Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

П. П. Кулиш, Л. Д. Фаддеев, Асимптотические условия и инфракрасные расходимости в квантовой электродинамике, *ТМФ*, 1970, том 4, номер 2, 153–170

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 195.218.150.2
30 июня 2017 г., 15:27:31

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 4, № 2
август
1970

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ И ИНФРАКРАСНЫЕ РАСХОДИМОСТИ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

П. П. Кулиш, Л. Д. Фаддеев

Предложено определение S-матрицы для релятивистской теории взаимодействия заряженных частиц, свободное от инфракрасных расходимостей. Для этого модифицировано асимптотическое условие и введено новое пространство асимптотических состояний. Это пространство отлично от пространства Фока, но сепарабельно, релятивистски и градиентно инвариантно. Оператор массы не имеет ненулевых дискретных собственных значений.

В настоящей статье мы обсуждаем особенности задачи рассеяния в релятивистской квантовой теории взаимодействующих заряженных частиц и фотонов. Основным результатом является описание пространства асимптотических состояний для такой системы и определение оператора рассеяния, свободное от инфракрасных расходимостей. [1)]

Инфракрасная катастрофа подробно обсуждалась в литературе, начиная с классической работы Блоха и Нордсика 1937 г. [1]. Физические причины инфракрасных расходимостей хорошо понятны, и физической проблемы в связи с ними не существует. Однако общепринятая формальная трактовка инфракрасной катастрофы не является, по нашему мнению, полностью удовлетворительной.

В учебниках по квантовой электродинамике предлагается бороться с инфракрасными расходимостями, суммируя вероятности перехода из данного начального состояния во все конечные состояния, содержащие, помимо детектируемых частиц, еще произвольное количество «мягких» фотонов (см. [2]). Важную роль в оправдании такого подхода играют асимптотические формулы для амплитуд рассеяния при стремлении к нулю искусственно введенной массы фотона. В общей форме такие формулы получены в работах Иенни и др. [3].

Основным объектом описанного классического метода являются сечения, а не матричные элементы, начальные и конечные состояния в нем трактуются несимметрично; определение оператора рассеяния вообще отсутствует. Возникает естественный вопрос, являются ли эти обстоятельства неизбежными и обусловленными физической сущностью проблемы или существует альтернативный подход к инфракрасным особенностям, при котором можно определить оператор рассеяния. В настоящей работе мы

[1)] Результаты этой статьи кратко были сформулированы в докладе авторов на научной сессии ОЯФ АН СССР в мае 1969 г., Ленинград.

стоим на второй точке зрения и предлагаем вариант асимптотического условия, специально приспособленный к релятивистской системе заряженных частиц и позволяющий корректно ввести S-матрицу.

Отправным пунктом для нас явилась важная работа Чанга [4]. В ней угадано, как можно выбрать состояния, содержащие заряженную частицу и суперпозицию бесконечного числа фотонов, между которыми конечны и отличны от нуля матричные элементы S-матрицы Фейнмана — Дайсона. Предложенное Чангом обобщение конструкции этих состояний на случай нескольких заряженных частиц слишком прямолинейно и, в частности, не учитывает бесконечную кулоновскую фазу.

Значительное развитие работа Чанга получила в серии работ Киббла [5]. Он ввел в рассмотрение очень широкое пространство асимптотических состояний и показал, что S-матрица Фейнмана — Дайсона корректно определена там как унитарный оператор. Пространство Киббла несепарабельно и содержит состояния с бесконечным числом мягких фотонов. В нем можно выделить сепарабельные подпространства такие, что S-матрица переводит их друг в друга. Не существует, однако, стабильного сепарабельного подпространства, которое при этом переходило бы в себя. Последнее обстоятельство связано с бесконечной кулоновской фазой, содержащейся в S-матрице. Основу аналитического аппарата Киббла составляют асимптотические формулы для многочастичных функций Грина вблизи поверхности масс для заряженных частиц [2]. Таким образом, определения Киббла основаны на полном решении динамической задачи и поэтому весьма громоздки.

Наш подход отличается от упомянутых тем, что мы модифицируем не только пространство асимптотических состояний, но и само определение оператора рассеяния. Это позволяет нам автоматически скомпенсировать кулоновскую фазу, а наше пространство асимптотических состояний сепарабельно и не богаче состояниями, чем пространство Фока. Вся процедура подсказана нерелятивистской теорией рассеяния на дальнодействующем потенциале и имеет простую физическую интерпретацию. При проведении нашей программы нам не приходится использовать решение полных уравнений квантовой электродинамики. В результате без громоздких выкладок мы выводим формулы Чанга и получаем их корректное обобщение на случай произвольного числа заряженных частиц и фотонов в начальном и конечном состояниях.

С методической точки зрения основным результатом нашей работы является релятивистски и градиентно инвариантное определение пространства асимптотических состояний заряженных частиц и оператора рассеяния.

В начале статьи мы на примере кулоновского рассеяния объясняем основную идею нашего подхода. Она заключается в том, что в определении волновых операторов в качестве оператора асимптотической динамики следует использовать не $\exp\{-iH_0t\}$, а более подходящий оператор $U_{as}(t)$. В основу его выбора кладется естественное физическое условие: волновые

---

[2] Такие формулы имеют длинную историю. Порождающий функционал для функций Грина, точно учитывающий эту асимптотику, получен Е. С. Фрадкиным [6].

пакеты $U_{as}(t)\Psi$ при больших $|t|$ должны соответствовать классическому движению далеко разведенных заряженных частиц. Конкретный выбор оператора $U_{as}(t)$ для квантовой электродинамики описывается в разделах 2 и 3. В следующем разделе вводится и обсуждается пространство состояний, отличное от пространства Фока для заряженных частиц и фотонов. В разделе 5 объясняется, почему это пространство естественно использовать в качестве пространства асимптотических состояний, дается окончательное определение оператора рассеяния и проводится сравнение наших результатов с результатами Чанга.

Авторы выражают благодарность В. Г. Горшкову и В. Н. Попову за многочисленные обсуждения проблемы инфракрасных расходимостей.

1. НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ

Основную идею нашего подхода можно пояснить на примере рассеяния нерелятивистской частицы на потенциале Кулона. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{g}{\hat{r}} = H_0 + V,$$

где m — масса частицы, g — произведение зарядов частицы и центра. Асимптотика потенциала $V(t)$ в представлении взаимодействия легко подсчитывается, если принять во внимание, что

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = \frac{\hat{\mathbf{p}}}{m} t + \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{p}}(t) = \hat{\mathbf{p}},$$

так что при $|t| \to \infty$

$$V(t) = \frac{mg}{p|t|} + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Первый член этой асимптотики неинтегрируем по времени в окрестности бесконечности, и его вкладом в динамику нельзя пренебречь даже при $|t| \to \infty$. Другими словами, асимптотическую динамику описывает не H_0, а явно зависящий от времени оператор [3)]

$$H_{as}(t) = H_0 + V_{as}(t) = H_0 + \frac{mg}{p|t|}.$$

Волновые пакеты $\psi(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют асимптотическому уравнению Шредингера

$$i\frac{d}{dt}\psi(\mathbf{r}, t) = H_{as}(t)\psi(\mathbf{r}, t), \tag{1}$$

и их можно представить в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int c(\mathbf{p}) \exp\left\{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t - i\frac{mg}{p}\operatorname{sign} t \ln\frac{|t|}{t_0}\right\} e^{i\mathbf{pr}}\, d\mathbf{p}. \tag{2}$$

[3)] Мы использовали при этом тот факт, что выражение для $V_{as}(t)$ одинаково в шредингеровском представлении и представлении взаимодействия.

Конечно, выбор решения в таком виде соответствует определенному выбору «начальных условий» для уравнения (1). Эти условия выбраны из следующих соображений: изменение со временем распределения координат и импульсов в пакетах (2) связано при $|t| \to \infty$ уравнениями классической механики. Константа t_0 при этом не играет существенной роли.

Действительно, посмотрим, например, асимптотику выражения для средних значений координат и импульсов

$$\langle \hat{\mathbf{r}}(t) \rangle = (\mathbf{r}\psi(t), \psi(t)) \text{ и } \langle \hat{\mathbf{p}}(t) \rangle = (\hat{\mathbf{p}}\psi(t), \psi(t)).$$

Ясно, что вторая величина не зависит от времени

$$\langle \hat{\mathbf{p}}(t) \rangle = \int \mathbf{p} \, |c(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} = \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle,$$

а первая имеет следующее асимптотическое выражение при $|t| \to \infty$:

$$\langle \hat{\mathbf{r}}(t) \rangle \simeq \frac{\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle}{m} t - gm \left\langle \frac{\hat{\mathbf{p}}}{p^3} \right\rangle \operatorname{sign} t \ln |t| + O(1),$$

которое просто получить, например, методом стационарной фазы.

Приведенные соображения показывают естественность с физической точки зрения выбора асимптотических волновых пакетов в виде (2). С другой стороны, как было впервые показано Доллардом [7], именно такой их выбор приводит к корректному определению волновых операторов и известному выражению для S-матрицы. Более подробно пакет (2) можно записать в виде

$$\psi(t) = U_{\text{as}}(t)\psi = e^{-iH_0 t} \exp\left\{ -i \frac{mg}{p} \operatorname{sign} t \ln \frac{|t|}{t_0} \right\} \psi,$$

и, как показано в [7], существуют сильные пределы

$$U_{\pm} = \lim_{t \to \pm\infty} e^{iHt} U_{\text{as}}(t),$$

причем оператор рассеяния

$$S = U_{+}^{+} U_{-}$$

дает известные выражения для дифференциальных сечений рассеяния на потенциале Кулона. Выбор параметра t_0 на эти выражения не влияет. Обычные же определения волновых операторов формальной теории рассеяния, когда в качестве асимптотического оператора используют H_0, оказываются некорректными, а теория возмущений для обычной S-матрицы приводит к известным инфракрасным бесконечностям.

Рассмотренный пример позволяет сделать следующие выводы: гамильтониан асимптотической динамики следует определять из физического смысла задачи, а не использовать слепо привычные рецепты формальной теории рассеяния и считать, что асимптотическая динамика всегда задается оператором H_0. Формальный способ для этого состоит в выборе, вообще говоря, нетривиального и зависящего от времени оператора взаимодействия $V_{\text{as}}(t)$, который в представлении взаимодействия совпадает со старшими членами в асимптотике оператора $V(t)$. После того как найден оператор $H_{\text{as}}(t)$, при решении асимптотического уравнения Шредингера следует

использовать такие «начальные условия», чтобы возникающие волновые пакеты вели себя классически при $|t| \to \infty$. В следующем разделе мы применим эти соображения к релятивистской квантовой электродинамике.

2. ПОСТРОЕНИЕ $V_{as}(t)$ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Рассмотрим для определенности спинорную электродинамику, описывающую систему взаимодействующих электронов, позитронов и фотонов. Будем использовать традиционные обозначения $\bar{\psi}$, ψ для операторов электронно-позитронного поля и A_μ для оператора электромагнитного поля, а также $b_i^+(\mathbf{p})$, $b_i(\mathbf{p})$, $d_i^+(\mathbf{p})$, $d_i(\mathbf{p})$, $a_\mu^+(\mathbf{k})$, $a_\mu(\mathbf{k})$; $i = 1, 2$; $\mu = 0, 1, 2, 3$, для операторов рождения и уничтожения соответственно электронов, позитронов и фотонов. Далее, мы будем работать в явно ковариантном формализме, подразумевая индефинитную метрику в гильбертовом пространстве фотонов. Наконец, мы будем считать, что $\hbar = c = 1$ и что все векторы контравариантны, помещая векторный индекс вверху или внизу в зависимости от удобства; таким образом, $a^\mu = a_\mu$, $a_\mu b_\mu = a_0 b_0 - \mathbf{ab} = ab$.

Операторы поля $\bar{\psi}$, ψ и A_μ выражаются через операторы рождения и уничтожения следующим образом:

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} \sum_n \left(b_n(\mathbf{p})\, w_n(\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{px}} + d_n^+(\mathbf{p}) v_n(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{px}}\right) d\mathbf{p},$$

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} \sum_n \left(b_n^+(\mathbf{p})\, \bar{w}_n(\mathbf{p})\, e^{-i\mathbf{px}} + d_n(\mathbf{p})\, \bar{v}_n(\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{px}}\right) d\mathbf{p}, \qquad (3)$$

$$A_\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(a_\mu^+(\mathbf{k})\, e^{-i\mathbf{kx}} + a_\mu(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{kx}}\right) \frac{d\mathbf{k}}{(2k_0)^{1/2}},$$

где $w_n(\mathbf{p})$ и $v_n(\mathbf{p})$ — соответствующие спинорные амплитуды.

Чтобы получить выражение для оператора взаимодействия

$$V = \int j_\mu(\mathbf{x})\, A_\mu(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -e \int :\bar{\psi}(\mathbf{x})\, \gamma_\mu \psi(\mathbf{x}) : A_\mu(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \qquad (4)$$

в представлении взаимодействия, достаточно подставить в (4) явные формулы (3), снабдив операторы рождения и уничтожения соответствующими временными множителями, например $e^{ik_0 t} a_n^+(\mathbf{k})$ и $e^{ip_0 t} b_n^+(\mathbf{p})$, $k_0 = |\mathbf{k}|$, $p_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Получающееся выражение $V(t)$ представляется интегралом по импульсам $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{k}$ фермионов и фотонов, причем $\mathbf{p} + \mathbf{k} = \mathbf{q}$.

Наша ближайшая задача — исследовать асимптотику этого выражения при $|t| \to \infty$. С этой точки зрения все слагаемые в нем можно разделить на два типа. Члены первого типа содержат два оператора рождения или два оператора уничтожения заряженных частиц. Показатель экспоненты, характеризующей изменение со временем этих членов, пропорционален выражению $(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} + ((\mathbf{p} + \mathbf{k}^2) + m^2)^{1/2} \pm k_0$, которое отделено от нуля при любых $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. Поэтому такие члены достаточно быстро убывают при $|t| \to \infty$. Члены второго типа имеют показатель, пропорциональный выражению $(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} - ((\mathbf{p} + \mathbf{k})^2 + m^2)^{1/2} \pm k_0$, исчезающему при $\mathbf{k} = 0$ при всех $\mathbf{p}$. Ясно, что именно члены второго типа определяют искомую асимптотику оператора $V(t)$, а членами первого типа можно пренебречь.

Следующее упрощение основано на замечании, что главный вклад в оставшиеся интегралы при $|t| \to \infty$ дает окрестность малых импульсов $\mathbf{k}$. Поэтому мы можем в соответствующем подынтегральном выражении положить $k = 0$ во всех медленно меняющихся функциях, т. е. в операторах рождения и уничтожения b_n и d_n и коэффициентах, составленных из спиноров. При этом выражения для последних значительно упростятся вследствие условий ортогональности для решений уравнения Дирака. В результате мы получим простое выражение для главного члена $\tilde{V}(t)$ асимптотики оператора $V(t)$ при $|t| \to \infty$.

Выпишем явно шредингерово представление для оператора $V_{\text{as}}(t)$, который в представлении взаимодействия совпадает с $\tilde{V}(t)$. Подобно полному взаимодействию оператор $V_{\text{as}}(t)$ представим в виде интеграла от произведения оператора типа тока на вектор-потенциал

$$V_{\text{as}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int J^{\mu}_{\text{as}}(\mathbf{k}, t)\,(a_{\mu}^{+}(-\mathbf{k}) + a_{\mu}(\mathbf{k}))\,\frac{d\mathbf{k}}{(2k_0)^{1/2}}\,, \tag{5}$$

где

$$J^{\mu}_{\text{as}}(\mathbf{k}, t) = -e \int p^{\mu} e^{i\frac{\mathbf{pk}}{p_0}t}\,\rho(\mathbf{p})\,\frac{d\mathbf{p}}{p_0}$$

и

$$\rho(\mathbf{p}) = \sum_n (b_n^{+}(\mathbf{p})\,b_n(\mathbf{p}) - d_n^{+}(\mathbf{p})\,d_n(\mathbf{p})) = \rho_{-}(\mathbf{p}) - \rho_{+}(\mathbf{p}).$$

Соответствующее выражение в представлении взаимодействия отличается лишь заменой $\mathbf{kp} \to -kp$ в интеграле, определяющем асимптотический ток.

Заметим, что выражение для асимптотического тока не содержит спиноров, и вклад заряженных частиц в него дается лишь посредством распределения зарядов по импульсам. В этом смысле оно является универсальным; аналогичную формулу мы получили бы в случае заряженных частиц с произвольным спином, причем соответствующая плотность $\rho(\mathbf{p})$ представляла бы собой сумму по заряженным частицам в системе.

Оператор асимптотического тока $J_{\text{as}}{}^{\mu}(\mathbf{k}, t)$ имеет простой физический смысл. Состояние заряженных частиц с заданными импульсами

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{p}_1 s_1, \ldots, \mathbf{p}_n s_n \,|\, \mathbf{q}_1 i_1, \ldots, \mathbf{q}_m i_m) &= \\ = b_{s_1}^{+}(\mathbf{p}_1) \ldots b_{s_n}^{+}(\mathbf{p}_n)\, d_{i_1}^{+}(\mathbf{q}_1) \ldots d_{i_m}^{+}(\mathbf{q}_m)\,|\,0\rangle &\end{aligned} \tag{6}$$

является для него собственным; соответствующее собственное значение

$$j_{\mu}(\mathbf{k}, t \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n; \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m) = \sum_{j=1}^{m} j_{\mu}(\mathbf{k}, t \,|\, q_j) - \sum_{j=1}^{n} j_{\mu}(\mathbf{k}, t \,|\, p_j),$$

где

$$j_{\mu}(\mathbf{k}, t \,|\, p) = e\,\frac{p_{\mu}}{p_0} \exp\left\{i\,\frac{\mathbf{kp}}{p_0}\,t\right\},$$

представляет собой классический ток точечных зарядов, движущихся по прямым с импульсами $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{q}_j$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. В этом смысле оператор асимптотического взаимодействия является естественным релятивистским обобщением нерелятивистского асимптотического потенциала

из предыдущего раздела. Так же, как и там, мы предлагаем определить асимптотическую динамику системы при помощи оператора

$$H_{as}(t) = H_0 + V_{as}(t),$$

где H_0 — оператор энергии свободных фермионов и фотонов. Следующей нашей задачей является решение уравнения Шредингера с этим оператором.

3. ОПИСАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Оператор $V_{as}(t)$ по своей математической структуре аналогичен известному гамильтониану взаимодействия бозонов с фиксированными фермионами, так что решение уравнения

$$i \frac{d}{dt} U(t) = H_{as}(t) U(t), \tag{7}$$

которому должен удовлетворять оператор $U_{as}(t)$, описывающий асимптотическую динамику, можно найти явно. При решении этого уравнения основное внимание мы будем обращать на выбор соответствующих начальных условий. Дело в том, что оператор $V_{as}(t)$ линейно содержит операторы $a_\mu^+(\mathbf{k})$ и $a_\mu(\mathbf{k})$ и поэтому не коммутирует с точным импульсом системы. Это обстоятельство вовсе не дискредитирует нашу программу, так как мы собираемся использовать этот оператор только асимптотически при больших $|t|$, когда вклад в интеграл дают лишь малые импульсы $\mathbf{k}$ и отмеченная некоммутативность ослабляется. Однако мы должны о нем помнить при выборе граничных условий, в частности, в выражение для $U_{as}(t)$ не должны давать вклада интегралы от $V_{as}(t)$ по конечным t. Мы убедимся, что это условие по существу единственным образом определяет $U_{as}(t)$.

Решение уравнения (7), как подсказывает сложившаяся практика, удобно искать в виде

$$U_{as}(t) = e^{-iH_0 t} Z(t).$$

Уравнение для $Z(t)$ выглядит следующим образом:

$$i \frac{d}{dt} Z(t) = V_{as}^{I}(t) Z(t), \tag{8}$$

где

$$V_{as}^{I}(t) = e^{iH_0 t} V_{as}(t) e^{-iH_0 t}.$$

Явное выражение для оператора $V_{as}^{I}(t)$ отличается от формулы (5) лишь наличием множителей $e^{ik_0 t}$ и $e^{-ik_0 t}$ при $a_\mu^+(k)$ и $a_\mu(\mathbf{k})$.

Оператор $V_{as}^{I}(t)$ обладает следующим важным свойством: коммутатор

$$[V_{as}^{I}(t_1), V_{as}^{I}(t_2)] = Q(t_1, t_2)$$

коммутирует с $V_{as}^{I}(t)$ при любых t, t_1, t_2. Это свойство позволяет явно распутать T-произведение, с помощью которого дается общее решение уравнения (8)

$$Z(t) = T \exp \left\{ -i \int^{t} V_{as}^{I}(\tau)\, d\tau \right\},$$

а именно,

$$Z(t) = \exp\left\{-i\int^{t} V^{\mathrm{I}}_{\mathrm{as}}(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int^{t} d\tau \int^{\tau} ds\, Q(\tau, s)\right\}. \tag{9}$$

В последних формулах существует произвол в выборе нижнего предела интегрирования. Этот произвол явно имеет отношение к отмеченной в начале раздела проблеме выбора начального условия. С указанным там требованием согласуется только один способ вычисления интегралов в (9), а именно, следует считать, что

$$\int_{-\infty}^{t} e^{is\tau} d\tau = \frac{1}{is} e^{ist}.$$

Действительно, только в этом случае в результате отсутствуют запрещенные члены, не коммутирующие асимптотически с импульсом.

После этого замечания мы без труда получаем явный вид искомого оператора $Z(t)$, который нам удобно записать в виде

$$Z(t) = \exp\{R(t)\}\exp\{i\Phi(t)\},$$

где

$$R(t) = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{p_\mu}{pk}\left(a^{+}_{\mu}(\mathbf{k})\, e^{i\frac{kp}{p_0}t} - a_{\mu}(\mathbf{k})\, e^{-i\frac{kp}{p_0}t}\right)\rho(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}\,\frac{d\mathbf{k}}{(2k_0)^{1/2}} \tag{10}$$

и

$$\Phi(t) = \frac{e^2}{8\pi}\int :\rho(\mathbf{p})\,\rho(\mathbf{q}): \frac{p\cdot q}{((pq)^2 - m^4)^{1/2}}\,\mathrm{sign}\, t \ln\frac{|t|}{t_0}\, d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}. \tag{11}$$

Вычисление интегралов, приводящее к последней формуле, выделено в приложение.

Естественно назвать оператор Φ оператором фазы. Действительно, достаточно сравнить формулу (11) с формулой для нерелятивистской кулоновской фазы из первого раздела

$$\varphi(t) = \frac{gm}{p}\,\mathrm{sign}\, t \ln\frac{|t|}{t_0}$$

и вспомнить, что $v(p, q) = \left(1 - \frac{m^4}{(pq)^2}\right)^{1/2}$ играет роль относительной скорости для частиц со скоростями $\mathbf{p}/p_0$ и $\mathbf{q}/q_0$, чтобы убедиться, что первая дает естественное релятивистское обобщение последней. Что же касается первого множителя в $Z(t)$, то он имеет чисто релятивистское происхождение. Обсуждение его свойств и роли в асимптотическом условии будет проведено в следующем разделе.

Итак, окончательное выражение для оператора асимптотической динамики имеет вид [4)]

$$U_{\mathrm{as}}(t) = \exp\{-iH_0 t\}\exp\{i\Phi(t)\}\exp\{R(t)\},$$

[4)] Модификация асимптотического условия, основанная на замене оператора $\exp\{-iH_0t\}$ в определении волновых операторов оператором вида $\exp\{-iH_0t\}Z(t)$, помимо цитированной выше работы Долларда [7], использовалась в работах [8, 9, 10, 11]. В отличие от операторов из всех этих работ наш оператор $Z(t)$ не коммутирует с H_0.

где операторы $R(t)$ и $\Phi(t)$ определены формулами (10) и (11), соответственно. Заметим, что эти операторы коммутируют. Продолжая обобщать нерелятивистские формулы из раздела 1, мы должны определить оператор рассеяния как предел оператора

$$S(t_1, t_2) = U_{as}^{+}(t_1) \exp\{-iH(t_1 - t_2)\} U_{as}(t_2)$$

при $t_1 \to \infty$ и $t_2 \to -\infty$. Выражение в правой части отличается от дайсоновской S-матрицы для конечных времен

$$S_D(t_1, t_2) = \exp\{iH_0 t_1\} \exp\{-iH(t_1 - t_2)\} \exp\{-iH_0 t_2\}$$

окаймляющими множителями типа $\exp\{R(t) + i\Phi(t)\}$. В следующих разделах мы постараемся показать, что определение оператора рассеяния, исходящее из выражения $S(t_1, t_2)$, более корректно, чем общепринятый предел оператора $S_D(t_1, t_2)$ при $t_1 \to \infty$ и $t_2 \to -\infty$.

4. ПРОСТРАНСТВО АСИМПТОТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

Большая часть этого раздела посвящена исследованию свойств оператора $W(t) = \exp\{R(t)\}$, входящего в выражение для оператора асимптотической динамики в разделе 3. Рассмотрим в первую очередь его действие на произвольные векторы состояния. Наша задача значительно облегчается тем, что $W(t)$ сохраняет число, импульсы и спины заряженных частиц. Более точно, (инфинитезимальные) подпространства, образованные векторами вида

$$\Psi_{n,m}(\mathbf{p}_1 s_1, \ldots, \mathbf{p}_n s_n | q_1 i_1, \ldots, \mathbf{q}_m i_m) \otimes \Psi_\gamma,$$

где $\Psi_{n,m}(\mathbf{p}_1 s_1, \ldots | \mathbf{q}_1 i_1, \ldots)$ — введенное выше в (6) состояние заряженных частиц, а Ψ_γ — произвольное состояние для фотонов, приводят оператор $W(t)$. В каждом таком подпространстве оператор $W(t)$ определяется своим действием на Ψ_γ, которое в свою очередь задается оператором

$$W_{n,m}(t) = \exp\left\{\frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \int (f^{\mu}_{n,m}(\ldots | \mathbf{k}, t)\, a_\mu^{+}(\mathbf{k}) - f^{\mu *}_{n,m}(\ldots | \mathbf{k}, t)\, a_\mu(\mathbf{k})) \frac{d\mathbf{k}}{(2k_0)^{1/2}}\right\}$$

где

$$f^{\mu}_{n,m}(\ldots | \mathbf{k}, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^{\mu}}{p_i k} e^{i\frac{kp_i}{p_{i0}}t} - \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i^{\mu}}{q_i k} e^{i\frac{kq_i}{q_{i0}}t}.$$

Выражение типа exp {линейная форма a и a^{+}}, с которым мы только что встретились — старый знакомый всех, имеющих дело с теорией поля. Напомним кратко известные свойства таких выражений на примере оператора

$$W = \exp\left\{\sum_i (a_i^{*} a_i - a_i a_i^{+})\right\},$$

заданного в терминах дискретного набора бозонных операторов a_i, a_i^{+}

и числовых коэффициентов α_i, α_i^*; $i = 1, 2, \ldots$ Если привести W к нормальному виду, то получим

$$W = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i |\alpha_i|^2\right\} \exp\left\{-\sum_i \alpha_i a_i^+\right\} \exp\left\{\sum_i \alpha_i^* a_i\right\}. \qquad (12)$$

Ясно, что это выражение теряет смысл, если $\sum_i |\alpha_i|^2 = \infty$. Более точно, в этом случае оператор W не определен в пространстве Фока. Это не мешает ему, однако, быть вполне осмысленным унитарным оператором в более широком пространстве — полном бесконечном тензорном произведении в смысле фон Неймана [12] пространств $\mathscr{H}_i$ отдельных осцилляторов.

Различие двух только что упомянутых пространств удобно пояснить в представлении чисел заполнения [13]. Произвольный вектор состояния в этом представлении является функционалом $f = f(\{n\})$ на пространстве бесконечных последовательностей целых чисел

$$\{n\} = (n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots),$$

где число n_i нумерует состояния осциллятора с номером i. Пространство Фока $\mathscr{H}_0$ образовано функционалами, отличными от нуля лишь на последовательностях, для которых $\sum_i n_i < \infty$. Множество таких последовательностей счетно, так что пространство $\mathscr{H}_0$ сепарабельно. В противоположность этому множество всех последовательностей континуально, так что пространство $\mathscr{H}$ всех функционалов, для которых

$$\sum_{\{n\}} |f(\{n\})|^2 < \infty,$$

несепарабельно. Это пространство изоморфно упомянутому бесконечному тензорному произведению фон Неймана

$$\mathscr{H} \sim \prod_i \otimes \mathscr{H}_i.$$

Действие операторов a_i^+ и a_i в $\mathscr{H}$ задается точно теми же формулами, что и в пространстве Фока, например,

$$a_i^+ f(n_1, \ldots, n_i, \ldots) = \sqrt{n_i}\, f(n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots).$$

Ясно, что пространство $\mathscr{H}_0$ инвариантно по отношению к действию a_i^+ и a_i. Это, однако, не обязательно справедливо для произвольных функций от a_i^+ и a_i. Так, оператор W является унитарным в пространстве $\mathscr{H}$ при любом выборе чисел α_i. Однако, если $\sum_i |\alpha_i|^2 = \infty$, то он выводит из подпространства Фока всякий вектор, принадлежащий последнему. Естественно поэтому рассмотреть подпространство $\mathscr{H}_{\{\alpha\}}$, являющееся образом пространства Фока $\mathscr{H}_0$ при действии W,

$$\mathscr{H}_{\{\alpha\}} = W_{\{\alpha\}} \mathscr{H}_0.$$

Здесь мы используем более детальное обозначение $W_{\{\alpha\}}$ для оператора W. Ясно, что $\mathscr{H}_{\{\alpha\}}$ является сепарабельным подпространством пространства $\mathscr{H}$, которое столь же богато элементами, сколь пространство Фока $\mathscr{H}_0$.

Существуют целые классы числовых последовательностей $\{\alpha\}$, которым соответствует одно и то же подпространство $\mathscr{H}_{\{\alpha\}}$. Простая формула

$$W^{+}_{\{\beta\}} W_{\{\alpha\}} = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_i (\beta_i^* \alpha_i - \beta_i \alpha_i^*)\right\} W_{\{\alpha-\beta\}}, \tag{13}$$

где последовательность $\{\alpha - \beta\}$ образована числами $\alpha_i - \beta_i$, показывает, что пространства $\mathscr{H}_{\{\alpha\}}$ и $\mathscr{H}_{\{\beta\}}$ совпадают, если

$$\sum_i |\alpha_i - \beta_i|^2 < \infty, \quad \sum_i |\operatorname{Im} \alpha_i \beta_i^*| < \infty, \tag{14}$$

так как в этом случае оператор в правой части (13) является унитарным в $\mathscr{H}_0$ и

$$\mathscr{H}_{\{\alpha\}} = W_{\{\beta\}} W^{+}_{\{\beta\}} W_{\{\alpha\}} \mathscr{H}_0 = W_{\{\beta\}} \mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_{\{\beta\}}.$$

Приведенные утверждения и формулы тривиально обобщаются на случай индексов i произвольной природы. В частности, они применимы и к нашему оператору $W(t)$, точнее к соответствующим субоператорам $W_{n,m}(t)$. Роль чисел α_i в этом случае играет функция $f^{\mu}_{n,m}(\ldots|\mathbf{k}, t)$, а роль суммы $\sum |\alpha_i|^2$ — интеграл

$$\int f^{\mu}_{n,m}(\ldots|\mathbf{k}, t) f^{\mu *}_{n,m}(\ldots|\mathbf{k}, t) \frac{d\mathbf{k}}{2k_0} \tag{15}$$

(нет суммирования по n и m). Этот интеграл расходится на нижнем пределе [5], так что операторы $W_{n,m}(t)$ не определены в пространстве Фока для фотонов, а тем самым оператор $W(t)$ не имеет смысла в пространстве Фока $\mathscr{H}_F$ для фотонов и заряженных частиц. Ему, однако, можно придать смысл как унитарному оператору в несепарабельном пространстве

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{FQ} \otimes \mathscr{H}_{\gamma},$$

где $\mathscr{H}_{FQ}$ — пространство Фока для заряженных частиц, а $\mathscr{H}_{\gamma}$ — несепарабельное пространство фон Неймана для фотонов. Пространство Фока $\mathscr{H}_F$ — подпространство в $\mathscr{H}$.

Рассмотрим в $\mathscr{H}$ сепарабельное подпространство

$$\mathscr{H}_{\text{as}} = W^{+}(t) \mathscr{H}_F$$

и будем называть его пространством асимптотических состояний по причинам, которые мы объясним в следующем разделе. Альтернативно пространство $\mathscr{H}_{\text{as}}$ можно определить формулой

$$\mathscr{H}_{\text{as}} = \exp\{-R_j\} \mathscr{H}_F,$$

[5] Конечно, этот интеграл расходится и на верхнем пределе. Борьба с такой ультрафиолетовой расходимостью относится к компетенции теории перенормировок. В духе этой теории мы будем считать, что всюду, где нужно, введены обрезающие множители, так что, например, оператор $\exp\{iHt\}$ имеет смысл как унитарный оператор в пространстве Фока. Обсуждаемые нами инфракрасные расходимости интеграла (15) при этом сохраняются и не устраняются перенормировками.

где формально антисимметричный оператор R_f определяется формулой типа

$$R_f = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \int (f_\mu(\mathbf{k}, p)\, a^+_\mu(\mathbf{k}) - f^*_\mu(\mathbf{k}, p)\, a_\mu(\mathbf{k}))\, \rho(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}\, \frac{d\mathbf{k}}{(2k_0)^{1/2}},$$

причем в качестве формфактора $f_\mu(\mathbf{k}, p)$ можно брать произвольную функцию, для которой сходятся интегралы

$$\int \left(f_\mu(\mathbf{k}, p) - \frac{p_\mu}{pk} e^{i\frac{kp}{p_0}t}\right)\left(f^*_\mu(\mathbf{k}, p) - \frac{p_\mu}{pk} e^{-i\frac{kp}{p_0}t}\right)\frac{d\mathbf{k}}{2k_0}, \tag{16}$$

$$\int \left| f^*_\mu(\mathbf{k}, p)\, \frac{q_\mu}{qk} e^{i\frac{kq}{q_0}t} - f_\mu(\mathbf{k}, p)\, \frac{q_\mu}{qk} e^{-i\frac{kq}{q_0}t} \right| \frac{d\mathbf{k}}{2k_0} \tag{17}$$

для любых $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Действительно, при этом выполняются условия типа (14) для пар операторов $W^+_{n,m}(t)$ и $(\exp\{-R_f\})_{n,m}$ при всех n и m, так что образы пространства Фока при изометрическом действии операторов W^+ и $\exp\{-R_f\}$ в $\mathscr{H}$ совпадают. [6)]

Покажем, что пространство $\mathscr{H}_{as}$

1) не зависит от t;

2) релятивистски и градиентно инвариантно;

3) содержит лоренц- и градиентно инвариантное подпространство $\mathscr{H}'_{as}$ с неотрицательной метрикой.

Первое свойство очевидно, так как в альтернативном определении пространства $\mathscr{H}_{as}$ вообще время не упоминается. Второе свойство более точно формулируется следующим образом: пространство $\mathscr{H}_{as}$ приводит представление группы Пуанкаре $a, \Lambda \to U(a, \Lambda)$ и группы градиентных преобразований $\lambda(k) \to U(\lambda)$, естественно заданное во всем пространстве $\mathscr{H}$. Для доказательства заметим, что под действием указанного представления группы Пуанкаре операторы $a_\mu(\mathbf{k})$, $\rho(\mathbf{p})$ преобразуются по следующим формулам:

$$\sqrt{k_0}\, U(a, \Lambda)\, a_\mu(k)\, U^+(a, \Lambda) = \sqrt{(\Lambda k)_0}\, (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu a_\nu(\Lambda k)\, e^{-i\Lambda k a},$$

$$p_0 U(a, \Lambda)\, \rho(p)\, U^+(a, \Lambda) = (\Lambda p)_0\, \rho(\Lambda p).$$

Поэтому оператор $U(a, \Lambda) W^+(t) U^+(a, \Lambda)$ является оператором типа $\exp\{-R_f\}$, где функция

$$f^\mu_{a,\Lambda}(k, p) = \frac{p_\mu}{pk} e^{i\frac{kp}{p_0}s - ika}, \quad s = \frac{p_0}{(\Lambda p)_0} t,$$

удовлетворяет условиям типов (16) и (17). Таким образом,

$$U(a, \Lambda)\mathscr{H}_{as} = U(a, \Lambda) W^+(t) \mathscr{H}_F =$$

$$= U(a, \Lambda) W^+(t) U^+(a, \Lambda) \mathscr{H}_F = \mathscr{H}_{as}.$$

Далее, при градиентном преобразовании изменяются только фотонные

---

6) Пространство, аналогичное $\mathscr{H}_{as}$, введено в работе Бланшара [14] в связи с исследованием нерелятивистской модели Паули — Фирца.

операторы

$$U(\lambda)a_\mu(k)U^+(\lambda) = a_\mu(k) + k_\mu\lambda(k),$$

так что операторы $W^+(t)$ и $U(\lambda)W^+(t)U^+(\lambda)$ отличаются лишь множителем вида

$$\exp\left\{\frac{e}{(2\pi)^{3/2}}\int(\lambda(k)e^{-i\frac{kp}{p_0}t} - \lambda^*(k)e^{i\frac{kp}{p_0}t})\rho(\mathbf{p})d\mathbf{p}\frac{d\mathbf{k}}{(2k_0)^{1/2}}\right\},$$

коммутирующим с $W^+(t)$ и корректно определенным на пространстве Фока. Поэтому $\mathscr{H}_{as}$ инвариантно и относительно действия операторов $U(\lambda)$.

Подпространство $\mathscr{H}'_{as}$ с неотрицательной метрикой образовано векторами Ψ, удовлетворяющими дополнительному условию

$$k_\mu a_\mu \Psi = 0,$$

которое явно релятивистски и градиентно инвариантно. Существование такого подпространства $\mathscr{H}'_F$ в пространстве Фока $\mathscr{H}_F$ и неотрицательность метрики в нем хорошо известны. Мы покажем, что среди операторов типа $\exp\{-R_f\}$ существуют операторы, коммутирующие с дополнительным условием. Образ $\mathscr{H}'_F$ в $\mathscr{H}_{as}$ при действии таких операторов на $\mathscr{H}_F$ и дает нам пространство $\mathscr{H}'_{as}$.

Для выполнения только что упомянутого условия коммутации функция $f_\mu(k, p)$ должна быть поперечной, т. е. удовлетворять соотношению $k_\mu f_\mu(k, p) = 0$. На первый взгляд условие поперечности противоречит требованию, согласно которому $f_\mu(k, p)$ должна иметь непоперечную особенность типа p_μ / pk при малых k. Делу помогает, однако, существование светоподобного вектора $c_\mu(k)$, такого что

$$k_\mu c_\mu = 1; \quad c_\mu c_\mu = 0,$$

в качестве которого удобно взять вектор с компонентами

$$c_0(k) = \frac{1}{2k_0}, \quad \mathbf{c} = -\frac{1}{2}\frac{\mathbf{k}}{k_0^2}.$$

В качестве поперечного формфактора $f_\mu(k, p)$ можно взять выражение

$$f_\mu(k, p) = \left(\frac{p_\mu}{pk} - c_\mu\right)\varphi(k, p), \tag{18}$$

где $\varphi(k, p) = 1$ в окрестности $k = 0$. Условия типа (14) при таком выборе $f_\mu(k, p)$ выполняются.

Отметим, что подобно $\mathscr{H}'_F$ подпространство $\mathscr{H}'_{as}$ не является еще физическим пространством состояний. Группа градиентных преобразований действует в $\mathscr{H}_{as}'$ нетривиально. Физические векторы состояния находятся в однозначном соответствии с классами векторов в $\mathscr{H}'_{as}$, образующими циклические подпространства по отношению к действию градиентной группы. Метрика в пространстве таких классов $\mathscr{H}_{as.\,ph}$ оказывается уже положительно определенной (ср. [15]).

На этом заканчивается доказательство перечисленных свойств пространства $\mathscr{H}_{as}$. В следующем заключительном разделе работы мы обсудим его роль в теории рассеяния для системы заряженных частиц.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА РАССЕЯНИЯ

Теперь можно более точно сказать, в каком смысле мы понимаем определение оператора рассеяния. Рассмотрим оператор

$$\tilde{S}_D(t_1, t_2) = \exp\{-i\Phi(t)\} S_D(t_1, t_2) \exp\{i\Phi(t)\},$$

отличающийся от S-матрицы Дайсона для конечных времен «фазовыми» множителями $\exp\{\pm i\Phi(t)\}$. В произведении

$$S(t_1, t_2) = W^+(t_1) \tilde{S}_D(t_1, t_2) W(t_2)$$

сомножители осуществляют такую последовательность отображений:

$$\mathscr{H}_{\text{as}} \xrightarrow{W} \mathscr{H}_F \xrightarrow{\tilde{S}} \mathscr{H}_F \xrightarrow{W^+} \mathscr{H}_{\text{as}}$$

(ср. со сноской 4), так что $S(t_1, t_2)$ определен как оператор в $\mathscr{H}_{\text{as}}$. Оператор рассеяния

$$S = \lim_{\substack{t_1 \to \infty \\ t_2 \to -\infty}} S(t_1, t_2) \tag{19}$$

также действует в $\mathscr{H}_{\text{as}}$. В этом смысле естественно называть $\mathscr{H}_{\text{as}}$ пространством асимптотических состояний.

Роль операторов $W^+(t_1)$ и $W(t_2)$ в определении оператора S сводится к тому, что они вынуждают нас ввести и использовать пространство $\mathscr{H}_{\text{as}}$ асимптотических состояний. При конкретных вычислениях матричных элементов предельного оператора S между состояниями из $\mathscr{H}_{\text{as}}$ об операторах $W^+(t_1)$ и $W(t_2)$ можно забыть. Действительно, формальный переход к пределу в коэффициентных функциях операторов $R(t)$

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{pk} \exp\left\{ikp \frac{t}{p_0}\right\} = \pm i\pi\delta(kp) = 0$$

показывает, что эти операторы исчезают при $|t| \to \infty$ и, следовательно, операторы $W(t)$ превращаются в единичные. Роль операторов $\exp\{\pm i\Phi(t)\}$ состоит в том, что они сокращают бесконечные фазовые множители, которые возникли бы, если бы мы вычисляли матричные элементы фейнмановской S-матрицы между состояниями из $\mathscr{H}_{\text{as}}$. Именно явное включение этих операторов фазы в определение оператора рассеяния позволяет нам обойтись единым сепарабельным пространством для начальных и конечных состояний.

Оператор S релятивистски и градиентно инвариантен. Действительно, при $t_1 \to \infty$ и $t_2 \to -\infty$ операторы $W^+(t_1)$ и $W(t_2)$ эффективно исчезают, а фазовые операторы приобретают явно ковариантный вид и не содержат фотонных операторов. Если формально записать S в виде

$$S = \exp\{-i\Phi(\infty)\} S_F \exp\{i\Phi(\infty)\},$$

где S_F — S-матрица Фейнмана, то отдельные сомножители в правой части явно инвариантны. Выписанной формуле можно придать смысл, имея

в виду предельный переход от теории с конечным радиусом взаимодействия. Снабдим фотон массой λ и пусть $S_{F,\lambda}$ — соответствующий фейнмановский оператор рассеяния. Тогда

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \exp\{i\Phi(\lambda)\} S_{F,\lambda} \exp\{i\Phi(\lambda)\},$$

где

$$\Phi(\lambda) = -\frac{e^2}{8\pi} \int \ln \lambda t_0 \frac{pq}{((pq)^2 - m^4)^{1/2}} : \rho(\mathbf{p}) \rho(\mathbf{q}) : d\mathbf{p} d\mathbf{q}.$$

Действие оператора $\exp\{i\Phi(\lambda)\}$ на состояние вида (6) сводится к умножению на фазовый фактор

$$\exp\left\{-i \frac{e^2}{4\pi} \ln \lambda t_0 \sum_{i \neq j} (v^{-1}(p_i, p_j) + v^{-1}(q_i, q_j) - v^{-1}(p_i, q_j))\right\}.$$

Сокращение таких множителей с расходящимися фазами в фейнмановской S-матрице $S_{F,\lambda}$ известно как в нерелятивистском случае [16], так и в случае квантовой электродинамики [3, 17]. Отметим, что мы пришли к выражению для фазовых множителей без решения полной динамической задачи.

Итак, предложенное в этой работе видоизменение асимптотического условия в релятивистской теории взаимодействия заряженных частиц приводит к модификации пространства асимптотических состояний и определения оператора рассеяния. Асимптотические состояния вместе с заряженными частицами должны содержать бесконечное число фотонов, низкочастотный спектр которых определяется состоянием зарядов. Переопределение оператора рассеяния сводится к выделению «фазовых» операторных множителей. Первое обстоятельство имеет релятивистский характер, второе необходимо даже в случае нерелятивистского рассеяния на кулоновском потенциале.

Рассуждения, которые привели нас к нашему основному предложению, не являются доказательствами. Так, мы не проверили существования предела в определении (19) оператора рассеяния. При настоящем математическом уровне в релятивистской теории поля «доказать» почти неизбежно значит «проверить по теории возмущений». Следовало бы, таким образом, проверить хотя бы, что матричные элементы $\langle \Psi | S | \Psi' \rangle$ оператора рассеяния S между произвольными состояниями Ψ и Ψ' из $\mathscr{H}'_{as}$ не содержат инфракрасных расходимостей во всех порядках разложения по e^2. Эта проверка требует громоздких вычислений. К счастью, значительная их часть уже проведена Чангом, и мы перейдем к сопоставлению его и наших предложений.

Чанг рассмотрел подробно процесс рассеяния частицы на внешнем поле. В этом случае в начальном и конечном состояниях содержится по одному заряду; оператор фазы исчезает на таких состояниях, так что оператор S совпадет на них с фейнмановской S-матрицей. Согласно нашему предложению следует посмотреть ее матричный элемент между состояниями вида

$$\Psi_{as}(p) = \exp\{-R_f\} b_i^+(p) |0\rangle,$$

где f — формфактор (18). Состояния, которые рассматривает Чанг, несколько изменив их обозначения, можно записать в виде

$$\Psi_{\mathrm{ch}}(p) = D(a_\mu^+, p)\, b_i^+(\mathbf{p})\,|0\rangle =$$

$$= N^{-1/2} \exp\left\{\frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{n=1}^{2} F^n(k, p)\, \varepsilon_\mu^n a_\mu^+(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2k_0)^{1/2}}\right\} b_i^+(\mathbf{p})\,|0\rangle,$$

где $\varepsilon_\mu^n(\mathbf{k})$, $n = 1, 2$,— поперечные поляризационные векторы ($\varepsilon_0^n = 0$, $\varepsilon^n\mathbf{k} = 0$), и формфактор $F^n(k, p)$ имеет вид

$$F^n(k, p) = \frac{p\,\varepsilon^n}{p\,k}\,\varphi(k, p)$$

с тем же обрезающим множителем $\varphi(k, p)$, что и $f_\mu(k, p)$, а N — расходящийся нормирующий множитель

$$N = \exp\left\{\frac{e^2}{(2\pi)^3} \int \sum_n |F^n(k, p)|^2 \frac{d\mathbf{k}}{2k_0}\right\}.$$

Чанг проверил, что матричный элемент $\langle\Psi_{\mathrm{ch}}(p)\,|S|\,\Psi_{\mathrm{ch}}(p')\rangle$ во всех порядках теории возмущений не имеет инфракрасных расходимостей. Мы покажем, что наши состояния $\Psi_{\mathrm{as}}(p)$ эквивалентны состояниям Чанга $\Psi_{\mathrm{ch}}(p)$, так что это же утверждение окажется справедливым и для них.

Состояние $\Psi_{\mathrm{as}}(p)$ можно записать в виде

$$\Psi_{\mathrm{as}}(p) = \exp\left\{\frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \int (f_\mu(k, p)\, a_\mu^+(\mathbf{k}) - f_\mu^*(k, p)\, a_\mu(\mathbf{k})) \frac{d\mathbf{k}}{(2k_0)^{1/2}}\right\} b_i^+(\mathbf{p})\,|0\rangle,$$

так как состояние $b_i^+(\mathbf{p})\,|0\rangle$ является собственным для оператора $\rho(\mathbf{p})$. Действие градиентного преобразования $U(\lambda)$ на $\Psi_{\mathrm{as}}(p)$ сводится к замене

$$f_\mu(k, p) \to f_\mu(k, p) + k_\mu\lambda(k) = f'_\mu(k, p).$$

Мы можем подобрать λ так, чтобы $f'_0(k, p) = 0$ при малых k. В силу поперечности f_μ формфактор f'_μ также поперечен и является поэтому линейной комбинацией ε_μ^1 и ε_μ^2

$$f'_\mu(k, p) = c^1(k, p)\,\varepsilon_\mu^1(k) + c^2(k, p)\,\varepsilon_\mu^2(k),$$

где

$$c^n(k, p) = f'_\mu\varepsilon_\mu^n = f_\mu\varepsilon_\mu^n = \frac{p_\mu\varepsilon_\mu^n}{pk}\,\varphi(k, p) = F^n(k, p),$$

так как k_μ и c_μ ортогональны к ε_μ^n, $n = 1, 2$. Таким образом, состояние $\Psi_{\mathrm{as}}(p)$ эквивалентно состоянию вида

$$\Psi'_{\mathrm{as}}(p) = \exp\left\{\frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_n (F^n(k, p)\, \varepsilon_\mu^n a_\mu^+(\mathbf{k}) - F^{n*}(k, p)\, \varepsilon_\mu^n a_\mu(\mathbf{k})) \frac{d\mathbf{k}}{(2k_0)^{1/2}}\right\} b_i^+(\mathbf{p})\,|0\rangle.$$

Это состояние совпадает с состоянием Чанга, в чем нетрудно убедиться, если привести участвующий в его определении оператор к нормальному виду по формуле типа (12) и опустить множитель, содержащий операторы уничтожения фотонов.

Аналогично можно проверить эквивалентность состояний, предложенных Чангом для системы нескольких заряженных частиц, и соответствующих асимптотических состояний, построенных по нашему рецепту. Следует помнить, однако, что в этом случае оператор фазы нетривиален. Некоторые вычисления, учитывающие это обстоятельство, были проведены Сторроу [18]. Чанг не рассматривал специально состояний, содержащих, помимо заряженных частиц, также еще и жесткие фотоны. Некритическое обобщение его рекомендаций на этот случай может привести к некорректным предложениям. Так, например, состояния

$$\Psi_{\mathrm{ch}}(p,\ k) = D(a_\mu^+,\ p)\, b_i^+(p)\, a_\nu^+(k)\, |0\rangle$$

и

$$\Psi_{\mathrm{as}}(p,\ k) = \exp\{-R_f\}\, b_i^+(p)\, a_\nu^+(k)\, |0\rangle$$

не эквивалентны, так как при приведении состояния $\Psi_{\mathrm{as}}(p,\ k)$ по описанному выше способу нельзя будет пренебречь операторами уничтожения фотонов. Можно показать, что матричные элементы S-матрицы между состояниями второго типа исчезают при уменьшении импульса фотона, в то время как состояния первого типа приводят к матричным элементам, расходящимся при $k \to 0$. Таким образом, корректным является второе определение — частный случай нашего общего определения асимптотических состояний.

В заключение отметим специально, что в пространстве $\mathscr{H}_{\mathrm{as}}$ нет одночастичных состояний заряженных частиц. Более точно, представление группы Пуанкаре $a,\ \Lambda \to U(a,\ \Lambda)$, действующее в физическом гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_{\mathrm{as.\,ph}}$, не содержит дискретных неприводимых слагаемых с ненулевой массой. Другими словами можно сказать, что не существует релятивистского понятия заряженной частицы. Это утверждение известно (ср. [19]), и наша работа показывает его естественность с точки зрения теории рассеяния. Было бы интересно найти в $\mathscr{H}_{\mathrm{as}}$ релятивистски инвариантный полный набор коммутирующих операторов, который послужил бы для задания естественного базиса асимптотических состояний.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы вычислим асимптотику при больших $|t|$ интеграла

$$\frac{1}{2i}\int^{t} d\tau \int^{\tau} ds\, [V_{\mathrm{as}}^{\mathrm{I}}(s),\ V_{\mathrm{as}}^{\mathrm{I}}(\tau)],$$

определяющую оператор фазы $\Phi(t)$. Используя явное выражение для $V_{\mathrm{as}}^{\mathrm{I}}(t)$, перепишем этот интеграл в виде

$$\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, \frac{pq}{p_0 q_0}\, \rho(\mathbf{p})\, \rho(\mathbf{q}) \int^{t} d\tau \int^{\tau} ds \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0}\, \sin\left(k\left(\frac{q}{q_0}\,\tau - \frac{p}{p_0}\, s\right)\right).$$

Заметим, что

$$\rho(\mathbf{p})\, \rho(\mathbf{q}) = :\rho(\mathbf{p})\, \rho(\mathbf{q}): + \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})\, [\rho_+(\mathbf{p}) + \rho_-(\mathbf{p})],$$

так что интеграл распадается на два слагаемых. Второе из них пропорционально t и дает вклад в перенормировку массы заряженных частиц.

Рассмотрим подробнее первое слагаемое, для чего проинтегрируем последовательно по $\mathbf{k}$, s и τ. Имеем

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0} \sin\left(k\left(\frac{q}{q_0}\tau - \frac{p}{p_0}s\right)\right) = 2\pi^2\delta\left(\left(\frac{q}{q_0}\tau - \frac{p}{p_0}s\right)^2\right)\varepsilon(\tau - s).$$

Аргумент δ-функции имеет один корень s, меньший τ по модулю; разность корней пропорциональна $((pq)^2 - m^4)^{1/2}$. В результате после интегрирования по s мы приходим к выражению

$$\frac{e^2}{8\pi}\int d\mathbf{p}d\mathbf{q}\frac{pq}{((pq)^2 - m^4)^{1/2}} : \rho(\mathbf{p})\rho(\mathbf{q}) : \int^t \frac{d\tau}{|\tau|},$$

которое и определяет оператор фазы (11).

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
23 марта 1970 г.

Литература

[1] F. Bloch, A. Nordsieck. Phys. Rev., **52**, 54, 1937.
[2] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика, «Наука», 1969.
[3] D. Yennie, S. Frautschi, H. Suura. Ann. Phys. (N. Y.), **13**, 379, 1961.
[4] V. Chung. Phys. Rev., **140**, 1110, 1965.
[5] T. Kibble. Phys. Rev., **173**, 1527; **174**, 1882, **175**, 1624, 1968.
[6] Е. С. Фрадкин. Тр. ФИАН, 29, 7, 1965.
[7] J. Dollard. J. Math. Phys., **5**, 723, 1964.
[8] Л. А. Сахнович. Тр. Моск. матем. об-ва, **19**, 211, 1968.
[9] Ф. А. Березин. Метод вторичного квантования, «Наука», 1965.
[10] В. С. Буслаев, В. Б. Матвеев. ТМФ, **2**, 367, 1970.
[11] W. Amrein, Ph. Martin, B. Misra. Preprint University of Geneva, 1969.
[12] J. von Neumann. Comp. Math., 6, 1, 1938.
[13] A. Wightman, S. Schweber. Phys. Rev., **98**, 812, 1955.
[14] Ph. Blanchard. Comm. Math. Phys., **15**, 156, 1969.
[15] И. Сигал. Математические проблемы релятивистской физики, «Мир», 1968.
[16] В. Г. Горшков. ЖЭТФ, **40**, 1481, 1961.
[17] S. Weinberg. Phys. Rev., **140**, 516, 1965.
[18] B. Storrow. Nuovo Cim., **54**, 15, 1968.
[19] B. Schroer. Fortschr. Physik, **11**, 1, 1963.

ASYMPTOTIC CONDITIONS AND INFRARED DIVERGENCES IN QUANTUM ELECTRODYNAMICS

P. P. Kulish, L. D. Faddeev

An S-matrix definition for the relativistic theory of interacting charged particles which is free from infrared divergencies is suggested. This is achieved through a modification of the asymptotic condition and introduction of new space of asymptotic states. This space differs from that of Fock, but it is still separable and relativistic and gauge-invariant. The mass-operator in this space has no non-zero discrete eigenvalues.