничение (64). Допустимые орбиты имеют следующую простую параметризацию:

$$S_{ab}=q_ap_b-p_aq_b, \tag{65}$$

[4] Ниже мы будем опускать индекс n, подразумевая, что все относится к одному узлу.

(66) $\{p_a, q_b\}=2\delta_{ab}, \quad \{p_a, p_b\}=\{q_a, q_b\}=0.$

3. $\mathfrak{G}=\mathfrak{sp}(2n)$. В произведении фундаментальных представлений $\mathfrak{sp}(2n)$ можно выбрать базис, в котором матрица $r(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$(67) \qquad r(\lambda)=\frac{\mathcal{P}}{\lambda}, \quad \mathcal{P}=\begin{pmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P^{t_2} & P+P^{t_2} & 0 \\ 0 & P+P^{t_2} & -P^{t_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix},$$

где t_2 обозначает транспонирование во втором пространстве. В этом базисе матрица $L(\lambda)$ имеет блочную структуру:

$$(68) \qquad L(\lambda)=\frac{\lambda-S}{\lambda-b}, \quad S=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix},$$

где A, B, C — матрицы $n\times n$, t обозначает транспонирование. Эта матрица удовлетворяет соотношению (56), если элементы матрицы S имеют стандартную скобку Ли — Пуассона на $\mathfrak{sp}(2n)^*$:

$$(69) \qquad \begin{aligned} &\{A_{ij}, A_{kl}\}=-\delta_{kj}A_{il}+\delta_{il}A_{kj}, \quad \{B_{ij}, B_{kl}\}=0, \\ &\{A_{ij}, C_{kl}\}=\delta_{il}C_{kj}+\delta_{ik}C_{lj}, \quad \{C_{ij}, C_{kl}\}=0, \\ &\{A_{ij}, B_{kl}\}=-\delta_{kj}B_{il}-\delta_{jl}B_{ik}, \\ &\{C_{ij}, B_{kl}\}=-\delta_{il}A_{kj}-\delta_{ik}A_{lj}-\delta_{kj}A_{li}-\delta_{jl}A_{ki}. \end{aligned}$$

Помимо этого, имеется ограничение, аналогичное (64) для S, которое оставляет только орбиты вида

$$(70) \qquad A_{ij}=i\varphi_i\overline{\varphi}_j, \quad B_{ij}=i\varphi_i\varphi_j, \quad C_{ij}=-i\overline{\varphi}_i\overline{\varphi}_j.$$

Из (69) получаем скобки между φ_i:

$$(71) \qquad \{\overline{\varphi}_k, \varphi_l\}=-i\delta_{kl}, \quad \{\overline{\varphi}_k, \overline{\varphi}_l\}=\{\varphi_k, \varphi_l\}=0.$$

Таким образом, фазовым пространством однополюсных дискретных рациональных L-операторов является $\mathfrak{G}^*$. При этом в случае $\mathfrak{G}=\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{G}=\mathfrak{sp}(2n)$ имеются дополнительные ограничения, которые сужают фазовое пространство до специальных орбит в $\mathfrak{G}^*$.

Однополюсные L-операторы имеют простой физический смысл. Если их фазовое пространство сузить на неприводимую орбиту минимальной размерности в $\mathfrak{G}^*$, то получится интегрируемая дискретная аппроксимация [21] нелинейного уравнения Шредингера с соответствующей симметрией [15, 25].

Для исключительных алгебр Ли однополюсные L-операторы неизвестны.

Перейдем к описанию конечномерных ИМ скобки (56) общего вида. Они соответствуют матрицам $L(\lambda)$, которые имеют регулярное поведение при $\lambda\to\infty$ и конечное число полюсов при конечных λ. Такие матрицы можно строить из произведения однополюсных L-операторов и обратных к ним матриц:

$$(72) \qquad \mathcal{L}(\lambda)=(L^{(1)}(\lambda))^{\varepsilon_1}\ldots(L^{(m)}(\lambda))^{\varepsilon_m}, \quad L^{(k)}(\lambda)=\frac{\lambda-S^{(k)}}{\lambda-b_k}, \quad \varepsilon_k=\pm 1.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathcal{L}(\lambda)$ удовлетворяет (56), если $L^{(k)}(\lambda)$ является однополюсным L-оператором, и $\{L^{(k)}(\lambda)\overset{\otimes}{,}L^{(l)}(\mu)\}=0$ при $l\neq k$. Мат-

рицы вида (72) исчерпывают весь запас конечномерных ИМ скобки (56) при $\mathfrak{G}=\mathfrak{sl}(2)$. По-видимому, это справедливо также и для произвольной классической алгебры Ли в фундаментальном представлении.

Общее предписание для отыскания конечномерных ИМ скобки (56) в произвольном представлении для произвольной простой алгебры с рациональной r-матрицей (25) таково. Нужно найти все минимальные L-операторы, т. е. имеющие регулярное поведение при $\lambda\to\infty$ и минимальное число полюсов при конечных λ. Конечномерные ИМ будут произведениями вида (72) минимальных L-операторов. Не обязательно минимальный L-оператор будет иметь один полюс. Так, для векторного представления при $\mathfrak{G}=\mathfrak{o}(n)$ он имеет два полюса.

Для L-операторов, действующих в разных представлениях, имеется естественная связь через разложения Клебша — Гордана[5]. Пусть V_1, V_2, V_3 — пространства представлений T_1, T_2, T_3, соответственно. Если $T_3\subset T_1\times\times T_2$ и в V_1, V_2, V_3 заданы L-операторы $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_3$, то

$$\mathscr{L}_3(\lambda)=\mathscr{P}_{12}^{(3)}\mathscr{L}_1(\lambda)\otimes\mathscr{L}_2(\lambda)\mathscr{P}_{12}^{(3)}, \tag{73}$$

где $\mathscr{P}_{12}^{(3)}$ — проектор на V_3 в $V_1\otimes V_2$.

Построенные выше L-операторы имеют простой непрерывный предел. Пусть L-оператор в (53) однополюсный:

$$L_n(\lambda)=(\lambda-S_n)/(\lambda-b_n). \tag{74}$$

В непрерывном пределе $b_n=b$, $S_n=b-\Delta T(n\Delta)$ и из (53) для $\Phi(n\Delta,\lambda)=\Phi_n(\lambda)$ получаем при $\Delta\to 0$

$$\partial_x\Phi(x,\lambda)=\frac{T(x)}{\lambda-b}\Phi(x,\lambda). \tag{75}$$

Скобка между элементами матрицы $T(x)$ имеет нужный вид:

$$T(x)=K^{ab}X_aT_b(x),\quad \{T_a(x),\ T_b(y)\}=C_{ab}{}^cT_c(x)\delta(x-y), \tag{76}$$

где X_a — генераторы $\mathfrak{G}$ в фундаментальном представлении.

Таким образом, из однополюсного дискретного L-оператора в непрерывном пределе получаем орбиту (26).

Чтобы получить орбиту (28) с конечным числом простых полюсов, нужно в качестве $L_n(\lambda)$ взять произведение однополюсных L-операторов:

$$L_n(\lambda)=L_n^{(1)}(\lambda)\ldots L_n^{(m)}(\lambda), \tag{77}$$

$$L_n^{(k)}(\lambda)=(\lambda-S_n^{(k)})/(\lambda-b_n^{(k)}). \tag{78}$$

В непрерывном пределе следует считать, что $b_n^{(k)}=b^{(k)}$, $S_n^{(k)}=b^{(k)}-\Delta T^{(k)}(n\Delta)$.

Орбита (28) с кратными полюсами получится, если в произведении (77) часть $b^{(k)}$ взять одинаковыми и при $\Delta\to 0$ одновременно вырождать соответствующую $\mathfrak{G}$-орбиту. В качестве примера можно привести случай $m=2$:

$$L(\lambda)=\frac{\lambda-S_n^{(1)}}{\lambda-b}\,\frac{\lambda-S_n^{(2)}}{\lambda-b}. \tag{79}$$

---

[5] Это утверждение является квазиклассическим следствием результатов работы [26].

Пусть $S_n^{(1)}=b-\Delta S_n, S_n^{(2)}=b-\Delta T_n$, тогда

$$L_n(\lambda)=1+\frac{\Delta}{\lambda-b}(S_n+T_n)+\frac{\Delta^2 S_n T_n}{(\lambda-b)^2}. \tag{80}$$

При $\Delta\to 0$ потребуем, чтобы конечными оставались величины $U(n\Delta)=S_n+T_n$ и $W(n\Delta)=\Delta S_n T_n$. В пределе $\Delta\to 0$ для U и W получим следующую алгебру скобок Пуассона:

$$\{U_a(x),\ U_b(y)\}=\delta(x-y)C_{ab}{}^c U_c(x), \tag{81}$$

$$\{U_a(x),\ W_b(y)\}=\delta(x-y)C_{ab}{}^c W_c(x), \tag{82}$$

$$\{W_a(x),\ W_b(y)\}=0. \tag{83}$$

Из (53) с матрицей (80) при $\Delta\to 0$ получим

$$\partial_x\Phi(x,\lambda)=\left(\frac{U(x)}{\lambda-b}+\frac{W(x)}{(\lambda-b)^2}\right)\Phi(x,\lambda). \tag{84}$$

Эта линейная задача при $\mathfrak{G}=\mathfrak{su}(2)$ соответствует орбите $E(3)$ магнетика (пример 2 в разделе 2).

Ограничения на $\mathfrak{G}$-орбиты в однополюсных L-операторах, имеющиеся при $\mathfrak{G}=\mathfrak{o}(n)$ и $\mathfrak{G}=\mathfrak{sp}(2n)$, никак не проявятся в непрерывном пределе. Из произведения достаточно большого числа таких орбит можно получить $\mathfrak{G}$-орбиту общего положения. В непрерывном пределе этого можно достигнуть, взяв несколько $b^{(k)}$ одинаковыми.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *В непрерывном пределе из ИМ* (72) *скобки* (56) *получается весь набор ИМ скобки* (3).

В заключение скажем несколько слов о бесконечномерных ИМ скобки (56). Они получаются при сгущении особенностей в произведении (72). Получающиеся предельные выражения суть не что иное, как матрицы монодромии вида (5). Они характеризуются тем, что имеют существенные особенности в λ-плоскости.

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ДИСКРЕТНОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СКОБКИ ПУАССОНА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ r-МАТРИЦ

Предыдущий раздел был посвящен описанию конечномерных ИМ скобки (56) с рациональной r-матрицей. В этом разделе будет показано, что аналогичную классификацию допускают ИМ скобки (56) для тригонометрических и эллиптических r-матриц.

В непрерывном случае переход от рациональных ИМ к тригонометрическим и эллиптическим осуществляется с помощью операции усреднения (37). Покажем, что аналогичная операция имеется и в дискретном случае. Мы будем называть ее мультипликативным усреднением.

Пусть $L(\lambda)$ удовлетворяет (56) с некоторой рациональной r-матрицей. Рассмотрим произведение

$$\mathscr{L}_N(\lambda)=A^N L(\lambda-N\omega)\ldots A^k L(\lambda-k\omega)\ldots A^{-N}L(\lambda+N\omega). \tag{85}$$

Регуляризованный предел $\mathscr{L}_N(\lambda)$ при $N\to\infty$ обозначим через $\tilde{\mathscr{L}}(\lambda)$:

$$\tilde{\mathscr{L}}(\lambda)=\lim_{N\to\infty}{}'\,\mathscr{L}_N(\lambda). \tag{86}$$

Теорема 2. *Матрица $\tilde{\mathscr{L}}(\lambda)$ удовлетворяет соотношению* (56) *с тригонометрической r-матрицей*

$$\{\tilde{\mathscr{L}}(\lambda)\overset{\otimes}{,}\tilde{\mathscr{L}}(\mu)\}=[\tilde{r}(\lambda-\mu),\tilde{\mathscr{L}}(\lambda)\otimes\tilde{\mathscr{L}}(\mu)], \tag{87}$$

где

$$\tilde{r}(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{A^nX_a\otimes X_bK^{ab}}{\lambda-n\omega}.$$

Докажем это утверждение в предположении абсолютной сходимости произведения (85).

Введем обозначение

$$L(\lambda,p)=A^pL(\lambda-p\omega), \tag{88}$$

$$r_p(\lambda)=\frac{K^{ab}A^pX_a\otimes X_b}{\lambda-p\omega}. \tag{89}$$

Из (56) следует, что

$$\{L(\lambda,p)\overset{\otimes}{,}L(\mu,q)\}=[r_{p-q}(\lambda-\mu),L(\lambda,p)\otimes L(\mu,q)]. \tag{90}$$

Подставляя это выражение в левую часть (87), получим

$$\{\tilde{\mathscr{L}}(\lambda)\overset{\otimes}{,}\tilde{\mathscr{L}}(\mu)\}=\sum_{p,q}\Big(\prod_{n\geqslant p+1}L(\lambda,n)\otimes\prod_{m\geqslant q+1}L(\mu,m)\Big)\times \tag{91}$$

$$\times r_{p-q}(\lambda-\mu)\prod_{n\leqslant p-1}L(\lambda,n)\otimes\prod_{m\leqslant q-1}L(\mu,m)-(p\to p-1,q\to q-1).$$

Здесь порядок сомножителей в произведениях согласован с порядком сомножителей в (85).

Пересуммировав выражение (91) с учетом сходимости

$$\prod_{n\geqslant p}L(\lambda,n)\to 1,\quad p\to\infty;\qquad \prod_{n\leqslant p}L(\lambda,n)\to 1,\quad p\to-\infty, \tag{92}$$

получим правую часть (87).

В реальной ситуации абсолютной сходимости нет. Для сходимости произведения (85) нужно подобно преобразовать $\mathscr{L}_N(\lambda)$ матрицей, коммутирующей с A, степенным образом зависящей от N (см. приложение). В этом случае теорема 2 также справедлива, однако требуется более тонкая оценка убывающих вкладов в сумме (91).

Как и в рациональном случае, сначала займемся однополюсными L-операторами. Наиболее хорошо изучен случай $\mathfrak{G}=\mathfrak{sl}(2)$, им мы пока и ограничимся.

Вычислять однополюсные L-операторы в тригонометрическом и эллиптическом случаях можно двумя способами. Первый основывается на применении теоремы 2 к однополюсным L-операторам. Чтобы им воспользо-

ваться, нужно уметь вычислять произведение (85) для матриц (58), (61)—(63) и (68)—(70). Пока это удалось сделать только для $\mathfrak{G}=\mathfrak{sl}(2)$ (см. приложение). Второй более прямолинейный способ состоит в явной подстановке однополюсного анзаца в (56). После этого выясняется, что коэффициентные матрицы вместо (59), (63), (69) в рациональном случае удовлетворяют квадратичной алгебре скобок Пуассона. Затем реализация этой алгебры находится в терминах какой-либо стандартной скобки.

Для иллюстрации покажем, как из однополюсного анзаца вычисляется тригонометрический L-оператор для $\mathfrak{G}=\mathfrak{sl}(2)$. Из регулярности при $\lambda\to\to\pm i\infty$, автоморфности:

$$\mathscr{L}(\lambda+\pi)=\sigma_3\mathscr{L}(\lambda)\sigma_3, \tag{93}$$

и из требования, чтобы у $\mathscr{L}(\lambda)$ был полюс при $\lambda=0$, следует, что $\mathscr{L}(\lambda)$ имеет вид

$$\mathscr{L}(\lambda)=T_0+\operatorname{ctg}\lambda\sigma_3T_3+\frac{1}{\sin\lambda}(\sigma_1T_1+\sigma_2T_2). \tag{94}$$

Это и есть однополюсный анзац в тригонометрическом случае. Из (56) для T_0, T_i получаем [27]

$$\{T_i, T_0\}=-\sum_{k=1}^{3}J_{jk}T_jT_k\varepsilon_{ijk},\quad \{T_i, T_j\}=2\varepsilon_{ijk}T_0T_k, \tag{95}$$

$$J_{jk}=-J_{kj},\quad J_{12}=0,\quad J_{13}=J_{23}=1.$$

Эта алгебра имеет следующую реализацию через элементы $\mathfrak{sl}(2)^*$ [27]:

$$T_0=\cos S_3,\quad T_3=\sin S_3,\quad T_1=S_1\sqrt{\frac{\sin^2 S_3-\sin^2 R}{S_3^2-R^2}} \tag{96}$$

$$T_2=S_2\sqrt{\frac{\sin^2 S_3-\sin^2 R}{S_3^2-R^2}}.$$

Такое представление для элементов T_α в (94) можно получить также, вычислив произведение (85), (86). Это сделано в приложении.

Если фиксировать вещественную форму $\mathfrak{sl}(2)$, то для квадратичной алгебры (95) возникает содержательная теория представлений. Конструкция для представлений квадратичной алгебры (95) в тригонометрическом и эллиптическом случаях дана Е. К. Скляниным (результаты публикуются).

Перейдем к описанию конечномерных ИМ общего вида для скобки (56) с тригонометрическими r-матрицами. Как и в рациональном случае, они соответствуют матрицам $L(\lambda)$, которые стремятся к нулю при $\lambda\to\to\pm i\infty$, автоморфны:

$$\mathscr{L}(\lambda+\omega)=A\mathscr{L}(\lambda), \tag{97}$$

и имеют конечное число полюсов при конечных λ. Каждая такая матрица представляется в виде произведения однополюсных:

$$\mathscr{L}(\lambda)=L^{(1)}(\lambda)\ldots L^{(m)}(\lambda), \tag{98}$$

где

$$\{L^{(k)}(\lambda)\overset{\otimes}{,}L^{(l)}(\mu)\}=0.$$

Для $\mathfrak{G}=\mathfrak{sl}(2)$ такие матрицы, по-видимому, исчерпывают все конечномерные ИМ.

Аналогично устроены ИМ скобки (56) с эллиптической r-матрицей. Только в этом случае условие при $\lambda \to \pm i\infty$ заменяется вторым свойством автоморфности:

$$\mathscr{L}(\lambda+\omega_2)=B\mathscr{L}(\lambda). \tag{99}$$

Вообще же, если не фиксировать вещественной формы $\mathfrak{G}$, теорема 2 устанавливает однозначное соответствие между рациональными, тригонометрическими и эллиптическими ИМ. Имеется также действие, обратное к усреднению (85)—(86). Оно соответствует вырождению эллиптических функций в тригонометрические и в рациональные.

Если фиксировать вещественную форму $\mathfrak{G}$, то в тригонометрическом и в эллиптическом случаях может возникнуть структура фазового пространства, не имеющая аналогов в рациональном случае [27]. В непрерывном пределе из ИМ вида (99), как и в рациональном случае, можно получить любую из орбит, описанных в разделе 4, и в этом смысле ИМ (99) полны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как мы видели, для непрерывных систем метод r-матрицы тесно связан со схемой Адлера — Константа для алгебр токов [11]. В [28] показано, что совпадение можно сделать полным, обобщив r-матричный формализм.

Согласование схемы Адлера — Костанта с r-матричным подходом позволяет с единой точки зрения описывать как ультралокальные, так и неультралокальные скобки Пуассона, а также делает возможным обобщение этой схемы на системы с тригонометрической и эллиптической зависимостями от спектрального параметра.

Интересно было бы установить соответствие между квантованием двух этих схем. Квантование схемы Адлера — Костанта естественным образом связано с построением представлений, в данном случае алгебры токов [29, 30]. Квантованием r-матричной схемы является квантовый метод обратной задачи. Поэтому связь между этими двумя подходами позволила бы дать интерпретацию квантового метода обратной задачи в терминах представлений алгебр токов.

Авторы благодарны М. А. Семенову-Тян-Шанскому, Е. К. Склянину, Л. А. Тахтаджяну за многочисленные интересные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, как вычислять произведения однополюсных L-операторов для $\mathfrak{G}=\mathfrak{sl}(2)$. В этом случае

$$L(\lambda)=(\lambda+S)/(\lambda+c), \tag{П.1}$$

где

$$S=\begin{pmatrix} S_3 & S_- \\ S_+ & -S_3 \end{pmatrix}, \qquad S_\pm=S_1\pm iS_2. \tag{П.2}$$

Автоморфизм A для $\mathfrak{G}=\mathfrak{sl}(2)$ внутренний:

$$AS=\sigma_3 S\sigma_3, \qquad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{П.3}$$

Произведение (85) можно записать в эквивалентном виде ($\omega=1$):

$$\text{(П.4)}\qquad \mathscr{L}_N=(\sigma_3)^{N-1}\frac{N\sigma_3+C}{N+\mu}\cdots\frac{n\sigma_3+C}{n+\mu}\cdots\frac{-N\sigma_3+C}{-N+\mu}(\sigma_3)^N,$$

$$C=\sigma_3\lambda+\sigma_3 S,\qquad \mu=\lambda+c.$$

Рассмотрим вспомогательную линейную задачу

$$\text{(П.5)}\qquad u_{n+1}=\frac{n\sigma_3+C}{n+\mu}u_n.$$

Очевидно, что

$$\text{(П.6)}\qquad \mathscr{L}_N=(\sigma_3)^{N-1}u_{N+1}(u_{-N})^{-1}(\sigma_3)^N.$$

Поэтому задача вычисления асимптотики (П.4) при $N\to\infty$ сводится к вычислению асимптотик решений линейной задачи (П.5) при $n\to\pm\infty$. Для преобразования Фурье от u_n,

$$\text{(П.7)}\qquad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}u_n z^n,$$

получаем

$$\text{(П.8)}\qquad f'(z)=\left(\frac{C_+}{z-1}+\frac{C_-}{z+1}-\frac{\mu-1}{z}\right)f(z),$$

$$\text{(П.9)}\qquad C_+=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad C_-=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ c & d\end{pmatrix},\qquad a=\mu-1-\lambda-S_3,$$

$$\text{(П.10)}\qquad b=-S_-,\quad c=-S_+,\quad d=-\lambda+\mu-1+S_3.$$

Для функции $g(z)=z^{\mu-1}f(z)$ получаем уравнение, которое сводится к гипергеометрическому

$$\text{(П.11)}\qquad g=\begin{pmatrix} w\\ u\end{pmatrix},\quad w=(w_1,w_2),\quad u=(u_1,u_2),$$

$$\frac{du}{dz}=\frac{1}{b}\left((z-1)\frac{dw}{dz}-aw\right),$$

$$\text{(П.12)}\qquad \frac{d^2w}{dx^2}+\left(-\frac{d}{x}+\frac{1-a}{x-1}\right)\frac{dw}{dx}+(ad-bc)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)w=0,\quad x=\frac{z+1}{2}.$$

Для гипергеометрического уравнения глобальные монодромии между разными особыми точками вычисляются явно, и для $g(z)$ получаем

$$\text{(П.13)}\qquad g(z)\to\left(\frac{z+1}{2}\right)^{\begin{pmatrix}0&0\\c&d\end{pmatrix}}\cdot 1,\qquad z\to-1,$$

$$\text{(П.14)}\qquad g(z)\to\left(\frac{z-1}{2}\right)^{\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}}\cdot\tau,\qquad z\to 1,$$

где τ имеет вид

$$\text{(П.15)}\qquad \tau=\begin{vmatrix} T_{11}+e^{-i\pi a}T_{21}-\dfrac{bc}{d(d+1)}(T_{12}+e^{-i\pi a}T_{22}), & -\dfrac{b}{d+1}(T_{12}+e^{-i\pi a}T_{22})\\ -\dfrac{a}{b}T_{11}+\dfrac{ac}{d(d+1)}T_{12}, & \dfrac{a}{1+d}T_{12}\end{vmatrix}.$$

Матрица (T_{ij}) является матрицей монодромии гипергеометрического уравнения в стандартном базисе [31]:

(П.16) $$T_{11}=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},\qquad T_{12}=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)},$$

(П.17) $$T_{21}=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)},\qquad T_{22}=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)\Gamma(1+\alpha-\gamma)},$$

здесь $\gamma=-d$, α и β — собственные значения матрицы C: $\alpha\beta=ad-bc$, $\alpha+\beta=-a-d$.

Коэффициенты Фурье функции $f(z)$ удовлетворяют системе разностных уравнений (П.5) при следующем выборе контура интегрирования:

(П.18) $$u_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} z^{-n-1}f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} z^{-\mu-n}g(z)\,dz=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_+} z^{-\mu-n}g(z)\tau_-P^+\,dz+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_-} z^{-\mu-n}g(z)\tau_-P^-\,dz,$$

здесь $\Gamma_+=\{z=e^{i\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$, $\Gamma_-=\{z=e^{i\varphi},\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$, интегрирование ведется против часовой стрелки,

(П.19) $$P_+=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad P_-=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

τ_+ и τ_- — треугольное разложение матрицы монодромии:

(П.20) $$\tau=\tau_+(\tau_-)^{-1},\qquad \tau_+=\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix},\qquad \tau_-=\begin{pmatrix}*&0\\*&*\end{pmatrix}.$$

Асимптотическое поведение интегралов в (П.18) определяется особенностями функции $g(z)$ при $z=\pm1$. Из (П.13)—(П.14) для (П.18) получаем

(П.21) $$n\to+\infty,\qquad u_n\simeq\frac{1}{2\pi i}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{(1-e^{2\pi i(a-\mu)})}{2^a n^{a+1}}\overset{(+)}{\tau}_{11}\Gamma(a+1), & \dfrac{(1-e^{2\pi i a})}{2^a n^{a+1}}\left(\overset{(+)}{\tau}_{12}+\dfrac{b}{a}\overset{(+)}{\tau}_{22}\right)\Gamma(a+1)\\[2ex] \dfrac{e^{i\pi(d-n-\mu)}(1-e^{-2\pi i d})}{2^d n^{d+1}}\times & \\ \times\left(\overset{(-)}{\tau}_{21}+\dfrac{c}{d}\overset{(-)}{\tau}_{11}\right)\Gamma(d+1), & \dfrac{e^{-i\pi(d-\mu-n)}(1-e^{-2\pi i d})}{2^d n^{d+1}}\overset{(-)}{\tau}_{22}\Gamma(d+1)\end{pmatrix},$$

(П.22) $$n\to-\infty,$$
$$u_n\simeq\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\dfrac{(1-e^{-2\pi i\mu})}{2^a|n|^{a+1}}e^{i\pi(a+1)}\overset{(+)}{\tau}_{11}\Gamma(a+1), & 0\\[2ex] 0, & \dfrac{e^{-i\pi(d-\mu-n)}(1-e^{-2\pi i\mu})}{2^d|n|^{d+1}}e^{i\pi(d+1)}\overset{(-)}{\tau}_{22}\Gamma(d+1)\end{pmatrix},$$

здесь $\overset{(\pm)}{\tau}_{ij}$ — матричные элементы матриц $\tau_\pm$ в (П.20).

Из (П.21), (П.22) для $\mathscr{L}_n$ получаем

(П.23) $$\mathscr{L}_n=D_n^{-1}\mathscr{L}D_n,$$

где

$$D_n=\begin{pmatrix}n^d&0\\0&n^a\end{pmatrix}.$$

Подставляя в (П.23) выражения для $\tau_{ij}^{(\pm)}$, для a, b, c, d (П.9)–(П.10), получим

$$\text{(П.24)}\qquad \mathscr{L}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sin\pi(\lambda+S_3)}{\sin\pi(\lambda+c)}, & S_-g^{-1}(S_3)\dfrac{\pi}{\sin\pi(\lambda+c)} \\ S_+\dfrac{\sin\pi(S_3+R)\sin\pi(S_3-R)}{\pi^2(S_3^2-R^2)}g(S_3)\dfrac{\pi}{\sin\pi(\lambda+c)}, & \dfrac{\sin\pi(\lambda-S_3)}{\sin\pi(\lambda+c)} \end{pmatrix}.$$

Здесь функция $g(z)$ имеет вид

$$\text{(П.25)}\qquad g(z)=\Gamma(1+R-z)\Gamma(1-R-z)e^{-2z},\qquad S_3^2+S_+S_-=R^2.$$

После преобразования подобия с диагональной матрицей получаем выражение, лишь нормировкой отличающееся от (94), (96):

$$\text{(П.26)}\qquad \mathscr{L}=W^{-1}\tilde{\mathscr{L}}W,$$

$$\text{(П.27)}\qquad W=\begin{pmatrix} h(S_3)^{-1} & 0 \\ 0 & h(S_3) \end{pmatrix},\qquad h(z)=\sqrt{\frac{g(z)}{\pi^2(z^2-R^2)}},$$

$$\text{(П.28)}\qquad \tilde{\mathscr{L}}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sin\pi(\lambda+S_3)}{\sin\pi(\lambda+c)}, & \dfrac{\pi}{\sin\pi(\lambda+c)}S_-\sqrt{\dfrac{\sin^2\pi S_3-\sin^2\pi R}{\pi^2(S_3^2-R^2)}} \\ \dfrac{\pi}{\sin\pi(\lambda+c)}S_+\sqrt{\dfrac{\sin^2\pi S_3-\sin^2\pi R}{\pi^2(S_3^2-R^2)}}, & \dfrac{\sin\pi(\lambda-S_3)}{\sin\pi(\lambda+c)} \end{pmatrix}.$$

Литература

[1] *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.*— Phys. Rev. Lett., 1967, *19*, 1095–1097.
[2] *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
[3] *Ablowitz M. J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981.
[4] *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.*— Функц. анализ и его прилож., 1971, *5*, № 4, 18–27.
[5] *Склянин Е. К.*— Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1980, *95*, 55–128.
[6] *Faddeev L. D.* Integrable models in 1+1 dimensional quantum field theory. Preprint CEN-SACLAY S. Ph. T., 1982.
[7] *Lie S.* Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig, 1983, Bd. III.
[8] *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
[9] *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.*— Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1982, *115*, 264–273.
[10] *Рейман А. Г.*— Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1980, *95*, 3–54.
[11] *Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А.*— ДАН СССР, 1980, *261*, № 6, 1310–1313.
[12] *Takhtajan L. A.*— Phys. Lett., 1977, *64A*, 235–237.
[13] *Захаров В. Е., Манаков С. В.*— ТМФ, 1974, *19*, № 3, 332–343.
[14] *Манаков С. В.*— ЖЭТФ, 1973, *65*, № 2, 505–516.
[15] *Kulish P. P., Fordy A. F.* Nonlinear Shrödinger equations and symple Lie algebras. Preprint VMIST. Manchester, 1982.
[16] *Винберг Э. Б.*— Изв. АН СССР, сер. матем., 1976, *40*, № 3, 488–527.
[17] *Белавин А. А., Дринфельд В. Г.* Уравнения треугольников и простые алгебры Ли. Препринт ИТФ им. Л. Д. Ландау 1982-18, Черноголовка, 1982.
[18] *Mikhailov A. V.*— Physica D, 1981, *3D*, № 12, 73–117.
[19] *Sklyanin E. K.* On complete integrability of the Landau – Lifshitz equation. LOMI preprint E-3-79. Leningrad: LOMI, 1979.
[20] *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.*— ТМФ, 1974, *21*, № 2, 160–174. *Faddeev L. D., Korepin V. E.*— Phys. Rep., 1978, *42C*, № 1, 1–87.
[21] *Изергин А. Г., Корепин В. Е.*— ДАН СССР, 1981, *259*, № 7, 76–79.
[22] *Изергин А. Г., Корепин В. Е.*— ЭЧАЯ, 1982, *13*, в. 3, 501–541.
[23] *Izergin A. G., Korepin V. E.*— Lett. Math. Phys., 1981, *5*, 199–205.
[24] *Дринфельд В. Г.*— ДАН СССР, 1983, *268*, № 3, 285–288.
[25] *Kulish P. P., Sklyanin E. K.*— Phys. Lett., 1981, *84A*, № 7, 349–351.
[26] *Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu., Sklyanin E. K.*— Lett. Math. Phys., 1981, *5*, № 5. 393–403.
[27] *Склянин Е. К.*— Функц. анализ и его прилож., 1982, *16*, № 4, 27–35.
[28] *Семенов-Тян-Шанский М. А.*— Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1983, *123*, 77–91.

[29] *Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A.*— Inv. math., 1979, *54*, 81—100.
[30] *Kostant B.* Quantization and representation theory. Lect. Not. of London Math. Soc., 1979, *34*.
[31] *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. III. М.: Наука, 1974.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
15.II.1983 г.

HAMILTONIAN STRUCTURES OF THE INTEGRABLE FIELD THEORY MODELS

Reshetikhin N. Yu., Faddeev L. D.

A simple geometric interpretation for the Poisson brackets of classical integrable models in field theory is presented which relates the classical Baxter's r-matrices to the current algebras. The phase spaces of these models are shown to be homogeneous symplectic systems with quadratic Poisson brackets given by rational r-matrices. A multiplicative averaging procedure is proposed which gives trigonometric and elliptic Lax operators from the rational ones. The corresponding infinite products are calculated explicitly for the $\mathfrak{sl}(2)$ case.