Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. Д. Фаддеев, С. Л. Шаташвили, Алгебраические и гамильтоновы методы в теории неабелевых аномалий, *ТМФ*, 1984, том 60, номер 2, 206–217

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 195.218.150.2
6 июля 2017 г., 15:10:31

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 60, № 2
август, 1984

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ГАМИЛЬТОНОВЫ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕАБЕЛЕВЫХ АНОМАЛИЙ

Фаддеев Л. Д., Шаташвили С. Л.

Дана новая интерпретация неабелевых аномалий и действия Весса – Зумино в терминах инфинитезимального и глобального коциклов представления группы калибровочных преобразований, действующей на функционалах от полей Янга – Миллса. На ее основе предложены два простых способа непертурбативного вычисления аномалий и действия Весса – Зумино.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время оживился интерес к проблеме неабелевых аномалий Адлера – Бардина – Гросса – Джакива [1–3]. Обсуждается их геометрический смысл, даются новые методы вычисления вне рамок теории возмущения. Обзор этого нового развития можно найти в недавних лекциях Р. Стора [4]. Можно считать, что основные формулы, связанные с аномалиями, уже выписаны, и новые работы отличаются друг от друга лишь аранжировкой.

В данной работе мы дадим еще два способа вывода этих формул и их новую интерпретацию. Мы считаем, что наш первый подход к вычислению аномалий более элементарен и аппелирует к популярным формулам теории полей Янга – Миллса. Мы полагаем, что новым является интерпретация аномалий и действия Весса – Зумино в терминах инфинитезимального и глобального коциклов представления группы калибровочных преобразований, действующей на функционалах от полей Янга – Миллса.

Работа состоит из трех разделов. В первом из них дана наша интерпретация аномалий и действия Весса – Зумино, а во втором и третьем даны два новых метода их вычисления. Первый подход основан на гамильтоновой интерпретации аномалий как модификации закона Гаусса для поля Янга – Миллса в пятимерном пространстве. Второй подход представляет собой видоизменение формул Р. Стора после переноса их с инфинитезимальных калибровочных преобразований на групповые преобразования в целом.

Авторы благодарят А. А. Андрианова, В. Е. Корепина, А. Г. Реймана, М. А. Семенова-Тян-Шанского и Д. К. Фаддеева за обсуждения.

Статья посвящена академику Н. Н. Боголюбову в связи с его юбилеем.

1. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ АНОМАЛИИ

Мы будем рассматривать модель взаимодействия левых фермионов ψ_L с внешним калибровочным полем A_μ. Мы ограничиваемся этим случаем лишь для определенности; случай киральной калибровочной группы и век-

торного и аксиального калибровочных полей рассматривается аналогично (по поводу тривиализации векторной части аномалии см., например, [4, 5]).

Наши рассуждения относятся к физически интересному 4-мерному пространству Минковского. Однако по ходу дела мы во вспомогательных целях будем использовать также пятимерное и шестимерное пространства.

Калибровочное поле A_μ будем считать матрицей в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ компактной группы G. Введем в $\mathfrak{G}$ антиэрмитов нормированный базис λ^a, через f^{abc} обозначим соответствующие структурные константы:

$$\mathrm{tr}\,(\lambda^a\lambda^b)=-{}^1/_2\delta^{ab}, \qquad [\lambda^a, \lambda^b]=f^{abc}\lambda^c.$$

Поле ψ_L левых фермионов представляется в виде $\psi_L={}^1/_2(1-\gamma_5)\psi$, где ψ — четырехкомпонентный спинор со значениями в выбранном представлении алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G.

Лагранжиан, имеющий вид

$$\mathscr{L}=i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu+{}^1/_2(1-\gamma_5)A_\mu)\psi, \tag{1}$$

не меняется при калибровочных преобразованиях

$$A_\mu\to A_\mu{}^g=g^{-1}A_\mu g+g^{-1}\partial_\mu g, \qquad \psi_L\to\psi_L{}^g=g^{-1}\psi_L. \tag{2}$$

Однако, как известно [2, 3], соответствующий формально инвариантный функциональный интеграл

$$Z(A)=\mathscr{N}^{-1}\int d\psi\, d\bar{\psi}\,\exp\left\{i\int\mathscr{L}\,d^4x\right\} \tag{3}$$

не является калибровочно-инвариантным в наивном смысле, а именно $Z(A^g)\neq Z(A)$.

Для более точной характеристики поведения $Z(A)$ при калибровочных преобразованиях введем генераторы бесконечномалых преобразований T^a, действующие на функционалы от компонент $A_\mu{}^a$ калибровочного поля ($A_\mu=A_\mu{}^a\lambda^a$):

$$T^a(x)=-\nabla_\mu\frac{\delta}{\delta A_\mu{}^a(x)}=-\left(\partial_\mu\frac{\delta}{\delta A_\mu{}^a}+f^{abc}A_\mu{}^b\frac{\delta}{\delta A_\mu{}^c}\right). \tag{4}$$

Эти однородные дифференциальные операторы первого порядка удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[T^a(x), T^b(y)]=f^{abc}T^c(y)\delta(x-y). \tag{5}$$

Вычисления, проделанные в рамках теории возмущений в работах Бардина [2], Гросса и Джакива [3], показывают, что

$$T^a(x)Z(A)=i\mathfrak{A}^a(x)Z(A), \tag{6}$$

где $\mathfrak{A}^a(x)$ — вещественные функции, полиномы от компонент $A_\mu{}^a(x)$ и их первых производных. При этом не существует такого локального функционала $\Omega(A)$, что

$$\mathfrak{A}^a(x)=T^a(x)\Omega(A) \tag{7}$$

(если бы такой функционал существовал, то его можно было бы добавить как контрчлен к исходному действию).

Формулу (6) обычно считают указанием на нарушение калибровочной инвариантности; мерой этого нарушения и является величина $\mathfrak{A}^a(x)$ — отсюда и название «аномалия».

Мы, однако, хотим прочитать формулу (6) иначе: величина $Z(A)$ калибровочно-инвариантна, однако действие калибровочной группы отличается от порожденного генераторами $T^a(x)$.

Заметим для этого, что

$$T^a(x)\mathfrak{A}^b(y)-T^b(y)\mathfrak{A}^a(x)=f^{abc}\mathfrak{A}^c(y)\delta(x-y), \tag{8}$$

как это немедленно следует из (5) и (6) после перекрестного дифференцирования. Это соотношение называется условием самосогласованности Весса — Зумино [6].

Удобно переписать условие (8) следующим образом. Введем операторы

$$X^a(x)=T^a(x)+i\mu\mathfrak{A}^a(x), \tag{9}$$

где μ — вещественная константа и второе слагаемое действует как оператор умножения на функцию $i\mu\mathfrak{A}^a(x)$. Очевидно, что условие (8) эквивалентно перестановочным соотношениям

$$[X^a(x), X^b(y)]=f^{abc}X^c(y)\delta(x-y), \tag{10}$$

совпадающим с (5). Другими словами, операторы $X^a(x)$ реализуют представление калибровочной группы, отличное от генерируемого операторами $T^a(x)$. Формула (6) показывает, что функционал $Z(A)$ инвариантен по отношению к этому новому представлению (при $\mu=-1$).

Для того чтобы показать смысл представления $X^a(x)$, уместно сделать математическое отступление. Пусть G — группа с элементами g и M — пространство, где эта группа действует; для этого действия используем обозначение $m\to mg$, где m — точка в M. В пространстве функций $\Psi(m)$ на M рассмотрим представление $\mathcal{U}(g)$ группы

$$\mathcal{U}(g)\Psi(m)=e^{i\alpha_1(m,g)}\Psi(mg), \tag{11}$$

где $\alpha_1(m, g)$ — функция, которую (имея в виду унитарность представления) будем считать вещественной. Условие

$$\mathcal{U}(g_1)\mathcal{U}(g_2)=\mathcal{U}(g_1g_2), \tag{12}$$

входящее в определение представления, выполняется, если $\alpha_1(m, g)$ удовлетворяет соотношению

$$\alpha_1(m, g)+\alpha_1(mg, h)=\alpha_1(m, gh) \pmod{2\pi}. \tag{13}$$

Функцию α_1 принято называть 1-коциклом группы G (подробнее см. раздел 3).

Ясно, что если $\alpha_1(m, g)$ можно представить в виде

$$\alpha_1(m, g)=\alpha_0(mg)-\alpha_0(m), \tag{14}$$

то представление $\mathcal{U}(g)$ сводится к простому сдвигу

$$\mathcal{U}_0(g)\Psi(m)=\Psi(mg) \tag{15}$$

унитарным преобразованием $\Psi(m)\to e^{i\alpha_0(m)}\Psi(m)$. В этом случае коцикл называется тривиальным.

Если G — группа Ли, то инфинитезимальные преобразования, представляющие соответствующую алгебру Ли $\mathfrak{G}$, даются неоднородными дифференциальными операторами первого порядка

(16) $$Q^a=t^a+ib^a,$$

где $t^a=\sum_\alpha f_\alpha{}^a\frac{\partial}{\partial m_\alpha}$ — векторное поле, реализующее сдвиг $\delta^a m=\varepsilon m\lambda^a$:

(17) $$t^a\varphi(m)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(\varphi(m+\varepsilon m\lambda^a)-\varphi(m)),$$

а b^a — оператор умножения на функцию

(18) $$b^a(m)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(\alpha_1(m,1+\varepsilon\lambda^a)-\alpha_1(m,1)).$$

Набор функции $b^a(m)$ определяет инфинитезимальный 1-коцикл. Необходимое условие (13) приобретает вид

(19) $$t^ab^b(m)-t^bb^a(m)=f^{abc}b^c(m).$$

Если коцикл тривиален, то для $b^a(m)$ получаем соотношение

(20) $$b^a(m)=t^a\alpha_0(m),$$

которое и дает определение тривиального коцикла.

Вернемся теперь к аномалиям. Сравнение формул (19), (16) и (8), (9) показывает, что аномалия является инфинитезимальным 1-коциклом в только что сформулированном смысле. Роль G играет калибровочная группа, а пространство M есть многообразие полей Янга — Миллса.

Вопрос о тривиальности коцикла-аномалии имеет двоякий ответ. Конечно, аномалия представляется формулой типа (20), где роль $\alpha_0(m)$ играет $-i\ln Z(A)$. Однако функционал $-i\ln Z(A)$ нелокален и не может играть роль контрчлена в теории взаимодействующих полей ψ_L и A_μ. Так что мы предпочитаем говорить, что $\mathfrak{A}^a$ — нетривиальный коцикл, в том смысле, что он не порождается локальным функционалом по формуле типа (20) или (7).

Покажем теперь, что роль коцикла $\alpha_1(m, g)$ в нашем примере играет действие Весса — Зумино. Это действие было введено в [6] как функционал $W(A, g)$ от кирального поля g (элемент калибровочной группы) и калибровочного поля A_μ, дающий аномалию при калибровочной вариации: если

(21) $$g\to h^{-1}g,\quad A\to A^h;\quad h=1+\varepsilon^a\lambda^a,$$

то

(22) $$W(A^h,h^{-1}g)-W(A,g)=\int\varepsilon^a(x)\mathfrak{A}^a(x)\,d^4x.$$

Именно этим свойством и обладает глобальный коцикл $\alpha_1(A, g)$ (13) (при $\mu=-1$ в (9)). Более конструктивное определение действия Весса —

Зумино будет дано в разделах 2 и 3. Там же будет установлена его связь с неоднозначным действием в смысле С. П. Новикова [7, 8] и показано, что константа μ может принимать только квантованные значения.

2. ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ АНОМАЛИИ

Подход этого раздела будет использовать знакомые формулы теории полей Янга — Миллса и основан на следующем соображении: оператор $iT^a(x)$ из (4) выглядит в точности, как связь, соответствующая закону Гаусса в гамильтоновой калибровке для полей Янга — Миллса (см. [9]). Действительно, в представлении операторов поля при фиксированном времени, диагональном для оператора $\hat{A}$,

$$\hat{A}_\mu{}^a(x)\Psi(A)=A_\mu{}^a(x)\Psi(A), \tag{23}$$

$$\hat{E}_\mu{}^a(x)\Psi(A)=-i\frac{\delta}{\delta A_\mu{}^a(x)}\Psi(A)$$

($E_\mu{}^a$ — компоненты электрического поля), определение $T^a(x)$ можно переписать в виде

$$iT^a=\nabla_\mu E_\mu{}^a, \tag{24}$$

характерном для неабелева закона Гаусса. Коммутационные соотношения (5) определяют условие калибровочной ковариантности. Единственное отличие нашего случая от реального состоит в том, что в гамильтоновом подходе мы имеем дело с полем Янга — Миллса, заданном в трехмерном, а не в четырехмерном пространстве.

Это наблюдение немедленно приводит к следующему предположению. Рассмотрим поле Янга — Миллса A_p в пятимерном пространстве и добавим к обычному действию

$$I_{\mathrm{YM}}{}^5=-\frac{1}{4}\int(F_{pq}{}^a)^2\,d^5x \tag{25}$$

дополнительное калибровочно-инвариантное слагаемое, изменяющее связь, т. е. закон Гаусса. Новая связь и должна привести к выражению (9) (здесь $(x_p)=((x_\mu),\,x_5)$, $(x_\mu)=(x_1,\,\ldots,\,x_4)$ и в гамильтоновом подходе x_5 — временная переменная; после евклидова поворота в (3) в качестве определения $\mathfrak{A}^a(x)$ по-прежнему принимается формула (6)).

К счастью, в пятимерном пространстве существует подходящее локальное калибровочно-инвариантное действие, определяющееся вторичным классом Черна — Саймонса [10]. Напомним его определение. Для этого поднимемся еще на одну размерность выше и рассмотрим поле Янга — Миллса в шестимерном пространстве. Соответствующий класс Черна — Понтрягина (плотность инстантонного заряда) представим в виде

$$C_{(6)}=\frac{-i}{384\pi^3}\varepsilon^{PQRSDE}\,\mathrm{tr}(F_{PQ}F_{RS}F_{DE}), \tag{26}$$

где ε^{PQRSDE} — полностью антисимметричный тензор; $\varepsilon^{123456}=1$. Коэффициент выбран из условия целочисленности интеграла $I_6(A)=\int C_{(6)}d^6x$ (по замкнутому шестимерному многообразию).

Плотность (26) является дивергенцией и представляется в виде $\partial_P C^P$, при этом C^P не содержит компонент поля $A_P{}^a$. Положив $(x_P)=((x_p),\ x_6)$, получаем выражение для инварианта Черна — Саймонса

$$(27)\qquad I_{CS}{}^5(A)=\int C^6\, d^5x,$$

которое зависит только от полей A_p в пятимерном пространстве.

Приведем явную формулу для вторичного класса Черна — Саймонса, плотности C^6 в (27):

$$(28)\qquad C^6=\frac{-i}{192\pi^3}\,\varepsilon^{pqrse}\,\mathrm{tr}\left(F_{pq}F_{rs}A_e-F_{pq}A_rA_sA_e+\frac{2}{5}A_pA_qA_rA_sA_e\right).$$

Из нее видно, что C^6 линейно по каждой компоненте $A_p{}^a$ поля Янга — Миллса и не содержит производных $\partial_q A_p{}^a$ при $q=p$. Функционал (27) локален, однако его калибровочная инвариантность не очевидна. Имеет место формула

$$(29)\qquad I_{CS}{}^5(A^g)-I_{CS}(A)=\int \varkappa(g)\, d^5x=n(g),$$

где $n(g)$ — степень отображения g, принимающая лишь целочисленные значения ($H^5(G)=\mathbb{Z}$, интегрирование ведется по замкнутому пятимерному многообразию),

$$(30)\qquad \varkappa(g)=\frac{-i}{480\pi^3}\,\varepsilon^{pqrse}\,\mathrm{tr}\,(g^{-1}\partial_p g\, g^{-1}\partial_q g\, g^{-1}\partial_r g\, g^{-1}\partial_s g\, g^{-1}\partial_e g).$$

Это означает, что калибровочно-инвариантным является фейнмановская амплитуда $\exp\{i2\pi N I_{CS}{}^5\}$, где N — произвольное целое число.

Все эти факты, так же как и параллельные свойства функционала $I_{CS}{}^3$ в трехмерном пространстве, порожденного обычным инстантонным зарядом, хорошо известны (см. [11]). Наше утверждение состоит в следующем: связь G^a, определяющая закон Гаусса в гамильтоновой калибровке для действия $I_{YM}{}^5+2\pi N I_{CS}{}^5$, дается выражением iX^a (см. (9)) при $\mu\sim N$.

Отметим, что действие $I_{YM}{}^3+2\pi N I_{CS}{}^3$ подробно рассматривалось в работе Дезера, Джакива и Темплтона [12] (см. также лекцию Джакива [11]). Однако они не отметили связь между законом Гаусса и соответствующей двумерной неабелевой аномалией.

После того как утверждение сделано, его доказательство элементарно. Выберем x_5 за время и повторим обычные формулы гамильтоновой редукции, приведенные в [9]. На поверхности $x_5=\mathrm{const}$ компоненты поля $A_5{}^a$ играют роль множителей Лагранжа и связь G^a имеет вид

$$(31)\qquad G^a=\nabla_\mu E_\mu{}^a+2\pi N\frac{\delta I_{CS}{}^5}{\delta A_5{}^a},$$

где $E_\mu{}^a=F_{5\mu}{}^a$, а второе слагаемое не содержит A_5 и «скоростей» $\partial_5 A_\mu$. Канонический импульс, сопряженный с $A_\mu{}^a$, отличен от $E_\mu{}^a$ и имеет вид

$$(32)\qquad \Pi_\mu{}^a=E_\mu{}^a+2\pi N\frac{\delta I_{CS}{}^5}{\delta(\partial_5 A_\mu{}^a)},$$

связь (31) переписывается в виде

$$(33)\qquad G^a=\nabla_\mu\Pi_\mu{}^a+2\pi N\left(\frac{\delta I_{CS}{}^5}{\delta A_5{}^a}-\nabla_\mu\frac{\delta I_{CS}{}^5}{\delta(\partial_5 A_\mu{}^a)}\right),$$

где второе слагаемое зависит от A_μ и их производных по (x_μ).

Связи G^a удовлетворяют коммутационным соотношениям (в квантовом случае)

$$[G^a(x), G^b(y)] = if^{abc}G^c(y)\delta(x-y), \tag{34}$$

которые отражают калибровочную инвариантность (ср. (34) с (10)). В представлении, диагональном по $A_\mu{}^a$, именно $\Pi_\mu{}^a$ задается в виде $-i\dfrac{\delta}{\delta A_\mu{}^a}$. В этом представлении первое слагаемое в (33) совпадает с iT^a (см. (4)), а второе есть оператор умножения на функцию от $A_\mu{}^a$. Следует думать, что оно совпадает и с аномалией Гросса — Джакива $\mathfrak{A}^a(x)$:

$$\mathfrak{A}^a(x) = \frac{i}{24\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\partial_\mu \operatorname{tr}\left[\lambda^a\left(A_\nu\partial_\lambda A_\sigma + \frac{1}{2}A_\nu A_\lambda A_\sigma\right)\right]. \tag{35}$$

Непосредственное сравнение формул (35) и (33) показывает, что это действительно так при $N=-1$.

Итак, мы установили явную связь между классом Черна — Саймонса и аномалией $\mathfrak{A}^a(x)$:

$$\mathfrak{A}^a(x) = -2\pi\left(\frac{\delta I_{\mathrm{CS}}{}^5}{\delta A_5{}^a(x)} - \nabla_\mu \frac{\delta I_{\mathrm{CS}}{}^5}{\delta(\partial_5 A_\mu{}^a(x))}\right). \tag{36}$$

Появлявшееся выше целое число N также можно реализовать, если взять несколько левых фермионов (ввести цветовой индекс).

Соображение единственности показывает, что наш вывод дает вычисление аномалии. Действительно, действие $I_{\mathrm{CS}}{}^5$ представляет собой единственный локальный и калибровочно-инвариантный (по $\operatorname{mod}\mathbb{Z}$) функционал от полей Янга — Миллса в пятимерном пространстве, линейный по $A_p{}^a$ при каждом фиксированном p. Следовательно, единственно и выражение для связи (закона Гаусса), удовлетворяющее соотношению (34). Но именно последнее соотношение является характерным для аномалии.

Перейдем теперь к глобальному коциклу-действию Весса — Зумино. Вместо действий $I_{\mathrm{YM}}{}^5$ и $I_{\mathrm{CS}}{}^5$ рассмотрим соответствующие функции Лагранжа $L_{\mathrm{YM}}{}^5$ и $L_{\mathrm{CS}}{}^5$, которые задаются выражениями, аналогичными (25) и (27), но с интегрированием по поверхности $x_5=\mathrm{const}$, например,

$$L_{\mathrm{CS}}{}^5 = \int\limits_{x_5=\tau} C^6\, d^4x. \tag{37}$$

Функция Лагранжа $L_{\mathrm{CS}}{}^5$ не калибровочно-инвариантна, но ее приращение есть производная по времени

$$L_{\mathrm{CS}}{}^5(A^g) - L_{\mathrm{CS}}(A) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\tau}\alpha(A, g). \tag{38}$$

К сожалению, явная «первообразная» $\alpha(A, g)$ вычисляется с трудом. Однако нетрудно показать, что неявная первообразная

$$\alpha(A, g) = 2\pi \int\limits_{x_5\geqslant\tau} [C^6(A^g) - C^6(A)]\, d^5x \tag{39}$$

зависит лишь от значений A и g на поверхности $x_5=\tau$. Действительно, пусть A, g и A', g' — два набора полей, совпадающие при $x_5=\tau$. Выраже-

ние $\frac{1}{2\pi}(\alpha(A,g)-\alpha(A',g'))$ можно записать в виде интеграла $\int [C^6(A^g)-$ $-C^6(A)]d^5x$ по всему пространству. Для этого следует отразить в представлении для $\alpha(A', g')$ переменную интегрирования x_5 относительно поверхности $x_5=\tau$ и считать поля A' и g' продолжениями A и g в полупространство $x_5<\tau$. Полученный интеграл в силу (29) есть целое число, так что выражение $\exp\{i\alpha(A, g)\}$ действительно не зависит от продолжения A и g с поверхности $x_5=\tau$.

Отметим, что единственный член в (39), для которого интеграл по x_5 не берется явно, зависит только от кирального поля g; соответствующее подынтегральное выражение совпадает с плотностью заряда $\varkappa(g)$ (см. (30)). Все остальные слагаемые в (39) явно интегрируются и дают вклад в $\alpha(A, g)$ вида $\int \beta d^4x$, где

$$\beta=\frac{-i}{48\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\operatorname{tr}[(A_\mu\partial_\nu A_\lambda+\partial_\nu A_\lambda A_\mu+A_\mu A_\nu A_\lambda)\partial_\sigma g\, g^{-1}- -{}^1/_2 A_\mu\partial_\nu g\, g^{-1}A_\lambda\partial_\sigma g\, g^{-1}-A_\mu\partial_\nu g\, g^{-1}\partial_\lambda g\, g^{-1}\partial_\sigma g\, g^{-1}]. \tag{40}$$

Используя обозначения Новикова, получаем

$$\alpha(A,g)=\int[\beta+d^{-1}\varkappa]d^4x \tag{41}$$

(ср. с [13, 14]).

В соответствии с общими принципами квантовой механики для симметрии G, меняющей функцию Лагранжа на производную по времени от фазы, представление в пространстве волновых функций задается сдвигом аргумента и умножением на эту фазу, т. е. действие калибровочной группы в теории с функцией Лагранжа $L_{\mathrm{YM}}{}^5-2\pi L_{\mathrm{CS}}{}^5$ задается формулой

$$\mathcal{U}(g)\Psi(A)=\exp\{i\alpha(A, g)\}\Psi(A^g). \tag{42}$$

Сравнение с абстрактной формулой (11) из раздела 1 показывает, что $\alpha(A, g)$ и есть нетривиальный глобальный коцикл $\alpha_1(A, g)$, соответствующий инфинитезимальному коциклу-аномалии $-\mathfrak{A}^a(x)$.

Рассуждение о корректности определения α в (39) в настоящее время уже считается стандартным, хотя в общем виде оно было проведено лишь недавно С. П. Новиковым [7, 8]. К действию Весса — Зумино оно было применено Виттеном [13]. Наконец, рассуждение о функции Лагранжа и фазе взято из обзора Джакива [11], где оно было использовано в уже упомянутом трехмерном случае.

Ясно, что изложенный выше подход переносится и на другие размерности, которые могут иметь смысл, например, в связи с теориями типа Калузы — Клейна. Характеристики Черна — Понтрягина существуют в любой четной размерности, и каждая из них порождает аномалию в пространстве на две размерности ниже.

Гравитационные аномалии Алварес-Гауме и Виттена [15] также можно получать указанным способом. Так как классы Понтрягина существуют лишь в размерностях, кратных четырем, соответствующие аномалии возникают в размерности $4k-2$.

3. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОИСХОЖДЕНИЕ АНОМАЛИИ

Здесь мы дадим несколько более общий взгляд на формулы для аномалии. Как и в разделе 1, рассмотрим сначала абстрактную ситуацию с пространством M и группой G. Пусть $\alpha_0(m)$, $\alpha_1(m;\ g_1), \ldots, \alpha_n(m;\ g_1, \ldots, g_n)$ — пространство функций (для определенности вещественных) от точки m, номера n и упорядоченного набора аргументов $g_1, \ldots, g_n$ в G. Введем операцию δ, переводящую функцию n переменных g в функцию, зависящую от $n+1$ таких переменных:

$$(43)\qquad (\delta\alpha_n)(m;\ g_1, \ldots\ g_{n+1}) = \alpha_n(mg_1;\ g_2, \ldots, g_{n+1}) - \\ -\alpha_n(m;\ g_1g_2, \ldots, g_{n+1}) + \ldots + (-1)^{n+1}\alpha_n(m;\ g_1, \ldots, g_n).$$

Несколько первых формул для малых n имеют вид

$$(44)\qquad (\delta\alpha_0)(m;\ g) = \alpha_0(mg) - \alpha_0(m),$$
$$(\delta\alpha_1)(m;\ g_1, g_2) = \alpha_1(mg_1;\ g_2) - \alpha_1(m;\ g_1g_2) + \alpha_1(m;\ g_1),$$
$$(\delta\alpha_2)(m;\ g_1, g_2, g_3) = \alpha_2(mg_1;\ g_2, g_3) - \alpha_2(m;\ g_1g_2, g_3) + \\ +\alpha_2(m;\ g_1, g_2g_3) - \alpha_2(m;\ g_1, g_2).$$

Простой подсчет показывает, что выполняется соотношение

$$(45)\qquad \delta^2 = 0.$$

Операция δ является стандартным кограничным оператором в гомологической алгебре (см., например, [16]). Одному из нас (Л. Д. Ф.) приятно отметить, что его отец был одним из создателей этой операции (см. [17]).

Напомним стандартные термины элементарной теории когомологий: функция $\alpha = \delta\beta$ называется кограницей; если $\delta\alpha = 0$, то α называется коциклом. Коцикл нетривиален, если он не является кограницей, т. е. $\delta\alpha = 0$, но $\alpha \neq \delta\beta$.

1-коцикл $\alpha_1(m;\ g)$ используется при построении представления вида (11). Действительно, соотношение (13) записывается теперь как $\delta\alpha_1 = 0$. Коцикл α_1 нетривиален, если его нельзя представить в виде $\delta\alpha_0$ (ср. с (14)). 2-коцикл $\alpha_2(g_1, g_2)$, не зависящий от m, возникает в проективных представлениях группы G, т. е. в таких представлениях, $\mathcal{U}(g)$, для которых выполнено соотношение

$$(46)\qquad \mathcal{U}(g_1)\mathcal{U}(g_2) = e^{i\alpha_2(g_1, g_2)}\mathcal{U}(g_1g_2).$$

Условие ассоциативности для (46) можно записать в виде $\delta\alpha_2 = 0$. Ясно также, что если $\alpha_2 = \delta\alpha_1$, то замена $\mathcal{U}(g) \to e^{i\alpha_1(g)}\mathcal{U}(g)$ сводит проективное представление (46) к обычному.

В общем виде 2-коциклы могут возникнуть в соотношениях вида

$$(47)\qquad \mathcal{U}(m, g)\mathcal{U}(mg, h) = e^{i\alpha_2(m;\ g, h)}\mathcal{U}(m, gh),$$

обобщающих (46) (сравни с 1-коциклом). Ниже мы сформулируем гипотезу о том, как эти соотношения реализуются в нашем физическом примере.

Читатель уже видит аналогию приведенных абстрактных формул с конкретными формулами для аномалий. Следующее рассуждение является обобщением вычисления Р. Стора [4]. Мы будем использовать адекватный язык дифференциальных форм.

Рассмотрим на 6-мерном пространстве 6-форму, порождающую класс Черна — Понтрягина

$$\omega_{-1}(A)=\frac{-i}{384\pi^3}\operatorname{tr}(F\wedge F\wedge F), \tag{48}$$

здесь F—2-форма, $F=F_{PQ}dx^P dx^Q$. Имеет место соотношение

$$\omega_{-1}(A)=d\omega_0, \tag{49}$$

где первообразная определяется неоднозначно:

$$\omega_0=d^{-1}\omega_{-1}, \tag{50}$$

и функция

$$\frac{1}{2\pi}\alpha_0(A)=\int\limits_{x_5=0}\omega_0 \pmod{\mathbb{Z}} \tag{51}$$

является неоднозначным действием в смысле Новикова. Однако фейнмановская амплитуда $\exp\{i\alpha_0(A)\}$ определена однозначно. В $\alpha_0(A)$ мы узнаем инвариант Черна — Саймонса $I_{CS}{}^5(A)$, взятый с правильным множителем.

Рассмотрим теперь выражение $\delta\alpha_0(A)$:

$$\frac{1}{2\pi}(\delta\alpha_0)(A,g)=\int[\omega_0(A^g)-\omega_0(A)]. \tag{52}$$

Имеет место соотношение

$$\omega_0(A^g)-\omega_0(A)=d\omega_1(A,g), \tag{53}$$

где 4-форма ω_1 опять определена неоднозначно; препятствием в этом случае является целочисленный класс $H^5(G)$ отображения $g(x)$. В результате функция

$$\frac{1}{2\pi}\alpha_1(A,g)=\int\limits_{x_5=0}\omega_1 \pmod{\mathbb{Z}} \tag{54}$$

определена с точностью до целочисленной добавки и зависит от A и g лишь на четырехмерном пространстве $x_5=0$. По своему происхождению α_1 удовлетворяет соотношению $\delta\alpha_1=0$ и определяет 1-коцикл в случае поля Янга — Миллса и калибровочной группы в четырехмерном пространстве. Этот функционал и есть действие Весса — Зумино (ср. с (39)).

Приведенную процедуру можно продолжить; так, при рассмотрении функции $\delta\alpha_1$ у нас появится 4-форма, имеющая первообразную (неоднозначную):

$$\omega_1(A^g,h)-\omega_1(A,gh)+\omega_1(A,g)=d\omega_2 \tag{55}$$

(из рассуждений Стора это соотношение следует для инфинитезимальных $g-1$ и $h-1$). Таким образом, для поля Янга — Миллса в трехмерном пространстве (которое и возникает в гамильтоновом подходе) мы можем построить 2-коцикл:

$$\frac{1}{2\pi}\alpha_2(A,g,h)=\int\limits_{x_4=0}\omega_2 \pmod{\mathbb{Z}}. \tag{56}$$

Формула (40) позволяет вычислить вклад в α_2, явно зависящий от A. Для этого нужно применить операцию δ к плотности β из (40). При этом получаем

$$(57)\qquad \delta\beta=\beta(A^g,h)-\beta(A,gh)+\beta(A,g)=\partial_\mu K_\mu+\frac{i}{48\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\operatorname{tr}[g_\mu g_\nu g_\lambda h_\sigma'+$$
$$+g_\mu h_\nu' h_\lambda' h_\sigma'+{}^1/_2 g_\mu h_\nu' g_\lambda h_\sigma'],$$

где

$$K_\mu=\frac{-i}{48\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\operatorname{tr}(A_\nu\{g_\lambda,h_\sigma'\}),$$

$$h_\sigma'=gh_\sigma g^{-1},\quad g_\sigma=\partial_\sigma g g^{-1},\quad h_\sigma=\partial_\sigma h h^{-1};$$

а второе слагаемое в правой части (57) зависит только от g и h и имеет четвертый порядок малости при инфинитезимальных $g-1$ и $h-1$. Такой же порядок имеет и вклад плотности $d^{-1}\varkappa$. Поэтому инфинитезимальный 2-коцикл дается формулой

$$(58)\qquad \mathfrak{A}_2{}^{ab}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{24\pi^2}\varepsilon^{ijk}d^{abc}\partial_i A_j{}^c(\mathbf{y})\,\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

где

$$d^{abc}=-i\operatorname{tr}\left(\frac{\lambda^a}{2}\{\lambda^b,\lambda^c\}\right).$$

В соответствии с общей формулой (47) $a_2{}^{ab}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ появится в перестановочных соотношениях для представления калибровочной алгебры, которое ковариантно зависит от калибровочного поля A_i:

$$(59)\qquad [J^a(A,\mathbf{x}),J^b(A,\mathbf{y})]+T_3{}^a(\mathbf{x})J^b(A,\mathbf{y})-T_3{}^b(\mathbf{y})J^a(A,\mathbf{x})=$$
$$=f^{abc}J^c(A,\mathbf{y})\delta(x-\mathbf{y})+\frac{i}{12\pi^2}\varepsilon^{ijk}d^{abc}\partial_i A_j{}^c(\mathbf{y})\,\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

здесь

$$T_3{}^a(\mathbf{x})=-\nabla_i\frac{\delta}{\delta A_i{}^a},\qquad i=1,2,3.$$

Мы предполагаем, что именно этому соотношению удовлетворяют нулевые компоненты квантованного фермионного тока $j_0{}^a(\mathbf{x})$ для левых фермионов во внешнем поле Янга – Миллса. Проверка этой гипотезы будет проведена отдельно.

Обратим внимание на то, что формулу (59) можно переписать в виде

$$(60)\qquad [G_3{}^a(\mathbf{x}),G_3{}^b(\mathbf{y})]=f^{abc}G_3{}^c(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})+$$
$$+\frac{i}{12\pi^2}\varepsilon^{ijk}d^{abc}\partial_i A_j{}^c(\mathbf{y})\,\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

где $G_3{}^a=T_3{}^a+J^a$, и $G_3{}^a$ уже выглядит как связь, соответствующая закону Гаусса в физическом трехмерном пространстве. Последнее слагаемое в (60) играет роль швингеровского члена, который здесь имеет операторное значение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что появление неабелевой киральной аномалии свидетельствует не о нарушении калибровочной инвариантности, а лишь об изменении представления калибровочной группы. После этого сопоставление закона Гаусса с формулами совместности Весса — Зумино привело нас к связи аномалии и действия Весса — Зумино с действием Черна — Саймонса в пятимерном пространстве. Наконец, более общий алгебраический взгляд на возникающие формулы привел нас к построению 2-коцикла калибровочной группы в трехмерном пространстве, по-видимому, играющую важную роль в квантовой теории взаимодействующих полей Янга — Миллса и безмассовых фермионов.

Литература

[1] *Adler L. S.*— Phys. Rev., 1969, *177*, № 5(11), 2426–2438.
[2] *Bardeen W. A.*— Phys. Rev., 1969, *184*, № 5, 1848–1859.
[3] *Gross D. J., Jackiw R.*— Phys. Rev. D, 1972, *6*, № 2, 477–493.
[4] *Stora R.* Algebraic structure and topological origin of anomalies. Preprint LAAP-TH-94, 1983, 20 p. (Seminar given at the Cargese Institute of Theoretical physics, 1983).
[5] *Andrianov A., Bonora L., Pasti S.* Anomalies, cohomology and finite mode regularization in figher dimensions. Preprint DFPD 30/83, 1983, 25 p.
[6] *Wess J., Zumino B.*— Phys. Lett. B, 1971, *37 B*, № 1, 95–97.
[7] *Новиков С. П.*— ДАН СССР, 1981, *260*, № 1, 31–34.
[8] *Новиков С. П.*— УМН, 1982, *37*, № 5(227), 3–49.
[9] *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978, 240 с.
[10] *Chern S. S., Simons J.*— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1971, *68*, № 4, 791–794.
[11] *Jackiw R.* Topological investigations of quantized gauge theories. Preprint CTP-1108, 1983, 152 p.
[12] *Deser S., Jackiw R., Templton S.*— Ann. Phys., 1982, *140*, № 2, 372–411.
[13] *Witten E.*— Nucl. Phys. B, 1983, *B223*, № 2, 422–432.
[14] *Chou K.-C., Guo H.-Y., Wu K., Song X.-C.*— Phys. Lett. B, 1984, *134B*, № 1, 2, 67–69.
[15] *Alvarez-Gaumé L., Witten E.* Gravitational anomalies. Preprint HUTP-83/A039, 1983, 105 p.
[16] *Картан А., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960, 510 с.
[17] *Фаддеев Д. К.*— ДАН СССР, 1947, VIII, № 3, 361–364.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
27.IV.1984 г.

ALGEBRAIC AND HAMILTONIAN METHODS IN THE THEORY OF NON-ABELIAN ANOMALIES

Faddeev L. D., Shatashvili S. L.

A new interpretation of non-Abelian anomalies and Wess — Zumino action in terms of infinitesimal and global cocycles in a representation of the gauge group is given. Based on this interpretation two simple methods of nonperturbative calculation of anomalies and Wess — Zumino action are proposed.