

С. П. МЕРКУРЬЕВ  
Л. Д. ФАДДЕЕВ

КВАНТОВАЯ  
ТЕОРИЯ  
РАССЕЯНИЯ  
ДЛЯ СИСТЕМ  
НЕСКОЛЬКИХ  
ЧАСТИЦ

С. П. МЕРКУРЬЕВ Л. Д. ФАДДЕЕВ

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ  
РАССЕЯНИЯ  
ДЛЯ СИСТЕМ  
НЕСКОЛЬКИХ ЧАСТИЦ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1985



22.16  
М 52  
УДК 517 + 530.145

Меркуьев С. П., Фаддеев Л. Д. **Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц.** — М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985 — 400 с.

Посвящена математическим вопросам теории рассеяния для квантовомеханических систем нескольких частиц. Задача рассеяния формулируется в терминах волновых пакетов. Излагается схема сведения нестационарной задачи рассеяния к стационарной. С единой точки зрения рассматриваются системы как нейтральных, так и заряженных частиц. Формулируются и исследуются интегральные уравнения с компактными ядрами для систем нескольких частиц. Даётся обзор современных численных методов теории рассеяния и обсуждается их применение в ядерной физике.

Для научных работников — математиков и физиков, а также для студентов и аспирантов по специальностям «Математика» и «Физика».

Ил. 22. Библиогр. 71 назв.

Р е ц е н з е н т

доктор физико-математических наук Ю. А. Симонов

М 1702050000—126 26—85  
053(02)—85

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1985

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<i>Глава I. Общие положения теории рассеяния</i> . . . . .	9
§ 1. Постановка задачи рассеяния . . . . .	9
§ 2. Кинематика . . . . .	14
§ 3. Основные понятия динамики . . . . .	24
§ 4. Волновые операторы . . . . .	29
§ 5. Свойства волновых операторов . . . . .	36
§ 6. Оператор рассеяния . . . . .	40
<i>Глава II. Сведение к стационарной задаче рассеяния</i> . . . . .	45
§ 1. Резольвента и волновые операторы . . . . .	45
§ 2. Особенности резольвенты. Нейтральные частицы . . . . .	48
§ 3. Полюсы резольвенты и волновые операторы . . . . .	57
§ 4. Особенности резольвенты для систем заряженных частиц . . . . .	63
<i>Глава III. Метод интегральных уравнений</i> . . . . .	68
§ 1. Интегральное уравнение для $T$ -матрицы в системе двух частиц . . . . .	68
§ 2. Компактные интегральные уравнения для системы трех частиц . . . . .	78
§ 3. Интегральные уравнения для резольвенты и волновых операторов . . . . .	94
§ 4. Примеры . . . . .	100
§ 5. Компактные интегральные уравнения для $N$ частиц . . . . .	106
§ 6. Заряженные частицы . . . . .	119
<i>Глава IV. Конфигурационное пространство. Нейтральные частицы</i> . . . . .	129
§ 1. Система двух частиц . . . . .	129
§ 2. Координатная асимптотика волновых функций для системы трех тел . . . . .	138
§ 3. Вклад элементарных двухчастичных столкновений . . . . .	149
§ 4. Функция Грина . . . . .	162
§ 5. Дифференциальные уравнения для компонент волновых функций в системе $N$ тел . . . . .	172
§ 6. Быстро осциллирующие интегралы . . . . .	187

<i>Глава V. Заряженные частицы в конфигурационном пространстве</i>	195
§ 1. Две заряженные частицы . . . . .	195
§ 2. Координатная асимптотика волновых функций для системы трех заряженных частиц . . . . .	212
§ 3. Асимптотика $\Psi_0$ в направлении рассеяния вперед . . . . .	242
§ 4. Асимптотика функций $\Psi_0$ в особых направлениях $\Omega_\alpha^{(0)}$ и $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$ . . . . .	257
§ 5. Компактные уравнения в конфигурационном пространстве . . . . .	270
§ 6. Границные задачи для волновых функций . . . . .	287
<i>Глава VI. Вопросы математического обоснования задачи рассеяния</i> . . . . .	294
§ 1. Система двух частиц . . . . .	294
§ 2. Непрерывный спектр оператора энергии системы трех тел . . . . .	301
§ 3. Обоснование нестационарной постановки задачи рассеяния . . . . .	319
<i>Глава VII. Некоторые приложения</i> . . . . .	326
§ 1. Парциальные волны в системе двух тел . . . . .	326
§ 2. Парциальные уравнения для компонент . . . . .	336
§ 3. Интегральные уравнения для сепарабельных потенциалов . . . . .	355
§ 4. Групповые интегралы . . . . .	360
Литературные указания . . . . .	392
Список литературы . . . . .	396

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

В последнее десятилетие значительно усилился интерес математиков к конкретным задачам, имеющим происхождение в теоретической физике. В результате заметно изменилось содержание традиционной математической физики. Новые задачи, в особенности связанные с квантовой физикой, используют новые идеи и технические методы. В арсенал математической физики наряду с классическим и функциональным анализом входят методы дифференциальной геометрии и алгебр Ли, теория представлений групп и даже топология и алгебраическая геометрия. В свою очередь приемы, отработанные в математической физике, приводят к формулировкам и доказательству новых чисто математических теорем.

Естественно, что это важное развитие должно повлиять на современную математическую литературу, в особенности на обзоры и монографии. Уже появилось достаточно большое количество книг и статей, в которых в той или иной степени отражается указанная тенденция в математической физике. Однако, по нашему мнению, до сих пор еще не отработаны адекватные языки и методологии. Существующие книги в большинстве своем представляют либо монографии по математике, привлекающие время от времени физическую терминологию, либо книги по теоретической физике с усиленным математическим аппаратом.

Мы считаем, что традиционный математический язык лемм и теорем не подходит для литературы по современ-

ной математической физике. В то же время, в отличие от обычных теоретических физики, в такой литературе должна быть ясна в первую очередь математическая идеология и ссылки на физические соображения должны подкрепляться подходящими математическими утверждениями. Особую ценность представляют результаты и методы, полученные или развитые на этом пути впервые.

В настоящей монографии мы ставим себе целью попытаться дать прецедент указанной тенденции на примере актуальной и трудной проблемы теоретической физики. В качестве последней мы выбрали теорию рассеяния для системы  $N$  частиц в квантовой механике. Этот выбор обусловлен рядом обстоятельств. Во-первых, задача  $N$  тел является традиционной и трудной задачей математической физики. Ее квантовый вариант имеет большое количество интересных приложений в атомной и ядерной физике. Во-вторых, она вполне интересна с математической точки зрения. Методы классического и функционального анализа значительно обогатились в процессе разработки этой проблемы. Наконец, что также важно, оба автора конкретно работали и продолжают работать по данной тематике, так что книга призвана отразить наши собственные взгляды, подходы и результаты.

Как математическая задача рассматриваемая проблема очень громоздка. Более того, ее окончательное решение не получено до сих пор. Изложение строгой по стандартам теоретической математики теории требует большого числа технических деталей, которые зачастую скучны. Поэтому, в соответствии с сформулированной выше методологией мы будем вести основное изложение на формальном уровне, не проводя полных обоснований. Однако, в отличие от работ по теоретической физике, мы признаем необходимость таких обоснований и будем явно указывать, что должно быть обосновано. Более того, мы объясним методы и пути для такого обоснования. Тем самым читатель-математик будет освобожден от злако-

мых ему скучных оценок, а читатель-физик получит представление о математических методах исследования понятной ему физической ситуации. Поэтому мы надеемся, что данная книга будет полезна как математикам, так и физикам. В наибольшей степени она ориентирована на новую и быстро растущую группу специалистов по современной математической физике.

Скажем несколько слов о структуре книги. Она может быть разделена на три части: общая постановка задачи рассеяния для системы  $N$  частиц, ее обоснование на основе компактных интегральных уравнений и описание свойств основных объектов теории рассеяния — волновых функций, их асимптотик и амплитуд рассеяния. Первой части посвящены главы I и II, вторая сосредоточена главным образом в главах III и VI и частично в главах IV и V. Глава VII и основная часть глав IV и V посвящены описанию последнего круга вопросов. В главе I вводятся основные понятия динамики, определяются волновые операторы и оператор рассеяния, описываются их общие свойства. В главе II мы переходим к стационарному формализму теории рассеяния. Здесь описываются общие свойства резольвенты оператора энергии, получены выражения для ядер волновых операторов и оператора рассеяния в терминах особенностей ядра резольвенты. Глава III посвящена методу интегральных уравнений. Получены уравнения типа Фредгольма для систем нескольких частиц, и с их помощью исследованы свойства ядра резольвенты в импульсном представлении. Следующие две главы посвящены изучению волновых функций в конфигурационном пространстве. При этом в главе IV рассматриваются системы пейтральных частиц, а в главе V — системы заряженных частиц. В главе V также получены интегральные уравнения типа Фредгольма для систем заряженных частиц. Глава VI посвящена вопросам математического обоснования теории рассеяния. Здесь доказаны общие свойства волновых операторов, сформулированные в главе I. В главе VII рассмотрен ряд прило-

жений стационарной формулировки теории рассеяния. Более конкретно цель каждой главы кратко формулируется в специальных вступлениях. Аналогичными вступлениями снабжены все параграфы, на которые делятся главы.

Нигде в основном тексте мы не даем ссылок на конкретные работы. Специальные литературные указания даны в конце книги.

В заключение приведем несколько основных обозначений, которые будут применяться на протяжении всей книги. Термин «переменная» и буквы  $x, y, X, k, p, P$  с индексами или без них приняты для обозначения векторов в  $n$ -мерном пространстве. Символ  $(k, p)$  означает скалярное произведение векторов  $k$  и  $p$ ,  $k^2 = (k, k)$ ,  $|k| = (k^2)^{1/2}$ ,  $\hat{k}$  — единичный вектор по направлению вектора  $k$ ,  $\hat{k} = k|k|^{-1}$ ,  $dk$  и  $d\hat{k}$  — элементы объема и поверхности единичной сферы, пробегаемых векторами  $k$  и  $\hat{k}$  соответственно. Символ  $\int$  без указания пределов интегрирования обозначает интеграл по всей области изменения переменных интегрирования.

Буквы  $x, y, X$  используются для обозначения векторов в конфигурационном пространстве, а  $k, p, P, q$  — в импульсном пространстве. Переход из координатного представления в импульсное осуществляется при помощи преобразования Фурье:

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int \exp\{-i(k, x)\} f(x) dx.$$

Следуя соглашению в физической литературе, мы часто будем использовать одни и те же символы для функции и её преобразования Фурье,  $f(x) \leftrightarrow f(k)$ ; аргумент показывает, с чем именно мы имеем дело. Прямые буквы  $A, B, r, \dots$  мы будем использовать для обозначения операторов. Их ядра мы будем обозначать через  $A(k, k')$ ,  $B(k, k')$ ,  $r(k, k')$ , ...

---

## ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

### § 1. Постановка задачи рассеяния

В этой книге мы будем рассматривать квантовомеханическую проблему  $N$  частиц. В основной части текста мы будем считать эти частицы **перелятивистскими**, бесструктурными и взаимодействующими только попарно. Это простейшая ситуация является характеристической с точки зрения развивающейся теории; возможные обобщения не связаны с принципиальными трудностями.

Каждая частица характеризуется координатой  $r_i \in \mathbf{R}^3$  и массой  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Оператор энергии системы  $N$  частиц действует в гильбертовом пространстве  $L_2(\mathbf{R}^{3N})$  функций  $\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N)$  координат и задается дифференциальным оператором

$$H_N = \sum_{i=1}^N -\frac{1}{2m_i} \Delta_i + \sum_{i < j} v_{ij}(r_i - r_j).$$

Здесь  $\Delta_i$  — трехмерный оператор Лапласа по координатам  $r_i$ , а функции  $v_{ij}(r)$  — потенциалы парного взаимодействия, зависящего от относительного положения  $r_i - r_j$  пары частиц с номерами  $i$  и  $j$ .

Мы будем рассматривать два типа парного взаимодействия и условимся называть их **короткодействующим** и **дальнодействующим**.

В первом случае каждая функция  $v_{ij}(r)$  считается убывающей достаточно быстро при  $|r| \rightarrow \infty$ . Конкретная скорость убывания может быть различной в зависимости от рассматриваемого конкретного утверждения. Типичное требование состоит в оценке

$$v_{ij}(r) = O(|r|^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0,$$

хотя для более детальных результатов требуется условие  $\varepsilon > 1$ ,  $\varepsilon > 2$  и даже более сильные.

Дальнодействующий потенциал отличается от короткодействующего тем, что содержит кулоповское

слагаемое:

$$v_{ij}(r) = \frac{z_{ij}}{|r|} + \tilde{v}_{ij}(r),$$

где  $\tilde{v}_{ij}(r)$  — короткодействующий потенциал, а  $z_{ij}$  — вещественная константа, универсальным множителем отличающаяся от произведения  $q_i q_j$  зарядов частиц  $i$  и  $j$ :  $z_{ij} = \gamma q_i q_j$ .

Математически можно рассматривать и более общий тип дальнодействующего взаимодействия, однако кулоновский случай наиболее интересен, и мы им ограничимся. В связи с этим термины «нейтральные частицы» и «заряженные частицы» будут для нас синонимами короткодействия и дальнодействия.

Короткодействующий потенциал может иметь сингулярности в конечной области; например, допускается особенность в точке  $r_0$  вида

$$v(r) = O(|r - r_0|^{-\beta}), \quad \beta < 2.$$

При сформулированных условиях дифференциальный оператор  $H_N$  определяет в  $L_2(\mathbf{R}^{3N})$  самосопряженный оператор — оператор энергии системы  $N$  частиц.

Динамика квантовомеханической системы дается уравнением Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_N \Psi \tag{1.1}$$

и описывается явно унитарным оператором эволюции  $U(t) = \exp \{-iH_N t\}$ .

Задача рассеяния состоит в задании специальных начальных условий для уравнения Шредингера.

Идеализованная физическая постановка задачи рассеяния состоит в следующем: задолго до процесса рассеяния ( $t \rightarrow -\infty$ ) состояние системы представляет собой совокупность далеко разведенных связанных комплексов частиц, которые свободно летят по направлению друг к другу. При конечных временах эти комплексы взаимодействуют, и затем при  $t \rightarrow \infty$  снова возникают свободно разлетающиеся связанные комплексы, отличные, вообще говоря, от начальных. Перестройка комплексов, или изменение их внутреннего состояния, и составляет результат рассеяния.

В данной постановке состояние системы до рассеяния ( $t \rightarrow -\infty$ ) и после рассеяния ( $t \rightarrow \infty$ ) трактуется симмет-

лично. В реальных экспериментах ситуация отлична, но легко может быть формализована в приведенных терминах. Так, калибровка пучка свободных частиц относится к первому этапу ( $t \rightarrow -\infty$ ), а анализ частиц, разлетевшихся после попадания пучка на мишень, соответствует второму этапу ( $t \rightarrow \infty$ ). Поэтому в этой книге мы будем заниматься формализацией именно приведенной постановки задачи рассеяния.

Первое приближение в этой формализации для случая короткодействующих потенциалов состоит в следующем: рассмотрим  $l$  связанных комплексов. Это значит, что заданы:

1. Набор  $y_1, y_2, \dots, y_l$  координат их центров инерции;

2.  $M_1, M_2, \dots, M_l$ , каждая из которых есть сумма масс частиц, входящих в комплекс;

3. Относительные координаты  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$ , для частиц, входящих в комплекс с номером  $k$  (детальное определение комплексов дано в следующем разделе);

4. Волновые функции  $\psi_k(x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$ , описывающие внутреннее состояние комплекса.

Различные допустимые совокупности таких данных будем нумеровать специальным индексом и использовать для него буквы  $A, B, \dots$

Волновая функция вида

$$\Psi_A(r_1, r_2, \dots, r_N, t) = \chi_A(y_1, y_2, \dots, y_l, t) \prod_{k=1}^l \psi_k(x_k) \quad (1.2)$$

описывает свободное движение комплексов, если функция  $\chi_A(y_1, y_2, \dots, y_l, t)$  удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \chi_A}{\partial t} = H_A^{(N)} \chi_A, \quad (1.3)$$

где  $H_A^{(N)}$  действует в  $L_2(\mathbf{R}^{3l})$  и задается дифференциальным оператором

$$H_A^{(N)} = - \sum_k \frac{1}{2M_k} \Delta_k - E_A,$$

где константа  $E_A$  представляет собой сумму энергий связи комплексов. Из свойств решений свободного уравнения Шредингера известно, что при  $|t| \rightarrow \infty$  волновая функция уходит в окрестность бесконечности в  $\mathbf{R}^{3l}$ , так что связанные комплексы действительно расходятся на большие расстояния.

Общее асимптотическое движение задается суперпозицией описанных состояний:

$$\Psi_{\text{as}}(r_1, r_2, \dots, r_N, t) = \sum_A c_A \Psi_A^{\text{as}}(r_1, r_2, \dots, r_N, t).$$

Состояние рассеяния  $\Psi(t)$ , соответствующее заданному начальному состоянию  $\Psi_{\text{as}}^{(-)}(t)$ , определяется как решение уравнения Шредингера (1.1), совпадающее с  $\Psi_{\text{as}}^{(-)}(t)$  при  $t \rightarrow -\infty$ :

$$\|\Psi(t) - \Psi_{\text{as}}^{(-)}(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow -\infty.$$

После рассеяния это состояние снова должно стать асимптотическим, так что существует такое  $\Psi_{\text{as}}^{(+)}(t)$ , что имеет место соотношение

$$\|\Psi(t) - \Psi_{\text{as}}^{(+)}(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Результат рассеяния состоит в превращении асимптотического состояния  $\Psi_{\text{as}}^{(-)}(t)$  в  $\Psi_{\text{as}}^{(+)}(t)$ . Ясно, что зависимость  $\Psi_{\text{as}}^{(+)}(t)$  от  $\Psi_{\text{as}}^{(-)}(t)$  линейна, так что существует такой линейный оператор  $S$ , что имеет место соотношение

$$\Psi_{\text{as}}^{(+)}(t) = S \Psi_{\text{as}}^{(-)}(t). \quad (1.4)$$

Неочевидный факт состоит в том, что  $S$  не зависит от  $t$ . В этом свойстве парадоксальное выражение закона сохранения энергии, что станет яснее во второй главе. Более точно, оператор  $S$  действует на совокупности функций  $\chi_A(t)$  и задается матрицей  $S_{AB}$ . Этот оператор содержит в себе информацию о всех возможных результатах рассеяния и называется по этой причине *оператором рассеяния*.

Для обоснования приведенной постановки задачи рассеяния следует:

1. Доказать существование решения  $\Psi(t)$  с начальными условиями (1.2) при  $t \rightarrow -\infty$ ;
2. Исследовать асимптотическое поведение  $\Psi(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  и показать, что оно дается формулой (1.4).

Первая задача проще второй, хотя на первый взгляд они формулируются почти симметрично. Несимметрия состоит в том, что в первом случае заданным считается явно описанное  $\Psi_{\text{as}}^{(-)}(t)$ , а во втором гораздо менее контролируемое  $\Psi(t)$ . Более формально, будем считать, что первая задача решена. Тогда определены подпространства  $\mathfrak{H}_{\text{as}}^{(-)}$  и  $\mathfrak{H}_{\text{as}}^{(+)}$  в  $L_2(\mathbf{R}^{3N})$ , которые пробегают векторы  $\Psi(t)$ , полученные при таком решении, отправляясь

от  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$  соответственно. Эти подпространства инвариантны по отношению к действию динамической группы  $U(t)$ . Если выполнено условие

$$\mathfrak{H}_{as}^{(+)} = \mathfrak{H}_{as}^{(-)}, \quad (1.5)$$

то всякий вектор  $\Psi(t)$ , полученный при решении начальной задачи при  $t \rightarrow -\infty$ , может быть получен также, отправляясь от  $t \rightarrow +\infty$ , и имеет тем самым нужную асимптотику. Таким образом, проверка последнего условия эквивалентна решению второй задачи.

Физически это условие означает, что в перечислении возможных асимптотических движений мы не упустили ни одной возможности. Поэтому оно называется *условием асимптотической полноты*. Математическое доказательство этого утверждения является наиболее трудной частью теории рассеяния и до сих пор оно не дано в полной общности.

Перейдем теперь к заряженным частицам. В этом случае в модификации нуждается описание асимптотической динамики волновых векторов  $\chi_A(x_1, x_2, \dots, x_l)$  центров инерции комплексов. Физически это связано с тем, что заряженные частицы движутся асимптотически по гиперболам, которые приближаются к прямым недостаточно быстро.

Поправка к асимптотической динамике может быть получена из следующих соображений. Рассмотрим сначала классическое движение двух заряженных частиц. Функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2 + \frac{z_{12}}{|r_1 - r_2|},$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — импульсы частиц 1 и 2. Классическое движение по прямым задается формулами

$$r_1 = \frac{p_1}{m_1} t + q_1, \quad r_2 = \frac{p_2}{m_2} t + q_2,$$

и кулоновский потенциал на таких траекториях имеет вид

$$\frac{m_1 m_2 z_{12}}{|m_2 p_1 - m_1 p_2|} \cdot \frac{1}{|t|} + O(1/t^2).$$

Первое слагаемое здесь исчезает при  $|t| \rightarrow \infty$  недостаточно быстро, что и приводит к упомянутому выше искажению реальных траекторий. Однако, если присоединить

его к гамильтониану свободного движения, переводя его в выражение

$$\mathcal{H}_{\text{as}}(t) = \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2 + \frac{m_1 m_2 z_{12}}{|m_2 p_1 - m_1 p_2|} \cdot \frac{1}{|t|},$$

то траектории последнего приближают при  $|t| \rightarrow \infty$  реальные траектории достаточно хорошо. Аналогичное обозначение работает в случае нескольких заряженных частиц. В гамильтониан асимптотического движения дает вклад каждая пара заряженных частиц или связанных комплексов.

Возвращаясь в квантовую механику, мы видим, что (1.3) должно быть модифицировано в уравнение

$$i \frac{\partial \chi}{\partial t} = H_A^{\text{as}}(t) \chi,$$

где

$$H_A^{\text{as}}(t) = H_A^{(N)} + \frac{1}{|t|} \sum_{i < k}^l B_{ik},$$

и операторы  $B_{ik}$  имеют вид

$$B_{ik} = \frac{z_{ik} M_i M_k}{((M_i \nabla_k - M_k \nabla_i)^2)^{1/2}},$$

где константы  $z_{ik}$  пропорциональны произведению  $\sum_l q_l \sum_j q_j$ , суммы берутся по частицам в комплексах  $i$  и  $k$  соответственно. Приведенное уравнение Шредингера решается не менее явно, чем уравнение (1.3), так как после преобразования Фурье оператор  $H_A^{\text{as}}$  превращается в оператор умножения на функцию так же, как и  $H_A^{(N)}$ .

После сделанной модификации вся остальная постановка задачи рассеяния и программа ее обоснования остаются без изменений.

В последующих параграфах этой главы мы продолжим формализацию и уточнение постановки задачи рассеяния и детализацию программы ее обоснования.

## § 2. Кинематика

В этом параграфе мы введем кинематические переменные, применяемые для описания состояний системы  $N$  частиц в конфигурационном и импульсном пространствах.

**Подсистемы и разбиения.** Рассмотрим систему  $N$  частиц, пронумерованных от 1 до  $N$ . Ее подсистемой будем

называть совокупность  $l$  частиц,  $1 \leq l \leq N$ , с номерами  $n_1, n_2, \dots, n_l$ . Для обозначения подсистем будем использовать мультииндексы  $\omega_l$ ,  $\omega_l = (n_1, n_2, \dots, n_l)$ , компоненты которых пробегают номера входящих в подсистемы частиц. При этом, по определению, будем считать подсистему  $\omega_1(n_1)$  состоящей из одной частицы с номером  $n_1$ , а подсистему  $\omega_N$  отождествлять с исходной системой  $N$  тел. Значок  $l$ , обозначающий число частиц в подсистеме, будем иногда опускать.

*Разбиением* будем называть некоторый способ разделения системы  $N$  тел на  $k$  подсистем,  $k \leq N$ . Различные разбиения будем обозначать латинскими буквами  $a_k^{(N)}$ ,  $b_k^{(N)}$ , причем индекс  $N$ , указывающий число частиц в системе, будем, как правило, опускать. Подробно разбиение описывается указанием входящих в него подсистем. Например, символ

$$a_3 = (132)(4)(65)$$

обозначает разбиение шести частиц на три подсистемы  $\alpha_3(132)$ ,  $\beta_1(4)$ ,  $\gamma_2(65)$ . Ясно, что порядок расположения подсистем и порядок частиц в обозначениях последних несущественны.

Отметим, что разбиение  $a_{N-1}$  однозначно определяется указанием пары частиц  $(ij)$ , объединенной в подсистему  $\alpha_2$ . Поэтому ниже мы будем часто использовать символ разбиения  $a_{N-1}$  для обозначения отвечающей ему пары частиц  $(ij)$  подсистемы  $\alpha_2$ .

Если разбиение  $a_k$  получается из разбиения  $a_i$  ( $i < k$ ) делением его подсистем на части, будем говорить, что  $a_k$  следует за  $a_i$ , или  $a_i$  предшествует  $a_k$ , и использовать обозначение  $a_k \subset a_i$  или  $a_i \supset a_k$ . В дальнейшем одинаковыми буквами будем обозначать только те разбиения, которые связаны знаком  $\supset$ , т. е.  $a_2 \supset a_3 \supset \dots \supset a_{N-1}$ . Последовательность таких разбиений, начинающуюся с некоторого  $a_k$ ,  $2 \leq k \leq N-1$ , и представляющих последовательное деление на две одной из подсистем, будем называть *цепочкой разбиений* и обозначать через  $A_k$ :

$$A_k = (a_k, a_{k+1}, \dots, a_{N-1}).$$

Последним разбиением в цепочке всегда является  $a_{N-1}$ .

Цепочка разбиений  $A_k$  определяет некоторый способ последовательного разделения  $a_{k-1}$  на  $N$  отдельных частиц. В частности, полная цепочка  $A_2 = (a_2, a_3, \dots, a_{N-1})$  определяет способ такого разделения самой системы. В обо-

значениях цепочек разбиений иногда удобно выделять старшие разбиения, т. е.

$$A_h = (a_h, A_{h+1}) = (a_h, a_{h+1}, A_{h+2}) \text{ и т. д.}$$

Цепочку можно графически изобразить в виде «дерева», каждое ветвление которого соответствует включению

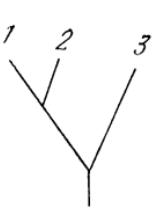


Рис. 1

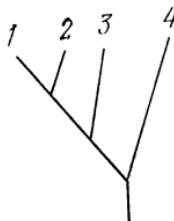


Рис. 2

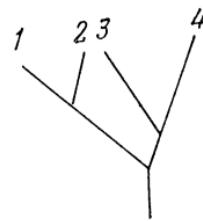


Рис. 3

взаимодействия между частицами. Последовательность деления подсистем на две задается упорядочением уровня ветвлений снизу вверх.

В системе трех тел существует только один тип дерева (рис. 1), которое отвечает включению взаимодействия сначала между частицами 1, 2, а затем частицы 3 с первыми двумя. Все остальные цепочки могут быть получены простой перенумерацией ветвей.

Более сложная картина возникает в системе четырех тел. В этом случае существует два типа включения взаимодействия (рис. 2, 3). Всего имеется 12 деревьев первого типа и 6 — второго.

С ростом  $N$  число деревьев различных типов быстро растет.

Каждой подсистеме  $\omega_l(n_1, n_2, \dots, n_l)$  мы сопоставим соответствующий оператор энергии  $H_{\omega_l}$ :

$$H_{\omega_l} = - \sum_{i=1}^l \frac{1}{2m_{n_i}} \Delta_{r_{n_i}} + \sum_{i < j} v_{n_i n_j} (r_{n_i} - r_{n_j}), \quad (1.6)$$

который действует в гильбертовом пространстве  $L_2(\mathbf{R}^{3l})$  функций  $\psi(r_{n_1}, r_{n_2}, \dots, r_{n_l})$  координат частиц, входящих в подсистему. В соответствии с принятым соглашением, оператор  $H_{\omega}$  совпадает с оператором энергии системы  $H_N$ , а оператор  $H_{\omega_1}$  — с оператором  $-\frac{1}{2m_{n_1}} \Delta_{r_{n_1}}$  кинетической энергии частицы с номером  $n_1$ .

Разбиению  $a_k$  сопоставляется разложение пространства состояний  $L_2(\mathbf{R}^{3N})$  в тензорное произведение пространств  $L_2(\mathbf{R}^{3l_j})$ , описывающих состояния подсистем, входящих в  $a_k$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ :

$$L_2(\mathbf{R}^{3N}) = \prod_{j=1}^k \otimes L_2(\mathbf{R}^{3l_j}). \quad (1.7)$$

В соответствии с этим разложением определим оператор энергии разбиения как сумму операторов энергии подсистем:

$$H_{a_k} = \sum_{\omega} H_{\omega}.$$

При этом каждое слагаемое в правой части действует нетривиально лишь в соответствующем пространстве состояний подсистемы и считается продолженным как единичный оператор на остальные сомножители в (1.7).

В дальнейшем мы будем часто иметь дело с подобной ситуацией, когда мы рассматриваем тензорное произведение и операторы, нетривиально действующие только в одном сомножителе. Мы всегда будем без дополнительных пояснений использовать одно и то же обозначение для оператора в соответствующем сомножителе и для оператора, полученного из первого тривиальным продолжением.

**Приведенные координаты.** Сопоставим некоторой упорядоченной последовательности номеров частиц  $k_1, k_2, \dots, k_N$  последовательность подсистем  $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{N-1}, \omega_N$ , которые образуются поочередным присоединением частиц  $k_2, k_3, \dots, k_N$  к частице  $k_1$ , т. е.  $\omega_2 = (k_1, k_2), \omega_3 = (k_1, k_2, k_3)$  и т. д. Пусть  $y_{\omega_j}$  — координата центра инерции подсистемы  $\omega_j$  массы  $m_{\omega_j}$ ,

$$y_{\omega_j} = \frac{1}{m_{\omega_j}} \sum_{i=1}^j m_{k_i} r_{k_i}, \quad m_{\omega_j} = \sum_{i=1}^j m_{k_i}, \quad (1.8)$$

и  $\mu_{\omega_j k_{j+1}}$  — приведенная масса частицы  $k_{j+1}$  по отношению к подсистеме  $\omega_j$ ,

$$\mu_{\omega_j k_{j+1}} = \frac{m_{\omega_j} m_{k_{j+1}}}{m_{\omega_{j+1}}}.$$

Через  $x_{\omega_j k_{j+1}}$  обозначим приведенную координату частицы  $k_{j+1}$  относительно центра инерции подсистемы  $\omega_j$ ,

$$x_{\omega_j k_{j+1}} = (2\mu_{\omega_j k_{j+1}})^{1/2} (y_{\omega_j} - r_{k_{j+1}}). \quad (1.8')$$

Совокупность переменных  $x_{\omega_j k_{j+1}}$  вместе с координатой центра инерции системы  $y_{\omega_N} = \rho$  определяют координаты точки конфигурационного пространства в новом ортогональном базисе, называемом *базисом Якоби*. Существует  $N!$  различных базисов Якоби, отвечающих всевозможным перестановкам частиц. Мы условимся указывать порядок частиц, по отношению к которому вводится базис, в обозначении системы.

Например, символу (312) системы трех тел соответствуют приведенные якобиевые координаты

$$x_{31} = \sqrt{2\mu_{31}} (r_3 - r_1), \quad x_{31,2} = \sqrt{2\mu_{31,2}} \left( \frac{m_3 r_3 + m_1 r_1}{m_3 + m_1} - r_2 \right), \quad (1.9)$$

где

$$\mu_{31} = \frac{m_3 m_1}{m_3 + m_1}, \quad \mu_{31,2} = \frac{(m_3 + m_1) m_2}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Удобно иметь перед глазами наглядную схему, соответствующую этим координатам (рис. 4).

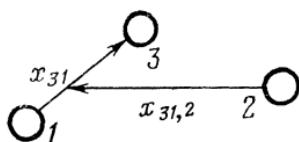


Рис. 4

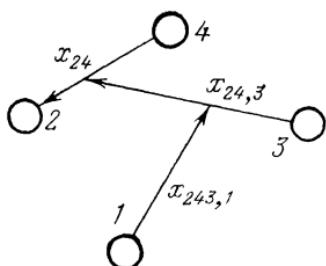


Рис. 5

Система координат  $x_{24}$ ,  $x_{24,3}$ ,  $x_{243,1}$ , отвечающая символу (2431) четырем тел, схематически представлена на рис. 5. Здесь .

$$x_{24} = (2\mu_{24})^{1/2} (r_2 - r_4),$$

$$x_{24,3} = (2\mu_{24,3})^{1/2} \left( \frac{m_2 r_2 + m_4 r_4}{m_2 + m_4} - r_3 \right),$$

$$x_{243,1} = (2\mu_{243,1})^{1/2} \left( \frac{m_2 r_2 + m_4 r_4 + m_3 r_3}{m_2 + m_4 + m_3} - r_1 \right),$$

$$\mu_{243,1} = \frac{(m_2 + m_4 + m_3) m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Мы будем часто рассматривать совокупность  $N - 1$  относительных координат  $x_{\omega_j k_j+1}$  ( $j = 1, 2, \dots, N - 1$ ) как вектор  $X_{\omega_N}$   $3(N - 1)$ -мерного конфигурационного пространства относительного движения частиц:

$$X_{\omega_N} = \{x_{\omega_1 k_2}, x_{\omega_2 k_3}, \dots, x_{\omega_{N-1} k_N}\}. \quad (1.10)$$

При этом конфигурационное пространство  $\mathbf{R}^{3N}$  может быть представлено в виде ортогональной суммы

$$\mathbf{R}^{3N} = \mathbf{R}_c^{3(N-1)} \oplus \mathbf{R}^3,$$

где трехмерное пространство  $\mathbf{R}^3$  отвечает координатам центра инерции системы

$$\rho \equiv y_{\omega_N} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i r_i,$$

где  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  — полная масса системы. Координаты  $X_{\omega_N}$  принято называть *относительными*. В дальнейшем значок  $\omega_N$  в обозначении вектора  $X_{\omega_N}$  часто будем опускать.

Наряду с базисом Якоби будем применять относительные координаты, ассоциированные с разбиениями  $a_k$ . Чтобы построить новый базис, введем в каждой подсистеме  $\omega_l$  разбиения  $a_k$  систему приведенных координат Якоби  $\{X_{\omega_l}, y_{\omega_l}\}$ , где вектор  $X_{\omega_l} \in \mathbf{R}^{3(l-1)}$  определяется согласно (1.10), а  $y_{\omega_l}$  — координата центра инерции подсистемы  $\omega_l$  (см. (1.8)). Рассмотрим затем совокупность  $k$  векторов  $y_{\omega_l}$  как координаты точечных частиц массы  $m_{\omega_l}$  и построим в этой системе базис Якоби  $\{y_{\omega_{l_1} \omega_{l_2}}, y_{\omega_{l_1 l_2} \omega_{l_3}}, \dots, y_{\omega_{l_1 l_2 \dots l_{k-1}} \omega_{l_k}}\}$ , где

$$y_{\omega_{l_1 l_2 \dots l_m} \omega_{l_{m+1}}} = (2\mu_{\omega_{l_1 l_2 \dots l_m} \omega_{l_{m+1}}})^{1/2} (y_{\omega_{l_1 l_2 \dots l_m}} - y_{\omega_{l_{m+1}}}) \quad (1.11)$$

и через  $\omega_{l_1 l_2 \dots l_m}$  обозначена подсистема, полученная

объединением подсистем  $\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \dots, \omega_{l_m}$ :

$$\omega_{l_1 l_2 \dots l_m} = (\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \dots, \omega_{l_m}).$$

В результате получим совокупность векторов  $X_{\omega_{l_j}}$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ) и  $y_{\omega_{l_1 l_2 \dots l_m} \omega_{l_{m+1}}}$  ( $m=1, 2, \dots, k-1$ ), которые задают точку конфигурационного пространства  $R_c^{3(N-1)}$  в искомом базисе, индуцированном разбиением  $a_k$ .

Далее будем объединять множество относительных координат центров тяжести подсистем в вектор  $y_{a_k}$  размерности  $3(k-1)$ ,

$$y_{a_k} = \{y_{\omega_{l_1} \omega_{l_2}}, y_{\omega_{l_1} \omega_{l_2} \omega_{l_3}}, \dots, y_{\omega_{l_1} \omega_{l_2} \dots \omega_{l_{k-1}}}\},$$

а множество векторов  $X_{\omega_{l_j}}$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ) — в вектор  $x_{a_k}$  размерности  $3(N-k)$ ,

$$x_{a_k} = \{x_{\omega_{l_1}}, x_{\omega_{l_2}}, \dots, x_{\omega_{l_k}}\}.$$

При этом конфигурационное пространство относительного движения  $R_c^{3(N-1)}$  может быть представлено в виде ортогональной суммы

$$R_c^{3(N-1)} = R_{a_k} \oplus \tilde{R}_{a_k},$$

где  $x_{a_k} \in R_{a_k}$ ,  $y_{a_k} \in \tilde{R}_{a_k}$ . Координаты Якоби подсистем  $X_{\omega_l}$  и  $x_{a_k}$  мы будем называть *внутренними координатами*, а приведенные координаты центров инерции подсистем  $y_{a_k}$  и  $y_{\omega_{l_1} l_2 \dots l_j l_{j+1}}$  — *внешними координатами* для разбиения  $a_k$ .

В подпространствах  $\tilde{R}_{a_k}$  удобно применять базисы, связанные с цепочкой разбиений  $A_k = (a_2, a_3, \dots, a_k)$  ( $k=3, 4, \dots, N-1$ ). Соответствующие приведенные координаты введем по следующей схеме. В качестве первой координаты выберем вектор  $y_{a_2} \in R^3$  для первого разбиения  $a_2 = (\alpha, \beta)$  в цепочке. Если разбиение  $a_3 \subset a_2$  получается из  $a_2$  делением подсистемы  $\alpha$  на две части  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ , то через  $y_{a_2 a_3}$  обозначим приведенную относительную координату подсистем  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , определяемую равенством (1.11). В результате получим две переменные  $y_{a_2}$  и  $y_{a_2 a_3}$ , которые задают координаты вектора  $y_{a_3}$  в базисе, отвечающем цепочке  $A_3 = (a_2, a_3)$ . Этот процесс

можно продолжить, вводя на каждом шаге  $a_j \rightarrow a_{j+1}$  ( $j = 2, 3, \dots, k-1$ ) приведенную относительную координату  $y_{a_2 a_3, \dots, a_{j+1}}$  между подсистемами, деление на которые порождает разбиение  $a_{j+1}$ . В результате получим  $k-1$  трехмерных векторов

$$y_{a_2}, y_{A_3}, \dots, y_{A_k},$$

которые и определяют связанный с цепочкой  $A_k$  базис,

$$y_{a_k} = \{y_{A_2}, y_{A_3}, \dots, y_{A_k}\}. \quad (1.12)$$

Приведем ряд примеров относительных координат типа  $x_{a_k}$  и  $y_{a_k}$ . В случае системы трех частиц такие координаты совпадают с координатами Якоби,

$$x_{12,3} = y_{12,3}, \quad x_{23,1} = y_{23,1}, \quad x_{31,2} = y_{31,2}. \quad (1.12')$$

В системе четырех тел существует два вида относительных координат, отвечающих двухклusterным разбиениям.

Первый порождается разбиением типа  $a_2 = (243)(1)$ , второй — разбиением типа  $b_2 = (12)(34)$ . Координаты типа  $x$  и  $y$  для разбиения  $a_2$  совпадают с координатами, которые схематически изображены на рис. 5, где следует положить

$$x_{243,1} = y_{243,1}.$$

Эти же координаты отвечают цепочке  $A_3 = (a_2, a_3)$ , где  $a_3 = (12)(3)(4)$ , причем  $y_{a_2 a_3} = x_{24,1}$ . С разбиением  $b_2$  и цепочкой  $B_3 = (b_2, b_3)$ , где  $b_3 = (12)(3)(4)$ , связаны координаты  $x_{12}$ ,  $x_{34}$ ,  $y_{12,34}$  и  $y_{b_2 b_3} = x_{34}$ , схематически представленные на рис. 6, где

$$x_{12} = (2\mu_{12})^{1/2}(r_1 - r_2), \quad x_{34} = (2\mu_{34})^{1/2}(r_3 - r_4),$$

$$y_{12,34} = \left( 2 \frac{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \right)^{1/2} \left( \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_3 r_3 + m_4 r_4}{m_3 + m_4} \right).$$

Аналогичный анализ можно продолжить и для систем пяти и более частиц, где все различные комбинации от-

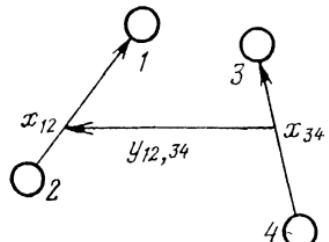


Рис. 6

посительных координат уже трудно перечислить. Мы не будем загромождать изложение деталями комбинаторного характера, а отметим лишь два важных случая. Если разбиение  $a_{N-1}$  порождается парой  $\alpha = (ij)$ , то вектор  $x_{a_{N-1}}$  совпадает с приведенной относительной координатой этой пары,

$$x_{a_{N-1}} = x_\alpha.$$

В более общей ситуации, когда разбиение  $a_k$  состоит из подсистемы  $\omega_k$  и  $N - k + 1$  свободных частиц, координата  $x_{a_k}$  совпадает с вектором  $X_{\omega_k}$ ,

$$x_{a_k} = X_{\omega_k}, \quad a_k = (\omega_k, j_1, j_2, \dots, j_{N-k}).$$

Описанные выше приведенные относительные координаты отличаются от обычно применяемых в классической механике якобиевых координат множителями, зависящими от масс частиц. Мы используем такие независимые переменные по следующим соображениям. Во-первых, как следует из формул (1.8)–(1.12), переход от одного базиса к другому эквивалентен ортогональному преобразованию системы координат в пространстве  $\mathbf{R}_c^{3(N-1)}$ . Во-вторых, и в этом основное достоинство приведенных координат, операторы кинетической энергии подсистем в описанных базисах сводятся к многомерным операторам Лапласа в соответствующих подпространствах. Следовательно, вид таких операторов не меняется при переходе от одного базиса к другому, что существенно упрощает технику работы с дифференциальными и интегральными уравнениями теории рассеяния. Ниже мы неоднократно сможем убедиться и в других преимуществах введенных в этом параграфе приведенных координат.

**Импульсное пространство.** Переход в импульсное представление осуществляется посредством преобразования Фурье в пространстве  $\mathbf{R}^{3N}$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}(p_1, p_2, \dots, p_N) &= \\ &= (2\pi)^{-3N/2} \int dr_1 dr_2 \dots dr_N e^{-i(\tau, p)} f(r_1, r_2, \dots, r_N), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $p = (p_1, \dots, p_N)$  — точка в импульсном пространстве  $\mathbf{R}_m^{3N}$  и  $(r, p) = \sum_{i=1}^N (r_i, p_i)$ .

Опишем приведенные импульсные переменные, индуцированные введенными выше базисами в конфигураци-

онном пространстве. Приведенные относительные импульсы, сопряженные внутренним координатам  $x_{\omega_j l_{j+1}}$ , будем обозначать через  $k_{\omega_j l_{j+1}}$ . Они выражаются через импульсы частиц  $p_i$  формулами

$$k_{\omega_j l_{j+1}} = (\mu_{\omega_j l_{j+1}})^{-1/2} \left( \frac{m_{l_{j+1}} p_{\omega_j} - m_{\omega_j} p_{l_{j+1}}}{m_{l_{j+1}} + m_{\omega_j}} \right), \quad (1.14)$$

где  $p_{\omega_j}$  — полный импульс подсистемы  $\omega_j$ ,

$$p_{\omega_j} = \sum_{i=1}^j p_{k_i}, \quad \omega_j = (k_1, k_2, \dots, k_j).$$

Приведенные относительные импульсы, сопряженные внешним координатам  $y_{\omega_{k_1} h_2 \dots h_l \omega_{k_{l+1}}}$ , выражаются через импульсы частиц следующими формулами:

$$\begin{aligned} p_{\omega_{k_1} h_2 \dots h_l \omega_{k_{l+1}}} &= (\mu_{\omega_{k_1} h_2 \dots h_l \omega_{k_{l+1}}})^{-1/2} \times \\ &\times \left( \frac{m_{\omega_{k_1} h_2 \dots h_l} p_{\omega_{k_{l+1}}} - m_{\omega_{k_{l+1}}} p_{\omega_{k_1} h_2 \dots h_l}}{m_{\omega_{k_1} h_2 \dots h_l} + m_{\omega_{k_{l+1}}}} \right). \end{aligned} \quad (1.14')$$

Пусть  $P_{\omega_j}$  — вектор в импульсном пространстве, сопряженный координате  $X_{\omega_j}$ ,

$$P_{\omega_j} = \{k_{\omega_1 l_2}, k_{\omega_2 l_3}, \dots, k_{\omega_{j-1} l_j}\}, \quad \omega_i = (l_1, l_2, \dots, l_i).$$

Через  $k_{a_l}$  будем обозначать вектор, сопряженный внутренней координате  $x_{a_l}$ ,

$$k_{a_l} = \{p_{\omega_{i_1}}, p_{\omega_{i_2}}, \dots, p_{\omega_{i_l}}\},$$

и через  $p_{a_l}$  — вектор, сопряженный внешней координате,

$$p_{a_l} = \{p_{\omega_{i_1} \omega_{i_2}}, p_{\omega_{i_1} \omega_{i_3}}, \dots, p_{\omega_{i_1} i_2 \dots i_{l-1} \omega_l}\}.$$

Как и в случае конфигурационного пространства, импульсное пространство может быть представлено в виде ортогональной суммы:

$$\mathbf{R}^{3N} = \mathbf{R}_{a_l} \oplus \tilde{\mathbf{R}}_{a_l} \oplus \mathbf{R}^3,$$

где  $k_{a_l} \in \mathbf{R}_{a_l}$ ,  $p_{a_l} \in \tilde{\mathbf{R}}_{a_l}$ , и последнее  $\mathbf{R}^3$  есть пространство полного импульса  $q = p_1 + p_2 + \dots + p_N$ . При этом скалярное произведение  $(r, p)$  становится равным сумме

скалярных произведений в подпространствах  $R_{a_l}$ ,  $\tilde{R}_{a_l}$  и  $R^3$ :

$$(r, p) = (x_{a_l}, k_{a_l}) + (y_{a_l}, p_{a_l}) + (\rho, q)$$

для любого  $a_l$ .

Цепочки разбиений  $A_l$  отвечают импульсные переменные  $p_{A_2}, p_{A_3}, \dots, p_{A_l}$ , сопряженные координатам  $y_{A_2}, y_{A_3}, \dots, y_{A_l}$ ,

$$p_{a_l} = \{p_{A_2}, p_{A_3}, \dots, p_{A_l}\}.$$

Подчеркнем, что замена одного набора импульсов другим осуществляется поворотом, совпадающим с соответствующими поворотами в конфигурационном пространстве.

### § 3. Основные понятия динамики

В этом параграфе мы введем основные понятия, входящие в описание динамики системы  $N$  частиц и ее подсистем.

**Операторы энергии.** Пусть  $\{\rho, X\}$  — координаты системы  $N$  частиц, образованные координатами центра инерции и набором относительных координат, введенных в предыдущем параграфе. После замены переменных

$$(r_1, r_2, \dots, r_N) \rightarrow (\rho, X)$$

оператор кинетической энергии

$$H_0 = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \Delta_i$$

приобретает вид

$$H_0 = - \frac{1}{2M} \Delta_\rho - \Delta_X,$$

где  $M$  — полная масса системы, а  $\Delta_X$  — оператор Лапласа от  $3(N-1)$  переменных, образующих вектор  $X$ . Действительно, при указанной линейной замене не возникают смешанные производные, а зависящие от масс множители в формулах типа (1.8') подобраны так, чтобы все члены с квадратами производных имели коэффициент 1.

В соответствии с разложением

$$L_2(\mathbf{R}^{3N}) = L_2(\mathbf{R}^3) \otimes \mathfrak{G},$$

где  $\mathfrak{H} = L_2(\mathbf{R}^{3(N-1)})$  есть пространство состояний для относительного движения, мы вводим оператор кинетической энергии относительного движения

$$H_0 = -\Delta_x,$$

вид которого не зависит от конкретного выбора относительных координат.

В базисе, отвечающем разбиению  $a_l$ , оператор  $H_0$  имеет вид

$$H_0 = -\Delta_{x_{a_l}} - \Delta_{y_{a_l}},$$

где  $\Delta_{x_{a_l}}$  и  $\Delta_{y_{a_l}}$  — операторы Лапласа по переменным  $x_{a_l}$  и  $y_{a_l}$  соответственно. Это разложение согласовано с разложением пространства  $\mathfrak{H}$  в тензорное произведение

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\text{int}} \otimes \mathfrak{H}_{\text{ext}} \quad (1.15)$$

пространств состояний внутреннего движения в подсистемах и относительного движения центров инерции подсистем. Естественно поэтому обозначить

$$-\Delta_{x_{a_l}} = h_0^{(a_l)}_{\text{int}}, \quad -\Delta_{y_{a_l}} = h_0^{(a_l)}_{\text{ext}}$$

и рассматривать последние операторы в

$$\mathfrak{H}_{\text{int}} = L_2(\mathbf{R}^{3(N-l)}), \quad \mathfrak{H}_{\text{ext}} = L_2(\mathbf{R}^{3(l-1)})$$

соответственно.

В импульсном представлении операторы кинетической энергии сводятся к операторам умножения на сумму квадратов соответствующих импульсов:

$$h_0^{(a_l)}_{\text{int}} \Phi(k_{a_l}) = k_{a_l}^2 \Phi(k_{a_l}),$$

$$h_0^{(a_l)}_{\text{ext}} \Phi(p_{a_l}) = p_{a_l}^2 \Phi(p_{a_l}).$$

Потенциал взаимодействия

$$V(r_1, r_2, \dots, r_N) = \sum_{i < j} v_{ij} (r_i - r_j)$$

зависит только от относительных координат и определяет оператор в  $\mathfrak{H}$  как оператор умножения на функцию  $V(X)$ .

В соответствии с нашим соглашением об отождествлении пары  $(ij)$  с разбиением  $a_{N-1}$  имеем  $V = \sum_{a_{N-1}} V_{a_{N-1}}$ , причем каждый  $V_{a_{N-1}}$  есть оператор умножения на

функцию,

$$V_{a_{N-1}} f(X) = v_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}}) f(X).$$

В импульсном представлении этот оператор запишем как интегральный с ядром

$$v_{a_{N-1}}(P, P') = v_{a_{N-1}}(k_{a_{N-1}} - k'_{a_{N-1}}) \delta(p_{a_{N-1}} - p'_{a_{N-1}}).$$

Здесь  $v(k)$  — преобразование Фурье функции  $v(x)$ :

$$v(k) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{-ik \cdot x} v(x) dx.$$

Полный оператор энергии после отделения центра инерции вводится как сумма:

$$H = H_0 + V.$$

Рассмотрим теперь аналогичные объекты для разбиений. Для подсистемы  $\omega_l$  через  $H_{\omega_l}$  будем обозначать оператор энергии после отделения центра инерции подсистемы,

$$H_{\omega_l} = -\Delta_{X_{\omega_l}} + V_{\omega_l},$$

который действует в  $L_2(\mathbf{R}^{3(l-1)})$ . Здесь  $V_{\omega_l}$  — оператор взаимодействия частиц, входящих в подсистему  $\omega_l$ .

Для разбиения  $a_l$  через  $H_{a_l}$  обозначим оператор энергии, полученный после отделения центра инерции  $N$  частиц. В соответствии с разложением (1.15), его можно представить в виде

$$H_{a_l} = h_0^{(a_l)}_{\text{ext}} + h_{\text{int}}^{(a_l)}, \quad (1.16)$$

где

$$h_{\text{int}}^{(a_l)} = \sum_{j=1}^l H_{\omega_k j} = h_0^{(a_l)}_{\text{int}} + \sum_{a_{N-1} \subset a_l} V_{a_{N-1}}. \quad (1.16')$$

Суммирование здесь ведется по всем разбиениям  $a_{N-1}$ , следующим за  $a_l$ . Напомним, что оператор  $H_{a_l}$  описывает относительное движение системы  $N$  тел, в которой выключены взаимодействия между частицами из различных подсистем разбиения  $a_l$ .

По определению, будем считать далее, что

$$V_{a_1} = V, \quad V_{a_N} = 0,$$

так что оператор  $H_{a_1}$  совпадает с исходным гамильтонианом, а оператор  $H_{a_N}$  — с оператором кинетической

энергии,

$$H_{a_1} = H, \quad H_{a_N} = H_0.$$

**Кластеры.** Начнем с важного, хотя и естественного с физической точки зрения, предположения о структуре спектра операторов энергии подсистем  $H_{\omega_k}$ , состоящей из двух и более частей. Будем считать, что основную часть спектра составляет непрерывный спектр, заполняющий полуось  $[\lambda_{\omega_k}, \infty)$ , где  $\lambda_{\omega_k}$  — неположительное число. Левее  $\lambda_{\omega_k}$  оператор  $H_{\omega_k}$  имеет только дискретный спектр. Обозначим через  $\varepsilon_{\omega_k}^j$  и  $\psi_{\omega_k}^j(X_{\omega_k})$  соответствующие собственные значения и собственные функции.

Если дискретный спектр присутствует, будем говорить, что подсистема  $\omega_l$  имеет *связанные состояния*. Соответствующие собственные значения называются *энергиями связи*.

Разбиение  $a_k$  назовем *кластерным*, если для каждой многочастичной подсистемы  $\omega_{l_j}$ , входящей в  $a_k$ , существуют связанные состояния. Вследствие разделения переменных в (1.16) оператор энергии внутреннего движения кластерного разбиения  $h_{\text{int}}^{(a_l)}$  имеет дискретный спектр с собственными значениями

$$-\kappa_I^2 = \sum_{j=1}^h \varepsilon_{\omega_k j}^{ij},$$

где  $I = (i_1, i_2, \dots, i_l)$  — набор номеров связанных состояний подсистем. Соответствующие собственные функции даются произведениями

$$\psi_I = \prod_{j=1}^h \psi_{\omega_k j}^{ij}(X_{\omega_k j}).$$

Кластерное разбиение с фиксированным набором  $I$  будем называть *детализированным* и обозначать индексом  $I_{a_l}$ . Для полного оператора энергии разбиения  $H_{a_l}$  каждое число  $-\kappa_{I_{a_l}}^2$  играет роль начала ветви непрерывного спектра, порожденного оператором свободного движения  $h_{\text{ext}}^{(a_l)}$ . Действительно, функции вида

$$\chi_{I_{a_l}}(X) = \psi_{I_{a_l}}(x_{a_l}) e^{i(p_{a_l} \cdot y_{a_l})} \quad (1.17)$$

являются собственными функциями  $H_{a_l}$  с собственными значениями

$$E_{I_{a_l}}(k_{a_l}) = k_{a_l}^2 - \chi_{I_{a_l}}^2.$$

Важное условие согласования на введенные числа состоит в следующем: для каждой подсистемы  $\omega_k$  начало непрерывного спектра  $\lambda_{\omega_k}$  совпадает с наименьшим началом непрерывного спектра для всех подразбиений  $\omega_k$ . В частности, для полного оператора энергии  $H$  начало непрерывного спектра совпадает с наименьшим из чисел  $-\chi_{I_{a_l}}^2$ .

Подчеркнем еще раз, что эта естественная с физической точки зрения картина спектра нуждается в обосновании и будет оправдана в данной книге лишь частично.

Введем проектор  $P_{I_{a_l}}$  на подпространство, паяннутое на собственные функции  $\chi_{I_{a_l}}$ . Удобно представить  $P_{I_{a_l}}$  как интегральный оператор с ядром

$$P_{I_{a_l}}(X, X') = \Psi_{I_{a_l}}(x_{a_l}) \Psi_{I_{a_l}}^*(x_{a_l}) \delta(y_{a_l} - y'_{a_l}).$$

Индекс  $I_{a_l}$ , который мы используем на последних страницах, слишком громоздкий. Поэтому в дальнейшем мы заменим его на одну букву, в качестве которой будем брать заглавные буквы из начала латинского алфавита:  $A, B$  и т. д. Соответственно будем использовать обозначения  $x_A, y_A, k_A, p_A, \varphi_A, \chi_A, -\chi_A^2$  и  $P_A$ , смысл которых ясен из текста данного параграфа. При этом  $N$  свободным частицам будем сопоставлять индекс  $A = 0$  и, по определению, полагать  $P_0$  равным тождественному преобразованию. Функцию  $\varphi_A$  при  $A = 0$  в дальнейшем будем полагать равной единице.

**Каналы реакций.** С физической точки зрения каждое детализированное кластерное разбиение  $A$  отвечает определенному начальному или конечному состоянию в процессе рассеяния. Для формализации этого утверждения введем понятие канала реакции, связывая его с каждым таким разбиением.

Существует несколько возможных определений каналов реакции. Например, каналом можно назвать подпространство  $\hat{\mathfrak{H}}_A$ , на которое проектирует оператор  $P_A$ ,

$$\hat{\mathfrak{H}}_A = P_A \mathfrak{H}.$$

Однако подпространства  $\hat{\mathfrak{H}}_A$  не ортогональны между собой, что представляет собой формальное неудобство. Поэтому мы рассмотрим набор пространств  $\mathfrak{H}_A$ , каждое из которых изоморфно своему  $\hat{\mathfrak{H}}_A$ . Будем считать, что элементами пространства  $\mathfrak{H}_A$  являются функции  $f(p_A)$ . Через  $L_A$  обозначим оператор отождествления:  $L_A \mathfrak{H}_A = \hat{\mathfrak{H}}_A$ .

Пространство  $\mathfrak{H}_A$  будем называть *пространством канала A*, или просто *каналом*, а прямую ортогональную сумму

$$\mathfrak{H}_{\text{as}} = \sum_A \oplus \mathfrak{H}_A \quad (1.18)$$

назовем *пространством каналов* или *пространством асимптотических состояний*. Подчеркнем, что пространство  $\mathfrak{H}_{\text{as}}$  больше пространства  $\mathfrak{H}$ , так как последнее изоморфно пространству  $\mathfrak{H}_0$  для канала  $A$ , соответствующего разбиению на отдельные частицы.

С помощью отождествления мы можем переносить некоторые операторы из  $\mathfrak{H}$  в  $\mathfrak{H}_{\text{as}}$  и обратно. В частности, оператор  $L_A^{-1} H_A L_A$  действует в  $\mathfrak{H}_A$  и является там оператором умножения на функцию  $E_A(p_A)$ . При  $A=0$  этот оператор действует как оператор умножения на функцию  $E_0(P) = P^2$ .

#### § 4. Волновые операторы

Введенные в двух предыдущих параграфах понятия и обозначения позволяют более точно и формализованно описать постановку задачи рассеяния из § 1 и сформулировать задачу ее обоснования.

**Определение волновых операторов.** В § 1 мы работали в гильбертовом пространстве  $L_2(\mathbf{R}^{3N})$  состояний всех частиц. Теперь мы заранее отделим движение центра инерции, так что нашим пространством состояний является  $\mathfrak{H}$ . То, что там называлось совокупностью связанных комплексов, теперь может быть названо детализированным разбиением  $A$ .

Волновой функции  $\Psi_A(r_1, r_2, \dots, r_N, t)$  из (1.2) соответствует подпространство  $\hat{\mathfrak{H}}_A$ , и уравнение Шредингера (1.3) определяет оператор эволюции

$$\hat{U}_A(t) = e^{-iH_A t} P_A. \quad (1.19)$$

Ясно, что функция  $\chi_A$  однозначно задается элементом  $f_A$  из пространства канала  $\mathfrak{H}_A$ , так что ее эволюцию можно

задать также посредством оператора

$$U_A(t) = L_A^{-1} \tilde{U}_A(t) L_A,$$

который дается явной формулой

$$U_A(t)f(p_A) = e^{-ip_A^2 t + i\kappa_A^2 t} f(p_A).$$

Другими словами, асимптотическое состояние, соответствующее каналу реакции  $A$ , имеет вид

$$\Psi_{as}^A(t) = L_A U_A(t) f,$$

где  $f \in \mathfrak{H}_A$ . Существование предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Psi(t) - \Psi_{as}^A(t)\| = 0 \quad (1.20)$$

будет обеспечено, если существует предел при  $t \rightarrow \infty$  в сильном смысле у оператора

$$V_A(t) = e^{iHt} L_A U_A(t), \quad (1.21)$$

действующего из  $\mathfrak{H}_A$  в  $\mathfrak{H}$ . Действительно, левую часть в (1.20) перепишем в виде

$$\|e^{-iHt}\Psi_0 - L_A U_A(t)f\| = \|\Psi_0 - V_A(t)f\|,$$

где  $\Psi_0 = \Psi(t)|_{t=0}$ . На последнем шаге мы использовали упитарность оператора  $e^{-iHt}$ . В результате (1.20) имеет место, если существуют операторы  $U_A^{(\pm)}$ ,

$$U_A^{(\pm)} = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} V_A(t), \quad (1.22)$$

которые принято называть *волновыми операторами*. Выбор значков  $(\pm)$  операторов  $U_A^{(\pm)}$ , которые отвечают пределам  $t \rightarrow \mp\infty$ , сделан в соответствии с соглашением, принятым в физической литературе.

Собирая определения операторов  $V_A(t)$  и  $U_A(t)$ , получим представление:  $U_A^{(\pm)} = \tilde{U}_A^{(\pm)} L_A$ , где через  $\tilde{U}_A^{(\pm)}$  обозначен оператор в  $\mathfrak{H}$

$$\tilde{U}_A^{(\pm)} = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{itH} e^{-itH} P_A, \quad (1.23)$$

также называемый *волновым оператором*.

Итак, первый этап обоснования постановки задачи рассеяния из § 1 состоит в доказательстве существования волновых операторов.

Пространства  $\mathfrak{H}_{as}^{(\pm)}$ , которые следует сравнивать на втором этапе обоснования, составлены из *объединения*

областей значений операторов  $U_A^{(\pm)}$ . Таким образом, следует показать, что такое объединение корректно определено, и исследовать его строение. Таким определением мы займемся в первую очередь в следующем параграфе.

В случае дальнодействия приведенные определения нуждаются в модификации. Изменяется определение оператора эволюции для каждого канала, содержащего заряженные связанные состояния. Через  $H_A^{\text{as}}$  обозначим оператор умножения на функцию

$$H_A^{\text{as}}(p_A, t) = p_A^2 - \kappa_A^2 + \frac{\eta_A(p_A)}{t},$$

где

$$\eta_A(p_A) = \sum_{\substack{i,j \\ i>j}} \gamma \frac{q_{\omega_l_i} q_{\omega_l_j}}{2|p_{\omega_l_i \omega_l_j}|} \sqrt{2\mu_{\omega_l_i \omega_l_j}}. \quad (1.24)$$

Здесь через  $q_\omega$  обозначен полный заряд кластера  $\omega$ ; суммирование ведется по всем кластерам детализованного разбиения  $A$ .

Оператор асимптотической эволюции дается формулой

$$U_A^c(t) = \exp \{-ip_A^2 t + i\kappa_A^2 t - i \operatorname{sign} t \eta_A \ln |t|\}.$$

Определение волновых операторов получается из приведенного выше после замены оператора  $U_A(t)$  в (1.21) на  $U_A^c(t)$ :

$$U_A^{(\pm)} = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} L_A U_A^c(t). \quad (1.25)$$

Эти волновые операторы мы будем также называть *обобщенными* (или *кулоновскими*) *волновыми операторами*.

**Существование волновых операторов.** Приступим к первому этапу обоснования постановки задачи рассеяния. Мы докажем сначала, что волновые операторы (1.22) существуют, если как потенциалы, так и преобразования Фурье квадратов потенциалов  $v^2(k)$  являются гладкими ограниченными функциями.

Доказательство основано на следующем признаке.

Признак А. Пусть  $\{f_A\}$  — множество гладких финитных функций, плотное в пространстве  $\mathfrak{F}_A$ . Сильные пределы (1.22) при  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) существуют, если функции

$$\varphi_A(t) = \left\| \frac{d}{dt} V_A(t) f_A \right\| \quad (1.26)$$

являются абсолютно интегрируемыми на промежутке  $[1, \infty) (-\infty, -1]$ .

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, воспользуемся формулой

$$(\mathbf{V}_A(t_1) - \mathbf{V}_A(t_2)) f_A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \mathbf{V}_A(t) f_A dt$$

и оценим норму интеграла в правой части. По предположению интеграл  $\int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{V}_A(t) f_A \right\| dt$  стремится к нулю

при  $t_1, t_2 \rightarrow \pm\infty$ . Следовательно,

$$\|\mathbf{V}_A(t_1) - \mathbf{V}_A(t_2)\| f_A = o(1)$$

при  $t_1, t_2 \rightarrow \pm\infty$ , так что сильные пределы  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{V}_A(t)$  существуют.

Рассмотрим функцию  $\varphi_A(t)$ . Вычисляя производную, получим представление

$$\varphi_A(t) = \|\bar{\mathbf{V}}_A \mathbf{L}_A e^{-iE_A t} f_A\|, \quad (1.27)$$

где через  $\bar{\mathbf{V}}_A$  обозначен оператор, описывающий взаимодействие между кластерами детализованного разбиения  $A$ ,

$$\bar{\mathbf{V}}_A = \mathbf{V} - \mathbf{V}_A.$$

Оценим это выражение при больших  $|t|$ .

Рассмотрим сначала систему двух тел. В этом случае квадратичная форма  $\varphi_A^2$  может быть записана в импульсном представлении в виде интеграла

$$\varphi_A^2 = \int dp dp' e^{i(p^2 - p'^2)t} \hat{v^2}(p - p') \overline{f_A(p)} f_A(p'), \quad (1.28)$$

где через  $\hat{v^2}(p - p')$  обозначено преобразование Фурье квадрата потенциала  $v^2(x)$ .

Подынтегральное выражение представляет собой быстро осциллирующую функцию при  $|t| \rightarrow \infty$ . Мы будем называть такие интегралы *быстро осциллирующими*. Поведение последних может быть изучено с помощью метода стационарной фазы. В нашем случае функция  $\hat{v^2}(p - p')$  является гладкой. Поэтому основной вклад порождается критическими точками  $p, p' = 0$ . Вычисляя этот вклад,

получим оценку  $|\varphi_A(t)| \leq C(1+|t|)^{-3/2}$ . Итак, функция  $\varphi_A(t)$  является абсолютно интегрируемой и, следовательно, пределы (1.22) существуют.

Рассмотрим далее общий случай. Пусть  $\omega, \omega'$  — подсистемы детализированного разбиения  $A$  и  $\Omega$  — подсистема, полученная объединением этих подсистем,  $\Omega = (\omega, \omega')$ . Обозначим через  $V_{\omega\omega'}$  оператор взаимодействия между подсистемами  $\omega$  и  $\omega'$ ,

$$V_{\omega\omega'} = V_\Omega - (V_\omega + V_{\omega'}).$$

Очевидно, оператор, описывающий взаимодействие между кластерами, можно представить в виде суммы операторов взаимодействия между подсистемами,

$$\bar{V}_A = \sum_{\omega, \omega'} V_{\omega\omega'}.$$

Следовательно, условия признака достаточно проверить для каждого слагаемого  $V_{\omega\omega'}$  по отдельности. Покажем, что соответствующие этим слагаемым квадратичные формы могут быть представлены в виде интегралов типа (1.28).

Пусть  $\{x_A, y_A\}$  — приведенные координаты Якоби, отвечающие детализированному разбиению  $A$ , и  $\{k_A, p_A\}$  — соответствующие им импульсы. Зададим векторы  $y_A$  и  $p_A$  в базисе, индуцированном цепочкой разбиений  $A_l$ ,

$$y_A = \{y_{a_l a_{l-1}}, y_{A_l a_{l-1}}\}, \quad p_A = \{p_{a_l a_{l-1}}, p_{A_l a_{l-1}}\},$$

где разбиение  $a_{l-1}$  получается из  $a_l$  объединением подсистем  $\omega$  и  $\omega'$ . Функция  $E_A(p_A)$  в этом базисе принимает вид суммы

$$E_A(p_A) = p_{a_l a_{l-1}}^2 + p_{A_l a_{l-1}}^2 - \varkappa_A^2.$$

Заметим далее, что потенциал  $V_{\omega\omega'}$  зависит лишь от внутренних координат кластеров  $X_\omega, X_{\omega'}$  и от внешней координаты  $y_{a_l a_{l-1}}$ . Поэтому оператор взаимодействия в импульсном представлении действует по переменным  $p_{A_l a_{l-1}}$  как оператор умножения на единицу. Следовательно, нетривиальная часть экспоненты будет зависеть лишь от переменных  $p_{a_l a_{l-1}}$ . Для квадратичной формы, отве-

чающей слагаемому  $V_{\omega\omega'}$ , получаем в этом базисе представление:

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega\omega'}^2 &= \\ &= \int dp_{A_{l-1}} dp'_{a_l a_{l-1}} dp_{a_l a_{l-1}} \exp \left\{ i \left( p_{a_l a_{l-1}}^2 - p'_{a_l a_{l-1}}^2 \right) t \right\} \times \\ &\times \tilde{v}_{\omega\omega'}^A \left( p_{a_l a_{l-1}} - p'_{a_l a_{l-1}} \right) f \left( p_{a_l a_{l-1}}, p_{A_{l-1}} \right) f \left( p'_{a_l a_{l-1}}, p_{A_{l-1}} \right), \end{aligned} \quad (1.29)$$

где через  $\tilde{v}_{\omega\omega'}^A$  обозначено преобразование Фурье квадрата «усредненного потенциала». Последний определяется равенством

$$\begin{aligned} v_{\omega\omega'}^A \left( y_{a_l a_{l-1}} \right) &= \\ &= \int | \psi_\omega (X_\omega) |^2 | \psi_{\omega'} (X_{\omega'}) |^2 v_{\omega\omega'} (X_\omega, X_{\omega'}, y_{a_l a_{l-1}}) dX_\omega dX_{\omega'}. \end{aligned}$$

Ясно, что функции  $\tilde{v}_{\omega\omega'}^A$ , как и функции  $\hat{v}_{a_{N-1}}^2$ , являются гладкими. Следовательно, мы можем оценить интеграл (1.29) так же, как мы это сделали выше в случае квадратичной формы  $\Phi_A^2$ . В результате установим, что функции  $\Phi_{\omega\omega'} (t)$  абсолютно интегрируемы на промежутке  $[\pm 1, \pm \infty)$ .

Таким образом, мы проверили, что волновые операторы существуют в предположении, что преобразования Фурье квадратов парных потенциалов представляют собой гладкие ограниченные функции. Соответствующие условия можно сформулировать и в  $X$ -представлении. Мы не будем, однако, обсуждать их здесь. Отметим лишь, что эти условия выполняются для потенциалов, убывающих как степень  $|x|^{-3-\epsilon}$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Рассуждения, которые мы описали выше, можно обобщить и на весь более широкий класс короткодействующих потенциалов, охарактеризованных в § 1. При этом соответствующие им преобразования Фурье  $\hat{v}^2(p)$  будут, вообще говоря, иметь особенности, которые, однако, являются не слишком сильными. В отличие от таких потенциалов преобразования Фурье кулоновских потенциалов имеют сингулярность, которая уже не может быть рассмотрена в рамках описанной схемы. В этом случае, как мы видели выше, определение волновых операторов следует модифицировать.

Итак, докажем существование обобщенных волновых операторов для кулоновских потенциалов. С этой целью рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\Phi_A^c(t) &= \frac{d}{dt} e^{iHt} L_A U_A^c(t) f_A = \\ &= e^{iHt} (\bar{V}_A L_A - L_A \bar{V}_A(p_A t)) e^{-iE(p_A)} f_A(p_A)\end{aligned}$$

и оценим его норму при  $|t| \rightarrow \infty$ . Кулоновский потенциал зададим в  $X$ -представлении. В подходящих переменных, которые мы описали выше, задача исследования функции  $\|\Phi_A^c(t)\|^2$  сводится к исследованию интеграла

$$\begin{aligned}I_A^c(t) &= \int_{|x|>1} dx \left| \int dp \exp\{-itp^2 + i(x, p)\} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{2pt} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\{-i \operatorname{sign} t \eta_{\omega\omega'} \ln |t|\} f(p) \right|^2,\end{aligned}$$

$$\eta_{\omega\omega'} = \gamma \frac{q_\omega q_{\omega'}}{2p} (2\mu_{\omega\omega'})^{1/2}.$$

Сделаем замену переменной  $x = ty$  и проведем первое интегрирование по переменной  $p$ . При этом быстро осциллирующая экспонента принимает вид  $\exp\{itg(p)\}$ , где функция  $g(p) = p^2 - (p, y)$  имеет единственную критическую точку  $p_0 = y/2$ ,  $\nabla g(p_0) = 0$ , в которой  $g(p_0) = -y^2/4$ .

Заметим, что в критической точке подынтегральная функция  $(|y|^{-1} - (2pt)^{-1})$  обращается в нуль. Это приводит к тому, что при  $y > 0$  этот интеграл убывает как  $t^{-5/2}$ , т. е. быстрее, чем степень  $|t|^{-3/2}$ , которая возникает в случае, если подынтегральная функция отлична от нуля. Именно в этом месте проявляется отличие модифицированного определения волновых операторов (1.25) от определения (1.22) для короткодействующих потенциалов. С другой стороны, в точках  $y = 0$ ,  $p = 0$  подынтегральное выражение обращается в бесконечность. Можно показать, что это ограничивает убывание интеграла при малых  $y = O(t^{-1})$  степенью  $t^{-3/2-\varepsilon}$ ,  $0 < \varepsilon < 1/2$ . Поэтому для оставшегося интеграла по  $y$  справедлива оценка

$$I_A^c(t) = |t|^{-2-2\varepsilon} \int dy |f(y)|^2 |y|^{-2-2\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1/2.$$

Таким образом, при  $t > 1$  интеграл  $I_A^c(t)$  ограничен и имеет порядок  $O(|t|^{-2-2\varepsilon})$ , т. е.  $\sqrt{I_A^c(t)}$  представляет со-

бой абсолютно интегрируемую функцию  $t$  на промежутке  $[\pm 1, \pm\infty)$ .

Таким образом, обобщенные волновые операторы существуют в случае кулоновских потенциалов. Все рассуждения с незначительными изменениями можно повторить и в случае дальнодействующих потенциалов, когда паряду с кулоновским потенциалом имеются короткодействующие слагаемые. В результате можно прийти к выводу, что обобщенные волновые операторы существуют и в этом случае.

### § 5. Свойства волновых операторов

Опишем общие соотношения, которым удовлетворяют волновые операторы. Их формулировка не зависит от того, имеем мы дело с быстро убывающими или кулоновскими потенциалами. Техника доказательства также одна и та же в этих двух случаях. Мы приведем доказательство на примере быстро убывающих потенциалов. Чтобы не загромождать формулы, мы будем опускать знаки  $(\pm)$  в обозначениях волновых операторов и проводить рассуждения только для случая  $(-)$ . Если это не будет оговариваться специально, во всех полученных ниже конечных формулах можно брать любой из операторов  $(\pm)$ .

*Свойство А. Справедливы соотношения*

$$HU_A = U_A E_A, \quad (1.30)$$

которые называют сплетающим свойством.

Для доказательства воспользуемся равенствами

$$e^{itH} U_A = U_A e^{itE_A},$$

вытекающими из формул

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{itH} e^{i\tau H} e^{-i\tau H} A L_A = \lim_{\tau' \rightarrow \infty} e^{i\tau' H} e^{-i\tau' H} A L_A e^{itE_A}.$$

Дифференцируя данные равенства по  $t$ , получим соотношения

$$e^{itH} H U_A = U_A E_A e^{itE_A},$$

которые при  $t = 0$  переходят в (1.30).

*Свойство Б. Операторы  $U_A$  частично изометричны,*

$$U_A^* U_A = I_A, \quad (1.31)$$

*а их области значения ортогональны,*

$$\mathbf{U}_A^* \mathbf{U}_B = \mathbf{0}, \quad A \neq B. \quad (1.32)$$

Чтобы доказать это свойство, достаточно проверить соотношения

$$(\mathbf{U}_A f_A, \mathbf{U}_B f'_B) = \delta_{AB} (f_A, f'_B),$$

где через  $\delta_{AB}$  обозначен символ Кронекера:  $\delta_{AB} = 1$  при  $A = B$  и  $\delta_{AB} = 0$  при  $A \neq B$ .

Запишем билинейную форму  $I_{AB} = (\mathbf{U}_A f_A, \mathbf{U}_B f'_B)$  в виде предела

$$I_{AB} = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-i\mathbf{H}_A t} \mathbf{L}_A f_A, e^{-i\mathbf{H}_B t} \mathbf{L}_B f'_B) \quad (1.33)$$

и рассмотрим последовательно три случая.

Пусть  $A = B$ . Тогда искомое равенство  $I_{AA} = (f_A, f'_A)$  является непосредственным следствием унитарности оператора  $e^{-i\mathbf{H}_A t}$ .

Если  $A \neq B$  и при этом отвечающие им разбиения различны,  $a_i \neq b_j$ , то скалярное произведение под знаком предела можно записать в виде быстро осциллирующего интеграла:

$$I_{AB} = \int dP f_A(p_A) \overline{f_B(p_B)} \Psi_A(k_A) \overline{\Psi_B(k_B)} \times \\ \times \exp \{-it(E_A(p_A) - E_B(p_B))\}.$$

Предел таких интегралов при  $t \rightarrow \infty$  равен нулю. Если же  $a_i = b_j$ , то быстро осциллирующие экспоненты пропадают, так как в этом случае  $E_A(p_A) = E_B(p_B)$ . При этом обе функции  $\Psi_A(k_A)$  и  $\Psi_B(k_B)$  являются собственными для оператора  $\mathbf{H}_A$ , и поэтому интеграл  $I_{AB}$  равен нулю в силу их ортогональности. Итак, свойство Б доказано.

Условие ортогональности областей значений волновых операторов допускает простую физическую интерпретацию. Именно, заметим, что векторы  $\mathbf{L}_A \mathbf{U}_A(t) f_A$  и  $\mathbf{L}_B \mathbf{U}_B(t) f'_B$ , которые скалярно перемножаются под знаком предела (1.33), описывают асимптотические состояния в каналах  $A$  и  $B$ . Поэтому равенство этого предела нулю можно трактовать как условие ортогональности асимптотических волновых пакетов, которое выполняется тем точнее, чем больше  $t$ . Интересно, что это свойство имеет место несмотря на то, что каналы  $\hat{\mathfrak{h}}_A$  и  $\hat{\mathfrak{h}}_B$  неортогональны.

Наконец, перейдем к формулировке последнего свойства волновых операторов. Мы определим объединение областей значений этих операторов и тем самым дадим ответ на вопрос, поставленный на втором этапе обоснования постановки задачи рассеяния.

Заметим сперва, что операторы  $\pi_A^{(\pm)} = U_A^{(\pm)}U_A^{(\pm)*}$  являются операторами проектирования на ортогональные подпространства. Действительно, согласно равенствам (1.31) и (1.32), справедливы соотношения

$$\pi_A^2 = \pi_A, \quad \pi_A \pi_B = 0, \quad A \neq B.$$

Следовательно, сумма этих операторов

$$P_c^{(\pm)} = \sum_A U_A^{(\pm)}U_A^{(\pm)*}$$

также является оператором проектирования. Следующая задача состоит в описании областей значений операторов  $P_c^{(\pm)}$ .

Обозначим через  $P_c$  проектор на подпространство  $\mathfrak{H}_c$ , отвечающее непрерывному спектру оператора энергии  $H$ . Примем следующую важную гипотезу об областях значений операторов  $P_c^{(\pm)}$ .

*Свойство В. Области значений операторов  $P_c^{(\pm)}$  совпадают с подпространством  $\mathfrak{H}_c$ :*

$$P_c^{(+)} = P_c^{(-)} = P_c. \quad (1.34)$$

Отметим, что свойство В гарантирует выполнение условий асимптотической полноты (1.5). Принято говорить, что в таком случае волновые операторы обладают свойством асимптотической полноты.

Доказательство этого свойства занимает центральное место в обосновании задачи рассеяния. Однако, хотя на решение этой проблемы направлены основные усилия специалистов, она до сих пор не решена в общем случае. Существующие подходы, которые мы опишем в следующей главе, позволили рассмотреть только системы двух и трех частиц. Несмотря на это, все конструкции, используемые в теории рассеяния, предполагают выполнение асимптотической полноты как необходимое условие корректности физической картины рассеяния.

Свойства волновых операторов иногда формулируют в терминах собственных функций непрерывного спектра оператора энергии. С этой целью волновые операторы

рассматривают как преобразования каналов  $\mathfrak{H}_A$  в конфигурационное пространство. Их ядра в этом представлении, называемом *смешанным*, являются функциями координатных  $X$  и импульсных  $p_A$  переменных. При этом импульсную переменную естественно считать параметром. Эти функции называют *волновыми функциями*.

Сплетающее свойство в терминах волновых функций принимает вид стационарного уравнения Шредингера:

$$\left( -\Delta + \sum_{a_{N-1}} v_{A_{N-1}} - E_A(p_A) \right) U(X, p_A) = 0. \quad (1.35)$$

Таким образом, волновые функции можно трактовать как собственные функции непрерывного спектра оператора энергии.

Равенство (1.31), которое имеет вид

$$\int \overline{U_A(X, p_A)} U_A(X, p'_B) dX = \delta_{AB} \delta(p_A - p'_B),$$

можно тогда рассматривать как условие ортогональности этих функций. Наконец, условие асимптотической полноты означает, что произвольная функция из подпространства  $\mathfrak{H}_c$  может быть разложена в обобщенный интеграл Фурье по волновым функциям

$$f_c = \sum_A \int U_A(X, p_A) g_A(p_A) dp_A.$$

Здесь коэффициенты Фурье задаются равенствами

$$g_A(p_A) = \int \overline{U_A(X, p_A)} f_c(X) dX.$$

В заключение мы сформулируем перечисленные выше свойства волновых операторов в компактной форме. С этой целью введем в рассмотрение *матричный волновой оператор*  $\widehat{U}^{(\pm)}$ , действующий из пространства каналов  $\mathfrak{H}_{as}$  в пространство  $\mathfrak{H}$ . По определению, положим

$$\widehat{U}^{(\pm)} \widehat{f} = \sum_A U_A^{(\pm)} f_A.$$

Через  $\widehat{H}_0$  обозначим приводимый в  $\mathfrak{H}_{as}$  оператор, задаваемый равенством

$$\widehat{H}_0 = \sum_A \oplus L_A^{-1} H_A L_A.$$

В каждом канале  $\mathfrak{H}_A$  этот оператор, называемый *асимптотическим гамильтонианом*, действует как оператор

умножения на функцию  $E_A(p_A)$ ,

$$(L_A^{-1}H_A L_A) f_A(p_A) = (p_A^2 - \kappa_A^2) f_A(p_A) \equiv E_A(p_A) f_A(p_A).$$

Через  $\widehat{I}$  обозначим тождественное преобразование  $\mathfrak{H}_{as}$ .

Свойства волновых операторов описываются следующим утверждением.

*Предложение U.* Оператор энергии системы  $N$  тел  $H$  в подпространстве  $\mathfrak{H}_c$  унитарно эквивалентен асимптотическому гамильтониану  $\widehat{H}_0$ . Существует изометрический оператор  $\widehat{U}$ , действующий из пространства каналов  $\mathfrak{H}_{as}$  в подпространство  $\mathfrak{H}_c$ , такой, что выполняются соотношения:

$$\widehat{U}^* \widehat{U} = \widehat{I}, \quad \widehat{U} \widehat{U}^* = P_c, \quad H \widehat{U} = \widehat{U} \widehat{H}_0. \quad (1.36)$$

В качестве оператора  $\widehat{U}$  можно взять матричные волновые операторы  $\widehat{U}^{(\pm)}$ .

Первое из этих соотношений представляет собой условие ортогональности областей значений волновых операторов. Второе в замкнутом виде выражает условие асимптотической полноты и должно рассматриваться как гипотеза. Наконец, последнее соотношение эквивалентно равенствам (1.35), которые имеют вид уравнений Шредингера для волновых функций.

Подчеркнем в заключение, что предложение U справедливо как для быстроубывающих, так и для дальнодействующих потенциалов. При этом в качестве волновых операторов следует брать либо пределы (1.22), либо обобщенные волновые операторы (1.25).

## § 6. Оператор рассеяния

В этом параграфе мы дадим строгое определение оператора рассеяния, опишем его общие свойства и обсудим физический смысл матричных ядер этого оператора.

Рассмотрим в  $\mathfrak{H}_{as}$  оператор

$$\widehat{S} = \widehat{U}^{(-)*} \widehat{U}^{(+)}, \quad (1.37)$$

называемый *оператором рассеяния*. Этот оператор действует на элементы пространства каналов  $\mathfrak{H}_{as}$  согласно

формулам

$$\hat{f}' = S\hat{f}, \quad \hat{f} = \{f_B\}, \quad \hat{f}' = \{f'_A\},$$

$$f'_A = \sum_B S_{AB} f_B,$$

где матричные элементы  $S_{AB}$  определяют оператор рассеяния из канала  $\mathfrak{H}_B$  в канал  $\mathfrak{H}_A$ :

$$S_{AB} = U_A^{(-)*} U_B^{(+)} . \quad (1.38)$$

Из определения волновых операторов вытекает следующее нестационарное представление для операторов  $S_{AB}$ :

$$S_{AB} = \lim_{\begin{subarray}{l} t_1 \rightarrow \infty \\ t_2 \rightarrow -\infty \end{subarray}} e^{iE_A t_1} L_A^{-1} e^{iH(t_2 - t_1)} L_B e^{-iE_B t_2} . \quad (1.39)$$

В случае заряженных частиц матричные элементы  $S_{AB}$  задаются формулами

$$S_{AB} = \lim_{\begin{subarray}{l} t_1 \rightarrow \infty \\ t_2 \rightarrow -\infty \end{subarray}} \exp \{iE_A t_1 + i\eta_A \ln |t_1|\} L_A^{-1} \times$$

$$\times \exp \{iH(t_2 - t_1)\} L_B \exp \{-iE_B t_2 + i\eta_B \ln |t_2|\} . \quad (1.40)$$

Общие свойства оператора рассеяния можно описать с помощью следующего предложения.

*Предложение  $\widehat{S}$ . Пусть выполняется условие асимптотической полноты. Тогда оператор  $\widehat{S}$  является унитарным и коммутирует с оператором энергии в пространстве каналов  $\widehat{H}_0$ :*

$$\widehat{S}\widehat{S}^* = \widehat{S}^*\widehat{S} = \widehat{I}, \quad \widehat{S}\widehat{H}_0 = \widehat{H}_0\widehat{S}.$$

Докажем сначала равенство  $\widehat{S}\widehat{S}^* = \widehat{I}$ . Заметим, что из определения оператора рассеяния и условия асимптотической полноты вытекает равенство

$$\widehat{S}\widehat{S}^* = \widehat{U}^{(-)*} P_c \widehat{U}^{(-)} .$$

Так как область значений оператора  $\widehat{U}^{(-)}$  совпадает с  $\mathfrak{H}_c$ , отсюда немедленно следует искомое равенство. Аналогично доказывается равенство  $\widehat{S}^*\widehat{S} = \widehat{I}$ .

Чтобы доказать перестановочность операторов  $\widehat{S}$  и  $\widehat{H}_0$ , воспользуемся сплетающим свойством и поменяем сначала порядок операторов  $\widehat{H}_0$  и  $\widehat{U}^{(-)*}$ ,  $\widehat{H}_0 \widehat{U}^{(-)*} \widehat{U}^{(+)} =$

$= \widehat{U}^{(-)*} H \widehat{U}^{(+)}$ . Переставляя на втором шаге операторы  $\widehat{H}$  и  $\widehat{U}^{(+)}$ , получим искомое равенство.

Опишем общие свойства ядер оператора рассеяния  $S_{AB}(p_A, p'_B)$ . Как мы показали, оператор  $\widehat{S}$  коммутирует с гамильтонианом каналов  $\widehat{H}_0$ , действующим в них как оператор умножения на функцию  $E_A(p_A)$ . Это значит, что ядра  $S_{AB}(p_A, p'_B)$  должны быть пропорциональны  $\delta$ -функциям вида  $\delta(E_A(p_A) - E_B(p'_B))$ :

$$S_{AB}(p_A, p'_B) = \delta(E_A(p_A) - E_B(p'_B)) \tilde{S}_{AB}(\widehat{p}_A, \widehat{p}'_B, E_A).$$

При этом ядра  $\tilde{S}_{AB}$  задают интегральный оператор, называемый *матрицей рассеяния*. Последняя действует из гильбертова пространства функций на единичной сфере  $|p_B| = 1$  в гильбертово пространство функций на единичной сфере  $|p_A| = 1$ .

Выясним физический смысл матричных элементов  $S$ -матрицы. Мы рассмотрим простейший случай рассеяния в системе двух частиц. Как будет видно в главе IV, ядро оператора рассеяния  $s(p, p')$  имеет вид

$$s(p, p') = \delta(p - p') - \delta(p^2 - p'^2) \tilde{t}(\widehat{p}, \widehat{p}', p^2),$$

где ядро  $\tilde{t}$  уже не имеет особенностей. Таким образом,  $|\tilde{t}|^2$  определено, и именно это выражение имеет физический смысл.

Рассмотрим начальное состояние с приблизительно точными значениями энергии и направления движения

$$\begin{aligned} \Omega_{as}^{(-)}(x, t) = & \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int \varepsilon_E \tilde{\delta}(E - E_0) \times \\ & \times \varepsilon_\alpha \tilde{\delta}(\alpha - \alpha_0) \frac{\sqrt[4]{E}}{\sqrt[4]{2}} e^{iV\bar{E}(x, \alpha)} e^{-iEt} dE d\alpha, \end{aligned}$$

где через  $\alpha$  обозначена точка на единичной сфере; функции  $\tilde{\delta}(E - E_0)$  и  $\tilde{\delta}(\alpha - \alpha_0)$ , определяющие это состояние, подчиняются условиям

$$\int \tilde{\delta}(E - E_0) dE = 1, \quad \int \tilde{\delta}(\alpha - \alpha_0) d\alpha = 1,$$

а

$$\varepsilon_E^{-2} = \int (\tilde{\delta}(E - E_0))^2 dE, \quad \varepsilon_\alpha^{-2} = \int (\tilde{\delta}(\alpha - \alpha_0))^2 d\alpha.$$

Пусть ось  $x_3$  имеет направление  $\alpha_0$ . Для вероятности нахождения свободной частицы, описываемой этим пакетом, в цилиндре, перпендикулярном плоскости  $x_1$ ,  $x_2$ , сечения  $dQ$ , при не слишком больших  $x_1$ ,  $x_2$  и любых  $t$  мы получаем выражение

$$dW = \int_{-\infty}^{\infty} |\Omega_{as}^{(-)}(x, t)|^2 dx_3 dQ \simeq \\ \simeq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \varepsilon_{\alpha}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \left| \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_E \tilde{\delta}(E - E_0) \frac{\sqrt{E}}{V^2} e^{i\sqrt{E}x_3 - iEt} dE \right|^2 dQ.$$

Интеграл относительно  $E$  при больших  $t$  и  $x_3$  можно вычислить с помощью метода стационарной фазы. Полагая  $x_3 = 2\lambda t$ , получим:

$$dW \simeq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \varepsilon_{\alpha}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\lambda}^2 (\tilde{\delta}(\lambda - E_0))^2 \lambda d\lambda dQ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \varepsilon_{\alpha}^2 E_0 dQ.$$

Таким образом, эта вероятность не зависит от  $x_1$ ,  $x_2$  и  $t$ . Если источник частиц производит  $N$  частиц в единицу времени и эти частицы образуют пучок плотности потока  $j$ , то мы получаем  $jdQ = N dW$ , т. е.

$$j = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \varepsilon_{\alpha}^2 E_0 N. \quad (1.41)$$

Мы увидим дальше, что плотность вероятности рассеяния частицы в направлении  $\alpha \neq \alpha_0$  определяется амплитудой

$$h_+(E, \alpha) \simeq (2\pi)^{-2} \varepsilon_E \tilde{\delta}(E - E_0) \varepsilon_{\alpha} \tilde{t}(\alpha, \alpha_0, E_0), \quad E_0 = p^2, \quad (1.42)$$

и таким образом для числа частиц, рассеянных в единице времени на телесный угол  $d\Omega$ , получаем выражение:

$$dN = N \varepsilon_{\alpha}^2 |t(\alpha, \alpha_0, E_0)|^2 d\Omega \quad (1.43)$$

Сравнивая (1.41) и (1.43), получаем, что отношение

$$\frac{dN}{jd\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{|\tilde{t}(\alpha, \alpha_0, E_0)|^2}{E_0}$$

не зависит от точности задания направления импульса. Эта величина имеет размерность площади и носит называ-

ние *эффективное сечение рассеяния*. Эта величина определяется в опытах по рассеянию.

Итак, для рассмотренного примера оказалось, что  $|\tilde{T}|^2$  тесно связано с сечением рассеяния. Такая связь имеет место и для любого другого процесса рассеяния, когда в начальном состоянии имеется только два кластера. В частности, ядро оператора рассеяния имеет тогда вид

$$S_{AB} = \delta_{AB}\delta(p_A - p_B) + \delta(E_A - E_B)\tilde{T}_{AB}(\hat{p}_A, \hat{p}_B, E_A),$$

где  $|\tilde{T}_{AB}|^2$  определено и имеет смысл *эффективного сечения*. Последнее характеризует вероятность перехода системы из канала  $B$  в канал  $A$ . Если в начальном состоянии имеется три или более кластеров, то определение эффективного сечения сложнее. При этом ядро  $\tilde{T}_{AB}$  может иметь  $\delta$ -образные особенности. Мы увидим это в главе IV.

Введем, наконец, несколько терминов, используемых для физической интерпретации матричных элементов  $S_{AB}$ . Функцию  $E_A(p_A)$  будем называть *энергией рассеяния* в канале  $A$ . Значения этой функции при нулевом импульсе  $E_A(0)$  определяют *порог канала*:

$$E_A(0) = -\kappa_A^2.$$

Канал будем называть *открытым*, если энергия системы больше порогового значения. При этом канал распада на  $N$  свободных частиц открывается при нулевой энергии,  $E_0(0) = 0$ . Отметим, что если один из каналов,  $A$  или  $B$ , закрыт, то соответствующий матричный элемент  $S_{AB}$   $S$ -матрицы полагается равным нулю.

На этом мы закончим описание общих мест теории рассеяния.

---

## СВЕДЕНИЕ К СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ

В этой главе мы выразим волновые операторы в терминах особенностей ядра резольвенты оператора энергии. Описанные здесь результаты служат основой для построения альтернативного подхода к обоснованию задачи рассеяния, называемого стационарным. В таком подходе решение исходной динамической задачи может быть погружено в рамки теории возмущений линейных операторов. Вместе с тем он наилучшим образом подходит для создания вычислительных методов теории рассеяния.

### § 1. Резольвента и волновые операторы

Чтобы перейти к стационарному определению волновых операторов, мы воспользуемся следующим очевидным утверждением.

*Пусть  $U(t)$  — операторная функция со значениями на множестве ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, имеющая пределы при  $t \rightarrow \mp\infty$ ,*

$$U_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} U(t).$$

*Тогда эти пределы совпадают с выражениями*

$$U_{\pm} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \pm \varepsilon \int_{\mp\infty}^0 e^{\pm \varepsilon t} U(t) dt, \quad (2.1)$$

*где символ  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0}$  означает, что параметр  $\varepsilon$  неотрицателен.*

Приступим к преобразованию выражений для волновых операторов. На основе приведенного соотношения мы можем записать эти операторы в виде интеграла:

$$U_A^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \pm \varepsilon \int_{\mp\infty}^0 e^{it(H \mp ie)} L_A e^{-iE_A t} dt. \quad (2.2)$$

Вычисляя этот интеграл, получим формулу

$$U_A^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mp ieR(E_A \pm ie)L_A, \quad (2.3)$$

где через  $R(z)$  обозначена резольвента оператора энергии,

$$R(z) = (H - z)^{-1}.$$

Данную формулу удобно переписать в терминах волновых функций. Заметим, что ядро оператора  $L_A$  имеет вид  $L_0(P, P') = \delta(P - P')$  при  $A = 0$  и

$$L_A(P', p_A) = \psi_A(k'_A) \delta(p'_A - p_A), \quad (2.4)$$

где  $\psi_A(k_A)$  — преобразование Фурье собственной функции  $\psi_A(x_A)$  оператора  $h_A^{\text{int}}$  при  $A \neq 0$ . Это ядро представляет собой собственную функцию непрерывного спектра оператора  $H_A$  и, в согласии с принятой нами интерпретацией, описывает асимптотическое состояние системы в канале  $A$ . Мы можем задать  $L_A$  в произвольном представлении как функцию первой переменной. При этом вторую переменную  $p_A$  следует считать параметром. Например, в  $X$ -представлении получаем:

$$L_0(X, P) = (2\pi)^{(3N-3)/2} \exp\{i(X, P)\},$$

$$L_A(X, p_A) = \frac{1}{(2\pi)^{(3l_A-3)/2}} \psi_A(x_A) e^{i(p_A, y_A)}, \quad A \neq 0.$$

В этих обозначениях волновая функция  $U_A(X, p_A)$  может быть представлена в виде

$$U_A^{(\pm)}(X, p_A) =$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\mp i\epsilon}{(2\pi)^{(3l_A-3)/2}} \int R(X, X', E_A \pm i\epsilon) \psi_A(x'_A) e^{i(p_A, y'_A)} dX',$$

$$A \neq 0,$$

$$\tilde{U}_0^{(\pm)}(X, P) =$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} (\mp i\epsilon) (2\pi)^{(-3N+3)/2} \int R(X, X', P^2 \pm i0) \times$$

$$\times \exp\{i(X', P)\} dX',$$

где  $R(X, X', z)$  — ядро резольвенты в  $X$ -представлении. Это ядро называют функцией Грина. Через  $l_A$  обозначено число кластеров детализированного разбиения  $A$ .

Приведем выражение для ядра волнового оператора в импульсном представлении:

$$\begin{aligned} U_A^{(\pm)}(P', p_A) &= \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mp i\varepsilon \int dk''_A R(P', P(k''_A, p_A), E_A(p_A) \pm i\varepsilon) \psi_A(k''_A), \\ &\quad A \neq 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь вектор  $P = (k''_A, p_A)$  задан в базисе  $k''_A, p_A$ , отвечающем детализированному разбиению  $A$ . Ядро  $U_0$  получается отсюда, если положить  $\psi_0 \equiv 1$ , т. е.  $U_0^{(\pm)}(P', P) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mp i\varepsilon R(P', P, P^2 \pm i\varepsilon)$ .

Отметим, что ядра резольвенты и волновых операторов, вообще говоря, являются обобщенными функциями. Поэтому соотношение (2.5) и аналогичные формулы, которые будут встречаться в дальнейшем, следует понимать в пространстве обобщенных функций. Мы не будем, однако, оговаривать это обстоятельство специально, если это не требуется существом дела.

Перейдем к изучению кулоновских волновых операторов. Воспользуемся на первом этапе формулой (2.1). Получим вместо (2.2) интеграл

$$\begin{aligned} U^{(\pm)} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \pm \varepsilon \int_{-\infty}^0 e^{it(H \mp i\varepsilon)} L_A \times \\ &\quad \times \exp \{-iE_A t - i \operatorname{sign} t \eta_A \ln |t| \} dt. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить этот интеграл, воспользуемся следующим утверждением.

Пусть  $\varphi(z)$  — голоморфная в окрестности вещественной оси функция. Для любого самосопряженного оператора  $A$  справедливо соотношение:

$$\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \varphi(z) R_A(z) dz, \quad (2.6)$$

где через  $R_A(z)$  обозначена резольвента оператора  $A$ ,  $R_A(z) = (A - z)^{-1}$ . Интегрирование ведется по контуру  $\gamma$ , охватывающему спектр  $A$  в отрицательном направлении.

Применяя это соотношение и вычисляя затем интеграл по  $t$ , придем к представлению

$$U_A^{(\pm)} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mp i\varepsilon \oint_{\gamma} R(z) L_A \frac{\Gamma(1 \pm i\eta_A) e^{-\pi\eta_A/2}}{(z - E_A \mp i\varepsilon)^{1 \pm i\eta_A}}, \quad (2.6')$$

где величина  $\eta_A$  задается равенством (1.24). Рассмотрим ядра в этом выражении в импульсном представлении. Интегрирование по  $z$  дает следующий результат:

$$U_A^{(\pm)}(P', p_A) = e^{-\pi \eta_A/2} \cdot \Gamma(1 \pm i\eta_A) \times \\ \times \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mp ie \int R^{1 \pm i\eta_A}(P, k''_A, p_A, E_A(p_A) \pm ie) \psi_A(k''_A) dk''_A. \quad (2.7)$$

Здесь через  $R^{1 \pm i\eta_A}(P, P', z)$  обозначено ядро оператора  $R^{1 \pm i\eta_A}(z)$ ; индекс  $A$  принимает все значения, включая  $A = 0$ .

Следует отметить, что представление (2.7) значительно менее удобно для вычислений, чем (2.3), из-за появления комплексной степени резольвенты  $R^{1 \pm i\eta_A}(z)$ . В § 4 мы, изучив основные особенности резольвенты, получим альтернативное соотношение, в котором комплексная степень будет перенесена на параметр  $\epsilon$ . Именно в таком виде более непосредственно прослеживается связь между резольвентой и обобщенными волновыми операторами.

Формулы (2.3) и (2.7) составляют основу для последующих рассуждений данной главы. Начиная с этого момента, мы переходим к не зависящему от времени описанию волновых операторов. Дальше мы будем заниматься вычислением пределов (2.3), (2.7) и не будем больше обращаться к исходному динамическому определению волновых операторов.

Ясно, что результат предельного перехода в формулах (2.5) и (2.7) определяется сингулярностями ядра резольвенты  $R(P, P', z)$  при вещественных  $z$ . Другими словами, если представить это ядро в виде суммы ограниченных и сингулярных при  $\text{Im } z = 0$  членов, то все слагаемые, не имеющие сингулярностей, дадут нулевые вклады в пределе  $\epsilon \downarrow 0$  за счет множителя  $\epsilon$ . Нетривиальные слагаемые возникнут лишь от членов, стремящихся к бесконечности как  $\epsilon^{-1}$ . Поэтому следующая задача заключается в выделении этих особенностей ядра резольвенты.

## § 2. Особенности резольвенты. Нейтральные частицы

В этом параграфе мы опишем основные особенности ядра резольвенты  $R(z)$  в случае короткодействующих потенциалов. Мы будем действовать в импульсном представлении, где эти особенности сводятся к полюсам и

$\delta$ -функциям. Свойства ядра резольвенты в конфигурационном пространстве мы опишем в главах IV и V.

Последовательное, математически строгое описание особенностей представляет собой трудную задачу, полное решение которой может быть получено с помощью интегральных уравнений типа Фредгольма. Можно, однако, угадать структуру основных сингулярностей, пользуясь наводящими соображениями, которые основаны на гипотезе о строении дискретного спектра операторов энергии подсистем. Соответствующая схема представляет определенный самостоятельный интерес, поскольку на ее основе можно эффективно получать явные представления для физически интересных величин, не обращаясь к анализу громоздких интегральных уравнений. Строгое обоснование этих результатов может быть, однако, получено лишь с помощью последних.

**Уравнения теории возмущений.** Мы начнем с описания тождеств, которым удовлетворяет резольвента  $R(z)$ . Применим тождество

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1} \quad (2.8)$$

к паре операторов  $A = H - z$  и  $B = H_0 - z$ . Обозначим через  $R_0(z)$  резольвенту оператора кинетической энергии,  $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ . Получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} R(z) &= R_0(z) - R_0(z)VR(z), \\ R(z) &= R_0(z) - R(z)VR_0(z). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Эти тождества, с другой стороны, можно рассматривать как уравнения для резольвенты  $R(z)$ , называемые *уравнениями теории возмущений*. Можно показать, что такие уравнения однозначно определяют резольвенту при  $z$  вне спектра оператора  $H$ .

В качестве операторов  $A$  и  $B$  в (2.8) можно также выбрать произвольную пару  $H - z$  и  $H_{a_k} - z$ . Получим тогда новую серию тождеств:

$$R(z) = R_{a_k}(z) - R_{a_k}(z)\bar{V}_{a_k}R(z), \quad (2.10)$$

$$R(z) = R_{a_k}(z) - R(z)\bar{V}_{a_k}R_{a_k}(z), \quad (2.10')$$

где  $R_{a_k}(z) = (H_{a_k} - z)^{-1}$ . Оператор возмущения  $\bar{V}_{a_k}$  в этом случае описывает взаимодействие между подсистемами,

входящими в разбиение  $a_k$ ,

$$\bar{V}_{a_k} = V - V_{a_k}.$$

Как и выше, соотношения (2.10), рассматриваемые в качестве уравнений, однозначно определяют резольвенту при  $z$  вне спектра  $H$ . Отметим, что уравнения (2.9) представляют собой частный случай соотношений (2.10) при  $k = N$ .

Наконец, в качестве пары А и В можно выбрать операторы  $H_{a_l} - z$  и  $H_{a_k} - z$  для разбиений  $a_l$  и  $a_k$ , связанных отношением включения  $a_k \supset a_l$ . В результате получим семейство уравнений

$$\begin{aligned} R_{a_k}(z) &= R_{a_l}(z) - R_{a_l}(z) \bar{V}_{a_k}^{a_l} R_{a_k}(z), \\ R_{a_k}(z) &= R_{a_l}(z) - R_{a_k}(z) \bar{V}_{a_k}^{a_l} R_{a_l}(z), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где символ  $a_l$  может принимать значение разбиений, следующих за  $a_k$ ,  $a_l \subset a_k$ . Возмущение  $\bar{V}_{a_k}^{a_l}$  содержит лишь те потенциалы из разбиения  $a_k$ , которые не входят в  $V_{a_l}$ ,

$$\bar{V}_{a_k}^{a_l} = V_{a_k} - V_{a_l}.$$

**Операторы  $R_{a_k}(z)$ .** Опишем свойства операторов  $R_{a_k}(z)$ , которые играют роль ядер и свободных членов в этих уравнениях.

Заметим прежде всего, что в силу равенства (1.16) резольвента  $R_{a_k}(z)$  явно выражается через резольвенты внутреннего и внешнего гамильтонианов для разбиения  $a_k$   $r_{a_k}^{(int)}(z) = (h_{a_k}^{(int)} - z)^{-1}$  и  $r_{a_k}^{(ext)}(z) = (h_{a_k}^{(ext)} - z)^{-1}$  посредством интеграла

$$R_{a_k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta r_{a_k}^{(int)}(\zeta) r_{a_k}^{(ext)}(z - \zeta), \quad (2.12)$$

где интегрирование ведется по контуру, охватывающему спектр оператора  $h_{a_k}^{(int)}$  в отрицательном направлении. В свою очередь, резольвента  $r_{a_k}^{(int)}(z)$  связана с резольвентами составляющих разбиение  $a_k$  подсистем  $\omega_{l_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ )  $R_{\omega}(z) = (H_{\omega} - z)^{-1}$  с помощью  $(k-1)$ -крат-

пого интеграла

$$\begin{aligned} r_{a_k}^{(\text{int})}(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^{k-1}} \oint d\zeta_1 \oint d\zeta_2 \dots \\ &\dots \oint d\zeta_{k-1} R_{\omega_{l_1}}(\zeta_1) R_{\omega_{l_2}}(\zeta_2 - \zeta_1) R_{\omega_{l_k}}(\zeta_{k-1} - \zeta_{k-2}), \end{aligned}$$

где интегрирование относительно  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ) также ведется по контурам, охватывающим спектр операторов  $H_{\omega_{l_i}}$  в отрицательном направлении.

В импульсном представлении резольвенты  $r_{a_k}^{(\text{ext})}(z)$  сводится к оператору умножения на функцию  $(p_{a_k}^2 - z)^{-1}$ , так что интеграл (2.12) можно вычислить по вычетам. Получим следующее выражение для ядра резольвенты:

$$R_{a_l}(P, P', z) = r_{a_l}^{(\text{int})}(k_{a_l}, k'_{a_l}, z - p_{a_l}^2) \delta(p_{a_l} - p'_{a_l}). \quad (2.13)$$

Здесь через  $r_{a_l}^{(\text{int})}(k, k', z)$  обозначено ядро резольвенты внутреннего гамильтониана  $r_{a_l}^{(\text{int})}$ .

Согласно нашей гипотезе о строении дискретного спектра операторов энергии подсистем, ядра  $R_{a_l}(P, P', z)$  имеют полюсные особенности. Действительно, в собственном подпространстве резольвента  $r_{a_l}^{(\text{int})}$  действует как оператор умножения на  $(z + \kappa_A^2)^{-1}$ . Отсюда следует, что операторы  $P_A R_{a_l}$  задаются сингулярными ядрами

$$P_A R_{a_l}(P, P', z) = \frac{\Psi_A(k_A) \overline{\Psi_A(k'_A)}}{p_A^2 - \kappa_A^2 - z} \delta(p_A - p'_A). \quad (2.14)$$

Здесь явно выделена искомая полюсная особенность  $(p_A^2 - \kappa_A^2 - z)^{-1}$ .

Заметим, что оператор  $R_0(z)$ , равный в импульсном представлении оператору умножения на  $(P^2 - z)^{-1}$ , также можно представить в виде интегрального оператора с сингулярным ядром

$$R_0(P, P', z) = (P^2 - z)^{-1} \delta(P - P'). \quad (2.15)$$

Таким образом, ядра операторов  $R_{a_k}(P, P', z)$  имеют два типа особенностей — полюсные и  $\delta$ -образные. Так как эти ядра входят в уравнения теории возмущений

(2.10) как в качестве свободных членов, так и в качестве ядер интегральных операторов, естественно предположить, что аналогичные особенности будет иметь также и ядро резольвенты.

**Несвязные части.** Опишем особенности ядра  $R(P, P', z)$  типа  $\delta$ -функций. Введем сначала несколько определений. Ядро  $K(P, P')$ , имеющее  $\delta$ -образные особенности, будем называть *несвязным*. Несвязное ядро, в котором  $\delta$ -функции не зависят от внутренних координат  $k_{A_i}$  для разбиения  $a_i$ , будем называть  *$a_i$ -связным ядром*. При этом  $a_i$ -связное ядро является гладким. Мы будем называть такие ядра *связными*.

В случае системы двух тел ядро резольвенты может быть разбито на сумму связной и несвязной частей с помощью тождества (2.9). В этом тождестве ядро первого слагаемого несвязно, а ядро второго слагаемого

$$(R_0 V R)(p, p', z) = (p^2 - z)^{-1} \int V(p - p'') R(p'', p', z) dp'' \quad (2.16)$$

является гладкой функцией при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ .

Чтобы произвести аналогичное разбиение в системах нескольких частиц, будем последовательно применять тождества (2.9) и (2.10) и переходить от  $a_k$ -связной части к  $a_{k-1}$ -связной части ( $k = N - 1, N - 2, \dots, 2$ ). На первом шаге получаем представление

$$R(z) = R_0(z) - \sum_{a_{N-1}} R_0(z) V_{a_{N-1}} R(z),$$

где слагаемые под знаком суммы имеют  $a_{N-1}$ -связные ядра. На втором шаге применим тождество (2.10) для операторов  $R_{a_{N-1}}(z)$  и  $R(z)$  и затем представим оператор возмущения  $\bar{V}^{a_{N-1}}$  в виде суммы:

$$\bar{V}^{a_{N-1}} = \sum_{a_{N-2} \supset a_{N-1}} \bar{V}_{a_{N-2}}^{a_{N-1}}.$$

Получим представление

$$R(z) = R_0(z) - \sum_{a_{N-1}} R_0 V_{a_{N-1}} R_{a_{N-1}} + \sum_{a_{N-1}} \sum_{a_{N-2} \supset a_{N-1}} R_0 V_{a_{N-1}} R_{a_{N-1}} \bar{V}_{a_{N-2}}^{a_{N-1}} R(z),$$

где слагаемые во второй и третьей группах являются соответственно  $a_{N-1}$ - и  $a_{N-2}$ -связными.

Продолжим эту процедуру. На каждом шаге будем использовать тождество (2.10) для пары  $R_{a_{N-l}}$  и  $R(z)$  и заменять возмущение  $\bar{V}^{a_{N-l}}$  суммой:

$$\bar{V}^{a_{N-l}} = \sum_{a_{N-l-1} \supset a_{N-l}} \bar{V}_{a_{N-l-1}}^{a_{N-l}}.$$

После  $N - 1$  шагов получим представление

$$R(z) = R_0(z) + \sum_{l=2}^{N-1} \sum_{a_l} [R_{a_l}(z)]_c^{(a_l)} + \\ + \sum_{a_2} [R_{a_2}(z)]_c^{(a_2)} \bar{V}^{a_2} R(z), \quad (2.17)$$

где через  $[R_{a_l}]_c^{(a_l)}$  обозначена  $a_l$ -связная часть резольвенты  $R_{a_l}(z)$ :

$$[R_{a_l}]_c^{(a_l)} = \\ = \sum_{A_l} (-1)^{N-l} R_0 V_{a_{N-1}} R_{a_{N-1}} \bar{V}_{a_{N-2}}^{a_{N-1}} R_{a_{N-2}} \dots \bar{V}_{a_l}^{a_{l+1}} R_{a_l}.$$

Символ  $\sum_{A_l}$  означает суммирование по всем цепочкам разбиений  $A_l$  с фиксированным значением  $l$ .

Ясно, что ядра операторов  $[R_{a_2}]_c^{(a_2)} \bar{V}^{a_2}$  связны. Действительно, ядро оператора  $[R_{a_2}]_c^{(a_2)}$ , по построению, имеет единственную  $\delta$ -образную особенность  $\delta(p_{a_2} - p'_{a_2})$ , а ядро оператора  $\bar{V}^{a_2}$  является гладким по соответствующей переменной. Поэтому ядро произведения этих операторов является гладкой функцией при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ . По этой же причине гладкими будут и ядра операторов  $[R_{a_2}]_c^{(a_2)} \bar{V}^{a_2} R(z)$ .

Отметим, наконец, что первую группу слагаемых в формуле (2.17), которая называется *несвязной частью* резольвенты  $[R(z)]_{nc}$ , можно явно выразить через операторы  $R_{a_l}(z)$ .

Справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} [R(z)]_{nc} &= R_0(z) + \\ &+ \sum_{l=2}^{N-1} \sum_{a_l} \left( \Sigma_{i=1}^{(a_l)-1} \right) \left( \Sigma n_i^{(a_l)} - 1 \right)! (R_{a_l}(z) - R_0(z)). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь через  $n_i^{(a_l)}$  обозначено число подсистем разбиения  $a_l$ , состоящих из  $i$  частиц, так что  $\sum i n_i^{(a_l)} = N$ .

Доказательство этого равенства может быть получено обращением рассуждений, которые привели нас к представлению (2.17), и последующим приведением подобных членов.

Итак, мы представили операторы  $R(z)$  в виде суммы связных и несвязных частей. Ядра несвязных частей имеют  $\delta$ -функциональные особенности, а ядра связных частей являются гладкими функциями при комплексных  $z$ .

**Полюсные особенности.** Второй вид особенностей обязан своим происхождением полюсным сингулярностям ядер  $R_0$  и  $R_{a_k}$ . При этом особенности, отвечающие резольвенте оператора кинетической энергии  $(P^2 - z)^{-1}$ , существуют независимо от структуры дискретного спектра операторов энергии подсистем, а сингулярности по энергиям каналов  $(E_A(p_A) - z)^{-1}$  появляются лишь при наличии кластерных состояний. По этой причине мы часто будем называть последние кластерными особенностями.

Мы опишем полюсные особенности ядра резольвенты в терминах *операторов перехода*, которые определяются равенствами

$$U_{a_l b_k}(z) = \bar{V}_{b_k} + \bar{V}_{a_l} R(z) \bar{V}_{b_k}. \quad (2.19)$$

Домножая эти равенства на операторы  $R_{a_l}$  и  $R_{b_k}$  и применяя тождество (2.10), получим следующие представления для резольвенты  $R(z)$  в терминах операторов перехода:

$$R(z) = R_{b_k}(z) - R_{a_l}(z) U_{a_l b_k}(z) R_{b_k}(z). \quad (2.20)$$

Отметим, что оператор перехода при  $l = k = N$  называется *T-матрицей* и обозначается  $T(z)$ , так что

$$T(z) = V - VR(z)V. \quad (2.21)$$

Резольвента выражается через  $T$ -матрицу равенством

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)T(z)R_0(z). \quad (2.22)$$

Согласно последнему равенству, ядро резольвенты имеет полюсные особенности, которые отражает представление

$$R(P, P', z) = \frac{\delta(P - P')}{P'^2 - z} - \frac{T(P, P', z)}{(P^2 - z)(P'^2 - z)}. \quad (2.23)$$

Аналогично, равенство (2.20) позволяет явно выделить кластерные полюсные особенности  $(E_A(p_A) - z)^{-1}$  и  $(E_B(p'_B) - z)^{-1}$ . Действительно, умножим равенство (2.20) на оператор  $P_B$  справа. В силу (2.14) получим для ядра  $R(z)P_B$  представление

$$(RP_B)(P, P', z) = \frac{\Psi_B(k_B) \Psi_B^*(k_B)}{E_B(p'_B) - z} \delta(p_B - p'_B) - K_B(P, p'_B, z) \frac{\Psi_B^*(k'_B)}{E_B(p'_B) - z}, \quad (2.24)$$

где явно выделены особенности по переменной  $p'_B$ . В свою очередь ядро  $K_B(P, p'_B, z)$  имеет особенности по переменной  $P$ , которые определяются особенностями (2.14) ядер  $R_{a_l}$  в (2.20), так что

$$K_B(P, p'_B, z) = \sum_A \frac{\Psi_A(k_A)}{E_A(p_A) - z} K_{AB}(p_A, p'_B, z) + \tilde{K}_B(P, p'_B, z), \quad (2.25)$$

где суммирование ведется по всем детализованным разбиениям, включая  $A = 0$ : При этом, как это оговаривалось выше, по определению полагается  $\Psi_A \equiv 1$ ,  $\kappa_A^2 \equiv 0$  при  $A = 0$ . Ядро  $\tilde{K}$  уже полюсных особенностей не имеет.

Сопоставим ядру  $K_B(P, p'_B, z)$  интегральный оператор, действующий из канала  $\mathfrak{H}_B$  в пространство  $\mathfrak{H}$ . Этот оператор выражается через резольвенту равенством

$$\tilde{K}_B(z) = R(z)\bar{V}_B L_B \quad (2.26)$$

или, в терминах оператора перехода,

$$K_B(z) = R_0(z)U_{0B}(z)L_B.$$

Аналогично, ядрам  $K_{AB}(p_A, p'_B, z)$  можно сопоставить

операторы перехода  $K_{AB}(z)$ , действующие из канала  $B$  в канал  $A$ . При  $A \neq 0$  справедливо представление

$$K_{AB}(z) = L_A^{-1} U_{AB}(z) L_B, \quad (2.27)$$

а при  $A = 0$  эти операторы можно задать равенством

$$K_{0B}(z) = \left(1 - \sum_A P_A\right) K_B(z).$$

Эти соотношения понадобятся нам в следующем параграфе.

Важную роль в различных вычислениях играет свойство разделимости полюсных особенностей:

*сингулярные знаменатели  $P^2 - z$  и  $E_A(p_A) - z$  не обращаются в нуль одновременно, так что многообразия, на которых они сосредоточены, не пересекаются.*

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим разность  $\delta I = (P^2 - z) - (p_A^2 - \kappa_A^2 - z)$ , которая в силу равенства  $P^2 = k_A^2 + p_A^2$  может быть записана в виде  $\delta I = k_A^2 + \kappa_A^2$ , что влечет строгое неравенство  $\delta I \geq \varepsilon > 0$ .

Более того, не пересекаются и кластерные особенности для разбиений  $a_l$  и  $a_{l+1}$ , следующих одно за другим. Действительно, пусть разбиение  $a_{l+1}$  получено из  $a_l$  делением подсистемы  $\Omega$  на две части  $\omega$  и  $\omega'$ . Заметим, что тогда справедливо равенство  $p_{a_{l+1}}^2 = p_{a_l}^2 + k_{\omega\omega'}^2$ . Поэтому разность

$$\delta I_l = (p_{a_{l+1}}^2 - \kappa_{I_{a_{l+1}}}^2 - z) - (p_{a_l}^2 - \kappa_{I_{a_l}}^2 - z)$$

может быть представлена в виде

$$\delta I_l = k_{\omega\omega'}^2 + (\kappa_{I_{a_l}}^2 - \kappa_{I_{a_{l+1}}}^2).$$

Заметим, наконец, что из предположения о структуре дискретного спектра гамильтонианов подсистем вытекает неравенство  $\kappa_{I_{a_{l+1}}}^2 > \kappa_{I_{a_l}}^2$ , что гарантирует положительность разности  $\delta I_l$ . Из доказанного утверждения следует, что не пересекаются также особенности для произвольных кластерных разбиений  $a_l$  и  $a_k$ , связанных отношением включения  $a_l \supset a_k$ .

Кроме особенностей, которые мы сопоставляем состоянием рассеяния, ядро резольвенты имеет полюса на вещественной оси при  $z = -E_i$ , отвечающие связанным состояниям системы  $N$  тел  $\psi_i$ . Справедливо

представление

$$R(P, P', z) = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\psi_i(P) \psi_i^*(P')}{z + E_i} + \tilde{R}(P, P', z),$$

где оператор  $\tilde{R}(z)$  ограничен в окрестности точек дискретного спектра. Напомним, что по предположению о строении дискретного спектра многочастичных гамильтонианов собственные значения  $-\kappa_A^2$  удовлетворяют неравенствам  $-E_i < \min_A \kappa_A^2$ .

Чтобы закончить исследование особенностей резольвенты, мы коротко опишем полюсные сингулярности операторов  $R_{a_l}(z)$ , которые входят в несвязную часть резольвенты, и тем самым установим соотношение между  $\delta$ -функциональными и полюсными особенностями.

Оператору  $H_{a_l}$  соответствует задача рассеяния для системы  $N$  тел, в которой выключены взаимодействия между входящими в разбиение  $a_l$  подсистемами. Для исследования особенностей резольвенты этого оператора можно применить тождество (2.11) при  $k > l$ . Повторяя рассуждение, которое мы провели в случае оператора  $H$ , придем к выводу, что особенности  $R_{a_l}(z)$  описываются теми же соотношениями, что и в случае резольвенты  $R(z)$ , с той разницей, что индексы  $B, A$  в (2.24), (2.25) должны принимать допустимые значения:  $b_j \subset a_l$ ,  $a_k \subset a_l$ .

С другой стороны, задача рассеяния для оператора  $H_{a_l}$  является вырожденной и резольвента  $R_{a_l}(z)$  явно описывается в терминах внутреннего гамильтониана  $h_{a_l}^{(int)}$ , а резольвента последнего — через резольвенты операторов энергии подсистем. Поэтому все коэффициенты при полюсных особенностях можно явно выразить через операторы перехода для подсистем. Таким образом, вычисление этих коэффициентов сводится к решению набора задач рассеяния для меньшего числа частиц, которые должны считаться заданными при рассмотрении проблемы  $N$  тел.

### § 3. Полюсы резольвенты и волновые операторы

В этом параграфе мы выразим волновые операторы и оператор рассеяния в терминах операторов перехода.

**Ядра волновых операторов.** Согласно представлению (2.24), ядро оператора  $R(z)L_A$  при  $z = E_A(p'_A) \pm i\varepsilon$

выражается через ядра операторов перехода равенством

$$(RL_A)(P, p'_A, E_A(p'_A) \pm i\varepsilon) = \\ = \frac{-1}{\mp i\varepsilon} (\psi_A(k_A) \delta(p_A - p'_A) - K_A(P, p'_A, E_A(p'_A) \pm i\varepsilon)). \quad (2.28)$$

Подставляя это равенство в формулу (2.3) и переходя к пределу  $\varepsilon \downarrow 0$ , получим следующее представление:

$$U_A^{(\pm)}(P, p'_A) = \psi(k_A) \delta(p_A - p'_A) - \\ - K_A(P, p'_A, E_A(p'_A) \pm i0). \quad (2.29)$$

Альтернативно, в соотношении (2.28) можно выделить полюсную особенность  $(P^2 - E_A(p'_A) \mp i\varepsilon)^{-1}$ , отвечающую резольвенте  $R_0(z)$ . Получим представление

$$U_A^{(\pm)}(P, p'_A) = \psi_A(k_A) \delta(p_A - p'_A) - \frac{T_A(P, p'_A, E_A(p'_A) \pm i0)}{P^2 - E_A(p'_A) \mp i0},$$

где через  $T_A(z)$  обозначено ядро оператора из  $\mathfrak{H}_A$  в  $\mathfrak{H}$ , задаваемого равенством  $T_A(z) = U_{0A}(z)L_A$ . При  $A=0$  оператор  $T_A$  совпадает с  $T$ -матрицей и это представление принимает следующий вид:

$$U_0^{(\pm)}(P, P') = \delta(P - P') - \frac{T(P, P', P'^2 \pm i0)}{P^2 - P'^2 \mp i0}. \quad (2.30)$$

Согласно (2.25), ядро  $T_A$  имеет кластерные особенности, так что его можно записать в виде суммы

$$T_A(P, p'_A, z) = \sum_B \frac{\Phi_B(k_B)}{E_B(p_B) - z} K_{BA}(p_B, p'_A, z) + \\ + \tilde{T}_A(P, p'_A, z).$$

Здесь через  $\Phi_A$  обозначена функция, которая выражается через  $\psi_A$  равенством

$$\Phi_A(k_A) = (k_A^2 + \kappa_A^2) \psi_A(k_A). \quad (2.31)$$

Эту функцию называют *форм-фактором*. При выводе этого соотношения мы использовали тождество

$$\frac{-1}{P^2 - z} \frac{\Phi_A(k_A)}{E_A(p_A) - z} = \psi_A(k_A) \left( \frac{1}{P^2 - z} - \frac{1}{E_A(p_A) - z} \right). \quad (2.32)$$

Наряду с полюсными особенностями, ядра  $T_A(P, p'_A, z)$  имеют  $\delta$ -функциональные особенности, отвечающие несвязной части резольвенты. Последние, однако, существуют лишь в том случае, если детализованное разбиение состоит из трех или большего числа кластеров. В случае, если это разбиение состоит из двух кластеров, ядро  $T_A$   $\delta$ -функциональных особенностей не имеет. Доказательство этого факта основано на явных представлениях (2.18) для несвязной части резольвенты.

Отметим, что волновые операторы подчиняются интегральным уравнениям теории возмущений, которые отличаются от аналогичных уравнений для резольвенты лишь свободными членами. Чтобы получить такие уравнения, умножим соотношение (2.10) справа на  $\mp ieL_A$ , положим  $z = E_A(p'_A) \pm ie$  и перейдем к пределу  $e \downarrow 0$ . Учитывая равенство (2.3), найдем следующее интегральное уравнение второго рода:

$$\begin{aligned} U_A^{(\pm)}(P, p'_A) &= L_A(P, p'_A) - \\ &- \int (R_A \bar{V}_A)(P, P'', E_A(p'_A) \pm i0) U_A(P'', p'_A). \end{aligned} \quad (2.33)$$

В операторной форме они выглядят следующим образом:

$$U_A^{(\pm)} = L_A - R_A(E_A \pm i0) \bar{V}_A U_A^{(\pm)}.$$

Естественно было бы положить эти уравнения в основу альтернативного определения волновых операторов и изучить с их помощью свойства ядер последних. Мы покажем далее, что в случае систем двух частиц такой подход действительно даёт возможность обосновать постановку задачи рассеяния. При этом главное свойство этих уравнений при  $N = 2$  состоит в том, что к ним применима альтернатива Фредгольма. Данное свойство, однако, пропадает в случае систем трех и большего числа частиц.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим уравнение (2.10), порожденное детализированным разбиением  $A$ , и умножим его на оператор  $\mp ieL_B$  для детализированного разбиения  $B$ , отличного от  $A$ . В пределе  $e \downarrow 0$  неоднородный член аннулируется, так что для оператора  $U_B^{(\pm)}$  получим однородное уравнение:

$$U_B^{(\pm)} = -R_A(E_B \pm i0) \bar{V}_A U_B^{(\pm)}.$$

Сравнивая это уравнение с (2.33), приходим к заключению, что к уравнению (2.33) не применима альтернатива Фредгольма. Ясно при этом, что отвечающий ему оператор имеет непрерывный спектр.

Указанная трудность делает невозможным прямое использование уравнений теории возмущений для обоснования постановки задачи рассеяния при  $N > 3$ . Поэтому следующая задача состоит в том, чтобы получить интегральные уравнения для волновых операторов, к которым была бы применима альтернатива Фредгольма. Выводом таких уравнений мы займемся в первую очередь в следующей главе.

**Оператор рассеяния.** Выразим ядра матричных элементов оператора рассеяния в терминах операторов перехода. С этой целью удобно воспользоваться их нестационарным определением (1.39). Применяя равенство (2.6) и учитывая затем соотношения (2.24) и (2.25), получим интегральное представление, в котором интегрирование ведется по контуру, охватывающему спектр оператора  $H$ . Заметим далее, что подынтегральное выражение не имеет особенностей в нижней полуплоскости, и продеформируем контур интегрирования в прямую  $\lambda + i\varepsilon$ ,  $-\infty < \lambda < \infty$ , параллельную вещественной оси. Придем к следующему представлению:

$$\begin{aligned} S_{BA}(p_B, p'_A) = & \frac{1}{2\pi i} \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left( \frac{\delta\psi(p_B, p'_A, \lambda)}{E_A(p'_A) - \lambda - i\varepsilon} + \right. \\ & \left. + \frac{K_{BA}(p_B, p'_A, \lambda + i\varepsilon)}{(E_B(p_B) - \lambda - i\varepsilon)(E_A(p'_A) - \lambda - i\varepsilon)} \right) \times \\ & \times \exp \left\{ +i(E_B(p_B) - \lambda - i\varepsilon)t_1 - i(E_A(p'_A) - \lambda - i\varepsilon)t_2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} \delta\psi(p_B, p'_A, \lambda) = & \\ = & \int dP'' L_B(P'', p_B) L_A(P'', p'_A) + \widetilde{K}_A(P, p'_A, \lambda + i\varepsilon). \end{aligned}$$

Результат предельного перехода в этой формуле определяется соотношением между положением полюсных особенностей и характером осцилляции экспонент при  $t_{1,2} \rightarrow \pm\infty$ . Взаимосвязь между этими факторами такова,

что конечный предел существует лишь для тех слагаемых резольвенты, полюсные особенности которых совпадают с нулями показателей экспоненты. При этом для вычисления предела следует учесть соотношение:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{e^{\mp ixt}}{x \pm i0} = \begin{cases} \mp 2\pi i \delta(x), & t \rightarrow \pm \infty, \\ 0 & , t \rightarrow \mp \infty. \end{cases} \quad (2.35)$$

Из этих соотношений вытекает, что первое слагаемое, которое отвечает функции  $\delta\phi$ , дает нетривиальный вклад  $\delta(p_A - p'_A)$  только при  $A = B$ , а в остальных случаях его предел равен нулю. Предел, который порождается ядром  $K_{BA}$ , равен произведению  $\delta$ -функции  $\delta(E_B(p_B) - E_A(p'_A))$  на ядро  $K_{BA}$ . В результате получаем равенство

$$\begin{aligned} S_{BA}(p_B, p'_A) &= \delta_{AB} \delta(p_A - p'_B) - \\ &- 2\pi i \delta(E_B(p_B) - E_A(p'_A)) K_{BA}(p_B, p'_A, E_A(p'_A) + i0). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Здесь индексы  $B$  и  $A$  пробегают значения всех капалов, включая  $A, B = 0$ .

Отметим, что если в соотношении (2.34) выполнить только предельный переход  $t_2 \rightarrow -\infty$ , то на основании (2.24) и (2.25) получим следующее представление:

$$S_{BA} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} i\epsilon e^{i(E_B - E_A)t} L_B^{-1} R(E_A + i\epsilon) L_A.$$

Итогом приведенных выше рассуждений являются формулы, имеющие простой смысл. Рассмотрим ядро резольвенты  $R(P, P', z)$  как функцию трех переменных. Тогда соотношения (2.29) и (2.30) показывают, что ядра волновых операторов совпадают с вычетом этой функции в полюсах, отвечающих второму аргументу,  $(P'^2 - z)^{-1}$  и  $(E_A(p'_A) - z)^{-1}$ . Если затем рассмотреть ядра волновых операторов как функции двух переменных, то ядра матрицы рассеяния можно отождествить с вычетами этой функции по первому аргументу.

Таким образом, волновые операторы и матрицу рассеяния можно определить как коэффициенты при полюсах ядра резольвенты в импульсном представлении, взя-

тые при специальных значениях «энергетических» переменных  $E_A(p_A)$  и  $E_B(p'_B)$ , которые определяются законами сохранения энергии в процессах рассеяния. В соответствии с этой ролью ядер  $T(z)$ ,  $K_A(z)$ ,  $K_{AB}(z)$  функцию  $T(P, P', P'^2 \pm i0)$  называют  $T$ -матрицей на полуэнергетической поверхности, ядра  $K_A(P, p'_A, E_A(p'_A) \pm i0)$  — компонентами  $T$ -матрицы на полуэнергетической поверхности и ядро  $T(P, P', P'^2 + i0)$  при  $P^2 = P'^2$  и ядра  $K_A(P, p'_A, E_A(p'_A) + i0)$  при  $P^2 = E_A(p'_A)$ ,  $K_{AB}(p_A, p'_B, E_B(p'_B) + i0)$  при  $E_A(p_A) = E_B(p'_B)$  —  $T$ -матрицей и ее компонентами на энергетической поверхности.

**Интегральные представления.** Ядра оператора рассеяния можно выразить непосредственно через волновые функции с помощью интегральных представлений. Чтобы получить такие представления, обратимся к соотношениям (2.24), (2.10) и (2.30). Рассмотрим ядра операторов в (2.20) при  $z = E_B(p_B) + i\varepsilon$ ,  $E_A(p'_A) = E_B(p_B)$ . Умножим это соотношение на  $i\varepsilon L_B^*$  слева и на оператор  $L_A$  справа и перейдем к пределу  $\varepsilon \downarrow 0$ , учитывая при этом равенство

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon L_B^* R(E_B + i\varepsilon) = U_B^{(-)*},$$

сопряженное к (2.3). Получим следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} K_{BA}(p_B, p'_A, E_A(p'_A) + i0) &= \\ &= \int U_B^{(-)*}(X, p_B) \bar{V}_A(X) L_A(X, p'_A) dX, \quad (2.37) \end{aligned}$$

где импульсные переменные лежат на энергетической поверхности  $E_A(p'_A) = E_B(p_B)$ . Здесь, как и в (2.36), индексы  $A$  и  $B$  могут принимать все значения, включая  $A, B = 0$ .

Отсюда хорошо виден физический смысл ядер  $K_{BA}$ . В согласии с правилами теории возмущений, эти ядра определяются матричными элементами потенциала «возмущения», вычисленными между начальным  $L_A$  и конечным  $U_B^{(-)}$  состояниями системы.

## § 4. Особенности резольвенты для систем заряженных частиц

Этот параграф посвящен описанию основных особенностей ядра резольвенты и волновых операторов для систем заряженных частиц. Мы также приведем здесь выражения для ядер оператора рассеяния через коэффициенты при этих особенностях.

**Резольвента и волновые операторы.** В предыдущем параграфе мы описали основные особенности ядер резольвенты и волновых операторов для систем нейтральных частиц. Термин «основные» здесь употребляется в том смысле, что именно эти сингулярности ответственны за существование нетривиальных пределов (2.3), определяющих волновые операторы и  $S$ -матрицу. Характер особенностей мы определили с помощью уравнений (2.10) на основе гипотезы о строении ядер  $R_{a_l}(z)$ . Такой путь исследования особенностей неприменим, однако, в случае дальнодействующих потенциалов. Дело в том, что операторы  $H_{a_l}$  неправильно описывают асимптотическую динамику заряженных частиц, так что мы не можем судить об особенностях резольвенты, исходя из соображений аналогии.

Тем не менее, определенную информацию о характере особенностей можно получить, не обращаясь к уравнениям теории возмущений, если проанализировать формулы (2.7) в предположении, что пределы существуют. Более точно, можно поставить вопрос о том, как следует модифицировать полюсные особенности резольвенты, чтобы обеспечить существование пределов (2.7).

Перейдем к анализу формул (2.6), (2.7). Мы видели в предыдущем параграфе, что из-за стремящегося к нулю множителя  $\epsilon$  конечные пределы в формуле (2.3) имеют лишь те слагаемые, которые содержат полюсные особенности  $(E_A - z)^{-1}$ , отвечающие рассматриваемому детализированному разбиению  $A$ . В случае заряженных частиц полюсные особенности уже не обеспечивают существование предела модифицированного выражения (2.7). Однако, если сделать гипотезу, что полюса  $(E_A - z)^{-1}$  преобразуются в кулоновские искаженные полюсы  $(E_A - z)^{-1 \pm i\eta_A}$ , то мы немедленно получим конечный результат в пределе  $\epsilon \downarrow 0$ .

Действительно, обратимся к соотношению (2.7). Согласно нашей гипотезе, справедливо представление

$$(RP_A)(P, P', z) = K_A(P, p'_A, z) \frac{\Psi_A(k'_A)}{(E_A(p'_A) - z)^{1+i\eta_A}}, \quad (2.38)$$

где ядро  $K_A$  определено как обобщенная функция на поверхности  $E_A(p'_A) = z$ . Ясно, что значение интеграла (2.6) определяется сингулярным множителем  $(E_A(p'_A) - z)^{-1+i\eta_A}$ , а функцию  $K_A(P, p'_A, z)$  можно вынести из-под знака интеграла в точке  $z = E_A(p'_A) \pm i0$ . В результате приходим к интегралу

$$I_{\pm} = \oint dz (z - E_A \mp ie)^{-1+i\eta_A} (E_A - z)^{-1+i\eta_A},$$

где интегрирование ведется по контуру, примыкающему к вещественной оси. При этом точка  $E_A \mp ie$  и вещественная ось расположены по разные стороны контура. Интеграл  $I_{\pm}$  явно вычисляется:  $I_{\pm} = \frac{\pm 2 \operatorname{sh} \pi \eta}{ie \eta}$ . В итоге, для модифицированного волнового оператора получаем следующее представление:

$$U_A^{(\pm)}(P, p'_A) = \frac{\operatorname{sh} \pi \eta_A(p'_A)}{\pi \eta_A(p'_A)} K_A(P, p'_A, E_A(p'_A) \pm i0). \quad (2.39)$$

Замечательное отличие этой формулы от аналогичного соотношения для нейтральных частиц заключается в отсутствии  $\delta$ -функциональных слагаемых  $\delta(p_A - p'_A) \Psi_A(k_A)$ . Последние возникали в системах нейтральных частиц от резольвент операторов  $H_{a_k}$ . В случае заряженных частиц сильный предел соответствующих слагаемых равен нулю.

Мы уже отмечали в начале этой главы, что формула (2.1) не слишком удобна, поскольку под знаком интеграла фигурирует комплексная степень резольвенты. Полученные в этом параграфе соотношения (2.39) показывают, что ядра волновых операторов все же линейно выражаются через компоненты ядер резольвенты, так что комплексный показатель можно отнести к параметру  $\epsilon$ . Сравнивая (2.7) и (2.39), получим искомую модифицирован-

ную формулу, аналогичную (2.5):

$$\begin{aligned} U_A^{(\pm)}(P, p'_A) = & \frac{\operatorname{sh} \pi \eta'_A}{\pi \eta'_A} \times \\ & \times \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\mp i\varepsilon)^{1 \mp i\eta'_A} \int R(P, P', E_A(p'_A) \pm i\varepsilon) \times \\ & \times \psi_A(k'_A) dk'_A, \quad \eta'_A = \eta_A(p'_A). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Эту формулу можно также переписать в произвольном представлении:

$$U_A^{(\pm)} = \frac{\operatorname{sh} \pi \eta_A}{\pi \eta_A} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\mp i\varepsilon)^{1 \mp i\eta_A} R(E_A \pm i\varepsilon) L_A. \quad (2.41)$$

**Оператор рассеяния.** Для вычисления ядер оператора рассеяния, как и в случае нейтральных частиц, воспользуемся их пестационарным определением (1.40). В согласии с нашей гипотезой, мы предполагаем верным представление

$$\begin{aligned} K_A(P, p'_A, z) = & \\ = & \sum_B \frac{\psi_B(k_B)}{(E_B(p_B) - z)^{1-i\eta_A(\sqrt{z})}} K_{BA}(p_B, p'_A, z) + \tilde{K}_A(P, p'_A, z). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Соответственно, для матричного элемента  $S_{BA}$  получаем формулу, аналогичную (2.34):

$$\begin{aligned} S_{BA}(p_B, p'_A) = & \\ = & \frac{1}{2\pi i} \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int d\lambda \frac{\exp \{i(E_B(p_B) - \lambda - i\varepsilon)t_1 + i\eta_A \ln t_1\}}{(E_B(p_B) - \lambda - i\varepsilon)^{1-i\eta_B(p_B)}} \times \\ & \times K_{BA}(p_B, p'_A, \lambda + i\varepsilon) \times \\ & \times \frac{\exp \{-i(E_A(p'_A) - \lambda - i\varepsilon)t_2 + i\eta_A(p'_A) \ln (-t_2)\}}{(E_A(p'_A) - \lambda - i\varepsilon)^{1-i\eta_A(p'_A)}}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

результат предельного перехода в (2.43) определяется соотношением между быстро осциллирующими экспонен-

тами и сингулярными знаменателями, которое выражается формулами:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-ixt+i\eta \ln t}}{(x \pm i0)^{1-i\eta}} = \begin{cases} -2\pi i \delta(x) \frac{e^{-\pi\eta/2}}{\Gamma(1-i\eta)}, \\ 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Это дает следующее представление:

$$S_{BA}(p_B, p'_A) = -2\pi i \frac{\exp\left\{-\frac{\pi}{2}(\eta_B(p_B) + \eta_A(p'_A))\right\}}{\Gamma(1-i\eta_B(p_B)) \Gamma(1-i\eta_A(p'_A))} \times \\ \times \delta(E_B(p_B) - E_A(p'_A)) K_{BA}(p_B, p'_A, E_A(p'_A) + i0). \quad (2.45)$$

Отметим, что, как и в случае обобщенных волновых операторов, диагональные элементы оператора рассеяния не содержат  $\delta$ -функциональных слагаемых. Эти ядра оказываются пропорциональными коэффициентам ядра резольвенты при искаженных полюсах.

Итак, мы описали основные особенности резольвенты в случае дальнодействующих потенциалов. Согласно нашей гипотезе, ядро резольвенты может быть представлено в виде

$$R(P, P', z) = \\ = \sum_A \sum_B \frac{\psi_A(k_A)}{(E_A(p_A) - z)^{1-i\eta_A(\sqrt{z})}} \widetilde{T}(p_A, p'_B, z) \times \\ \times \frac{\psi_B^*(k'_B)}{(E_B(p'_B) - z)^{1-i\eta_B(\sqrt{z})}}, \quad (2.46)$$

где суммирование ведется по всем детализированным разбиениям, включая  $A, B = 0$ . Мы, однако, ничего не можем сказать о свойствах функций  $\widetilde{T}(p_A, p'_B, z)$  и, в частности, о том, какие сингулярности возникают вместо  $\delta$ -функций несвязной части резольвенты.

В том, что такие сингулярности существуют, можно убедиться на примере задачи двух тел, где решение задачи рассеяния известно в явном виде. Мы увидим далее, что в окрестности энергетической поверхности  $p^2 =$

$= p'^2 = z$  ядро кулоновской  $T$ -матрицы может быть записано в виде

$$T_c(p, p', z) \sim \frac{\gamma q_1 q_2}{\pi} \frac{\eta(z) \cdot (4z)^{-i\eta(z)}}{(e^{\pi\eta(z)} - 1) |p - p'|^{2(1+i\eta(z))}},$$

где  $\eta(z) = \frac{\gamma q_1 q_2 \sqrt{\mu_{12}}}{\sqrt{2z}}$ . Из этой формулы следует, что па поверхности энергии  $p^2 = p'^2 = z$  ядро  $T_c(p, p', z)$ , а значит и ядро  $\tilde{T}(p, p', z)$  из (2.4б), имеет сильную особенность  $(1 - \cos \theta)^{1+i\eta}$ , где  $\cos \theta = (\hat{p}, \hat{p}')$ . Данная особенность является неинтегрируемой на единичной сфере. Поэтому ядро  $T_c(p, p', z)$  нужно понимать как некоторую обобщенную функцию. Мы определим такую функцию в главе V.

## Г л а в а III

---

### МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе мы опишем стационарный метод обоснования задачи рассеяния, основанный на линейных интегральных уравнениях.

Как мы видели выше, решение задачи рассеяния в стационарном формализме сводится к исследованию особенностей ядра резольвенты. Мы покажем, что интегральные уравнения являются подходящим средством для однозначного определения резольвенты и описания ее особенностей. Эти же уравнения могут также служить основой для численных расчетов.

В этой главе мы будем действовать в импульсном представлении. В этом случае удобно изучать не саму резольвенту, а  $T$ -матрицу (2.22), ядро которой имеет меньше сингулярностей, чем ядро резольвенты. Вопросы, возникающие при переходе в координатное пространство, мы обсудим в следующей главе.

Мы будем придерживаться следующего плана. В § 1 мы рассмотрим систему двух частиц. Здесь мы опишем основные технические приемы, которые используются для исследования интегральных уравнений. Этот параграф будет эталоном для последующего изложения в § 2, 3, где рассмотрена система трех и большего числа частиц.

Мы не будем, однако, касаться вопросов обоснования гипотезы об асимптотической полноте. Этот круг задач будет рассмотрен в главе VI.

#### § 1. Интегральное уравнение для $T$ -матрицы в системе двух частиц

Рассмотрим резольвенту оператора энергии системы двух частиц  $h$ ,  $r(z) = (h - z)^{-1}$ . Как мы уже отмечали, в импульсном представлении удобно использовать  $T$ -матрицу, входящую в определение резольвенты:

$$r(z) = r_0(z) - r_0(z)t(z)r_0(z). \quad (3.1)$$

Уравнение теории возмущений для резольвенты

$$r(z) = r_0(z) - r_0(z)v r(z) \quad (3.2)$$

сводится к следующему уравнению для  $t(z)$ :

$$t(z) = v - vr_0(z)t(z). \quad (3.3)$$

Для вывода достаточно подставить  $r(z)$  в виде (3.1) в уравнение (3.2) и сократить лишние слагаемые и множители  $r_0(z)$ .

Уравнение (3.3) перепишем для ядра  $t(k, k', z)$  интегрального оператора  $t(z)$  в виде

$$t(k, k', z) = v(k - k') - \int v(k - q) \frac{1}{q^2 - z} t(q, k', z) dq. \quad (3.4)$$

Исследованию этого уравнения и будет посвящен настоящий параграф.

Роль переменных  $k$ ,  $k'$  и  $z$ , входящих в ядра  $t(k, k', z)$ , различна. Первый аргумент  $k$   $T$ -матрицы входит в интеграл справа как переменная интегрирования; таким образом, ядро  $t(k, k', z)$  является решением уравнения именно как функция  $k$ .

Переменные  $k'$  и  $z$  играют роль параметров,  $k'$  входит в виде параметра в свободный член  $v(k - k')$ , а  $z$  — в ядро  $v(k - q)(q^2 - z)^{-1}$ . Итак, в (3.4) мы имеем семейство интегральных уравнений второго рода вида

$$f = f_0(k') + a(z)f, \quad (3.5)$$

где неизвестная  $f$  является функцией переменной  $k$  и интегральный оператор  $a(z)$  выглядит следующим образом:

$$a(z)f(k) = \int \frac{v(k-q)}{q^2 - z} f(q) dq.$$

Свободный член  $f_0(k')$  зависит от переменной  $k'$ :

$$f_0(k') = v(k - k').$$

Преимущество уравнения (3.4) по сравнению с (3.2) в импульсном пространстве состоит в том, что в (3.4) входят только гладкие функции, в то время как в (3.2) свободный член  $r_0(z)$  является обобщенной функцией  $\delta(k - k')(k'^2 - z)^{-1}$ .

Мы используем уравнения (3.4) для определения оператора  $t(z)$  и описания его свойств. Интегральное урав-

нение пригодно для этих целей, если оно удовлетворяет альтернативе Фредгольма: уравнение имеет единственное решение (в заданном функциональном пространстве), если сопряженное однородное уравнение не имеет нетривиальных решений.

В нашем случае сопряженное однородное уравнение имеет вид

$$\psi(k) = \frac{1}{k^2 - z^*} \int v(k - q) \psi(q) dq, \quad (3.6)$$

а  $\psi(k)$  принадлежит классу функций таких, что

$$\left| \int \psi(k) f(k) dk \right| < \infty. \quad (3.6')$$

При выводе следует использовать самосопряженность ядра  $v(k - k')$ , которое следует из условия вещественности

$$\overline{v(k)} = v(-k).$$

Уравнение (3.6) немедленно переписываем как уравнение Шредингера

$$(k^2 - z^*) \psi(k) = - \int_{\mathbb{R}} v(k - q) \psi(q) dq$$

для собственных значений  $z^*$ .

Мы покажем, что альтернатива Фредгольма применима к уравнению (3.4). Соответствующий класс функций  $f(k)$  мы подберем так, что возможные решения однородного уравнения (3.6) будут принадлежать гильбертову пространству  $\mathfrak{H}$ , так что значения  $z^*$ , для которых эти уравнения имеют решения, будут дискретными собственными значениями оператора  $h$ . Использование этой информации позволит детально охарактеризовать ядро  $t(k, k', z)$ .

Начнем с фредгольмовости уравнения (3.4). Чтобы это уравнение было фредгольмовым, достаточно, чтобы  $a(z)$  был вполне непрерывным оператором. Грубо говоря, это означает, что он должен улучшать свойства функций  $f(k)$ , на которые он действует, т. е. делать их более гладкими и более быстро убывающими на бесконечности. Точный смысл этого утверждения содержится в многочисленной математической литературе, и мы не будем здесь ее копировать. Уравнения вида (3.5), где  $a(z)$  — вполне непрерывный оператор, мы также будем иногда называть *компактными уравнениями*.

Для подбора подходящего класса функций  $f(k)$  рассмотрим более подробно интеграл в уравнении (3.4), который имеет вид

$$I(z) = \int \frac{\phi(q) dq}{q^2 - z}. \quad (3.7)$$

Если функция  $\phi(q)$  ограничена и убывает на бесконечности,

$$|\phi(q)| \leq C(1 + |q|)^{-1-\theta}, \quad \theta > 0, \quad (3.8)$$

то этот интеграл сходится для всех  $z$ , не подходящих к положительной полуоси. Комплексную плоскость с разрезом на положительной части вещественной оси обозначим через  $\Pi_0$ . Можно сказать, что  $I(z)$  определен при всех  $z$  на  $\Pi_0$ , за исключением разреза. Для того чтобы  $I(z)$  имел конечный предел при выходе на разрез, мы должны наложить дополнительные ограничения на функции  $f(k)$ . Например, часто употребляется ограничение, называемое условием Гёльдера:

$$|\phi(q+h) - \phi(q)| \leq C(1 + |q|)^{-1-\theta} |h|^\alpha. \quad (3.9)$$

Если выполняются оба условия (3.8) и (3.9), то  $I(z)$  определено на всей плоскости  $\Pi_0$  и удовлетворяет условию Гёльдера по  $z$

$$|I(z + \Delta) - I(z)| \leq C |\Delta|^\alpha \quad (3.9')$$

всюду, кроме окрестности точки  $z = 0$ , где  $\alpha$  заменяется на  $\min(1/2, \alpha)$ . Константа  $C$  в (3.9') равномерна по  $z$  на  $\Pi_0$  и убывает при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Сформулированное утверждение будем называть *леммой о сингулярных интегралах* (в названии отражен тот факт, что интеграл  $I(z)$  становится сингулярным при вещественных положительных  $z$ ). Появление оговорки относительно окрестности  $z = 0$  имеет простое объяснение: в сферических координатах сингулярное ядро вида (3.7) имеет вид

$$\frac{x^{1/2} dx}{x - z}, \quad x = |q|^2,$$

и множитель  $\sqrt{x}$  в окрестности  $x = 0$  удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $1/2$ .

Лемма о сингулярных интегралах подсказывает класс функций  $f(k)$ , в которых уравнение (3.4) является фредгольмовым. Будем считать, что  $v(k)$  удовлетворяет

ограничениям типа (3.8) и (3.9):

$$\begin{aligned} |v(k)| &\leq C(1 + |k|)^{-1-\theta}, \\ |v(k+h) - v(k)| &\leq C(1 + |k|)^{-1-\theta}|h|^{\alpha} \end{aligned} \quad (3.10)$$

и что показатель  $\alpha$  превосходит  $1/2$ . Естественность последнего условия будет видна из дальнейшего. Пусть заданы функции  $f(k)$ , удовлетворяющие аналогичным условиям, но с другими, вообще говоря, показателями  $\theta'$  и  $\alpha'$ . Рассмотрим интегралы

$$g(k, z) = \int \frac{v(k-q) g(q)}{q^2 - z} dq. \quad (3.11)$$

Нас интересуют свойства  $g(k, z)$  как функции  $k$  при фиксированном  $z$  и нам нужно, чтобы они были лучше та-ковых функций  $f(k)$  как по гладкости, так и по убыва-нию. Этого легко достичь, так как зависимость  $g(k, z)$  от  $k$  определяется только функцией  $v(k)$ .

Более того, из леммы о сингулярных интегралах вытекают следующие оценки:

$$\begin{aligned} |g(k, z)| &\leq C(z)(1 + |k|)^{-1-\theta}, \\ |g(k+h, z) - g(k, z)| &\leq C(z)(1 + |k|)^{-1-\theta_1}|h|^{\alpha_1}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $\alpha_1$  может быть взято сколь угодно близким, но мень-ше, чем  $\alpha$ . Последнее обстоятельство связано с тем, что при оценке гёльдеровской гладкости  $g(k, z)$  малую часть этой гладкости надо оставить на  $v(k-q)$  как функцию переменной интегрирования  $q$  для применения леммы о сингулярных интегралах.

Показатели  $\theta'$  и  $\mu'$  совсем не участвуют в этих оцен-ках. Они определяют свойства  $g(k, z)$  как функции пере-менной  $z$ , которая, однако, в интегральном уравнении считается параметром. Именно этим наше интегральное уравнение отличается от так называемых сингулярных интегральных уравнений, в которых участвуют ядра вида  $\frac{1}{x-x'}$  с подвижными особенностями и которые не Фредгольмовы.

Итак, если показатели гладкости и убывания  $\alpha'$  и  $\theta'$  функции  $f(k)$  меньше, чем  $\alpha$  и  $\theta$  соответственно, то ин-тегральный оператор  $a(z)$  их улучшает и, таким образом, является вполне непрерывным,

Обратимся теперь к исследованию однородного уравнения (3.6), которое мы должны рассмотреть в классе функций  $\psi(k)$ , удовлетворяющих условию (3.6') для всех  $f(k)$  из нашего класса. Для таких  $\psi$  интеграл

$$\varphi(k) = \int v(k-q) \psi(q) dq \quad (3.13)$$

в правой части (3.6) определяет убывающие и гёльдеровские функции с показателями  $\theta - \theta'$  и  $\mu - \mu'$ , так как можно считать, что  $v(k-q)$  как функция  $q$  и  $k$  имеет показатели  $\theta'$  и  $\mu'$ , и  $\theta - \theta'$ , и  $\mu - \mu'$ . Уравнение для  $\varphi(k)$  имеет вид

$$\varphi(k) = \int \frac{v(k-q)}{q^2 - z^*} \varphi(q) dq \quad (3.14)$$

и из него следует, что  $\varphi(q)$  на самом деле имеет показатели  $\theta_1$  и  $\mu_1$ . При комплексных  $z$  отсюда следует, что

$$\psi(k) = \frac{\varphi(k)}{k^2 - z^*} \quad (3.15)$$

квадратично интегрируема, и таким образом  $\psi(k)$  является собственной функцией дискретного спектра. Таким образом, при комплексных  $z$  уравнение (3.6) не имеет нетривиальных решений.

Если  $z$  выходит на разрез, например,  $z = \lambda + i0$ ,  $\lambda > 0$ , то функция  $\psi(k)$  также остается квадратично интегрируемой. Действительно, из уравнения (3.14) и самосопряженности ядра  $v(k-k')$  следует, что

$$\int \overline{\varphi(k)} \frac{1}{k^2 - \lambda - i0} \varphi(k) dk$$

вещественно, что может иметь место только, если  $|\varphi(k)|^2 = 0$  при  $k^2 = \lambda$ . Вследствие гёльдеровости  $\varphi(k)$  особенность функции  $\psi(k)$  из (3.15) при  $k^2 = \lambda$  квадратично интегрируема. Более точно, в окрестности этой особенности имеем

$$|\psi(k)| = \frac{\varphi(k) - \varphi(\sqrt{\lambda} \hat{k})}{k^2 - \lambda} \leq C \frac{1}{|k^2 - \lambda|^{1-\alpha_1}}$$

и при  $\alpha_1 > 1/2$  эта особенность достаточно слаба. Именно в этом месте используется условие  $\alpha > 1/2$  для показателя гладкости функции  $v(k)$ .

Специально необходимо рассматривать случай  $z = 0$ , когда приведенные аргументы теряют силу. Как показы-

вают примеры, эта точка может быть как особой, так и неособой, причем в первом случае она необязательно является точкой дискретного спектра оператора  $h$ . Чтобы не обсуждать возникающие при этом вопросы, мы будем считать при изложении основного материала, что уравнение не имеет решения при  $z = 0$ . Случай, когда точка  $z = 0$  является особой, мы коротко обсудим в конце § 4.

Таким образом, однопородное уравнение (3.14) не имеет нетривиальных решений ни при каких  $z$  из  $\Pi_0$ , за исключением точек дискретного спектра оператора  $h$ .

С другой стороны, дискретный спектр оператора  $h$  хорошо изучен. Так, доказано, что если потенциал  $v(x)$  — довольно произвольная функция внутри шара конечного радиуса, а вне этого шара

$$|v(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\epsilon} \quad (3.16)$$

при  $\epsilon > 0$ , то положительный дискретный спектр оператора  $h$  отсутствует. Существуют также признаки конечности отрицательного спектра. Например, доказано, что если в условии (3.16)  $\epsilon > 2$ , то неположительный спектр оператора  $h$  состоит из конечного числа собственных значений конечной кратности.

Мы будем считать, что эти условия на потенциалы выполнены, так что дискретный спектр  $h$  является отрицательным и конечным. Соответствующие собственные функции  $\psi_i(k)$  представляются в виде (3.15), где  $z^* = -\omega_i^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ .

Итак, мы можем использовать изложенный формализм для исследования уравнения (3.4). Остается убедиться в том, что свободный член в этом уравнении лежит в введенном классе гельдеровских и убывающих функций. Последнее следует из оценок для  $v(k)$ , однако параметр  $k'$  делает соответствующие оценки неравномерными. Эту трудность легко поправить — достаточно вычесть из решения  $t(k, k', z)$  несколько первых итераций:

$$t^{(n)}(k, k', z) =$$

$$= (-1)^n \int dk_1 dk_2 \dots dk_n \frac{v(k - k_1)}{k_1^2 - z} \frac{v(k_1 - k_2)}{k_2^2 - z} \dots v(k_n - k').$$

Обобщая лемму о сингулярных интегралах, можно доказать для этих итераций оценку

$$|t^{(n)}(k, k', z)| \leq C(1 + |k|)^{\theta_1} (1 + |k'|)^{\theta_2}, \quad \theta_1 + \theta_2 < 1 + \theta,$$

при достаточно больших  $n$ . Для разности

$$\tilde{t}^{(n)}(k, k', z) = t(k, k', z) - \sum_{i=1}^n t^{(i)}(k, k', z)$$

справедливо тогда уравнение

$$\tilde{t}^{(n)}(k, k', z) = t^{(n+1)}(k, k', z) - \int \frac{v(k-q)}{q^2 - z} \tilde{t}^{(n)}(q, k', z), \quad (3.17)$$

где оценки для свободного члена уже равномерны относительно  $k'$  и  $z$ .

Таким образом, к уравнению (3.4) применима альтернатива Фредгольма. Поэтому, зная положение особых точек, мы можем охарактеризовать свойства ядра  $T$ -матрицы. Справедливо следующее утверждение.

*Ядро  $t(k, k', z)$  является убывающей гёльдеровской функцией  $k, k'$  и  $z$  при всех  $z$  на комплексной плоскости с разрезом  $\Pi_0$ , за исключением особых точек —  $\kappa_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ), которые являются точками дискретного спектра оператора  $h$ . В окрестности особых точек имеет место представление.*

$$t(k, k', z) = \sum_{i=1}^l \frac{\varphi_i(k) \varphi_i^*(k)}{z + \kappa_i^2} + \tilde{t}(k, k', z), \quad (3.18)$$

где  $\tilde{t}(k, k', z)$  — убывающая гёльдеровская функция при изменении  $z$  вплоть до вещественной оси.

Функции  $\varphi_i(k)$  определяются равенством (3.13) или, с учетом уравнения Шредингера,  $\varphi_i(k) = (k^2 + \kappa_i^2) \psi_i(k)$ , т. е. эти функции представляют собой форм-факторы для системы двух частиц.

Проверим представление (3.18). С этой целью запишем резольвенту  $r(z)$  в виде  $r(z) = \sum_i \frac{p_i}{z + \kappa_i^2} + \tilde{r}(z)$ , где  $p_i$  — проектор на соответствующее  $z = -\kappa_i^2$  собственное подпространство и  $\tilde{r}(z)$  — ограниченный в окрестностях  $z = -\kappa_i^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , оператор, аналитически зависящий от  $z$ . Соответственно; для  $T$ -матрицы  $t(z)$  получим следующее представление:

$$t(z) = \sum_i (z + \kappa_i^2)^{-1} c_i + \tilde{t}(z), \quad (3.19)$$

где  $c_i = v p_i v$ ,  $\tilde{t}(z) = v - v \tilde{r}(z) v$ .

Оператор  $p_i$  является интегральным оператором с ядром  $\psi_i(k)\psi_i^*(k)$ . Поэтому, в силу (3.13), ядро оператора  $c_i$  имеет вид произведения

$$c_i(k, k') = \varphi_i(k)\varphi_i^*(k'),$$

так что (3.18) справедливо.

Наконец, мы должны показать, что ядра  $\tilde{t}(k, k', z)$  являются убывающими гёльдеровскими функциями. Для этого мы воспользуемся следующими соображениями. Заметим, что в силу тождества Гильберта

$$r(z_1) - r(z_2) = (z_1 - z_2)r(z_1)r(z_2)$$

оператор  $t(z)$  подчиняется тождеству

$$t(z_1) - t(z_2) = (z_2 - z_1)t(z_1)r_0(z_1)r_0(z_2)t(z_2). \quad (3.20)$$

Последнее мы будем называть *тождеством Гильберта для T-матрицы*. Из этого тождества следует, в частности, что оператор  $t(z)$  является аналитической функцией  $z$  всюду на плоскости с разрезом  $\Pi_0$ , кроме особых точек  $-\kappa_i^2$ , причем

$$\frac{d}{dz}t(z) = t(z)r_0^2(z)t(z).$$

Эта функция может быть представлена в виде контурного интеграла:

$$t(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{t(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

где контур  $\gamma_{R,\epsilon}$  состоит из окружности радиуса  $R$ , отрезков  $[0, R]$ , примыкающих к вещественной оси, и окружности  $C_\epsilon$  радиуса  $\epsilon$  с центром в точках  $-\kappa_i^2$ . В свою очередь интеграл можно записать в виде суммы (3.19), где ядро  $\tilde{t}(k, k', z)$  задается равенством:

$$\tilde{t}(k, k', z) =$$

$$= v(k - k') + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty d\lambda (t(k, k', \lambda + i0) - t(k, k', \lambda - i0)).$$

Выражение под знаком интеграла в правой части преоб-

разуем с помощью тождества (3.20). В результате придем к представлению

$$\begin{aligned} \tilde{t}(k, k', z) = \\ = v(k - k') + \int dq t(k, q, q^2 + i0) (q^2 - z)^{-1} t(q, k', q^2 - i0). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Отсюда следует, что ядро  $\tilde{t}(k, k', z)$  при  $z$ , лежащих в окрестности особых точек —  $\omega_i^2$ , можно оценить через значения ядер  $t(k, k', z)$  при вещественных положительных  $z$ . Искомые оценки могут быть получены тогда на основе леммы о сингулярных интегралах.

На этом мы закончим описание свойств ядра двухчастичной  $T$ -матрицы.

Посмотрим, наконец, какие общие выводы можно сделать из проведенных рассуждений. Можно выделить три основных этапа исследования интегральных уравнений второго рода. Именно, мы должны:

1. Получить подходящие оценки для итераций интегральных уравнений.

2. На основе этих оценок подобрать функциональное пространство, в которое попадают эти итерации, хотя бы начиная с некоторого номера, и такое, что в терминах его элементов и операторов можно записать интегральное уравнение (или систему уравнений) в виде компактного уравнения.

3. Исследовать соответствующее однородное уравнение.

В следующем параграфе мы рассмотрим, как эта схема работает в случае задачи трех тел.

В заключение этого параграфа приведем ряд формул для волновых операторов и оператора рассеяния. Согласно (2.30), ядро волнового оператора  $u^{(\pm)}(k, k')$  имеет вид:

$$u^{(\pm)}(k, k') = \delta(k - k') - \frac{t(k, k', k'^2 \pm i0)}{k^2 - k'^2 \mp i0}. \quad (3.22)$$

Это ядро подчиняется интегральному уравнению второго рода

$$\begin{aligned} u^{(\pm)}(k, k') = \\ = \delta(k - k') - \frac{1}{k^2 - k'^2 \mp i0} \int v(k - q) u^{(\pm)}(q, k') dq, \end{aligned}$$

которое можно получить таким же способом, как и более общее уравнение (2.33). Если выделить  $\delta$ -функцию

$\delta(k - k')$  и множитель  $(k^2 - k'^2 \mp i0)^{-1}$ , то мы перейдем отсюда к уравнению для  $T$ -матрицы (3.4), где следует положить  $z = k'^2 \pm i0$ . По-доказанному, последнее уравнение имеет единственное решение и, следовательно, то же относится и к уравнению для  $u^{(\pm)}(k, k')$ .

Ядро оператора рассеяния выражается через  $T$ -матрицу равенством

$$s(k, k') = \delta(k - k') - 2\pi i \delta(k^2 - k'^2) t(k, k', k'^2 + i0), \quad (3.22')$$

которое следует из (2.36) в случае  $N = 2$ . Согласно (3.18), ядро  $t(k, k', z)$ , участвующее в этом представлении, является убывающей гёльдеровской функцией. Мы уже использовали это обстоятельство в главе I.

На этом мы закончим описание общих свойств  $T$ -матрицы и волновых операторов для системы двух частиц.

## § 2. Компактные интегральные уравнения для системы трех частиц

В этом параграфе мы получим интегральные уравнения для компонент трехчастичной  $T$ -матрицы и исследуем свойства ее ядра.

**Вывод компактных уравнений.** Опишем сначала обозначения для относительных координат и импульсов, которые удобно применять в задаче трех тел. Мы будем использовать три пары координат и импульсов  $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ ,  $\{k_\alpha, p_\alpha\}$ , которые были введены в первой главе формулами (1.9), (1.12'). При этом индексу  $\alpha$  будем присваивать значения 1, 2, 3, отвечающие свободной частице, которая не входит в подсистему из двух частиц. Например, пара координат (1.9), индуцированная разбиением (31)(2), принимает обозначения  $\{x_2, y_2\}$ . Различные относительные координаты и импульсы связаны между собой равенствами:

$$k_1 = c_{12}k_2 + s_{12}p_2, \quad c_{12} = -\left(\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)}\right)^{1/2},$$

$$p_1 = s_{12}k_2 - c_{12}p_2, \quad c_{12}^2 + s_{12}^2 = 1, \quad s_{12} = -s_{21}$$

при  $\alpha = 1, \beta = 2$ , и при остальных значениях  $\alpha$  и  $\beta$  — равенствами, которые получаются отсюда заменой номеров частиц.

Перейдем к выводу компактных уравнений. Рассмотрим уравнение для  $T$ -матрицы:

$$T(z) = V - VR_0(z)T(z). \quad (3.23)$$

Вывод этого уравнения ничем не отличается от вывода уравнения для системы двух тел. Возмущение в этом случае равно сумме парных потенциалов

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

и, соответственно,  $VR_0$  равно сумме

$$VR_0(z) = \sum_{\alpha} V_{\alpha} R_0(z).$$

Рассмотрим, например, оператор  $V_1 R_0(z)$ , участвующий в этом уравнении. В импульсном представлении он имеет ядро

$$v_1(k_1 - k'_1) \delta(p_1 - p'_1)(P'^2 - z)^{-1},$$

содержащее  $\delta$ -функцию, причем эта особенность не пропадает при итерациях уравнения (3.23). Это хорошо видно на диаграммах, которые можно сопоставить итерациям  $(V_1 R_0)^n$  (см. рис. 7). Линия, отвечающая третьей частице, остается несвязной в сколь угодно высоком порядке теории возмущений по потенциальному. Поэтому, в отличие от системы двух тел, у нас нет возможности свести уравнение (3.23) к уравнению с вполне непрерывным оператором в каком-либо функциональном пространстве.

Заметим, однако, что при перемножении операторов  $V_1 R_0(z)$  и  $V_2 R_0(z)$  при итерациях уравнения (3.23)  $\delta$ -функции исчезают. Действительно, при вычислении

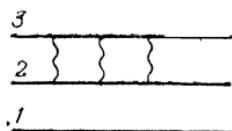


Рис. 7

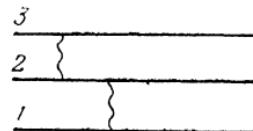


Рис. 8

ядра оператора  $V_1 R_0(z) V_2 R_0(z)$  мы можем взять в качестве переменных интегрирования переменные  $p_1$  и  $p_2$ , и  $\delta$ -функции пропадут при интегрировании. Аналогичное явление происходит при перемножении двух любых операторов типа  $V_i R_0(z)$  с разными индексами. Всем таким итерациям можно сопоставить связные диаграммы, изображенные на рис. 8.

Эти наводящие соображения подсказывают нам следующую процедуру построения удобных уравнений для исследования  $T$ -матрицы.

Рассмотрим операторы

$$M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} V_\alpha - V_\alpha R_0(z) V_\beta,$$

где индексы  $\alpha, \beta$  пробегают значения 1, 2, 3. Нетрудно проверить, что  $T$ -матрица выражается через операторы  $M_{\alpha\beta}$  следующим образом:

$$T(z) = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}(z). \quad (3.24)$$

С помощью уравнения (2.9) можно показать, что операторы  $M_{\alpha\beta}$  удовлетворяют уравнениям

$$M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} V_\alpha - V_\alpha R_0(z) \sum_\gamma M_{\gamma\beta}(z). \quad (3.25)$$

Система уравнений (3.25) ничем не лучше уравнения (3.23). Однако мы можем сделать следующее преобразование. Сумму в правой части разобьем на два слагаемых

$$V_\alpha R_0(z) M_{\alpha\beta}(z) + V_\alpha R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}(z)$$

и перенесем первое слагаемое в левую часть (3.25). Мы получим:

$$(I + V_\alpha R_0(z)) M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} V_\alpha - V_\alpha R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}(z).$$

Обратим, наконец, оператор  $I + V_\alpha R_0(z)$  в левой части. Чтобы вычислить результат обращения, рассмотрим оператор  $T_\alpha(z)$ , определенный соотношением:

$$T_\alpha(z) f(P) = \int t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z - p_\alpha^2) f(k'_\alpha, p_\alpha) dk'_\alpha.$$

Здесь через  $t_\alpha(k, k', z)$  мы обозначили решение уравнения (3.4) с  $v_\alpha(k)$  в качестве  $v(k)$ . С помощью этого уравнения нетрудно показать, что  $T_\alpha(z)$  подчиняется уравнениям

$$T_\alpha(z) = V_\alpha - V_\alpha R_0(z) T_\alpha(z), \quad T_\alpha(z) = V_\alpha - T_\alpha(z) R_0(z) V_\alpha. \quad (3.26)$$

Отсюда вытекают следующие равенства:

$$(I + V_\alpha R_0)^{-1} V_\alpha = T_\alpha, \quad (I + V_\alpha R_0)^{-1} = I - T_\alpha R_0. \quad (3.27)$$

Учитывая эти равенства, мы получим, что  $M_{\alpha\beta}(z)$  удов-

представляет системе уравнений

$$M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}T_\alpha(z) - T_\alpha(z)R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}(z). \quad (3.28)$$

Данная система представляет собой главный результат этого параграфа. В дальнейшем она будет служить основным средством для изучения  $T$ -матрицы.

Уравнение (3.28) определяет  $T$ -матрицу однозначно. Именно, пусть  $M_{\alpha\beta}(z)$  — девять операторов, удовлетворяющих системе уравнений (3.28). Тогда оператор

$$\tilde{T}(z) = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}(z)$$

совпадает с оператором  $T(z)$ . Для доказательства этого утверждения следует обратить рассуждения, которые привели нас к системе (3.28). Умножая (3.28) на ограниченный оператор  $I + V_\alpha R_0(z)$  и учитывая (3.27), мы получим, что операторы  $M_{\alpha\beta}(z)$  удовлетворяют системе (3.25), а, следовательно, оператор  $\tilde{T}(z)$  удовлетворяет уравнению теории возмущений (3.23). В силу единственности решения этого уравнения при комплексных  $z$ , мы получаем требуемое утверждение.

Уравнения для компонент удобно записать в матричном виде. Пусть  $\omega_\beta$  — вектор-функция с тремя компонентами  $\omega_\beta = \{M_{1\beta}(z), M_{2\beta}(z), M_{3\beta}(z)\}$  и  $A(z)$  — оператор, задаваемый матричными элементами

$$\begin{pmatrix} 0 & T_1(z)R_0(z) & T_1(z)R_0(z) \\ T_2(z)R_0(z) & 0 & T_2(z)R_0(z) \\ T_3(z)R_0(z) & T_3(z)R_0(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, при каждом фиксированном  $\beta$ , уравнения (3.28) можно записать в виде уравнения для вектор-функций

$$\omega_\beta = \omega_\beta^{(0)} + A(z)\omega_\beta,$$

где свободный член представляет собой вектор с компонентами  $\delta_{\alpha\beta}T_\alpha(z)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ).

Покажем далее, что полученные интегральные уравнения свободны от недостатков, присущих уравнению (3.23). Заметим сначала, что ядра свободных членов в (3.28) содержат  $\delta$ -функцию. Рассмотрим поэтому вместо операторов  $M_{\alpha\beta}(z)$  операторы

$$W_{\alpha\beta}(z) = M_{\alpha\beta}(z) - \delta_{\alpha\beta}T_\alpha(z), \quad (3.28')$$

для которых справедлива система, аналогичная (3.28),

$$W_{\alpha\beta}(z) = Q_{\alpha\beta}^{(0)}(z) - T_\alpha(z) R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} W_{\gamma\beta}(z), \quad (3.29)$$

но с другим свободным членом

$$Q_{\alpha\alpha}^{(0)}(z) = 0, \quad Q_{\alpha\beta}^{(0)}(z) = -T_\alpha(z) R_0(z) T_\beta(z), \quad \alpha \neq \beta.$$

Мы употребили здесь обозначение

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n\beta}^{(n)}(z) &= (-1)^{n+1} T_\alpha(z) R_0(z) T_{\gamma_1}(z) \dots \\ &\dots T_{\gamma_n}(z) R_0(z) T_\beta(z), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где индексы  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  пробегают значения, ограниченные условием

$$\gamma_i \neq \gamma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \gamma_1 \neq \alpha, \quad \gamma_n \neq \beta.$$

Нетрудно убедиться, что ядра свободных членов системы (3.29) — убывающие гёльдеровские функции. Действительно, имеем, например,

$$\begin{aligned} Q_{1,2}^{(0)}(P, P', z) &= \\ &= \frac{t_1(k_1, k_1(p_1, p'_2), z - p_1^2) t_2(k_2(p_1, p'_2), k'_2, z - p_2'^2)}{|s_{12}|^3 (k_1^2(p_1, p'_2) + p_1^2 - z)}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где переменная  $k_\alpha$  с аргументами  $k_\alpha(p_\alpha, p'_\beta)$  обозначает при  $\alpha = 2$  функции

$$\begin{aligned} k_2(p_2, p'_1) &= -\frac{c_{21}}{s_{21}} p_2 + \frac{1}{s_{21}} p'_1, \quad \beta = 1, \\ k_3(p_2, p'_3) &= \frac{c_{32}}{s_{32}} p_2 - \frac{1}{s_{32}} p'_3, \quad \beta = 3, \end{aligned} \quad (3.32)$$

а при других  $\alpha$  и  $\beta$  — функции, которые получаются из (3.32) циклической перестановкой индексов. Штрих у аргумента  $p'_\beta$  отвечает независимой конфигурации системы. Связь между относительными импульсами такова, что  $k_\alpha(p_\alpha, p_\beta) = k_\alpha$ .

Итак, в отличие от уравнения теории возмущений, в случае уравнения (3.28) б-функции интегральных операторов исчезают после одной итерации. Мы покажем далее, что это обеспечивает компактность системы уравнений (3.28).

Кроме компактности, эта система обладает еще одним свойством, которое выделяет ее из других возможных модификаций уравнения теории возмущений (3.23). Оказывается, однородное уравнение (3.28) эквивалентно уравнению Шредингера. Точнее, по решению однородной системы

$$\Phi_\alpha = -T_\alpha(z) R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} \Phi_\gamma \quad (3.33)$$

можно построить квадратично интегрируемое решение уравнения Шредингера  $(H_0 + \sum_\alpha V_\alpha)\Psi = \lambda\Psi$  по формуле

$$\Psi = \sum_\alpha \Psi_\alpha, \text{ где}$$

$$\Psi_\alpha = R_0 \Phi_\alpha.$$

Действительно, умножая (3.33) на  $I + R_\alpha(z)V_\alpha$  и учитывая равенство (3.27), получим соотношение

$$\Psi_\alpha = -R_0 V_\alpha \Psi. \quad (3.34)$$

После суммирования по  $\alpha$  придем к формуле

$$\Psi = -R_0 (V_1 + V_2 + V_3) \Psi.$$

Умножая на  $H_0 - z$ , найдем, что  $\Psi$  подчиняется уравнению Шредингера. Условие квадратичной интегрируемости этой функции мы проверим ниже, после того как охарактеризуем свойства решений уравнения (3.28).

**Свойства решений компактных уравнений.** Переидем к детальному исследованию системы уравнений (3.28). Согласно схеме, намеченнной в конце предыдущего параграфа, мы должны начать с изучения ядер итераций. Последние выражаются через операторы  $Q_{\alpha\gamma_1\dots\beta}^{(n)}(z)$  равенствами

$$Q_{\alpha\beta}^{(n)}(z) = \sum'_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n} Q_{\alpha\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n\beta}^{(n)}(z). \quad (3.35)$$

Штрих при знаке  $\sum'$  означает, что суммирование ведется только по допустимым значениям  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , т. е.

$$\gamma_1 \neq \alpha, \quad \gamma_2 \neq \gamma_1, \dots, \beta \neq \gamma_n.$$

Рассмотрим сперва ядро оператора  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}(z)$ , которое определяет свободный член в уравнении (3.29). В явном виде  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$  при  $\alpha = 1, \beta = 2$  дается формулой (3.31). Мы

видим, что это ядро хорошо ведет себя при комплексных  $z$  с  $\operatorname{Im} z \neq 0$  и приобретает ряд сингулярностей, когда  $\operatorname{Im} z \rightarrow 0$ . Некоторые из них получаются из-за особенностей ядер  $t_1(k_1, k'_1, z)$  и  $t_2(k_2, k'_2, z)$ , входящих в это выражение. Так, например, мы имеем в (3.29) слагаемое типа

$$\frac{\varphi_A(k_\alpha)}{p_\alpha^2 - \kappa_A^2 - z} J_{\alpha\beta}^{(0)}(p_\alpha, P', z),$$

где  $J_{\alpha\beta}^{(0)}$  непрерывна в окрестности особенностей знаменателя. Символ детализированного разбиения  $A$  включает в данном случае номер пары частиц  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) и номер собственного значения  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, N_\alpha$ ), т. е.  $A = \{\alpha, j\}$ . Кроме этого слагаемого с особенностью вида  $(p_\alpha^2 - \kappa_A^2 - z)^{-1}$ , имеется слагаемое с особенностью вида  $(p_\beta^2 - z - \kappa_B^2)^{-1}$  и слагаемое, где эти особенности перемножаются. Характерно, что зависимость от  $k_\alpha$  осуществляется только через форм-фактор  $\varphi_A(k_\alpha)$ . Аналогично, член с особенностью вида  $(p_\beta'^2 - \kappa_B^2 - z^2)^{-1}$  зависит от  $k'_\beta$  только через  $\varphi_B^*(k'_\beta)$ , а член с особенностью  $(p_\alpha^2 - \kappa_A^2 - z)^{-1} (p_\beta'^2 - \kappa_B^2 - z)^{-1}$  зависит от  $k_\alpha$  и  $k'_\beta$  только посредством  $\varphi_A(k_\alpha)$  и  $\varphi_B(k'_\beta)$ . Назовем описанные особенности *главными*, или *двухчастичными*. Они существуют только при наличии парных связанных состояний и обнаруживаются в одном и том же виде во всех итерациях уравнений (3.29).

Кроме этих особенностей, мы имеем в (3.31) сингулярность, происходящую из-за обращения в нуль выражения  $k_\alpha(p_\alpha, p'_\beta) + p_\alpha^2 - z$ . Характерно, что положение этой сингулярности зависит как от переменной  $p_\alpha$ , так и переменной  $p'_\beta$ , и не только от величины этих переменных, но и от их направления. Такого типа особенности, существующие даже при отсутствии двухчастичных связанных состояний, назовем *второстепенными*, или *трехчастичными*. Оказывается, что второстепенные особенности ослабляются и вообще исчезают по мере повышения порядка итерации.

Отметим, что двухчастичные и трехчастичные особенности не пересекаются. Действительно, второстепенные особенности возникают, когда обращается в нуль выражение  $k_\alpha^2(p_\alpha, p'_\beta) + p_\beta'^2 - z$ , которое стоит в знаменателе. Если положить, например,  $z = -\kappa_A^2 + p_\alpha^2$ , что эквивалентно

лентно обращению в нуль двухчастичного знаменателя, то последнее выражение принимает вид  $k_\alpha^2(p_\alpha, p'_\beta) + \kappa_A^2$ , т. е. при  $\kappa_A^2 > 0$  это выражение положительно. Аналогичное свойство разделимости особенностей мы описали в главе II.

Прежде чем описать свойства ядер  $Q_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}$  при  $n > 1$ , введем несколько определений. Будем говорить, что ядро  $Q(P, P', z)$  является ядром типа  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ , если оно представляется в виде

$$\begin{aligned} Q(P, P', z) = & F(P, P', z) + \\ & + \sum_j \frac{\Phi_A(k_\alpha)}{p_\alpha^2 - \kappa_A^2 - z} J(p_\alpha, P', z) + \\ & + \sum_l G(P, p'_\beta, z) \frac{\Phi_B^*(k'_\beta)}{p'_\beta{}^2 - \kappa_B^2 - z} + \\ & + \sum_{j,l} \frac{\Phi_A(k_A)}{p_\alpha^2 - \kappa_A^2 - z} H(p_\alpha, p'_\beta, z) \frac{\Phi_B^*(k'_\beta)}{p'_\beta{}^2 - \kappa_B^2 - z}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где суммирования ведутся по всем собственным числам операторов энергии двухчастичных подсистем  $h_\alpha$  и  $h_\beta$ . Ядра  $F$ ,  $J$ ,  $G$  и  $H$  будем называть компонентами ядра  $Q(P, P', z)$ .

Рассмотрим ядра  $Q_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}(P, P', z)$  оператора  $Q_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}(z)$  при  $n > 1$ . Согласно определению (3.30) эти ядра представляются в виде  $n+1$ -кратных сингулярных интегралов:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}(P, P', z) = & (-1)^{n+1} \int t_\alpha(k_\alpha, k_\alpha^{(1)}, z - p_\alpha^2) \times \\ & \times \frac{\delta(p_\alpha - p_\alpha^{(1)})}{p^{(1)2} - z} \dots \frac{\delta(p_\beta^{(n+1)} - p_\beta')}{p^{(n+1)2} - z} \times \\ & \times t_\beta(k_\beta^{(n+1)}, k_\beta', z - p_\beta'^2) dP^{(1)} dP^{(2)} \dots dP^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

При  $n = 0$   $\delta$ -функции снимают в (3.37) все интегрирования, и ядра  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}(P, P', z)$  в явном виде выражаются через ядра  $t_\alpha(k, k', z)$  формулами (3.31). Выше мы исследовали эти ядра. Начнем изучение ядер  $Q_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}$  с ядра  $Q_{\alpha\gamma_1\beta}^{(1)}$ .

Возьмем для примера  $\alpha = 1$ ,  $\gamma_1 = 2$  и  $\beta = 3$  и, чтобы не перегружать формулы индексами, будем временно обозначать оператор  $Q_{123}^{(1)}(z)$  через  $Q(z)$  и его ядро — через  $Q(P, P', z)$ . Выбирая в (3.37) при  $n = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\gamma_1 = 2$ ,  $\beta = 3$  в качестве переменных интегрирования  $p_1^{(1)}$ ,  $p_2^{(1)} = q$ ,  $p_2^{(2)}, p_3^{(2)}$ , мы получим для ядра  $Q(P, P', z)$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} Q(P, P', z) = & \frac{1}{|s_{21} \cdot s_{23}|^3} \int t_1(k_1, k_1(p_1, q), z - p_1^2) \times \\ & \times (k_1^2(p_1, q) + p_1^2 - z)^{-1} t_2(k_2(q, p_1), k_2(q, p_3'), z - q^2) \times \\ & \times (k_3^2(p_3', q) + p_3'^2 - z)^{-1} t_3(k_3(p_3', q), k_3', z - p_3'^2) dq. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Если вместо ядер  $t_1$  и  $t_3$  подставить сюда их выражения (3.18), то мы получим, что ядро  $Q(P, P', z)$  является ядром типа  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ . Обозначим через  $F$ ,  $G$ ,  $J$  и  $H$  его компоненты. Для ядра  $F(P, P', z)$  получим представление (3.37), где вместо ядер  $t_1$  и  $t_2$  стоят ядра  $\tilde{t}_1$  и  $\tilde{t}_2$ . Ядра  $G$ ,  $J$  и  $H$  можно получить, если заменить в (3.38)  $t_3$  на  $\Phi(k_3(q, p_3'))$ , или  $t_1$  на  $\Phi_1^*(k_1(q, p_1))$ , или сделать это одновременно.

Согласно представлению (3.18), для ядра  $t_2(k_2(p_1, q), k_2(p_3', q), z - q^2)$  интеграл (3.38), определяющий  $Q$ , состоит из двух слагаемых, одно из которых содержит произведение двух, а второе — трех сингулярных знаменателей в подынтегральном выражении. При этом знаменатели, отвечающие двухчастичным и трехчастичным особенностям, сингулярны в разных частях области интегрирования. Поэтому интегральные представления для компонент  $F$ ,  $G$ ,  $J$  и  $H$  можно разбить на слагаемые, в каждом из которых имеются либо только двухчастичные, либо только трехчастичные особенности. Интегралы, содержащие двухчастичные особенности, имеют такой же вид, как и аналогичные интегралы (3.11) в случае системы двух тел. Эти интегралы являются убывающими гёльдеровскими функциями при изменении  $z$  вплоть до вещественной оси на комплексной плоскости с разрезом от  $-\infty_A$  до  $\infty$ .

Интеграл, порожденный трехчастичными особенностями, имеет более сложную структуру. Если обозначить

$$a = c_{21}p_1, \quad b = c_{23}p_3', \quad \xi = s_{12}^2(z - p_1^2), \quad \eta = s_{23}^2(z - p_3'^2),$$

то этот интеграл принимает вид

$$I_{13}(p_1, p'_3) = \int \frac{dq f(q, P, P')}{((q-a)^2 - \xi)((q-b)^2 - \eta)}, \quad (3.39)$$

где  $f$  — гладкая функция, исчезающая вне сферы достаточно большого радиуса  $q^2 = 1 + |z|$ . Ясно, что наиболее сильные особенности функции  $I_{13}$  совпадают с особенностями более простого выражения

$$I_{13}^{(0)} = \int \frac{dq}{((q-a)^2 - \xi)((q-b)^2 - \eta)},$$

которое получается из (3.39), если вынести за знак интеграла гладкую функцию  $f$ .

Функция  $I_{13}^{(0)}$  может быть найдена в явном виде с помощью тождества

$$\frac{1}{uv} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt \left( u \frac{1+t}{2} + v \frac{1-t}{2} \right)^{-2}.$$

Справедлива следующая формула:

$$I_{13}^{(0)} = \frac{i\pi^2}{VA} \ln \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{\eta} + A}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\eta} - A}, \quad (3.40)$$

где  $A = (a-b)^2 = (c_{11}p_1 - c_{23}p'_3)^2$ . Мы видим, что это ядро является квадратично интегрируемой функцией по каждой переменной. Подчеркнем, что интеграл  $I_{13}(p_1, p'_3)$  несингулярен в окрестности двухчастичной энергетической поверхности. Более точно, если переменная  $z$  принимает значения в окрестности одной из точек  $z = p_1^2 - \kappa_A^2$  или  $z = p_3^2 - \kappa_B^2$ , то ядра  $F, G, J$  и  $H$  являются гладкими ограниченными функциями. Закончим на этом исследование ядра  $Q_{123}^{(1)}$ . Любое другое ядро  $Q_{\alpha\beta\gamma}^{(1)}$  можно исследовать подобно тому, как мы это сделали для ядра  $Q_{123}^{(1)}$ .

Рассмотрим теперь ядро первой итерации  $Q_{\alpha\beta}^{(1)}$ , которое дается суммой (3.35). На примере ядра  $Q_{123}^{(1)}$  мы убедились, что ядра  $Q_{\alpha\beta}^{(1)}$  являются ядрами типа  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ . При этом, если

$$p_\alpha^2 \geq |z| + 1 \quad \text{или} \quad p_\beta^2 > |z| + 1, \quad (3.41)$$

$$k_\alpha^2(p_\alpha, p'_\beta) + p_\alpha^2 - z > 1 \quad \text{и} \quad k_\beta^2(p_\alpha, p'_\beta) + p_\beta^2 - z > 1,$$

либо переменные  $p_\alpha$  или  $p'_\beta$  расположены в окрестности двухчастичной энергетической поверхности

$$p_\alpha^2 = \operatorname{Re} z + \kappa_A^2 \quad \text{или} \quad p'_\beta^2 = \operatorname{Re} z + \kappa_B^2, \quad (3.42)$$

то второстепенные особенности не возникают и компоненты этих ядер являются гладкими функциями.

Перейдем теперь к изучению ядер  $Q_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}$  при  $n \geq 2$ . Ядра  $Q_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}$  можно выразить через ядра  $Q_{\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n-1)}$  с помощью соотношения

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}(P, P', z) = \\ = \int dP'' t_\alpha(k_\alpha, k''_\alpha, z - p_\alpha^2) \frac{\delta(p_\alpha - p''_\alpha)}{P''^2 - z} Q_{\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n-1)}(P'', P', z). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Если в качестве переменных интегрирования взять  $p''_{\gamma_1}$  и  $p''_\alpha$ , то интеграл по последней переменной снимается д-функцией. Положим  $n = 2$ . Так же, как и выше, вклады двухчастичных и трехчастичных особенностей можно исследовать по отдельности. Интегралы, содержащие двухчастичные особенности, оцениваются с помощью леммы о сингулярных интегралах. Наибольшие трудности связаны с интегралами, в которых пересекаются трехчастичные особенности. Как и выше, можно показать, что эти интегралы не имеют особенностей, если переменные  $p_\alpha$  и  $p'_\beta$  удовлетворяют одному из условий (3.41), (3.42). Если же эти условия не выполняются, то компоненты  $Q_{\alpha\gamma_1\gamma_2\beta}^{(2)}$  имеют второстепенные сингулярности. Мы не будем описывать их здесь. Отметим только, что особенности компонент  $Q_{\alpha\gamma_1\gamma_2\beta}^{(2)}$  имеют более слабый характер, чем особенности, отраженные в представлении (3.40).

Начиная с  $n = 3$ , можно показать, что второстепенные особенности не возникают. Мы проведем доказательство на примере ядра  $Q_{\alpha\gamma_1\dots\beta}^{(4)}$  при  $\alpha = 1, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = 3, \gamma_3 = 2, \beta = 1$ . Анализируя предыдущие выкладки, мы можем убедиться, что интеграл, который может внести второстепенные особенности в это ядро, имеет вид

$$\int dq I_{13}(p_1, q) I_{31}(q, p'_1) f(q),$$

где интегралы  $I_{13}$  и  $I_{31}$  определяются формулами вида (3.39), в которых переменные  $p$ ,  $p_3''$  и  $p_3'$ ,  $p_1'$  следует заменить переменными  $p_1$ ,  $q$  и  $q$ ,  $p_1'$  соответственно. Функция  $f(q)$  является гладкой, она явно выражается в терминах парных  $T$ -матриц. Используем далее представления (3.40) для интегралов  $I_{13}$  и  $I_{31}$  и заметим, что эти интегралы являются квадратично интегрируемыми функциями переменной  $q$ . Отсюда следует, что второстепенные особенности этих интегралов исчезают при интегрировании по  $q$ .

Ядра  $Q_{\alpha\gamma_1\dots\beta}^{(n)}$  при  $n > 3$  выражаются последовательно через обычные сингулярные интегралы (3.43), содержащие ядра  $Q_{\gamma_1\dots\beta}^{(n-1)}(z)$  в подынтегральных выражениях. Эти ядра являются ядрами типа  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ , причем их компоненты являются убывающими гельдеровскими функциями. То же можно сказать и о ядрах итераций  $Q_{\alpha\beta}^{(n)}$ . Более точно их свойства можно охарактеризовать следующим образом.

Обозначим через  $N(P, \theta)$  оценочную функцию, задаваемую равенством

$$N(P, \theta) = \sum_{\alpha \neq \beta} (1 + |p_\alpha|)^{-1-\theta} (1 + |p_\beta|)^{-1-\theta}.$$

Через  $\Pi_{-\infty^2}$  обозначим комплексную плоскость с разрезом  $[-\kappa^2, \infty)$ , где  $\kappa^2 = \max_A \kappa_A^2$ . Справедливо следующее утверждение. Компоненты  $F$  ядер итераций  $Q_{\alpha\beta}^{(n)}$  при  $n \geq 4$  подчиняются оценкам

$$\begin{aligned} |F(P, P', z)| &\leq CN(P, \theta) (1 + p_\beta'^2)^{-1}, \\ |F(P + \Delta P, P', z) - F(P, P', z)| &\leq \\ &\leq CN(P, \theta) (1 + p_\beta'^2)^{-1} |\Delta P|^{\mu} \end{aligned} \quad (3.44)$$

равномерно относительно  $P'$  и  $z$  из  $\Pi_{-\infty^2}$ . Такие же оценки имеют место для  $F$  как функции  $P'$ . Компоненты  $G$ ,  $J$  и  $H$  удовлетворяют оценкам, которые получаются из (3.44), если положить  $k_\beta' = 0$ ,  $k_\alpha = 0$  или одновременно  $k_\alpha = 0$ ,  $k_\beta' = 0$  соответственно.

Чтобы доказать эти оценки, нужно последовательно применять лемму о сингулярных интегралах и пользоваться при этом оценками (3.12) для ядер  $t_\alpha(k, k', z)$ . Мы ограничиваемся только формулировкой окончательного результата.

Ядра типа  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ , компоненты которых подчиняются оценкам (3.44), мы будем называть ядрами класса  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta}$ . Итак, мы видим, что ядра итераций  $Q_{\alpha\beta}^{(n)}$  являются ядрами класса  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta}$ , начиная с  $n = 4$ .

Проведенные рассуждения позволяют угадать класс функций, в котором следует рассматривать интегральное уравнение (3.29). Именно, следует рассматривать множество вектор-функций

$$\omega = (\rho_1(P), \rho_2(P), \rho_3(P), \sigma_{11}(p_1), \dots,$$

$$\dots, \sigma_{1N_1}(p_1), \dots, \sigma_{31}(p_3), \dots, \sigma_{3N_3}(p_3)),$$

где компоненты  $\rho_\alpha(P)$  подчиняются оценкам (3.44) как функции  $P$  и оценки для  $\sigma_A(p_\alpha)$  получаются из (3.44), если положить  $k_\alpha = 0$ . Это множество мы обозначим через  $\mathfrak{M}$ .

На элементах  $\omega$  рассмотрим оператор  $A(z)$ , определенный следующим образом:  $\omega' = A(z)\omega$  означает, что

$$\rho'_\alpha(P) =$$

$$= - \int \tilde{t}_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha; z - p_\alpha^2) \frac{\delta(p_\alpha - p'_\alpha)}{P'^2 - z} \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta(P') dP', \quad (3.45)$$

$$\sigma'_A(p_\alpha) = - \int \varphi_A^*(k'_\alpha) \frac{\delta(p_\alpha - p'_\alpha)}{P'^2 - z} \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta(P') dP', \quad (3.46)$$

где через  $\chi_\alpha(P)$  обозначена функция

$$\chi_\alpha(P) = \rho_\alpha(P) + \sum_i \frac{\varphi_A(k_\alpha) \sigma_A(p_\alpha)}{p_\alpha^2 - \kappa_A^2 - z}, \quad A = \{\alpha, i\}. \quad (3.47)$$

Заметим, что если сложить равенства (3.45) с равенствами (3.46), умноженными на  $\varphi_A(k_\alpha)(p_\alpha^2 - \kappa_A^2 - z)^{-1}$ , и обозначить через  $\chi'_\alpha(P)$  функцию, построенную по формуле (3.47) по функциям  $\rho'_\alpha(P)$  и  $\sigma'_A(p_\alpha)$ , то мы получим

$$\chi'_\alpha(P) = - \int t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z - p_\alpha^2) \frac{\delta(p_\alpha - p'_\alpha)}{P'^2 - z} \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta(P')$$

или, в операторном виде,

$$\chi'_\alpha = - T_\alpha(z) R_0(z) \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta.$$

Таким образом, оператор  $A(z)$ , действующий на элементы множества  $\mathfrak{M}$ , имеет тесную связь с системой уравнений

ний (3.29), которую мы исследуем. Приведенная довольно громоздкая конструкция потребовалась нам для последовательного учета главных особенностей ядер  $W_{\alpha\beta}(P, P', z)$ .

Сведем, наконец, исследование системы (3.29) к изучению уравнения второго рода на множестве  $\mathfrak{M}$  с оператором  $A(z)$ . Вместо операторов  $W_{\alpha\beta}(z)$  будем рассматривать операторы  $\widetilde{W}_{\alpha\beta}^{(4)}(z)$ , полученные из  $W_{\alpha\beta}(z)$  после вычитания первых трех итераций системы (3.29). Система уравнений для операторов  $\widetilde{W}_{\alpha\beta}^{(4)}(z)$  имеет вид

$$\widetilde{W}_{\alpha\beta}^{(4)}(z) = Q_{\alpha\beta}^{(4)}(z) - T_\alpha(z) R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} \widetilde{W}_{\gamma\beta}^{(4)}(z). \quad (3.48)$$

На основании сформулированного выше утверждения ядра  $Q_{\alpha\beta}^{(4)}(z)$  принадлежат классам  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta}$ . Обозначим через  $F_{\alpha\beta}^{(4)}, G_{\alpha\beta}^{(4)}, J_{A\beta}^{(4)}$  и  $H_{AB}^{(4)}$  их компоненты. Совокупность ядер  $F_{\alpha\beta}^{(4)}(P, P', z), J_{A\beta}^{(4)}(p_\alpha, P', z)$  при фиксированных  $\beta, P'$  и  $z$  можно рассматривать как элемент  $\mathfrak{M}$ . Обозначим этот элемент через  $\omega_\beta^{(4)}(P', z)$ . Аналогично, совокупности ядер  $G_{\alpha\beta}(P, p'_\beta, z)$  и  $H_{AB}(p_\alpha, p'_\beta, z)$  при фиксированных  $B; p'_\beta$  и  $z$  сопоставим элемент  $\omega_B^{(4)}(p'_\beta, z)$ .

Рассмотрим уравнения

$$\omega_\beta(P', z) = \omega_\beta^{(4)}(P', z) + A(z) \omega_\beta(P', z), \quad (3.49)$$

$$\omega_B(p'_\beta, z) = \omega_B^{(4)}(p'_\beta, z) + A(z) \omega_B(p'_\beta, z). \quad (3.50)$$

Пусть при некотором  $z$  эти уравнения имеют решения. Обозначим через  $F_{\alpha\beta}(P, P', z), J_{A\beta}(p_\alpha, P', z)$  и  $G_{\alpha\beta}(P, p'_\beta, z), H_{AB}(p_\alpha, p'_\beta, z)$  компоненты элементов  $\omega_\beta(P', z)$  и  $\omega_B(p'_\beta, z)$  и рассмотрим эти ядра как компоненты ядер  $\widetilde{W}_{\alpha\beta}^{(4)}(P, P', z)$  класса  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta}$ . Нетрудно проверить тогда, что эти ядра удовлетворяют уравнениям (3.48). Таким образом, мы свели вопрос об исследовании ядер  $W_{\alpha\beta}(P, P', z)$  к вопросу о разрешимости уравнения

$$\omega = \omega^{(0)} + A(z) \omega \quad (3.51)$$

на множестве  $\mathfrak{M}$ .

Теперь нам осталось проверить, что уравнение (3.51) фредгольмово, и исследовать соответствующее однородное уравнение. Мы не можем, однако, ограничиться изучением непосредственно этого уравнения, поскольку мат-

ричные ядра оператора  $A(z)$  содержат  $\delta$ -функции и поэтому данный оператор не является вполне непрерывным. В этом случае необходимо рассматривать проитерированные уравнения и соответствующие им степени оператора  $A^n(z)$ . Последние же выражаются через компоненты ядер  $Q_{\alpha\beta}^{(n)}$ . Действительно, уравнение (3.48), проитерированное  $n$  раз, имеет следующий вид:

$$\widetilde{W}_{\alpha\beta}^{(4)} = \sum_{i=0}^n Q_{\alpha\beta}^{(4+i)} + \sum_{\gamma_1 \neq \alpha} Q_{\alpha\gamma_1}^{(n)}(z) R_0(z) \sum_{\gamma_2 \neq \gamma_1} \widetilde{W}_{\gamma_2\beta}^{(4)}(z). \quad (3.52)$$

Это уравнение можно свести к уравнению

$$\omega = \omega^{(n)} + A^n(z) \omega, \quad \omega^{(n)} = \sum_{i=1}^n A^i(z) \omega^{(0)},$$

по такой же схеме, как мы свели уравнение (3.48) к уравнению (3.51). В результате можно получить явные представления для ядер оператора  $A^n(z)$  через компоненты  $Q_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ . Используя полученные выше оценки для этих компонент, можно убедиться, что оператор  $A^n(z)$  улучшает свойства компонент элементов  $\omega$  и, следовательно, является компактным. Мы не будем приводить здесь детального доказательства этого утверждения. Все рассуждения основаны на лемме о сингулярных интегралах, и мы подробно обсудили их на примере задачи двух тел.

В заключение опишем множество особых точек, при которых однородное уравнение

$$\omega = A(z)\omega \quad (3.53)$$

имеет нетривиальное решение. Обозначим через  $\Psi_\alpha(P)$  функцию

$$\Psi_\alpha(P) = (P^2 - z)^{-1} \chi_\alpha(P),$$

где функция  $\chi_\alpha$  выражается через компоненты  $\rho_\alpha$  и  $\sigma_\alpha$  элемента  $\omega$  равенством (3.47). Уравнение (3.53) в терминах  $\Psi_\alpha(P)$  можно переписать в виде

$$\Psi_\alpha = -R_0(z) T_\alpha(z) \sum_{\beta \neq \alpha} \Psi_\beta,$$

и, следовательно, как мы видели выше, функция  $\Psi = \sum_\alpha \Psi_\alpha$  подчиняется уравнению Шредингера  $H\Psi = z\Psi$ . Заметим теперь, что, согласно оценкам (3.44), эта функция

ция является квадратично интегрируемой при всех  $z$  из  $\Pi_{-\kappa^2}$ , не примыкающих к разрезу  $[-\kappa^2, \infty)$ . Сложнее показать, что при  $z$ , лежащих на разрезе, это решение также является квадратично интегрируемым. С этой целью можно использовать соображения, аналогичные тем, которые мы привели в случае задачи двух тел. Однако соответствующие конструкции в этом случае очень громоздки, и мы не будем описывать их здесь.

Итак, мы приходим к заключению, что множество особых точек уравнения (3.51) совпадает с множеством собственных значений оператора  $A(z)$ . Мы обозначим это множество через  $\Sigma_n$ .

Таким образом, мы закончили исследование уравнения (3.29) и теперь можем охарактеризовать свойства ядер  $W_{\alpha\beta}(z)$ . Пусть  $\Pi'_{-\kappa^2}$  — комплексная плоскость с разрезом  $[-\kappa^2, \infty)$  с вырезанными окрестностями точек из  $\Sigma_n$ . Справедливо следующее утверждение.

*При всех  $z$  из  $\Pi'_{-\kappa^2}$  ядро  $W_{\alpha\beta}(P, P', z)$  может быть представлено в виде суммы*

$$W_{\alpha\beta}(P, P', z) = \sum_{j=1}^4 Q_{\alpha\beta}^{(j)}(P, P', z) + \widetilde{W}_{\alpha\beta}^{(4)}(P, P', z).$$

Ядра  $Q_{\alpha\beta}^{(j)}$  являются ядрами типа  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ , их свойства описаны выше. Ядра  $\widetilde{W}_{\alpha\beta}^{(4)}$  являются ядрами класса  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta}$ , так что их компоненты  $F_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}, J_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}$  подчиняются оценкам (3.44).

Посмотрим, что дают перечисленные результаты для самой резольвенты. Обозначим через  $R_\alpha(z)$  резольвенту для оператора энергии  $H_\alpha = H_0 + V_\alpha$ . Оператор  $R_\alpha(z)$  выражается через  $T$ -матрицу  $T_\alpha(z)$  равенством

$$R_\alpha(z) = R_0(z) - R_0(z)T_\alpha(z)R_0(z). \quad (3.54)$$

Аналогичное соотношение имеет место и для операторов  $R(z)$  и  $T(z)$ :

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)T(z)R_0(z). \quad (3.55)$$

Сопоставляя формулы (3.24), (3.28') с равенством (3.55), получим представление

$$R(z) = R_0(z) +$$

$$+ \sum_{\alpha} (R_\alpha(z) - R_0(z)) - R_0(z) \sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha\beta}(z) R_0(z), \quad (3.56)$$

которое позволяет описать все особенности ядра резольвенты через особенности ядер операторов  $\tilde{W}_{\alpha\beta}(z)$ . В частности, из представлений (3.36) следуют равенства (2.24) и (2.25), которые мы рассматривали в главе II как гипотезу. Отметим, что последнее слагаемое в правой части (3.56) совпадает со связной частью резольвенты:

$$[R(z)]_c = -R_0(z) \sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(z) R_0(z).$$

На этом мы закончим описание свойств ядер резольвенты для систем трех частиц. Итак, мы получили в этом параграфе компактные уравнения, исследовали на их основе особенности ядра  $T$ -матрицы  $T(z)$  и обосновали представления (2.24) и (2.25) для ядра резольвенты.

### § 3. Интегральные уравнения для резольвенты и волновых операторов

В этом параграфе мы опишем компактные интегральные уравнения для компонент резольвенты и компонент волновых операторов. Такие уравнения удобно применять для численных расчетов. Мы также опишем здесь интегральные представления для компонент  $W_{\alpha\beta}(z)$  и выразим через них ядра оператора рассеяния.

**Компоненты резольвенты.** Определим компоненты резольвенты равенством:

$$R_{\alpha\beta}(z) = -R_0(z) M_{\alpha\beta}(z) R_0(z). \quad (3.57)$$

При этом резольвента выражается через компоненты  $R_{\alpha\beta}(z)$  с помощью соотношения

$$R(z) = R_0(z) + \sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha\beta}(z).$$

Умножим обе стороны компактных уравнений для  $T$ -матрицы на оператор  $R_0(z)$ . Учитывая равенство

$$R_0(z) T_\alpha(z) = R_\alpha(z) V_\alpha, \quad (3.58)$$

которое следует из определения (2.21)  $T$ -матрицы и равенства (2.9), придем к следующей системе интегральных уравнений для этих компонент:

$$R_{\alpha\beta}(z) = (R_\alpha(z) - R_0(z)) \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha(z) V_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} R_{\gamma\beta}(z). \quad (3.59)$$

Альтернативно, компоненты резольвенты можно ввести в соответствии с разбиением потенциала в уравнении теории возмущений (2.9):

$$R_{\alpha}^{(\beta)}(z) = R_0(z) \delta_{\alpha\beta} - R_0(z) V_{\alpha} R(z). \quad (3.60)$$

Уравнения для операторов  $R_{\alpha}^{(\beta)}(z)$  могут быть получены по такой же схеме, как и в случае  $T$ -матрицы.

Именно, подставляя в (3.60) очевидное равенство  $R(z) = \sum_{\alpha} R_{\alpha}^{(\beta)}$ , которое вытекает из уравнения (3.9), получим соотношения

$$R_{\alpha}^{(\beta)}(z) = R_0(z) \delta_{\alpha\beta} - R_0(z) V_{\alpha} \sum_{\gamma} R_{\gamma}^{(\beta)}(z).$$

Перепося затем диагональное слагаемое  $R_{\alpha}^{(\beta)}$  в левую часть

$$(I + R_0(z) V_{\alpha}) R_{\alpha}^{(\beta)}(z) = R_0(z) \delta_{\alpha\beta} - R_0(z) V_{\alpha} \sum_{\gamma \neq \alpha} R_{\gamma}^{(\beta)}(z)$$

и обращая оператор  $I + R_0(z) V_{\alpha}$ , получим, с учетом равенства  $(I + R_0(z) V_{\alpha})^{-1} R_0(z) = R_{\alpha}(z)$ , следующую систему:

$$R_{\alpha}^{(\beta)}(z) = \delta_{\alpha\beta} R_{\alpha}(z) - R_{\alpha}(z) V_{\alpha} \sum_{\gamma \neq \alpha} R_{\gamma}^{(\beta)}(z).$$

Эта система отличается от (3.59) только свободным членом. Отметим, что два вида компонент связаны равенством

$$R_{\alpha}^{(\beta)}(z) = \sum_{\gamma} R_{\alpha\gamma}(z) + \delta_{\alpha\beta} R_0(z).$$

Дальнейшие построения мы будем проводить на основе разбиения (3.57).

**Компоненты волновых операторов.** В соответствии с представлением (2.3) определим компоненты волновых операторов  $U_B$  при  $B \neq 0$  равенствами

$$U_{\alpha B}^{(\pm)} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mp i\epsilon R_{\alpha\beta} (E_{AB}(p'_A) \pm i\epsilon) L_B(p'_B). \quad (3.61)$$

Компоненты волновых операторов  $U_{\alpha 0}^{(\pm)}$ , описывающих процессы с тремя свободными частицами в начальном состоянии, зададим равенствами

$$\begin{aligned} U_{\alpha 0}^{(\pm)} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} & \mp i\epsilon (\delta_{\alpha 1} R_0(P'^2 \pm i\epsilon) + \\ & + \sum_{\beta} R_{\alpha\beta} (P'^2 \pm i\epsilon) L_0(P')). \end{aligned} \quad (3.61')$$

Компоненты операторов  $U_{\alpha B}$  и  $U_{\alpha 0}$  могут быть явно выражены через компоненты  $T$ -матрицы. Обозначим через  $T_{\alpha B}$  ядро, равное сумме

$$T_{\alpha B}(P, p'_B, z) = G_{\alpha B}(P, p'_B, z) + \sum_j \frac{\varPhi_A(k_\alpha) H_{AB}(p_\alpha, p'_B, z)}{p_\alpha^2 - k_A^2 - z}, \quad (3.62)$$

и через  $T_{\alpha 0}$  — ядро, задаваемое равенствами

$$T_{\alpha 0}(P, P', z) = \sum_\beta M_{\alpha\beta}(P, P', z).$$

Повторяя рассуждения, которые привели нас к формулам (2.29) и (2.30), получим следующие выражения для ядер  $U_{\alpha B}$  и  $U_{\alpha 0}$ :

$$U_{\alpha B}(P, p'_B) = \delta_{\alpha\beta} \psi_B(k_\beta) \delta(p_\beta - p'_\beta) - \frac{T_{\alpha B}(P, p'_B, E_B(p'_B) \pm i0)}{P^2 - E_B(p'_B) \mp i0}, \quad (3.63)$$

$$U_{\alpha 0}(P, P') = \delta_{\alpha 1} \delta(P - P') - \frac{T_{\alpha 0}(P, P', P'^2 \pm i0)}{P^2 - P'^2 \mp i0}. \quad (3.63')$$

При этом волновые операторы  $U_B^{(\pm)}$  и  $U_0^{(\pm)}$  могут быть восстановлены по своим компонентам равенствами

$$U_B^{(\pm)} = \sum_\alpha U_{\alpha B}^{(\pm)}, \quad U_0^{(\pm)} = \sum_\alpha U_{\alpha 0}^{(\pm)}. \quad (3.63'')$$

Заметим, что ядро  $T_{\alpha B}$  с точностью до множителя  $\varPhi_A$  совпадает с вычетом ядра  $W_{\alpha\beta}(P, P', z)$  в двухчастичном полюсе  $(E_B(p'_B) - z)^{-1}$ . Поскольку трехчастичные особенности не пересекаются с двухчастичными, отсюда следует важное свойство ядер  $T_{\alpha B}$ : они имеют лишь двухчастичные сингулярности, явно выделенные в представлении (3.62). Напротив, ядро  $T_{\alpha 0}$  содержит трехчастичные особенности и, кроме того, имеет двухчастичные полюсные сингулярности вида  $(E_A(p_A) - P'^2 \mp i0)^{-1}$ , которые, однако, не пересекаются с трехчастичными.

Чтобы вывести компактные интегральные уравнения для ядер волновых операторов, умножим обе части уравнений (3.59) на  $\mp i\varepsilon L_B$ , или  $\mp i\varepsilon L_0$ , положим  $z = E_B(p'_B) \pm \pm i\varepsilon$ ,  $B \neq 0$ , или  $z = P'^2 \pm i\varepsilon$ ,  $B = 0$ , соответственно и пе-

рейдем к пределу  $\varepsilon \downarrow 0$  с учетом равенств (3.60), (3.61). В результате получим уравнения

$$U_{\alpha B}^{(\pm)} = \delta_{\alpha\beta} L_B - R_0(E_B \pm i0) T_\alpha(E_B \pm i0) \sum_{\gamma \neq \alpha} U_{\gamma B}, \quad (3.64)$$

$$U_{\alpha 0}^{(\pm)} = \delta_{\alpha 1} L_0 - R_0(P'^2 \pm i0) T_\alpha(P'^2 \pm i0) \sum_{\gamma \neq \alpha} U_{\gamma 0}.$$

Следует подчеркнуть, что интегральные уравнения второго рода для волновых операторов  $U_{\alpha B}^{(\pm)}$  и  $U_{\alpha 0}^{(\pm)}$  различаются только свободными членами. При этом однородные уравнения эквивалентны уравнению Шредингера для собственных функций оператора  $H$ .

**Интегральные представления для компонент.** Покажем, что компоненты  $W_{\alpha\beta}(z)$  можно задать с помощью интегральных представлений

$$T_{\alpha B}(z) \tilde{R}_B(z) = W_{\alpha\beta}(x) R_0(z) L_B, \quad (3.65)$$

$$\tilde{R}_B(z) V_{B\alpha}(z) = L_B^* R_0(z) W_{\beta\alpha}(z); \quad (3.66)$$

здесь через  $T_{\alpha B}$  обозначен оператор из  $\mathfrak{H}_B$  в  $\mathfrak{H}$ , задаваемый ядром  $T_{\alpha B}(P, p'_\beta, z)$ . Символ  $V_{B\alpha}(z)$  обозначает оператор из  $\mathfrak{H}$  в  $\mathfrak{H}_B$  с ядром

$$V_{B\alpha}(p_\beta, P', z) = J_{B\alpha}(p_\beta, P', z) + \sum_{k_\alpha} \frac{H_{BA}(p_\beta, p'_\alpha, z) \varphi_A^*(k'_\alpha)}{E_A(p'_\alpha) - z}$$

и символ  $\tilde{R}_B(z)$  — резольвенту оператора энергии канала  $B$ ,

$$\tilde{R}_B(z) = (H_B - z)^{-1}.$$

Покажем сначала, что справедливы соотношения

$$T_\alpha(z) R_0(z) L_A = -\Phi_A \tilde{R}_A(z), \quad (3.67)$$

где через  $\Phi_A$  обозначен оператор из  $\mathfrak{H}_A$  в  $\mathfrak{H}$ , задаваемый ядром

$$\Phi_A(P, p'_\alpha) = \varphi_A(k_\alpha) \delta(p_\alpha - p'_\alpha).$$

Распишем соотношение (2.14) в терминах оператора  $T(z)$ :

$$R_0(z) L_A - R_0(z) T_\alpha(z) R_0(z) L_A = L_A \tilde{R}_A(z).$$

Умножая это равенство на  $H_0 - z$  и собирая подобные члены, получим (3.67).

С помощью этих соотношений устанавливаем далее, что итерации  $Q_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ , ядра которых являются ядрами типа  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ , подчиняются равенствам (3.65) и (3.66), где ядра  $T_{\alpha\beta}$  следует заменить соответствующими компонентами  $\tilde{T}_{\alpha B}^{(n)}(z)$  и  $\tilde{V}_{B\alpha}^{(n)}$  итераций  $Q_{\alpha\beta}^{(n)}$ . Чтобы доказать теперь соотношение (3.65) для операторов  $W_{\alpha\beta}(z)$ , следует воспользоваться системой уравнений (3.29). С одной стороны, операторы

$$N_{\alpha B}(z) = - \sum_{\beta} W_{\alpha\beta}^{(n)}(z) R_0(z) L_B(\tilde{H}_B - z)$$

удовлетворяют системе уравнений

$$N_{\alpha B}(z) = \tilde{T}_{\alpha B}^{(n)}(z) - T_{\alpha}(z) R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} N_{\gamma B}(z), \quad (3.68)$$

совпадающей с компактными уравнениями (3.29), но с другим свободным членом. Из свойств ядер  $Q_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ , перечисленных выше, следует, что ядра операторов  $N_{\alpha B}$  представляются в виде

$$\begin{aligned} N_{\alpha B}(P, p'_{\beta}, z) &= \rho_{\alpha B}(P', p'_{\beta}, z) + \\ &+ \sum_j \frac{\varphi_A(k_{\alpha})}{E_A(p_{\alpha}) - z} \sigma_{AB}(p_{\alpha}, p'_{\beta}, z), \end{aligned}$$

где компоненты  $\rho_{\alpha B}$  и  $\sigma_{AB}$  являются убывающими гёльдеровскими функциями. С другой стороны, из определения операторов  $T_{\alpha B}$  и из уравнения (3.48) следует, что этой же системе уравнений удовлетворяют операторы  $\tilde{T}_{\alpha B}^{(n)}(z)$ , построенные по компонентам ядер  $\tilde{W}_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ . На основании теоремы единственности решения системы (3.48) в рассматриваемом классе функций мы получаем тогда соотношение (3.65).

Из доказанного утверждения следует также, что компоненты  $T_{\alpha B}$ , через которые выражаются волновые операторы, удовлетворяют системе уравнений (3.68) при  $n=0$ . Эти уравнения более удобны для исследования свойств ядер  $U_{\alpha B}$  в импульсном представлении, чем уравнения (3.64), так как здесь уже отделен сингулярный множитель  $(P^2 - E_B(p'_{\beta}) \mp i0)^{-1}$ .

Докажем формулу (3.66). Заметим, что из определения ядер  $J_{\alpha B}$  и  $H_{AB}$  следует равенство

$$\tilde{R}_B(z) V_{B\alpha}^{(n)} = \tilde{R}_B(z) \tilde{V}_{B\alpha}^{(n)} - \tilde{R}_B(z) \Phi_B^* \sum_{\gamma \neq \beta} W_{\gamma\alpha}^{(n)}(z). \quad (3.69)$$

С другой стороны, умножая (3.48) на оператор  $L_B^* R_0(z)$  слева и учитывая соотношения (3.66) для ядер  $Q_{\alpha\beta}^{(n)}$  и  $T_{\alpha\beta}^{(n)}$ , найдем, что операторы  $\tilde{N}_{B\alpha} = L_B^* R_0(z) W_{\beta\alpha}^{(n)}(z)$  подчиняются аналогичным соотношениям:

$$\tilde{N}_{B\alpha} = \tilde{R}_B(z) \tilde{V}_{B\alpha}^{(n)} - \tilde{R}_B(z) \Phi_B^* \sum_{\gamma \neq \beta} W_{\gamma\alpha}^{(n)}(z). \quad (3.70)$$

Сравнивая равенства (3.69) и (3.70), придем к заключению, что равенства (3.66) справедливы для ядер  $W_{\alpha\beta}^{(n)}$  и, следовательно, для  $W_{\alpha\beta}(z)$ .

**Ядра оператора рассеяния.** Выразим ядра оператора рассеяния через компоненты  $W_{\alpha\beta}(z)$ .

Как было показано в главе II, ядра матричных элементов оператора рассеяния  $S_{AB}$  совпадают с вычетами ядра резольвенты в полюсах, отвечающих рассматриваемым физическим процессам  $B \rightarrow A$ . Поскольку выше мы уже описали полюсные особенности ядра  $T$ -матрицы, нам остается применить соотношения (2.36). При этом ядра  $S_{AB}$  следующим образом выражаются через компоненты:

$$\begin{aligned} S_{AB}(p_\alpha, p'_\beta) &= \delta(p_\alpha - p'_\beta) \delta_{AB} - \\ &- 2\pi i \delta(E_A(p_\alpha) - E_B(p'_\beta)) H_{AB}(p_\alpha, p'_\beta, E_B(p'_\beta) + i0), \\ S_{0B}(P, p'_\beta) &= \\ &= -2\pi i \delta(P^2 - E_B(p'_\beta)) \sum_\alpha T_{\alpha B}(P, p'_\beta, E_B(p'_\beta) + i0), \\ S_{A0}(p_\alpha, P') &= \quad (3.71) \\ &= -2\pi i \delta(E_A(p_\alpha^2) - P'^2) \sum_\beta V_{A\beta}(p_\alpha, P', P'^2 + i0), \\ S_{00}(P, P') &= \\ &= \delta(P - P') - 2\pi i \delta(P^2 - P'^2) \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}(P, P', P'^2 + i0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, в частности, что хотя операторы  $\sum_\alpha T_{\alpha B}$ ,  $\sum_\beta V_{A\beta}$  и  $H_{AB}$  и не совпадают с операторами перехода  $K_{0B}$ ,  $K_{A0}$  и  $K_{AB}$ , которые входят в определение ядра  $S_{AB}$  (2.36), их ядра становятся равными на энергетической поверхности. Отметим, что ядра  $K_{0B}$ ,  $K_{A0}$  и  $K_{AB}$  являются гладкими ограниченными функциями. Напротив, ядро  $T(P, P', P'^2 + i0)$  содержит многочисленные особенности, которые отвечают ядрам  $T_\alpha(P, P', z)$  и

$Q_{\alpha\beta}^{(0)}(P, P', z)$ . Справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} T(P, P', P'^2 + i0) = \\ = \sum_{\alpha} t_{\alpha}(k_{\alpha}, k'_{\alpha}, k'^2_{\alpha} + i0) \delta(p_{\alpha} - p'_{\alpha}) + \\ + \sum_{\alpha \neq \beta} Q_{\alpha\beta}^{(0)}(P, P', P'^2 + i0) + \sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha\beta}^{(1)}(P, P', P'^2 + i0), \end{aligned} \quad (3.72)$$

где выделены слагаемые  $T_{\alpha}$  и  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$ , которые имеют наиболее сильные особенности —  $\delta$ -функциональные и полюсные.

На этом мы закончим описание общих следствий из интегральных уравнений (3.29). В главе VI мы используем изложенные выше результаты для доказательства асимптотической полноты волновых операторов.

#### § 4. Примеры

В этом параграфе мы проиллюстрируем технику работы с компактными уравнениями на двух примерах.

**Рассеяние на неподвижном центре.** Рассмотрим систему, в которой масса одной из частиц бесконечна, а две легкие частицы между собой не взаимодействуют. Для определенности рассмотрим случай  $m_3 = \infty$ ,  $v_{12} = 0$ . Из формул (1.9) вытекает тогда, что  $k_1 = p_2$ ,  $k_2 = p_1$ . В этом случае переменные в уравнении Шредингера разделяются и соответствующие волновые функции и операторы рассеяния явно выражаются в двухчастичных терминах. Предположим, ради простоты, что двухчастичные подсистемы (13) и (23) не имеют связанных состояний. Тогда существует только один волновой оператор  $U_0$ , ядро которого равно произведению двухчастичных волновых операторов

$$U_0^{(\pm)}(P, P') = u_1^{(\pm)}(k_1, k'_1) u_2^{(\pm)}(k_2, k'_2), \quad (3.73)$$

где

$$u_{\alpha}^{(\pm)}(k_{\alpha}, k'_{\alpha}) = \delta(k_{\alpha} - k'_{\alpha}) - \frac{t_{\alpha}(k_{\alpha}, k'_{\alpha}, k'^2_{\alpha} \pm i0)}{k^2_{\alpha} - k'^2_{\alpha} \mp i0}. \quad (3.73')$$

Соответственно, оператор рассеяния также факторизуется:

$$S_{00}(P, P') = s_1(k_1, k'_1) s_2(k_2, k'_2), \quad (3.74)$$

где операторы рассеяния для подсистем даются ра-

венством

$$s_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha) = \delta(k_\alpha - k'_\alpha) - 2\pi i \delta(k_\alpha^2 - k'^2_\alpha) \times \\ \times t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, k'^2_\alpha + i0). \quad (3.74')$$

Подставляя в (3.73) и (3.74) формулы (3.73') и (3.74'), придем к соотношениям

$$U_0^{(\pm)}(P, P') = \delta(P - P') - \sum_{\alpha} \frac{t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, k'^2_\alpha \pm i0)}{k_\alpha^2 - k'^2_\alpha - i0} \times \\ \times \delta(p_\alpha - p'_\alpha) + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} \frac{t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, k'^2_\alpha \pm i0) t_\beta(k_\beta, k'_\beta, k'^2_\beta \pm i0)}{(k_\alpha^2 - k'^2_\alpha \mp i0)(k_\beta^2 - k'^2_\beta \mp i0)} \quad (3.75)$$

и к аналогичным формулам для оператора рассеяния

$$S_{00}(P, P') = \delta(P - P') - \\ - 2\pi i \sum_{\alpha} t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, k'^2_\alpha \pm i0) \delta(p_\alpha - p'_\alpha) \delta(k_\alpha^2 - k'^2_\alpha) - \\ - \sum_{\alpha, \beta} 4\pi^2 \delta(k_\beta^2 - k'^2_\beta) \delta(P - P'^2) t_\alpha(k_\alpha, k'^2_\alpha, k'^2_\alpha + i0) \times \\ \times t_\beta(k_\beta, k'_\beta, k'^2_\beta + i0), \quad (3.76)$$

где в силу  $p_2^2 = k_1^2$  и  $p'^2_1 = k'^2_2$  справедливо  $P^2 = k_1^2 + k_2^2$ ,  $P'^2 = k'^2_1 + k'^2_2$ .

Посмотрим на эти формулы с точки зрения соотношений, полученных на основе компактных уравнений (3.29). Три первых слагаемых легко идентифицируются с аналогичными членами в соотношениях (3.63') и (3.72), которые отвечают ядрам  $T_\alpha(P, P', z)$ . Однако квадратичные по парным  $T$ -матрицам члены (3.75) и (3.76) не совпадают по форме с аналогичными слагаемыми в этих соотношениях. На первый взгляд, существование  $\delta$ -функции  $\delta(k_\beta^2 - k'^2_\beta)$  в квадратичном слагаемом (3.76) противоречит даже условию компактности интегральных уравнений (3.29), так как, по доказанному, их итерации не имеют  $\delta$ -функциональных особенностей, и значит, они не могут компенсировать появившуюся сингулярность. Однако более тщательный анализ показывает, что  $\delta$ -функциональная особенность возникает при сложении ядер  $Q_{12}^{(0)}$  и  $Q_{21}^{(0)}$ , отличающихся порядком индексов.

Действительно, заметим сперва, что зависимость переменных в сингулярном знаменателе и в аргументах  $T$ -матриц из (3.31) упрощается в силу предположения о бесконечности массы третьей частицы. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} k_1(p_1, p'_2) &= p'_2, \quad k'_1 = p'_2, \quad P^2 = k_1^2 + k_2^2, \\ k_2(p_1, p'_2) &= p_1, \quad k_2 = p_1, \quad P'^2 = k_1'^2 + k_2'^2. \end{aligned} \quad (3.77)$$

В результате произведения  $T$ -матриц в чисителях ядер  $Q_{12}$  и  $Q_{21}$  оказываются одинаковыми, а знаменатели комплексно сопряжены и отличаются знаками. Принимая во внимание формулу

$$\frac{1}{k_2^2 - k_2'^2 - i0} + \frac{1}{k_2'^2 - k_2^2 - i0} = 2\pi i \delta(k_2 - k_2'^2), \quad (3.78)$$

придем к выводу, что сумма этих ядер равна последнему слагаемому в (3.76).

Аналогичные выкладки показывают, что квадратичные слагаемые в (3.63) и (3.75) равны на поверхности энергии. При этом гладкие члены, которые остаются после вычитания из (3.63) произведения двухчастичных волновых функций (3.73'), компенсируются остатком ряда теории возмущений. Данный результат представляет определенный интерес, поскольку таким образом мы можем найти сумму формального ряда из полиномов по парным  $T$ -матрицам, что не удается сделать другими средствами.

Отметим, что сингулярности оператора рассеяния, отвечающие первой итерации  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$ , можно выразить в терминах только парных  $T$ -матриц и при произвольном соотношении между массами частиц.

Обозначим через  $T_{\alpha\beta}$  оператор с ядром

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}(P, P') &= \\ &= -\frac{1}{|s_{\alpha\beta}|^3} \frac{t_\alpha(\hat{k}_\alpha, \hat{k}_\alpha(p_\alpha, p'_\beta), E_\alpha) t_\beta(\hat{k}_\beta(p_\alpha, p'_\beta), \hat{k}'_\beta, E'_\beta)}{E_{\beta\alpha} - E'_\beta - i0}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

где

$$\begin{aligned} E_{\beta\alpha} &= k_\beta^2(p_\alpha, p'_\beta), \quad E'_\beta = k'_\beta^2, \quad E_\alpha = k_\alpha^2, \\ k_\alpha^2 + p_\alpha^2 &= k'_\beta^2 + p'_\beta^2 = E \end{aligned}$$

и через  $t_\alpha(\hat{k}, \hat{k}', E)$  обозначено ядро парной  $T$ -матрицы на энергетической поверхности:

$$t_\alpha(\hat{k}, \hat{k}', E) = t_\alpha(E^{1/2}\hat{k}, E^{1/2}\hat{k}', E + i0).$$

Нетрудно видеть, что числитель (3.31) совпадает с числителем (3.79) на энергетической поверхности  $k_\alpha^2 + p_\alpha^2 = k_\beta^2 + p_\beta^2 = z$ , если знаменатели, одинаковые в обоих случаях, обращаются в нуль. Отсюда следует, что ядро разности  $Q_{\alpha\beta}^{(0)} - T_{\alpha\beta}$  не имеет особенностей на энергетической поверхности, так что оператор  $T_{\alpha\beta}$  содержит все трехчастичные особенности  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$ . Физический смысл этого оператора состоит в том, что он описывает процессы последовательного двухчастичного перерассеяния частиц из подсистем  $\beta$  и  $\alpha$ .

**Дискретный спектр в окрестности нуля.** Изучим характер дискретного спектра оператора энергии системы трех тел в случае, когда двухчастичные подсистемы имеют виртуальные уровни при нулевой энергии, т. е., когда уравнение (3.4) имеет нетривиальное решение при  $z = 0$ . Мы будем предполагать при этом, что отрицательный дискретный спектр у этих операторов отсутствует.

Можно показать, что при этих условиях ядра парных  $T$ -матриц имеют сингулярность при  $z = 0$ . Справедливо представление

$$t(k, k', z) = \frac{\varphi(k)\varphi^*(k')}{i\sqrt{z}} + \tilde{t}(k, k', z), \quad (3.80)$$

где  $\tilde{t}$  и  $\varphi(k)$  — гладкие функции, убывающие на бесконечности. Мы будем считать частицы одинаковыми и положим  $m = 1$ . При этом  $|\varphi(0)|^2 = (2\pi^2)^{-1}$ .

Второе слагаемое (3.80) дает фредгольмов вклад в трехчастичное уравнение. Рассмотрим подробнее вклад первого слагаемого. Уравнение (3.28) с этим слагаемым сводится к одномерному. Более точно, будем искать его решение  $\Phi_\alpha(P)$  в виде

$$\Phi_\alpha(P) = \frac{\varphi(k)\varphi^*(k')}{\sqrt{z - p^2}} F(p) + \widetilde{\Phi}_\alpha(P).$$

Первое слагаемое является старшим при  $z$ , лежащих в окрестности нуля. Уравнение для  $F(p)$  выглядит

следующим образом:

$$F(p) = f_0(p) + \int \frac{\varphi(k_1(p, p''_2))\varphi^*(k_2(p''_2, p))}{z - k_2^2(p, p''_2) - p''_2} \frac{F(p''_2)}{\sqrt{z - p''_2}} dp''_2.$$

Это уравнение можно упростить в окрестности точки  $z = 0$ , если заметить, что вклад в сингулярную часть дают значения функции  $\varphi(p)$  при  $p = 0$ . В результате, при малых отрицательных  $z$  и  $p^2 \leq p_0$ , получим следующее уравнение:

$$F(p) = f_0(p) + \frac{1}{2\pi^2} \int_{|q| \leq p_0} \frac{F(q) dq}{\sqrt{\lambda + \frac{3}{4} q^2 (\lambda + p^2 + (p, q) + q^2)}},$$

$$\lambda = -\frac{4}{3} z.$$

После отделения угловых переменных это уравнение значительно упрощается. Выпишем, например, уравнение для сферически симметричного решения:

$$F_0(p) = f_0(p) + \frac{2}{\pi^3 \sqrt[3]{\lambda}} \int_0^{p_0/\sqrt[3]{\lambda}} \frac{F_0(q) dq}{\sqrt[3]{1 + \frac{3}{4} q^2}} \ln \frac{1 + p^2 + pq + q^2}{1 + p^2 - pq + q^2}. \quad (3.81)$$

Здесь мы сделали замену переменной интегрирования  $q \rightarrow \sqrt[3]{\lambda}q$ ,  $p \rightarrow \sqrt[3]{\lambda}p$ . Мы видим, что при  $z \rightarrow 0$  промежуток интегрирования становится бесконечным. Из-за медленного убывания ядра отвечающий ему оператор теряет тогда фредгольмовость. Чтобы изучить характер спектра на границе, сделаем дальнейшие упрощения и сохраним только старшие члены ядра при больших значениях  $p$  и  $q$ . Получим интегральный оператор

$$K_\Lambda h(p) = \int_0^{p_0/\sqrt[3]{\lambda}} \ln \frac{p^2 + pq + q^2}{p^2 - pq + q^2} h(q) \frac{dq}{q}.$$

Этот оператор имеет дискретный спектр при конечных  $\lambda$ , а при  $\lambda \rightarrow \infty$  (т. е.  $z \rightarrow 0$ ) собственные значения  $\lambda_n$  имеют асимптотическое поведение

$$K_n = \widetilde{K} \left( \frac{\pi}{\Lambda} n \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\Lambda = \frac{1}{2} \ln \lambda$  и

$$\tilde{K}(\omega) = \int_0^\infty p^{i\omega-1} \ln \frac{1+p+p^2}{1-p+p^2} dp = \frac{-2\pi}{\omega} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\omega}{3}}{\operatorname{sh} \frac{\pi\omega}{2}}.$$

Таким образом, решение уравнения (3.81) обращается в бесконечность при таких  $z$ , при которых уравнение

$$1 + \frac{4}{3\pi^3} \tilde{K}\left(\frac{\pi k}{\Lambda}\right) = 0$$

имеет решение. Нас интересуют большие положительные  $\omega$ . В этом случае это уравнение сводится к уравнению

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{4}{3\pi^3} e^{\pi\omega/6},$$

которое имеет единственное решение. Обозначим это решение через  $\omega_0$ . Тогда при  $\Lambda = \pi n/\omega_0$  решение  $F_0(p)$  уравнения (3.81) обращается в бесконечность. Используя связь  $\Lambda$  и  $\lambda$ , видим, что сингулярные значения  $\lambda$  имеют следующее асимптотическое распределение:

$$\lambda_n = \lambda_0 \exp\{-2\pi n/\omega_0\}, \quad (3.82)$$

где в  $\lambda_0$  мы собрали все неопределенные константы, которые появились по ходу вычислений. Формула (3.82) представляет собой основной итог проведенного исследования. Можно показать, что сделанные нами приближения не отражаются на конечном результате и асимптотика дискретного спектра при  $\lambda \rightarrow 0$  действительно описывается этим соотношением. Заметим, что для существования указанного эффекта необходимо, чтобы виртуальные уровни имели по крайней мере две пары частиц.

Таким образом, если двухчастичные подсистемы не имеют связанных состояний, но обладают виртуальными уровнями, то у оператора энергии системы трех тел появляется бесконечное число связанных состояний в окрестности точки  $z = 0$ . Физическое происхождение этого явления обусловлено тем, что слабо связанные двухчастичные подсистемы индуцируют медленно убывающее притягивающее взаимодействие. Этому взаимодействию и отвечает экспоненциальная серия собственных чисел (3.82).

## § 5. Компактные интегральные уравнения для $N$ частиц

**Трудности задачи.** Уравнение типа (3.28) можно выписать также и для систем любого числа частиц  $N$ . Однако такие уравнения непригодны для исследования задачи  $N$  тел при  $N \geq 4$  по тем же причинам, что и уравнение теории возмущений (3.23). Поясним это обстоятельство подробнее.

Согласно рецепту, описанному в § 2,  $T$ -матрицу  $T(z)$  следует разбить на компоненты:

$$M_{a_{N-1} b_{N-1}}(z) = V_{a_{N-1}} \delta(a_{N-1}, b_{N-1}) - V_{a_{N-1}} R(z) V_{b_{N-1}}. \quad (3.83)$$

Здесь вместо индексов  $\alpha$  и  $\beta$ , обозначающих  $N(N-1)/2$  пары частиц  $12, 13, \dots, 1N, \dots, (N-1)N$ , мы употребляем символы отвечающих им разбиений  $a_{N-1}$  и  $b_{N-1}$ . Оператор  $T(z)$  выражается через компоненты  $M_{a_{N-1} b_{N-1}}(z)$  равенством

$$T(z) = \sum_{a_{N-1}, b_{N-1}} M_{a_{N-1} b_{N-1}}(z), \quad (3.84)$$

где суммирование ведется по всем  $N(N-1)/2$  разбиениям  $a_{N-1}$  и  $b_{N-1}$ . Действуя по такой же схеме, как и в случае трех тел, можно показать, что компоненты  $M_{a_{N-1} b_{N-1}}(z)$  удовлетворяют уравнениям типа (3.28):

$$\begin{aligned} M_{a_{N-1} b_{N-1}} &= \\ &= \delta(a_{N-1}, b_{N-1}) T_{a_{N-1}} - T_{a_{N-1}} R_0 \sum_{c_{N-1} \neq a_{N-1}} M_{c_{N-1} b_{N-1}}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Здесь и дальше мы опускаем переменную  $z$  в обозначении операторов. Оператор  $T_{a_{N-1}}(z)$  соответствует системе из  $N$  частиц, в которой все потенциалы, за исключением  $V_{a_{N-1}}$ , равны нулю. Ядро этого оператора явно выражается в терминах двухчастичной  $T$ -матрицы равенством

$$\begin{aligned} T_{a_{N-1}}(P, P', z) &= \\ &= t_{a_{N-1}}(k_{a_{N-1}}, k'_{a_{N-1}}, z - p_{a_{N-1}}^2) \delta(p_{a_{N-1}} - p'_{a_{N-1}}). \end{aligned}$$

Ядра интегральных уравнений (3.35), подобно ядру системы уравнений (3.28), содержат  $\delta$ -функции

$\delta(p_{a_{N-1}} - p'_{a_{N-1}})$ . Как мы видели выше, такие  $\delta$ -функции исчезают в задаче трех тел после одной итерации, что и обуславливает компактность уравнений (3.28). Однако при  $N \geq 4$  это свойство уравнений пропадает. Действительно, при итерировании уравнений (3.35) появляются, например, операторы вида

$$T_{a_{N-1}} R_0 T_{b_{N-1}} R_0 T_{a_{N-1}} R_0 \dots R_0 T_{b_{N-1}},$$

где отвечающие индексам  $a_{N-1}$  и  $b_{N-1}$  пары  $\alpha$  и  $\beta$  имеют одну общую частицу. Эти итерации описывают перераспределение частиц пар  $\alpha$  и  $\beta$ , образующих трехчастичную подсистему, и их ядра содержат  $\delta$ -функции, зависящие от импульсов остальных  $N-3$  частиц, не входящих в рассматриваемую подсистему. Эту ситуацию можно проиллюстрировать диаграммой для системы пяти тел (рис. 9), где несвязные линии сопоставляются невзаимодействующим частицам 1 и 2. Продолжая анализ уравнений (3.35), можно убедиться, что  $\delta$ -функции содержатся во всех итерациях, которые получаются при перемножении парных  $T$ -матриц для одной и той же подсистемы любого числа частиц. Эти  $\delta$ -функции исчезают, например, в том случае, когда в произведении  $T_{a_{N-1}^{(1)}} R_0 T_{a_{N-1}^{(2)}} R_0 \dots R_0 T_{b_{N-1}}$  нет одинаковых сомножителей,  $a_{N-1}^{(i)} \neq a_{N-1}^{(k)}$ ,  $i, k = 1, 2, \dots, N-2$ , причем каждое из разбиений полной цепочки  $\{a_{N-1}, a_{N-2}, \dots, a_2\}$  представлено хотя бы одним оператором  $T_{a_{N-1}^{(i)}}$ , а последний оператор  $T_{b_{N-1}}$  отвечает разбиению  $b_2$ , не совпадающему с  $a_2$ . Такой случай изображен на связной диаграмме рис. 10.

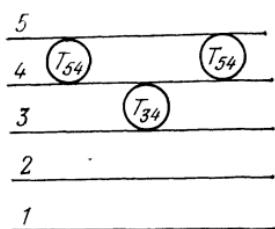


Рис. 9

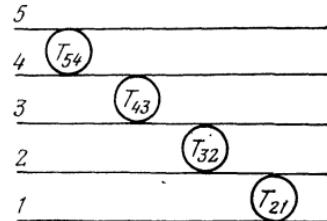


Рис. 10

Итак, мы видим, что систему (3.35) следует подвергнуть дальнейшей перестройке, чтобы получить уравнения со связными ядрами. При этом необходимо по возможности сохранить свойства, которые имели компактные урав-

нения (3.28) для системы трех частиц. Именно, перестроенные уравнения должны быть компактными и соответствующие однородные уравнения эквивалентны уравнению Шредингера в пространстве квадратично интегрируемых функций.

В случае системы  $N$  тел мы сталкиваемся с проблемой выбора оптимальной перестройки уравнений (3.35), обусловленной неоднозначностью в дальнейшем разбиении операторов  $T(z)$  или  $M_{a_{N-1} b_{N-1}}$  на компоненты. Например, можно разбить оператор  $T(z)$  на  $N$  компонент, по числу частиц, на  $\frac{1}{2} N(N - 1)$  компонент, по числу парных потенциалов; на  $\frac{1}{6} N(N - 1)(N - 2)$  компонент — по числу трехчастичных подсистем и т. д. При этом, если в случае системы трех тел возможны лишь два первых способа, причем количество компонент по числу частиц или парных потенциалов совпадают  $N = \frac{1}{2}N(N - 3) = 3$ , то в системах  $N$  тел при  $N \geq 4$  количество уравнений для разных вариантов включения потенциалов не совпадает с числом частиц. В результате можно вводить различное число компонент, исходя из каких-либо наводящих соображений, и получать для них уравнения со связанными ядрами. Можно получить уравнение со связанными ядрами и без разделения  $T$ -матрицы на компоненты, если выделить из нее или из резольвенты несвязную часть. Однако такие уравнения обладают существенным недостатком — для них не удается доказать эквивалентность соответствующих однородных уравнений уравнению Шредингера. В принципе, они могут иметь лишние решения, которые не удовлетворяют уравнению Шредингера.

Такие решения возникают из-за факторизации операторов в интегральных уравнениях. Чтобы пояснить механизм их появления, рассмотрим простейший тип уравнений, получаемых в результате выделения несвязной части.

В системе трех тел в качестве такого уравнения можно взять соотношение (2.17), которое имеет следующий вид:

$$R(z) - R_0(z) =$$

$$= \sum_{\alpha} (R_{\alpha}(z) - R_0(z)) + \sum_{\alpha \neq \beta} R_{\alpha}(z) V_{\alpha} R_0(z) V_{\beta} R(z). \quad (3.86)$$

Ядро этого уравнения имеет такую же структуру, как и ядро оператора  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$ , рассмотренного в § 2. Следовательно, оно является связанным.

Заметим далее, что в силу равенства

$$I - \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} R_\alpha V_\alpha R_0 V_\beta = \left( I - \sum_{\alpha} R_\alpha V_\alpha \right) \left( I + \sum_{\beta} R_0 V_\beta \right)$$

однородное уравнение (3.86) можно переписать в факторизованном виде:

$$\left( I - \sum_{\alpha} R_\alpha V_\alpha \right) \left( I + \sum_{\beta} R_0 V_\beta \right) \Psi = 0. \quad (3.87)$$

Видно, что существует два типа решений этого уравнения. Первое, интересующее нас, удовлетворяет уравнению Шредингера, которое получается в результате умножения равенства

$$\left( I + R_0 \sum_{\beta} V_\beta \right) \Psi = 0 \quad (3.88)$$

на оператор  $H_0 - z$  слева. Второе решение отвечает нулям множителя  $I - \sum_{\alpha} R_\alpha V_\alpha$ ,

$$\left( I - \sum_{\alpha} R_\alpha V_\alpha \right) \chi = 0,$$

и, вообще говоря, не совпадает с решениями (3.88). Аналогичным недостатком обладают и уравнения с выделенной несвязной частью для системы  $N$  тел:

$$R(z) = [R(z)]_{nc} + \sum_{a_2} [R_{a_2}]_{nc}^{(a_2)} \bar{V}_{a_2} R(z). \quad (3.89)$$

Эти уравнения также могут быть представлены в факторизованном виде.

**Компактные уравнения для системы четырех частиц.** Анализ трудностей, которые мы описали выше, показывает, что для устранения лишних решений спецификация компонент  $T$ -матрицы должна предполагать последовательное включение парных взаимодействий, отвечающих всевозможным процессам перерассеяния как простейших парных подсистем, так и более сложных конфигураций, входящих в различные разбиения. Таким образом, мы естественно приходим к классификации компонент по цепочкам разбиений. Мы опишем метод вывода компактных уравнений для таких компонент на примере системы четырех тел.

Будем преобразовывать систему уравнений (3.85), которая в данном случае состоит из шести уравнений для каждого фиксированного  $b_{N-1}$ . Компоненты, отвечающие цепочкам разбиений, возникают в результате записи операторов

$$W_{a_{N-1} b_{N-1}} = M_{a_{N-1} b_{N-1}} - \delta(a_{N-1}, b_{N-1}) T_{a_{N-1}}$$

в виде суммы нескольких членов, отвечающих всевозможным способам присоединения взаимодействий к паре, определяющей разбиение  $a_{N-1}$ . Этому процессу отвечает переход на следующий горизонтальный уровень «дерева» на рис. 2, 3. Например, оператор  $W_{12}$  представляется как сумма

$$W_{12} = M_{12, 123} + M_{12, 124} + M_{12, 34}, \quad (3.90)$$

где в обозначениях опущен индекс  $b_{N-1}$ . Слагаемые в этой сумме определяются соотношениями

$$\begin{aligned} M_{12, 123} &= -T_{12}R_0(T_{13} + T_{23}) + T_{12}R_0(W_{13} + W_{23}), \\ M_{12, 124} &= -T_{12}R_0(T_{14} + T_{24}) + T_{12}R_0(W_{14} + W_{24}), \\ M_{12, 34} &= -T_{12}R_0 T_{34} + T_{12}R_0 W_{34}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Всего, как мы отмечали выше, существует 18 цепочек разбиений, и, следовательно, мы получим столько же компонент. Представления, аналогичные (3.90) и (3.91), справедливы и для остальных 15 компонент. Отметим, что компоненты  $M_{12, 123}$  и  $M_{12, 124}$  отвечают включению взаимодействия, которое приводит к появлению трехчастичных подсистем (123) и (124). Компонента  $M_{12, 34}$  соответствует образованию двух двухчастичных подсистем из частич 12 и 34.

Система из 18 уравнений для этих компонент получается после подстановки в правую часть равенств (3.91) представлений (3.90). Однако эта система не является окончательной. Чтобы получить компактные уравнения, необходимо обратить диагональную часть данной системы. Ясно, что именно диагональные члены порождают итерации с  $\delta$ -образными особенностями, о которых говорилось выше. При этом результат указанного обращения может быть описан в терминах решения трехчастичной задачи.

Чтобы выполнить обращение, мы должны собрать компоненты, отвечающие одинаковым подсистемам. Имеется четыре группы компонент для трехчастичных под-

систем и три группы — для двух подсистем, состоящих из двух частиц. Например, компоненты  $M_{12,123}$ ,  $M_{13,123}$  и  $M_{23,123}$  отвечают группе первого типа, а компоненты  $M_{12,34}$  и  $M_{34,12}$  — группе второго типа.

Рассмотрим, как производится обращение диагональных членов в таких группах.

Структуру диагонального блока для компонент первого типа отражает система уравнений

$$\begin{aligned} M_{12,123} &= \dots -T_{12}R_0(M_{13,123} + M_{23,123} + \dots) \dots, \\ M_{13,123} &= \dots -T_{13}R_0(M_{12,123} + M_{23,123} + \dots) \dots, \\ M_{23,123} &= \dots -T_{23}R_0(M_{12,123} + M_{23,123} + \dots) \dots, \end{aligned} \quad (3.92)$$

а для компонент второго типа — система

$$\begin{aligned} M_{12,34} &= \dots -T_{12}R_0M_{34,12} \dots, \\ M_{34,12} &= \dots -T_{34}R_0M_{12,34} \dots. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Здесь мы не выписываем явно неоднородные и недиагональные члены.

Запишем нашу систему в виде одного операторного уравнения

$$M = M_0 + AM.$$

«Матричный оператор»  $A$ , определяемый матрицей  $18 \times 18$ ; может быть разбит на два слагаемых

$$A = A_0 + \tilde{A},$$

где  $A_0$  — квазидиагональная матрица, состоящая из блоков  $(3 \times 3)$  и  $(2 \times 2)$ . Типичный блок первого типа

$$C_{123} = \begin{pmatrix} 0 & T_{23}R_0 & T_{23}R_0 \\ T_{13}R_0 & 0 & T_{13}R_0 \\ T_{12}R_0 & T_{12}R_0 & 0 \end{pmatrix}$$

уже встречался нам в задаче трех тел. Блоки  $(2 \times 2)$  второго типа

$$C_{12,34} = \begin{pmatrix} 0 & T_{12}R_0 \\ T_{34}R_0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствуют задаче двух невзаимодействующих между собой пар частиц. Матрица  $(I - A_0)^{-1}$  может быть выражена через матрицы  $(I - C_{123})^{-1}$  и  $(I - C_{12,34})^{-1}$  и аналогичные матрицы, составляющие остальные блоки  $(2 \times 2)$ .

и  $(3 \times 3)$ . Матрицы вида  $M^{(123)} = (I - C_{123})^{-1}$ , элементы которых мы обозначим через  $M_{\alpha,\beta}^{(123)}$ , явно выражаются через решения трехчастичной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} M_{23,\beta}^{(123)} \\ M_{31,\beta}^{(123)} \\ M_{12,\beta}^{(123)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{23} & 0 & 0 \\ 0 & T_{31} & 0 \\ 0 & 0 & T_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & T_{23}R_0 & T_{23}R_0 \\ T_{31}R_0 & 0 & T_{31}R_0 \\ T_{12}R_0 & T_{12}R_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{23,\beta}^{(123)} \\ M_{31,\beta}^{(123)} \\ M_{12,\beta}^{(123)} \end{pmatrix},$$

$$\beta = 23, 31, 12,$$

а матрицы вида  $M_{12,34}^{(12,34)} = (I - C_{12,34})^{-1}$  — через решение системы

$$\begin{pmatrix} M_{12,\beta}^{(12,34)} \\ M_{34,\beta}^{(12,34)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{12} & 0 \\ 0 & T_{34} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & T_{12}R_0 \\ T_{34}R_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{12,\beta}^{(12,34)} \\ M_{34,\beta}^{(12,34)} \end{pmatrix},$$

$$\beta = 12, 34.$$

Последнее решение явно описывается в терминах двухчастичных  $T$ -матриц  $T_{12}$  и  $T_{34}$ .

В результате указанного обращения диагональных членов мы приходим к системе компактных уравнений, ядра и неоднородные члены которых явно описываются в терминах операторов  $M_{A_2 B_2}^{a_h}$ . Выпишем подробно два типичных уравнения:

$$\begin{aligned} M_{123,12} = & M_{12,12}^{(123)} + M_{12,13}^{(123)} + M_{12,23}^{(123)} - T_{12}\delta(12, b_{N-1}) - \\ & - M_{12,12}^{(123)}R_0(M_{234,23} + M_{134,13} + M_{14,23} + M_{23,13}) - \\ & - M_{12,13}^{(123)}R_0(M_{124,12} + M_{234,23} + M_{34,12} + M_{24,23}) - \\ & - M_{12,23}^{(123)}R_0(M_{124,12} + M_{134,13} + M_{34,12} + M_{24,13}), \quad (3.94) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{34,12} = & M_{12,12}^{(12,34)} + M_{12,34}^{(12,34)} - T_{12}\delta(12, b_{N-1}) + \\ & + M_{12,12}^{(12,34)}R_0(M_{134,34} + M_{234,34}) + \\ & + M_{12,34}^{(12,34)}R_0(M_{123,12} + M_{124,12}). \quad (3.94') \end{aligned}$$

Остальные 16 уравнений могут быть получены из этих уравнений перестановкой индексов. Эти уравнения представляют собой искомое обобщение компактных уравнений (3.28) на систему четырех частиц.

**Задача  $N$  тел.** Сформулируем теперь компактные уравнения для произвольного числа частиц  $N$ . Сначала введем ряд новых обозначений. Будем обозначать через

$T_{a_l}(z)$   $T$ -матрицу для оператора  $H_{a_l}$ ,

$$T_{a_l} = V_{a_l} - V_{a_l} R_{a_l} V_{a_l}. \quad (3.95)$$

Резольвента  $R_{a_l}$  выражается через оператор  $T_{a_l}$  формулой

$$R_{a_l} = R_0 - R_0 T_{a_l} R_0. \quad (3.96)$$

В силу (3.15), ядро  $T$ -матрицы  $T_{a_l}$  в импульсном представлении дается равенством

$$T_{a_l}(P, P', z) = t_{a_l}^{(\text{int})} \left( k_{a_l}, k'_{a_l}, z - p_{a_l}^2 \right) \delta(p_{a_l} - p'_{a_l}),$$

где через  $t_{a_l}^{(\text{int})}$  обозначено ядро  $T$ -матрицы для оператора  $h_{a_l}^{(\text{int})}$ . Через  $L_{A_i B_k}$  будем обозначать матричные операторы, строки и столбцы которых пронумерованы цепочками разбиений,  $A_i = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_{N-1})$  и  $B_k = (b_k, b_{k+1}, \dots, b_{N-1})$ . Сопоставим каждому разбиению  $a_k$  компоненты  $T$ -матрицы  $T_{a_k}$ :

$$\begin{aligned} M_{a_{N-1} b_{N-1}}^{(a_k)} &\equiv M_{A_{N-1} B_{N-1}}^{(a_k)} = \\ &= \delta(a_{N-1}, b_{N-1}) V_{a_{N-1}} - V_{a_{N-1}} R_{a_k} V_{b_{N-1}}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

При  $k = 1$ , т. е. при полностью включенном взаимодействии, эти компоненты совпадают с компонентами  $M_{a_{N-1} b_{N-1}}$ , определенными равенствами (3.85). Компоненты  $M_{A_{N-1} B_{N-1}}^{(a_k)}$  при  $k \geq 2$  явно выражаются в терминах  $T$ -матриц подсистем, образующих разбиение  $a_k$ . Из уравнений (3.19) следует, что  $T$ -матрица  $T_{a_k}$  равна сумме компонент  $M_{A_{N-1} B_{N-1}}^{(a_k)}$  по всем цепочкам  $A_{N-1}, B_{N-1}$ :

$$T_{a_k} = \sum_{A_{N-1}, B_{N-1}} M_{A_{N-1} B_{N-1}}^{(a_k)}.$$

Определим операторы  $M_{A_i B_i}^{(a_k)}$  при  $2 \leq i \leq N-1$  с помощью рекуррентных формул

$$\begin{aligned} M_{A_i B_i}^{(a_k)} &= M_{A_{i+2} B_{i+2}}^{(a_{i+1})} \delta(a_{i+1}, b_{i+1}) \delta(a_i, b_i) - \\ &- \sum_{(d_{i+1} \neq a_{i+1}) \subset a_i} \sum_{(D_{i+2} \neq C_{i+2}) \subset a_{i+1}}' M_{A_{i+2} C_{i+2}}^{(a_{i+1})} R_0 M_{D_{i+1} B_{i+1}}^{(a_k)}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

где первое суммирование ведется по разбиениям  $d_{i+1}$ , следующим за  $a_i$  и не равным  $a_{i+1}$ . Штрих у знака второй суммы означает, что суммирование ведется только по «засцепляющимся» цепочкам  $C_{i+2}$  и  $D_{i+2}$ , для которых выполнены условия  $c_{N-1} \neq d_{N-1}, \dots, c_{i+2} \neq d_{i+2}$ ,  $d_{N-1} \subset c_{N-2}, \dots, d_{i+3} \subset c_{i+2}$ . При  $i = N - 2$  в правой части появляются операторы  $M_{A_N B_N}^{(a_{N-1})}$ , которые, по определению, полагаются равными  $T_{a_{N-1}}$ . Если известны компоненты  $M_{A_i B_i}^{(a_k)}$ , то компоненты  $M_{A_{i+1} B_{i+1}}^{(a_k)}$  и  $T$ -матрица  $T_{a_k}$  восстанавливаются по формулам

$$M_{A_{i+1} B_{i+1}}^{(a_k)} = \sum_{a_i} M_{A_{i+1} a_i, B_{i+1} b_i}^{(a_k)}, \quad (3.99)$$

где  $b_i$  — любое разбиение, предшествующее  $b_{i+1}$ , и

$$T_{a_k} = \sum_{b_{N-1}} \sum_{A_i} M_{A_i B_i}^{(a_k)}. \quad (3.100)$$

Суммирование в (3.100) ведется по всем  $A_i$  и  $b_{N-1}$ , причем для каждого  $b_{N-1}$  должна быть выбрана цепочка  $B_i$ ,  $B_i = (b_i, b_{i+1}, \dots, b_{N-1})$ , такая, что  $b_{N-2} \supset b_{N-1}$ . Вывод (3.99) и (3.100) основан на очевидном соотношении

$$\sum_{a_{k-1}} \sum_{(d_k \neq a_k) \subset a_{k-1}} = \sum_{d_k \neq a_k}, \quad (3.101)$$

которое называют *правилом сумм*.

В этих обозначениях операторы  $M_{A_k B_k}^{(a_{k-1})}$  подчиняются уравнениям

$$M_{A_k B_k}^{(a_{k-1})} = M_{A_{k+1} B_{k+1}}^{(a_k)} \delta(a_k, b_k) - \sum_{d_k \neq a_k} \sum'_{(D_{k+1} \neq C_{k+1}) \subset a_k} M_{A_{k+1} C_{k+1}}^{(a_k)} R_0 M_{D_k B_k}^{(a_{k-1})}. \quad (3.102)$$

Простейшей из систем (3.102) является система уравнений для  $M_{A_{N-1} B_{N-1}}^{(a_{N-2})}$ , которая совпадает с уравнениями (3.85). Наиболее детальное разбиение  $T$ -матрицы получается при  $k = 2$ . Этому случаю соответствует искомое обобщение компактных уравнений:

$$M_{A_2 B_2} = M_{A_3 B_3}^{(a_2)} \delta(a_2, b_2) - \sum_{d_2 \neq a_2} \sum'_{(D_3 \neq C_3) \subset a_2} M_{A_3 C_3}^{(a_2)} R_0 M_{D_2 B_2}. \quad (3.103)$$

Здесь в обозначении операторов  $M_{A_2 B_2}$  опущен индекс  $a_1$ .

Можно показать, что после  $N - 2$  итераций этих уравнений  $\delta$ -функции в их ядрах исчезают, что позволяет доказать компактность (3.103) при  $\operatorname{Im} z \neq 0$ . Случай, когда переменная  $z$  выходит на вещественную ось, технически значительно труднее исследовать, и до сих пор не существует полного доказательства компактности при  $\operatorname{Im} z = 0$ . Однако имеющиеся на сегодняшний день результаты позволяют не сомневаться в компактности этих уравнений и при  $\operatorname{Im} z = 0$ .

Отметим, что вывод системы уравнений (3.103) основан на процедуре обращения диагональных сингулярных членов в цепочке уравнений типа (3.102) для  $k = N - 1, N - 2, \dots, 3$ . Выше мы описали необходимые детали такого обращения при  $N = 4$ . В общем случае вывод этих уравнений может быть получен индукцией  $a_2^{(N-1)} \rightarrow a_3^{(N)}$  с помощью весьма громоздких построений. Мы не будем приводить их здесь.

Вместо уравнений для компонент  $T$ -матрицы иногда удобно рассматривать компактные уравнения для компонент волновых операторов, определяемых равенствами

$$\begin{aligned} U_{B_2, A}^{(\pm)} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mp i\varepsilon R_0(E_A \pm i\varepsilon) \times \\ &\quad \times \sum_{a_{N-1}} M_{B_2 A_2}(E_A \pm i\varepsilon) R_0(E_A \pm i\varepsilon) L_A(E_A) \end{aligned} \quad (3.98')$$

при  $A \neq 0$ , а при  $A = 0$  — равенствами

$$\begin{aligned} U_{B_2, 0}^{(\pm)} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mp i\varepsilon R_0(E_0 \pm i\varepsilon) \times \\ &\quad \times \sum_{a_{N-1}} M_{B_2 A_2}(E_0 \pm i\varepsilon) R_0(E_0 \pm i\varepsilon) L_0(E_0). \end{aligned}$$

Уравнения для этих компонент получаются из (3.103) умножением на операторы  $\mp i\varepsilon R_0(E_A \pm i\varepsilon)$  и  $R_0(E_A \pm i\varepsilon)L_A$  и последующим переходом к пределу  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Рассмотрим далее однородную систему уравнений, отвечающую (3.103):

$$\Phi_{A_2} = - \sum_{d_2 \neq a_2} \sum'_{(D_3 \neq C_3) \subset a_2} M_{A_3 C_3}^{(a_2)} R_0 \Phi_{D_2}. \quad (3.104)$$

Выполняя операции, обратные тем, которые привели нас к уравнениям (3.102) или (3.103), мы вернемся к исходной однородной системе (3.85). Важно при этом, что каж-

дая из выполняемых при выводе (3.105) операций была обратима, так что при умножении на обратные операторы мы не приобретаем лишних решений. Обозначим через  $\Phi_{a_{N-1}}$  компоненты, отвечающие однородному уравнению (3.85). Эти компоненты выражаются через компоненты  $\Phi_{A_2}$  равенством

$$\Phi_{a_{N-1}} = \sum_{a_2, a_3, \dots, a_{N-2}} \Phi_{A_2}.$$

Умножим затем однородные уравнения (3.85) на оператор  $R_0$  и обозначим

$$\Psi_{a_{N-1}} = R_0 \Phi_{a_{N-1}}.$$

Заметим, что из соотношений (3.95) и (3.96) вытекает равенство

$$T_{a_{N-1}} R_0 = R_{a_{N-1}} V_{a_{N-1}}. \quad (3.105)$$

Отсюда находим, что эти функции удовлетворяют системе уравнений

$$\Psi_{a_{N-1}} = \sum_{b_{N-1} \neq a_{N-1}} R_{a_{N-1}} V_{a_{N-1}} \Psi_{b_{N-1}}. \quad (3.106)$$

Умножая (3.106) на оператор  $H_{a_N} - z$  и складывая затем все получившиеся уравнения, найдем, что функция

$$\Psi = R_0 \sum_{A_2} \Phi_{A_2} \quad (3.107)$$

удовлетворяет уравнению Шредингера  $(H - z)\Psi = 0$ .

Чтобы завершить изучение однородной системы уравнений (3.104), мы должны проверить квадратичную интегрируемость функций (3.107). Это можно сделать по схеме, которую мы обсуждали на примере задачи двух и трех частиц. Конечно, в техническом отношении задача  $N$  тел много сложнее. Однако рассуждения в основном имеют стандартный характер и мы не будем описывать их здесь.

Итак, система уравнений (3.103) обладает желаемыми свойствами: к этой системе применима альтернатива Фредгольма, а соответствующее однородное уравнение эквивалентно уравнению Шредингера для собственных функций.

Посмотрим теперь, какими свойствами обладают решения этой системы.

**Особенности ядер  $M_{A_2B_2}$ .** Свойство ядер  $M_{A_2B_2}$  могут быть изучены по такой же схеме, как и в случае ядер  $M_{ab}$  для системы трех тел. Мы не будем, однако, приводить здесь необходимые для исследования системы (3.103) рассуждения, а ограничимся только описанием конечных результатов.

Операторы  $M_{A_2B_2}$  можно представить в виде суммы

$$M_{A_2B_2} = \sum_{k=1}^n Q_{A_2B_2}^{(k)} + M_{A_2B_2}^{(n)},$$

где через  $Q_{A_2B_2}^{(k)}$  обозначены итерации компактных уравнений (3.103) порядка  $k$ . Операторы  $M_{A_2B_2}^{(n)}$  подчиняются системе уравнений, аналогичной (3.103), но с другими свободными членами  $Q_{A_2B_2}^{(n+1)}$ . Как и ядро резольвенты, ядра  $M_{A_2B_2}$  имеют особенности двух типов — полюсные и  $\delta$ -образные.

Особенности типа  $\delta$ -функций имеются лишь в ядрах  $Q_{A_2B_2}^{(k)}$  первых  $N - 3$  итераций,  $k \leq N - 3$ . Эти ядра, отвечающие несвязанным частям  $T$ -матрицы, явно выражаются через компоненты  $T$ -матриц  $M_{A_iB_i}^{(a_k)}$  для разбиений  $a_k$ ,  $k \geq 2$ .

Кластерные полюсные особенности ядер  $M_{A_2B_2}$  возникают как следствие представлений (2.14) для резольвент операторов энергий подсистем. Эти особенности содержатся в одном и том же виде во всех ядрах итераций  $Q_{A_2B_2}^{(k)}$ , начиная с  $k = N - 2$ , и в ядрах  $M_{A_2B_2}^{(k)}$  при  $k \geq N - 2$ . Чтобы описать эти особенности, введем ряд обозначений.

Через  $\tilde{M}_{A_{l+1}, B_{l+1}}^{(a_k)}$ ,  $l \leq k$ , обозначим компоненты  $T$ -матрицы для оператора  $h_{a_k}^{(int)}$ . Эти компоненты определяются рекуррентными соотношениями (3.97) и (3.98), где резольвенту  $R_0$  следует заменить резольвентой «внутреннего» оператора кинетической энергии  $r_{a_k}^{(int)}(z) = (h_{a_n}^{(int)} - z)^{-1}$ .

Пусть далее  $A$  — детализованное разбиение, состоящее из  $k$  кластеров. Через  $\Phi_A^{A_{k+1}}$  обозначим компоненты форм-фактора этого разбиения  $\Phi_A$ . Эти компоненты можно выразить через форм-фактор  $\Phi_A$  либо с помощью рекуррентных соотношений типа (3.98), либо определить

как решения однородного уравнения

$$\Phi_A^{A_{k+1}} = - \sum_{d_{k+1} \neq a_{k+1}} \sum'_{(D_{k+2} \neq C_{k+2}) \subset a_{k+1}} \tilde{M}_{A_{k+2}C_{k+2}}^{a_{k+1}} \Phi_A^{D_{k+1}}.$$

В этих обозначениях кластерные полюсные особенности описываются следующими представлениями:

$$\begin{aligned} Q_{A_2B_2}(P, P', z) &= F_{A_2B_2}(P, P', z) + \\ &+ \sum_{i=2}^{N-1} \sum_C \frac{\Phi_C^{(A_i+1)}(k_C)}{E_C(p_C) - z} G_{CB_2}^{a_2a_3\dots a_{i-1}}(p_C, P', z) + \\ &+ \sum_{j=2}^{N-1} \sum_D J_{A_2D}^{b_2b_3\dots b_{j-1}}(P, p_D', z) \frac{\Phi_D^{(b_{N-1})}(k_D')}{E_D(p_D') - z} + \\ &+ \sum_{i=2}^{N-1} \sum_{j=2}^{N-1} \sum_C \sum_D \frac{\Phi_C^{(A_i+1)}(k_C)}{E_C(p_C) - z} \times \\ &\times H_{CD}^{a_2a_3\dots a_{i-1}, b_2b_3\dots b_{j-1}}(p_C, p_D', z) \frac{\Phi_D^{(b_{N-1})}(k_D')}{E_D(p_D') - z}. \quad (3.108) \end{aligned}$$

Здесь при каждом  $i(j) = 2, 3, \dots, N-2$  суммирование ведется по всем детализованным разбиениям  $C(D)$ , которые имеются в разбиении  $a_i(b_j)$ .

Компоненты  $F, G, J$  и  $H$ , отвечающие ядрам  $Q_{A_2B_2}^{(k)}$ , не слишком высокого порядка, могут иметь дополнительные полюсные особенности, которые зависят не только от величины, но и от направлений импульсных переменных. Такие особенности, называемые второстепенными, мы подробно анализировали в случае системы трех тел. В случае системы  $N$  тел, однако, вид таких особенностей до сих пор в общем случае не изучен. Не доказано также, что второстепенные особенности исчезают после достаточно большого числа итераций, как это было в случае задачи трех тел. Тем не менее, естественно принять гипотезу о стирании второстепенных особенностей. Пусть  $\Pi_{-\infty^2}$  — комплексная плоскость с разрезом  $[-\infty^2, \infty)$ ,  $\infty^2 = \max_A \infty_A^2$ , из которой исключены окрестности особых точек уравнений (3.103). Гипотеза состоит в следующем.

Компоненты  $F, G, J$  и  $H$  ядер  $M_{A_2B_2}^{(n)}$  при достаточно больших  $n$  являются убывающими гёльдеровскими

*функциями своих аргументов при изменении  $z$  вплоть до вещественной оси в области  $\Pi_{-\kappa^2}$ .*

На этом утверждении мы закончим описание свойств компактных уравнений и их решений.

В заключение подчёркнем, что компактные уравнения позволяют полностью решить задачу описания особенностей ядра резольвенты. Последняя имеет вид суммы

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z) \sum_{A_2, bN-1} M_{A_2 B_2}(z) R_0(z). \quad (3.109)$$

Соответственно несвязная часть резольвенты (2.18) явно выражается через операторы  $Q_{A_2 B_2}^{(k)}$  при  $k \leq N-3$ , а кластерные полюсные особенности (2.23)–(2.25) задаются представлениями (3.108).

## § 6. Заряженные частицы

В этом параграфе мы построим компактные интегральные уравнения для систем заряженных частиц. В основном мы будем рассматривать задачу трех тел и лишь коротко опишем пути модификаций интегральных уравнений для  $N$  частиц.

Мы видели в главе II, что дальнодействующие силы существенно изменяют картину асимптотического движения частиц. С одной стороны, это приводит к появлению новых особенностей ядра резольвенты  $R(z)$ , а с другой стороны, это обстоятельство находит отражение в том, что уравнения (3.4) и (3.28) становятся некомпактными и спектр их ядер дополняется непрерывной компонентой. С точки зрения локальных свойств ядер, это объясняется тем, что в случае заряженных частиц они приобретают новые особенности, которые не исчезают при итерировании. Интересно, что уравнения (3.4) и (3.28) являются некомпактными, несмотря на то, что их ядра связны. Здесь мы снова встречаемся с проблемой выделения кулоновских особенностей, которые не уступают по силе  $\delta$ -функциональным. Впервые мы указывали на существование таких особенностей при описании кулоновской  $S$ -матрицы.

Таким образом, перед нами стоит задача модификации интегральных уравнений, которая приводила бы к фредгольмовым уравнениям. В этом параграфе мы опишем один из методов такой модификации, основанный на об-

рашении сингулярных кулоновских вкладов в рамках метода интегральных уравнений.

**Система двух тел.** Рассмотрим сначала систему двух заряженных частиц и проиллюстрируем на ее примере трудности, возникающие при наличии дальнодействующих сил. Описанные при этом результаты мы применим для вывода модифицированных компактных уравнений в системе трех тел.

В импульсном представлении уравнение Шредингера для кулоновской волновой функции имеет вид

$$p^2 u_c(p, p') + \int v_c(p - q) u_c(q, p') dq = p'^2 u_c(p, p'), \quad (3.110)$$

где  $v_c(p - q)$  — преобразование Фурье кулоновского потенциала:

$$v_c(p - q) = \frac{n}{2\pi^2 |p - q|^2}, \quad n = \sqrt{2\mu_{12}} \gamma q_1 q_2$$

Функция  $u_c(p, p')$ , известная в явном виде

$$u_c(p, p') = -\frac{1}{2\pi^2} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} \frac{(p^2 - (|p'| + i\epsilon)^2)^{\frac{1}{2}\eta}}{((p - p')^2 + \epsilon^2)^{1+i\eta'}},$$

$$\eta = \frac{n}{2|p|}, \quad \eta' = \frac{n}{2|p'|}, \quad (3.111)$$

удовлетворяет также однородному уравнению теории возмущений:

$$u_c(p, p') = \frac{-n}{2\pi^2} \int \frac{u_c(q, p') dq}{|p - q|^2 (p^2 - p'^2 - i0)}. \quad (3.112)$$

В то же время, ядро резольвенты  $r_c(z)$  подчиняется неоднородному уравнению теории возмущений

$$r_c(p, p', z) = \frac{\delta(p - p')}{p'^2 - z} - \frac{n}{2\pi^2} \int \frac{r_c(q, p', z) dq}{|p - q|^2 (p^2 - z)}. \quad (3.113)$$

Если положить здесь  $z = p'^2 + i0$ , мы придем к выводу, что оба уравнения, как однородное, так и неоднородное, имеют решения при одном и том же значении переменной  $z$ . Отсюда следует, что уравнение (3.113) не может быть фредгольмовым, когда  $z$  принимает вещественные положительные значения и имеет при этом непрерывный спектр. Этот факт не имеет существенного значения в задаче двух тел, поскольку мы знаем функцию  $u_c(p, p')$

явно. Однако он приобретает практическую значимость при рассмотрении системы трех и более тел, поскольку явный вид решения уравнения Шредингера в этом случае неизвестен.

Чтобы обойти трудности, которые возникают из-за некомпактности уравнения теории возмущений в двухчастичном случае, можно использовать *экранированный кулоновский потенциал*

$$v_\mu(r) = n \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (3.114)$$

и затем выполнить предельный переход  $\mu \rightarrow 0$  в окончательных формулах. При осуществлении такой процедуры необходимо учитывать, что волновая функция для потенциалов (3.104) удовлетворяет неоднородному уравнению

$$u_\mu(p, p') = \delta(p - p') - \frac{n}{2\pi^2} \frac{1}{p^2 - p'^2 - i0} \int \frac{u_\mu(q, p')}{|p - q|^2 + \mu^2} dq \quad (3.115)$$

и не стремится к определенному пределу при  $\mu \rightarrow 0$ . Однако не имеющая предела часть волновой функции может быть выделена в виде множителя  $Z = e^{ip' \ln \mu}$ , не зависящего от  $p$ . В результате кулоновская волновая функция  $u_c$  может быть получена как предел перенормированной функции:

$$u_c(p, p') = \lim_{\mu \downarrow 0} Z^{-1}(\mu, p') u_\mu(p, p').$$

**Три заряженные частицы.** Вернемся теперь к задаче трех тел. Аналогично двухчастичной системе, волновые функции для трех заряженных частиц удовлетворяют однородной системе уравнений (3.28). Таким образом, эта система не имеет единственного решения и, следовательно, должна быть перестроена в соответствии со схемой, использованной нами для перехода от уравнения (3.4) к компактным уравнениям (3.28). Именно, мы должны найти сингулярную часть ядер уравнений (3.28), которая порождает непрерывный спектр, и явно обратить ее.

Наиболее простой путь перестройки системы (3.28) состоит в том, чтобы ввести новые компоненты  $M_{\alpha\beta}^{(c)}$  по отношению к гамильтониану  $H_c$ , в который уже включе-

ны все кулоновские потенциалы  $v_\alpha^{(c)}(x_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ,  
 $v_\alpha^{(c)}(x_\alpha) = n_\alpha / |x_\alpha|$ , т. е.

$$H_c = H_0 + \sum_{\alpha} V_{\alpha}^{(c)}.$$

Таким образом, положим

$$M_{\alpha\beta}^{(c)} = -\delta_{\alpha\beta} V_{\alpha}^{(s)} - V_{\alpha}^{(s)} R(z) V_{\beta}^{(s)},$$

где через  $V_{\alpha}^{(s)}$  обозначены короткодействующие части парных потенциалов, так что

$$v_{\alpha}(x) = v_{\alpha}^{(s)}(x) + n_{\alpha} / |x_{\alpha}|.$$

Повторяя рассуждения, которые привели нас к системе (3.28), получим модифицированные уравнения

$$M_{\alpha\beta}^{(c)} = T_{\alpha}^{(c)} - T_{\alpha}^{(c)} R_c \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}^{(c)}, \quad (3.116)$$

где  $T_{\alpha}^{(c)} = V_{\alpha}^{(s)} - V_{\alpha}^{(s)} R_c V_{\alpha}^{(s)}$ ,  $R_c = (H_c - z)^{-1}$ . В результате перестройки чисто кулоновские операторы оказались выделенными из компонент  $M_{\alpha\beta}^{(c)}$  и отнесенными к ядру уравнений  $T_{\alpha}^{(c)}$ . Можно показать, что уравнения (3.116) являются компактными, так что теперь центр тяжести задачи перенесен на изучение свойств ядер  $T_{\alpha}^{(c)}$  в которых сосредоточена информация о дальнодействующих частях потенциалов. Однако, в отличие от уравнений (3.28), явный вид ядер  $T_{\alpha}^{(c)}$  неизвестен, и мы должны изучить их с помощью каких-либо независимых уравнений. Эта трудность остается даже в случае, когда заряжены только две частицы и можно явно построить  $T$ -матрицу для системы, в которой короткодействующий потенциал включен в заряженной паре. Но, кроме такого оператора, нам необходима  $T$ -матрица для системы, где короткодействующий потенциал действует между заряженной и нейтральной частицами, явный вид которой уже найти невозможно.

Таким образом, система уравнений (3.116) не может быть использована для преодоления трудностей кулоновской проблемы, поскольку задача исследования свойств операторов  $T_{\alpha}^{(c)}$  не проще, чем исходная. Тем не менее, уравнения (3.116) в ряде случаев оказываются удобными для численных расчетов, и мы убедимся в этом в главе VII.

Существует другая возможность для перестройки уравнений. Именно, изучим более детально кулоновские сингулярности, которые появляются в уравнении (3.28), и попытаемся обратить соответствующие операторы, не используя информацию о свойствах промежуточных кулоновских трехчастичных задач.

Рассмотрим уравнение (3.68) для компонент  $T_{\alpha\beta}$  волновых операторов  $U_\beta$ ,  $\beta = 1$ , описывающих рассеяние частицы 1 на связанном состоянии частиц 2 и 3. Предположим для простоты, что заряжены только частицы 1 и 2 и что пара (23) имеет одно связанное состояние  $\psi_1$ .

Чтобы найти кулоновские сингулярности ядер уравнений (3.68), мы по аналогии с задачей двух тел применим сначала вспомогательный прием, состоящий в замене кулоновского потенциала  $n_\alpha |x_\alpha|^{-1}$  экранированным  $n_\alpha |x_\alpha|^{-1} e^{-\mu|x_\alpha|}$  с последующим предельным переходом  $\mu \downarrow 0$ .

С помощью уравнения теории возмущений можно установить, что  $T$ -матрица для потенциала  $v_\mu$  приобретает сингулярность в пределе  $\mu \downarrow 0$ :

$$t^{(\mu)}(p, p', z) = \frac{n}{2\pi^2} \frac{1}{|p - p'| + \mu^2} + \tilde{t}^{(\mu)}(p, p', z). \quad (3.117)$$

Покажем, что именно эта сингулярность, взаимодействуя с особенностью  $(z + x_1^2)^{-1}$  парной  $T$ -матрицы для пары (23), и порождает основные особенности в интегральном уравнении для трехчастичной волновой функции при отрицательных энергиях  $p'^2 - x_1^2 < 0$ .

Действительно, рассмотрим проитерированную один раз систему уравнений (3.68),  $n = 0$ :

$$N_{\alpha B}(z) = \tilde{T}_{\alpha B}^{(0)}(z) - \tilde{T}_{\alpha B}^{(1)}(z) - \sum_{\gamma_1 \neq \gamma_2} Q_{\alpha \gamma_1}^{(0)}(z) R_0(z) N_{\gamma_2 B}(z).$$

Решение этой системы при  $z = E_B(p'_\beta)$  определяет компоненты волновых операторов  $U_\beta$  (3.64).

Учитывая представление (3.117) для ядер  $t_3$ , можно убедиться, что все операторы  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$ , которые задают ядра проитерированной системы, кроме  $Q_{21}^{(0)}$ , имеют достаточно гладкие ядра при  $z < 0$ , при любых  $\mu \geq 0$ . Более точно, указанные ядра при  $\mu \downarrow 0$  могут приобретать слабые особенности, которые исчезают при дальнейшем итерировании системы уравнений (3.68). Рассмотрим наиболее опасный оператор  $Q_{31}^{(0)}$ . Его ядро может быть

представлено в виде

$$Q_{31}^{(0)}(P, P', E_1(p'_1) + i0) = Q^{(c)}(P, P') + \tilde{Q}(P, P'),$$

где ядро  $Q^{(c)}$ , содержащее старшие кулоновские особенности, дается формулой

$$\begin{aligned} Q^{(c)}(P, P') = \\ = \frac{\tilde{n}}{2\pi^2(|p_1 - p'_1|^2 + \mu^2)} \frac{\varphi_1(k_1(p_3, p'_1)) \varphi_1^*(k'_1)}{(k_1^2(p'_1, p_3) + \kappa_1^2)(p_1^2 - p'^2_1 - i0)}, \end{aligned} \quad (3.118)$$

где  $\tilde{n} = n_1 |s_{12}|^{-1}$ . Заметим далее, что в точке  $p_1 = p'_1$ , где сосредоточена кулоновская особенность, справедливы равенства

$$\varphi_1(k_1(p_3, p'_1)) = \varphi_1(k_1), \quad k_1(p_3, p'_1) = k_1,$$

так что сингулярная часть (3.118) принимает простой вид:

$$\begin{aligned} Q^{(c)}(P, P') \Big|_{p_1=p'_1} \equiv Q^{(0)}(P, P') = \\ = \frac{\tilde{n}}{2\pi^2(|p_1 - p'_1| + \mu^2)} \frac{\varphi_1(k_1) \varphi_1^*(k'_1)}{p_1^2 - p'^2_1 - i0}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

При этом разность  $Q^{(c)} - Q^{(0)}$  имеет более слабые особенности, которые сглаживаются при дальнейшем итерировании системы, в то время как основная особенность (3.119) не исчезает. Запишем проитерированную систему уравнений (3.68) в матричном виде

$$\omega = \omega_0 + A\omega,$$

где вектор-функция  $\omega$  задается компонентами  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , а матричный оператор  $A$  — компонентами  $A_{\alpha\gamma} = \sum_{\gamma_1} (1 - \delta_{\gamma\gamma_1}) Q_{\alpha\gamma_1}^{(0)}$ . На основании изложенных выше результатов представим оператор  $A$  в виде суммы двух членов

$$A = A_0 + \tilde{A},$$

где оператор  $A_0$  порождается сингулярным ядром  $Q^{(0)}$ , а оператор  $\tilde{A}$  включает все более гладкие ядра. Действуя по схеме, использованной для вывода компактных уравнений (3.28), мы далее перепишем в левую часть слагаемое  $A_0\omega$ , ответственное за появление кулоновских особенностей при  $\mu \rightarrow 0$ , и затем обратим оператор  $(I - A_0)$ .

Обращение оператора  $I - A_0$  аналогично решению интегрального уравнения с сепарабельным ядром и может быть выполнено явно. Обозначим

$$\psi = (I - A_0)^{-1} \omega.$$

Компонента  $\psi^{(0)}$  вектор-функции  $\psi$  представляется в виде

$$\psi^{(0)}(P, p'_1) = \psi_1(k_1) \int K(p_1, p'_1) \varphi_1(k'_1) \omega^{(1)}(P') dk'_1 dp'_1,$$

где неизвестное ядро  $K(p_1, p'_1)$  удовлетворяет уравнению

$$K(p, p') = \delta(p - p') - \frac{\tilde{n}}{2\pi^2} \frac{1}{p^2 - p'^2 - i0} \int \frac{K(q, p') dq}{|p - q|^2 + \mu^2}.$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением теории возмущений для экранированного кулоновского потенциала (3.115). Отсюда следует, что после перенормировки

$$K(p, p') \rightarrow Z^{-1}(p', \mu) K(p, p')$$

мы можем перейти к пределу  $\mu \downarrow 0$  в уравнении для вектора  $\omega$  и получить следующее уравнение:

$$\omega = \varphi_0 + (I - A_0)^{-1} \tilde{A} \omega, \quad \varphi_0 = (I - A_0)^{-1} \omega_0. \quad (3.120)$$

Данное уравнение представляет собой искомую модификацию компактных интегральных уравнений (3.28) при  $\operatorname{Re} z < 0$ .

Наряду с методом, в котором производится экранирование кулоновского потенциала, для обращения сингулярных кулоновских операторов может быть также использована процедура прямого построения обратного оператора. Это возможно в силу того, что, зная решение (3.111) уравнения (3.112), можно в явном виде вычислить ядро оператора  $(I - K_c)^{-1}$ , где  $K_c$  — кулоновский оператор из (3.110) с ядром

$$K_c(p, p') = -\frac{\tilde{n}}{2\pi^2} \frac{1}{p^2 - E - i0} \frac{1}{|p - p'|^2}.$$

Именно, справедливо представление

$$(I - K_c)^{-1} = I - N_c,$$

где  $N_c$  — интегральный оператор, ядро которого выражается через парную кулоновскую  $T$ -матрицу:

$$N_c(p, p') = t_c(p, p', p'^2 + i0)(p^2 - E - i0)^{-1}.$$

Последняя дается равенством

$$t_c(p, p', z) = \frac{n}{2\pi^2 |p - p'|^2} - \frac{i\sqrt{z} n^2}{\pi^2 (p^2 - z)(p'^2 - z)} \int_0^1 dt t^{i\eta} (1 - ty)^{-1} \times \\ \times (1 - t/y)^{-1}, \quad (3.121)$$

$$\text{где } \eta = n/(2\sqrt{z}) \text{ и } x^2 = 1 + \frac{(p^2 - z)(p'^2 - z)}{z |p - p'|^2}, \quad y = \frac{x+1}{x-1}.$$

Наметим схему прямого обращения кулоновского сингулярного оператора на примере рассмотренной выше модели с одной заряженной парой. Теперь мы должны перестраивать интегральное уравнение (3.28) непосредственно для чисто кулоновского взаимодействия. Как и при  $\mu \neq 0$ , можно убедиться, что наиболее сингулярная часть интегральных ядер имеет вид (3.119), где следует положить  $\mu = 0$ . Повторяя рассуждения, которые привели нас к модифицированному уравнению (3.120), мы получим компактные интегральные уравнения, где вместо оператора  $(I - A_0)^{-1}$  следует подставить оператор  $I - N_c$ , известный в явном виде.

Случай, когда заряжены все три частицы и парные подсистемы могут иметь произвольное число связанных состояний, может быть рассмотрен аналогично. Наиболее опасные сингулярности возникают в ядрах  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) от пересечения кулоновских сингулярностей  $|p_\beta - p'_\beta|^{-2}$ , содержащихся в ядре  $T$ -матрицы  $t_\alpha(k_\alpha(p_\alpha, p'_\beta), k'_\alpha, z - p_\alpha^2)$ , с полюсными особенностями  $(E_B(p'_\beta) - E - i0)^{-1}$  ядра  $t_\beta(k_\beta(p_\alpha, p'_\beta), p'_\beta, p'^2_\beta + i0)$ . При этом обращение соответствующего оператора  $(I - A_0)^{-1}$  сводится к решению набора независимых задач типа (3.110) или (3.104), и окончательное модифицированное уравнение может быть представлено в виде (3.120).

Указанные особенности интегральных уравнений (3.28) имеют простой физический смысл. Рассмотрим, например, рассеяние частицы 1 на мишени, состоящей из связанной пары (23). Когда частица неограниченно удаляется от мишени, между ними остается кулоновское взаимодействие, которое асимптотически имеет вид

$$\tilde{v}_\alpha^{(c)}(y_\alpha) = \frac{n_{\alpha\alpha}}{|y_\alpha|}, \quad n_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{n_\beta}{|s_{\beta\alpha}|}.$$

С другой стороны, преобразование Фурье потенциала  $\tilde{v}_\alpha^{(c)}$  совпадает с кулоновской особенностью  $\frac{n_{\alpha\alpha}}{2\pi^2} |p_\alpha - p'_\alpha|^{-2}$ , подлежащей обращению в интегральных уравнениях (3.28). Тем самым сингулярности (3.122) имеют двухчастичное происхождение и их обращение сводится к решению парных задач с эффективными потенциалами  $\tilde{v}_\alpha^{(c)}$ . Именно это обстоятельство позволило нам построить компактные уравнения при отрицательных энергиях, когда все процессы являются в существенном двухчастичными.

Значительно более серьезные трудности появляются при положительных энергиях, когда открывается канал развала на три свободные частицы. В этом случае возникает новый тип особенностей из-за пересечения полюса свободной резольвенты  $(P^2 - z)^{-1}$  с кулоновскими сингулярностями  $|p_\beta - p'_\beta|^{-2}$  парных  $T$ -матриц. В результате мы сталкиваемся с проблемой обращения сингулярной части ядер  $Q_{\alpha\beta}$ , которая не сводится к эффективной двухчастичной задаче. До настоящего времени подобное прямое обращение осуществить не удалось. Тем не менее, выделение трехчастичных кулоновских сингулярностей может быть сделано с помощью воспомогательных конструкций в конфигурационном пространстве, основанных на локальности уравнения Шредингера. Мы опишем соответствующий подход в следующей главе.

Коротко остановимся на методах модификации интегральных уравнений для  $N$  частиц. Как и в системе трех тел, мы можем ввести новый «невозмущенный» гамильтониан  $H_c$ , в который включены все чисто кулоновские потенциалы

$$H_c = H_0 + \sum_{a_{N-1}} V_{a_{N-1}}^{(c)}$$

с  $v_{a_{N-1}}^{(c)}(x_{a_{N-1}}) = \frac{n_{a_{N-1}}}{|x_{a_{N-1}}|}$ , и определить по отношению к нему новые компоненты  $M_{A_k B_k}^{(c)}$   $T$ -матрицы равенствами (3.97)–(3.102), где операторы  $R_0$  следует заменить на  $R_c(z) = (H_c - z)^{-1}$  и потенциалы  $V_{a_{N-1}}$  — на короткодействующие части  $V_{a_{N-1}}^{(s)}$ ,  $V_{a_{N-1}} = V_{a_{N-1}}^{(c)} + V_{a_{N-1}}^{(s)}$ . Такие модифицированные уравнения будут компактными, но они обладают недостатками, перечисленными выше. Глав-

ное — мы не знаем свойств операторов  $T_{a_k}^{(c)}$  для чисто кулоновской проблемы.

Если энергия рассеяния не превосходит величины ближайшего трехкластерного порога, перестройка уравнений (3.103) может быть произведена с помощью обращения сингулярных кулоновских вкладов, имеющих двухкластерную природу. Как мы уже отмечали выше, ядра уравнений (3.103) становятся связанными после  $N - 2$  итераций. Можно показать, что в присутствии дальнодействующих потенциалов наиболее опасная сингулярность этих ядер порождается пересечением кластерных особенностей  $(E_A(p_{A_2}) - z)^{-1}$  с эффективным кулоновским взаимодействием  $|p_{a_2} - p'_{a_2}|^{-2}$ . Процедура обращения таких сингулярностей полностью аналогична проведенной в системе трех тел. При этом построение обратного оператора  $(I - A_0)^{-1}$  сводится к решению набора двухчастичных кулоновских задач типа (3.110).

На этом мы закончим описание компактных уравнений в импульсном представлении. Следующие две главы будут посвящены рассмотрению свойств ядра резольventы и волновых операторов в конфигурационном пространстве.

## КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО. НЕЙТРАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Эта глава посвящена исследованию свойств волновых функций и ядра резольвенты в координатном представлении. Мы покажем, в частности, что волновые функции можно определить как решения уравнения Шредингера или дифференциальных уравнений для компонент, удовлетворяющие определенным асимптотическим граничным условиям. Роль такого формализма, называемого дифференциальным, определяется, в первую очередь, эффективными вычислительными методами, которые могут быть развиты на основе граничных задач для волновых функций.

В этой главе мы рассмотрим системы нейтральных частиц. Задача рассеяния для заряженных частиц в конфигурационном пространстве будет рассмотрена в главе V.

### § 1. Система двух частиц

Следуя плану, который был намечен в предыдущей главе, мы рассмотрим сначала задачу рассеяния для двух частиц. Рассуждения в этом параграфе будут служить образцом при рассмотрении систем нескольких частиц.

**Волновые функции.** Рассмотрим уравнение Шредингера для системы двух частиц

$$(-\Delta + v(x) - k^2)\psi(x, k) = 0.$$

Чтобы однозначно определить волновые функции, мы должны присоединить к этому уравнению асимптотические граничные условия. Последние можно найти, например, изучив асимптотику преобразования Фурье ядер волновых операторов

$$\psi^{(\pm)}(x, k) = \int e^{i(x, k')} u^{(\pm)}(k', k) dk' \quad (4.1)$$

при  $|x| \rightarrow \infty$ . В отличие от (1.13), нормировочный множитель здесь выбран равным единице. Это сделано в со-

ответствии с традицией, принятой в физической литературе.

При  $|x| \rightarrow \infty$  интеграл (4.1) является быстро осциллирующим и его асимптотика может быть найдена с помощью метода стационарной фазы. При этом, поскольку подынтегральное выражение является сингулярным, результат вычисления определяется не только критическими точками, но и положением сингулярностей. Подобные интегралы будут встречаться и в последующих параграфах. Мы приведем сводку результатов об асимптотике таких интегралов в последнем параграфе этой главы. Всюду в остальных параграфах мы будем пользоваться асимптотическими формулами, не вникая в детали их обоснования.

Перейдем к анализу асимптотики функции  $\psi(x, k)$ . Заметим, что  $\delta$ -функциональная часть ядра  $u(k', k)$  (3.22) порождает плоскую волну  $e^{i(k, x)}$ . Отделяя эту волну, представим функцию  $\psi(x, k)$  в виде суммы

$$\psi^{(\pm)}(x, k) = e^{i(x, k)} + \varphi^{(\pm)}(x, k), \quad (4.2)$$

где слагаемое  $\varphi(x, k)$  задается сингулярным интегралом

$$\varphi^{(\pm)}(x, k) = \int dq e^{i(x, q)} \frac{t(q, k, k^2 \pm i0)}{q^2 - k^2 \mp i0}. \quad (4.3)$$

При больших  $x$  асимптотика этого интеграла определяется двумя факторами — критической точкой угловых переменных  $q_0 = \hat{x}$  и полюсной особенностью  $(q^2 - k^2 \mp i0)^{-1}$ . В результате возникает сферическая волна:

$$\varphi^{(\pm)}(x, k) \sim f^{(\pm)}(\hat{x}, k) \frac{\exp\{\pm i|k||x|\}}{|x|}. \quad (4.4)$$

Амплитуда этой волны выражается через  $T$ -матрицу на энергетической поверхности:

$$f^{(\pm)}(\hat{x}, k) = -2\pi^2 t(\pm|k|\hat{x}, k, k^2 \pm i0).$$

Обсудим физический смысл этих формул. Плоская волна, которая остается, если выключить взаимодействие между частицами, описывает свободное движение частиц. Эта волна отвечает двум различным потокам частиц — частицам, которые движутся навстречу одна другой (падающая волна), и частицам, которые разлетаются после столкновения (уходящие волны). Это свойство отражает

асимптотическое представление

$$e^{i(x,k)} \sim \frac{2\pi i}{|k|} \left( \delta(-\hat{x}, \hat{k}) \frac{e^{-i|k||x|}}{|x|} - \delta(\hat{x}, \hat{k}) \frac{e^{i|k||x|}}{|x|} \right), \quad (4.5)$$

где  $\delta$ -функция  $\delta(\hat{x}, \hat{k})$  определяется равенством

$$\int d\hat{k} \delta(\hat{x}, \hat{k}) f(\hat{k}) = f(\hat{x}).$$

Здесь первое слагаемое описывает сходящиеся (падающие) волны, а второе — расходящиеся волны. Чтобы убедиться в справедливости (4.5), рассмотрим интеграл по единичной сфере

$$I(x) = \int d\hat{k} e^{i(x,k)} f(\hat{k}).$$

Введем в качестве переменных интегрирования угловые координаты  $\xi = (\hat{k}, \hat{x})$ , ф. Интегрируя относительно  $\xi$  по частям, получим асимптотическую формулу

$$I(x) \sim \frac{2\pi i}{|k|} \left( \frac{e^{-i|k||x|}}{|x|} f(-\hat{x}) - \frac{e^{i|k||x|}}{|x|} f(\hat{x}) \right), \quad (4.6)$$

из которой немедленно вытекает (4.5).

Второе слагаемое в (4.2) содержит всю информацию о столкновениях. В случае функций  $\Psi^{(+)}$  оно имеет вид расходящихся сферических волн, так что амплитуда  $f^{(+)}$  определяет плотность вероятности рассеяния частицы в направлении  $\hat{x}$ . Действительно, плотность потока частиц через площадку  $dS$  на сфере радиуса  $R$  в направлении  $\hat{x}$  задается формулой

$$j = \frac{i}{(2\pi)^3} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial R} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial R} \right) R^2 d\hat{x}$$

или, с учетом асимптотических формул (4.4),

$$j \sim \frac{1}{(2\pi)^3} |f(\hat{x}, k)|^2 d\hat{x}.$$

Напомним, что аналогичное выражение (1.42) встречалось в главе I. Эти соображения естественно относятся и к функциям  $\Psi^{(-)}(x, k)$ , которые описывают сходящиеся сферические волны.

Мы будем называть функции  $\Psi^{(\pm)}(x, k)$  *рассеянными волнами* в том смысле, что они описывают результат столкновения. Функции  $\exp\{i(x, k)\}$  будем называть па-

дающими волнами, имея в виду роль первого слагаемого в представлении (4.5).

Итак, мы видим, что решение уравнения Шредингера, определяющее волновые функции, нужно искать в классе функций вида (4.2), где функции  $\varphi^{(\pm)}(x, k)$  асимптотически принимают форму сферических волн (4.4). Альтернативно, можно рассматривать неоднородное уравнение

$$(-\Delta + v(x) - k^2)\varphi(x, k) = -v(x)e^{i(x, k)} \quad (4.7)$$

для рассеянных волн. Его решение асимптотически имеет вид (4.4), т. е. удовлетворяет условиям излучения

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial \varphi^{(\pm)}}{\partial R} \mp ik\varphi^{(\pm)} \right) = 0.$$

Мы должны проверить далее, что указанные граничные задачи однозначно разрешимы, и тем самым оправдать дифференциальный формализм. Наиболее подходят для этого интегральные уравнения типа Фредгольма в конфигурационном пространстве. Сведем к ним граничную задачу (4.7). С этой целью воспользуемся формулой Грина:

$$\int_{\Omega} (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) dS; \quad (4.8)$$

здесь через  $\frac{\partial}{\partial n}$  обозначена производная по нормали к границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ . Пусть  $r_0(x, x', z)$  — функция Грина оператора кинетической энергии:

$$r_0(x, x', z) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp\{i\sqrt{z}|x-x'|\}}{|x-x'|}. \quad (4.9)$$

Положим в (4.8)  $u_1 = \varphi^{(\pm)}(x', k)$  и  $u_2 = r_0(x, x', k^2 \pm i0)$ . В качестве области интегрирования возьмем шар  $V_R$  радиуса  $R$ . Устремим затем  $R$  к бесконечности. В поверхностном интеграле в правой части (4.8) функции  $\varphi^{(\pm)}(x, k)$  и  $r_0(x, x', k^2 \pm i0)$  можно тогда заменить асимптотическими выражениями. Заметим далее, что при фиксированном  $x$  и  $x' \rightarrow \infty$  справедлива формула

$$|x-x'| \sim |x'| - (\hat{x}', x) + O(|x||x'|^{-2}), \quad (4.10)$$

из которой следует асимптотическое представление

$$r_0(x, x', k^2 \pm i0) \sim \frac{1}{4\pi} e^{\mp ik|\hat{x}'|} \frac{\exp\{ \pm i|k||x'|\}}{|x'|}, \quad (4.11)$$

т. е. функция Грина  $r_0(x, x', k^2 \pm i0)$  асимптотически принимает вид сферической волны. Такой же вид имеет и функция  $\varphi(x', k)$ . Поскольку эти функции входят в подынтегральное выражение в виде антисимметричной комбинации, отвечающие им старшие члены порядка  $O(R^{-2})$  взаимно сократятся. Остаток же стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Подынтегральное выражение в левой части (4.8) преобразуем с помощью уравнения Шредингера следующим образом:

$$\begin{aligned} & \varphi^{(\pm)}(x', k) \Delta_{x'} r_0(x, x', k^2 \pm i0) - r_0(x, x', k^2 \pm i0) \times \\ & \times \Delta_{x'} \varphi^{(\pm)}(x', k) = \varphi(x', k) \delta(x - x') - r_0(x, x', k^2 \pm i0) \times \\ & \times v(x') \varphi^{(\pm)}(x', k) - r_0(x, x', k^2 \pm i0) v(x') \exp\{i(x', k)\}. \end{aligned}$$

Обозначая  $\psi^{(\pm)}(x, k) = e^{i(k|x|)} + \varphi(x, k)$ , получим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} & \psi^{(\pm)}(x, k) = \\ & = e^{i(x, k)} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp\{ \pm i|k||x-y|\}}{|x-y|} v(y) \psi^{(\pm)}(y, k). \quad (4.12) \end{aligned}$$

Итак, мы свели задачу к изучению интегрального оператора с ядром

$$a(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp\{i\sqrt{z}|x-y|\}}{|x-y|} v(y).$$

Естественно рассматривать этот оператор на множестве убывающих непрерывных функций. Предположим, что эти функции подчиняются оценке

$$|f(x)| \leq C(1+|x|)^{-v}, \quad 0 < v < 1.$$

Везде далее мы будем рассматривать потенциалы  $v(x)$ , которые убывают как  $|x|^{-3-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , при  $|x| \rightarrow \infty$ . В этом случае асимптотика интеграла в правой части (4.12) определяется значениями  $y$ , лежащими в некоторой окрестности начала координат. (Конечно, радиус этой окрестности зависит от  $R$ .) В силу (4.11) этот интеграл имеет вид сферической волны, т. е. убывает как  $(1+|x|)^{-1}$ . Заметим далее, что гладкость интеграла как функции  $x$  определяется лишь свойствами ядра  $a(x, y, z)$

и не зависит от свойств функции  $f(y)$ . Более точно, мы можем утверждать, что рассматриваемый интегральный оператор переводит множество непрерывных ограниченных и равностепенно непрерывных функций в множество равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций. Если  $v < 1$ , то он делает эти функции более быстро убывающими. Отсюда следует, что этот интегральный оператор является вполне непрерывным.

Таким образом, к уравнению (4.12) применима альтернатива Фредгольма. Как и в случае аналогичного уравнения (3.4), можно убедиться, что особые точки этого уравнения совпадают с дискретными собственными значениями оператора  $h$ . Но на положительной вещественной полуоси этих точек нет. Следовательно, уравнение (4.12) имеет единственное решение. То же относится и к сформулированным граничным задачам. На этом мы закончим описание дифференциальной формулировки задачи рассеяния.

**Функция Грина.** Посмотрим теперь, какими свойствами обладает ядро резольвенты в координатном представлении. Это ядро, называемое *функцией Грина*, подчиняется уравнению Шредингера с  $\delta$ -образной особенностью:

$$(-\Delta_x + v(x) - z)r(x, x', z) = \delta(x - x'). \quad (4.13)$$

В силу симметрии

$$r(x, x', z) = \overline{r(x', x, z)} \quad (4.13')$$

такое же уравнение справедливо по переменной  $x'$ . Согласно уравнению теории возмущений (3.2), эта функция удовлетворяет также интегральному уравнению второго рода:

$$r(x, x', z) = r_0(x, x', z) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp\{i\sqrt{z}|x-y|\}}{|x-y|} v(y) r(y, x', z). \quad (4.14)$$

Таким образом, исследование функции Грина сводится к изучению интегрального уравнения, аналогичного (4.12). Единственное отличие состоит в том, что параметр  $k^2$  из (4.12) может принимать в данном случае комплексные значения. Все, что мы сказали об этом уравнении выше, можно отнести и к уравнению (4.14). В частности, к этому уравнению также применима альтернатива Фредгольма. Отсюда следует, что если  $x \neq x'$ ,

то при  $z$  из  $\Pi_0$  и  $z \neq -\kappa_i^2$  функция Грина является гладкой ограниченной функцией. При  $x = x'$  она имеет особенность  $(4\pi)^{-1}|x - x'|^{-1}$ , которая заключена в свободном члене (4.14).

Выше мы видели, что волновые операторы можно определить как вычеты ядра резольвенты  $r(p, p', z)$  в импульсном представлении в полюсах  $(p'^2 - z)^{-1}$ . Посмотрим, как это соотношение можно трактовать в терминах функции Грина.

Рассмотрим уравнение (4.14) при вещественных положительных  $z = E \pm i0$ ,  $E > 0$ . Перейдем здесь к пределу  $|x| \rightarrow \infty$ , учитывая при этом соотношение (4.11). Получим асимптотическое представление

$$r(x, x', E \pm i0) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4\pi} \tilde{\Psi}^{(\pm)}(x', k') \frac{\exp\{\pm i\sqrt{E}|x|\}}{|x|}, \quad (4.15)$$

где  $k' = \mp\sqrt{E}\hat{x}$ , а функция  $\tilde{\Psi}^{(\pm)}$  задается равенством

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^{(\pm)}(x', k') = \\ = \exp\{i(x', k')\} - \int dy \exp\{i(y, k')\} v(y) r(y, x', z). \end{aligned} \quad (4.16)$$

С другой стороны, в (4.14) можно перейти к пределу  $|x'| \rightarrow \infty$  с учетом найденного равенства (4.15). Получим аналогичное асимптотическое представление

$$r(x, x', E \pm i0) \underset{|x'| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4\pi} \Psi^{(\pm)}(x, k) \frac{\exp\{\pm i\sqrt{E}|x'|\}}{|x'|}, \quad (4.17)$$

где  $\hat{k} = \mp\sqrt{E}\hat{x}'$ , а амплитуда сферической волны подчиняется интегральному уравнению (4.12) и, следовательно, совпадает с волновой функцией (4.2).

Таким образом, мы можем найти волновые функции следующим образом: вычислить асимптотику функции Грина при  $x' \rightarrow \infty$  и сократить на множитель, зависящий от  $x'$ , который представляет собой сферическую волну. Ясно при этом, что указанная сферическая волна обязана своим происхождением полюсу  $(p'^2 - z)^{-1}$  ядра резольвенты в импульсном представлении.

Из условия «самосопряженности» резольвенты (4.13) вытекает следующее соотношение между амплитудами

(4.15) и (4.17):

$$\tilde{\psi}^{(\pm)}(x, k) = \psi^{(\mp)*}(x, -k).$$

Заметим также, что в силу (4.13) ядро  $T$ -матрицы подчиняется условию

$$t(k, k', z) = \overline{t(k', k, \bar{z})}.$$

Сравнивая амплитуды рассеянных волн (4.4), получаем отсюда, что асимптотика  $\psi^{(-)}(x, k)$  выражается через асимптотику  $\psi^{(+)}(x, k)$  при помощи соотношения

$$\psi^{(-)}(x, k) \sim \psi^{(+)*}(x, -k). \quad (4.16')$$

При этом в случае сферически симметричных потенциалов это соотношение переходит в равенство.

Из (4.11) и (4.12) вытекает также интегральное представление для амплитуды рассеяния

$$f(\hat{x}, k) = -\frac{1}{4\pi} \int \exp\{-i|k|(\hat{x}, y)\} v(y) \psi(y, k) dy, \quad (4.18)$$

которое совпадает с (2.37) при  $N = 2$ .

Заметим, что полученные выше асимптотические формулы позволяют дать простой рецепт вычисления ядра оператора рассеяния. Именно, рассмотрим интеграл по единичной сфере.

$$I(x) = \int d\hat{k} \psi(x, k) f(k), \quad (4.19)$$

где функции  $f(k)$  обращаются в нуль в некоторой окрестности направления  $\hat{k} = -\hat{x}$ ,

$$f(k) = 0, \quad |\hat{x} + \hat{k}| \leq \varepsilon. \quad (4.20)$$

Из формул (4.4) и (4.6) вытекает тогда следующее асимптотическое представление:

$$I(x) \sim \frac{2\pi i}{|k|} A(\hat{x}, |k|) \frac{\exp\{i|k||x|\}}{|x|}, \quad (4.21)$$

где амплитуда сферической волны явно выражается через оператор рассеяния:

$$A(\hat{k}', |k'|) = \int s(k', k) f(k) dk. \quad (4.22)$$

В конце этого параграфа мы кратко опишем асимптотику функции Грина для оператора энергии системы трех тел, где взаимодействуют только две частицы пары  $\alpha$ ,  $H_\alpha = H_0 + V_\alpha$ . Эти результаты понадобятся нам в следующем параграфе. Функция Грина  $R_\alpha(X, X', z)$  явно выражается через двухчастичные функции Грина:

$$R_\alpha(X, X', z) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint r_\alpha(x_\alpha, x'_\alpha, \xi) \frac{1}{4\pi} \frac{\exp\{i\sqrt{z-\xi}|y_\alpha - y'_\alpha|\}}{|y_\alpha - y'_\alpha|}. \quad (4.23')$$

Используя представление

$$I = \sum_A P_A + \left( I - \sum_A P_A \right), \quad (4.23)$$

запишем эту функцию в виде суммы

$$R_\alpha(X, X', z) = \sum_A \psi_A(x_\alpha) \psi_A^*(x'_\alpha) \frac{\exp\{i\sqrt{E+x_A^2}|y_\alpha - y'_\alpha|\}}{|y_\alpha - y'_\alpha|} + \\ + \tilde{R}_\alpha(X, X', z), \quad (4.24)$$

где первая группа слагаемых отвечает операторам  $P_A R_\alpha$ , а ядро  $\tilde{R}_\alpha$  задает инвариантную часть оператора  $R_\alpha(z)$  в подпространстве  $\left( I - \sum_A P_A \right) \mathfrak{H}$ . Асимптотика функции  $\tilde{R}_\alpha$  может быть найдена методом перевала. Пусть, например,  $X$  фиксировано и  $|x'| \rightarrow \infty$ : Рассмотрим вещественные  $z = E + i0$ . Тогда в критической точке  $\xi_0$ , определяемой из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\sqrt{E-\xi} |y_\alpha| + \sqrt{\xi} |x_\alpha|) = 0, \quad \xi_0 = \frac{|x_\alpha|}{|X|} \sqrt{E},$$

показатель экспоненты равен  $\sqrt{E}|X|$ . В результате получим формулу:

$$\tilde{R}_\alpha(X, X', E + i0) \sim C_E \psi_\alpha(x_\alpha, k_\alpha) e^{i(y_\alpha, p_\alpha)} \frac{\exp\{i\sqrt{E}|X|\}}{|X|^{5/2}}, \quad (4.24')$$

$$P = \{k_\alpha, p_\alpha\}, \quad P = -\sqrt{E}\hat{X}',$$

$$C_E = -(2\pi)^{-5/2} \cdot 2^{-1} E^{3/4} \exp\{i\pi/4\}.$$

Итак, при  $|X'| \rightarrow \infty$  функция  $\tilde{R}_\alpha$  имеет вид шестимерной сферической волны. Отметим, что использованное здесь

обозначение  $C_E$  для нормировочного множителя в асимптотике резольвенты будет встречаться и далее в этой и следующей главах.

На этом мы закончим исследование задачи рассеяния для двух частиц в конфигурационном пространстве.

## § 2. Координатная асимптотика волновых функций для системы трех тел

В этом параграфе мы приступаем к изучению задачи трех тел в конфигурационном пространстве. Наша цель состоит в том, чтобы сформулировать граничные задачи для волновых функций на основе уравнения Шредингера и дифференциальных уравнений для компонент. Мы будем действовать по такому же плану, как и в задаче двух тел. Сначала мы изучим асимптотику преобразований Фурье, которые задают волновые функции. Затем, зная асимптотику, мы поставим граничные задачи, однозначно определяющие эти функции. Эти вопросы мы рассмотрим в §§ 2—3. В § 4 мы опишем свойства трехчастичной функции Грина. Этот параграф важен с точки зрения обоснования дифференциальной формулировки задачи рассеяния.

Мы рассмотрим только функции со значком (+), причем, чтобы не перегружать формулы, последний будем опускать. Совершенно аналогично можно изучить асимптотику функций со значком (—) — все изменения, как и в системе двух тел, сводятся к замене знака импульсной переменной и переходу к комплексно сопряженным функциям. Асимптотически имеет место равенство, аналогичное (4.16'):

$$\Psi_A^{(-)}(X, p_A) \sim \overline{\Psi_A^{(+)}(X, -p_A)}. \quad (4.16'')$$

**Падающие и рассеянные волны.** Введем прежде всего ряд обозначений, которые удобно использовать для описания асимптотики волновых функций. Пусть  $\rho_\alpha(X, E)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) и  $\sigma_A(y_\alpha, E)$ ,  $A = \{\alpha, i\}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $i = 1, 2, \dots, N_\alpha$  — гладкие функции, асимптотически равные шестимерным и трехмерным сферическим волнам:

$$\rho_\alpha(X, E) \sim \frac{\exp\{i\sqrt{E}|X|\}}{|X|^{5/2}} (F_0(\widehat{X}, E) + O(|X|^{-v})),$$

$$v > 0, \quad (4.25)$$

$$\sigma_A(y_\alpha, E) \sim \frac{\exp\left\{i\sqrt{E + \kappa_A^2} |y_\alpha|\right\}}{|y_\alpha|} (F_A(\hat{y}_\alpha, E) + O(|y_\alpha|^{-v})), \quad v > 0. \quad (4.26)$$

Напомним, что через  $-\kappa_A^2$  мы обозначаем собственные значения двухчастичных операторов энергии  $h_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ).

Через  $\Phi_E$  мы будем обозначать класс вектор-функций  $\hat{\Phi}(X, E)$  с компонентами  $\rho_\alpha$  и  $\sigma_A$ :

$$\hat{\Phi}(X, E) = \{\rho_\alpha(X, E), \sigma_B(y_\beta, E)\}, \quad (4.27)$$

$$\alpha = 1, 2, 3, B = \{j, \beta\}, \beta = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, N_\beta.$$

Этим компонентам будем сопоставлять функции, равные сумме

$$f_\alpha(X, E) = \rho_\alpha(X, E) + \sum_j \psi_B(x_\beta) \sigma_B(y_\beta, E). \quad (4.28)$$

Слагаемые  $\psi_B(x_\beta) \sigma_B(y_\beta, E)$  будем называть *клusterными сферическими волнами*. Через  $B_E$  будем обозначать класс вектор-функций  $\hat{F}(X, E)$  с компонентами  $f_\alpha$ :

$$\hat{F}(X, E) = \{f_1(X, E), f_2(X, E), f_3(X, E)\},$$

асимптотика которых определяется равенствами (4.25)–(4.27), и через  $S_E$  — множество функций, асимптотически представимых в виде суммы

$$f(X, E) \sim \sum_\alpha f_\alpha(X, E). \quad (4.29)$$

Мы не будем уточнять степень гладкости функций, если это не требуется существом дела.

Ниже мы будем рассматривать классы  $\Phi_E$ ,  $B_E$  и  $S_E$ , элементы которых зависят от дополнительных параметров. Мы будем указывать эти параметры в обозначениях этих классов.

Перейдем к описанию координатной асимптотики волновых функций. Рассмотрим сначала функции  $\Psi_A(X, p_A)$  при  $A \neq 0$ . Мы зададим эти функции в следующей нормировке:

$$\Psi_A(X, p_A) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp\{i(X, P')\} U_A(P', p_A) dP'. \quad (4.30)$$

Покажем, что справедливо представление

$$\Psi_A(X, p_A) \sim \chi_A(X, p_A) + \Phi_A(X, p_A), \quad (4.31)$$

где функция  $\Phi_A(X, p_A)$  принадлежит классу  $S_E(\hat{p}_A)$  при  $E = p_A^2 - \kappa_A^2$ . Мы увидим также, что амплитуды сферических волн в  $\mathbf{R}^3$  и  $\mathbf{R}^6$  выражаются через компоненты  $T$ -матрицы на энергетической поверхности формулами

$$\begin{aligned} F_{BA}(\hat{y}_B, p_A) &= \\ &= -2\pi^2 H_{BA}(\sqrt{E + \kappa_B^2} \hat{y}_B, p_A, E_A(p_A) + i0), \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} F_{0A}(\hat{X}, p_A) &= \\ &= -e^{i\pi/4} (\pi/2)^{1/2} E_A^{3/4} T_{0A}(\sqrt{E_A} \hat{X}, p_A, E_A(p_A) + i0). \end{aligned} \quad (4.32')$$

Прежде чем доказать эти формулы, обсудим физический смысл слагаемых в представлениях (4.31) и (4.28). Первое слагаемое в (4.31), которое мы будем называть *падающей волной*, описывает начальное состояние системы, а второе слагаемое — *рассеянные волны*. Эти термины используются в том же смысле, что и в случае задачи двух тел. При этом каждому физическому процессу соответствует определенное слагаемое в (4.28). Процессам упругого рассеяния связанный пары  $\alpha$  на третьей частице и процессам перестройки связанных пар ( $B \rightarrow A$ ) отвечают кластерные сферические волны  $\psi_A(x_\alpha)\sigma_A(y_\alpha)$  и  $\psi_B(x_\beta)\sigma_B(y_\beta)$ ,  $B \neq A$ , соответственно. Три свободные частицы в конечном состоянии описываются шестимерной сферической волной. Если какой-либо канал  $\mathfrak{F}_A$  закрыт,  $E < E_A$ , то сопоставляемое ему слагаемое в (4.29) экспоненциально убывает как  $\exp\{-\sqrt{E - E_A}|y_\alpha|\}$ . В частности, шестимерная сферическая волна переходит в затухающую экспоненту  $|X|^{-5/2} \exp\{-\sqrt{E}|X|\}$  при  $E < 0$ .

Перечисленные слагаемые играют различную роль в зависимости от положения точки  $X$  в конфигурационном пространстве: они осциллируют в одних направлениях и убывают в других. Например, если частицы пары  $\alpha$  разделены слабо, так что выполняется неравенство

$$|x_\alpha| < a(1 + |y_\alpha|)^\nu, \quad \nu < 1/2, \quad (4.33)$$

то старшими по порядку являются кластерные сферические волны  $\psi_A(x_\alpha)\sigma_A(y_\alpha)$ . Соответствующую область кон-

фигурационного пространства мы будем обозначать через  $\Omega_\alpha(a, v)$ . Поправочное слагаемое, отвечающее шестимерной сферической волне, является квадратичпо интегрируемым в  $\Omega_\alpha(a, v)$ , и поэтому явный вид этого слагаемого здесь несуществен. Это обстоятельство мы будем учитывать при постановке граничных задач для волновых функций.

В области  $\Omega_0(a, v)$ , где все частицы разделены сильно и для всех  $\alpha = 1, 2, 3$  выполнены неравенства, противоположные (4.33), собственные функции  $\psi_A(x_\alpha)$  быстро убывают и аннулируют вклад кластерных сферических волн. Асимптотика  $\Psi_A(X, p_A)$  определяется тогда шестимерной сферической волной. Указанные области конфигурационного пространства изображены на рис. 11.

Докажем асимптотические формулы. Подставляя равенство (3.63) в интеграл (4.30), получаем представление (4.31), где функция  $\Phi_A$  имеет вид суммы интегралов

$$\Phi_{\beta A}(X, p_A) = \frac{-1}{(2\pi)^{3/2}} \int dP' e^{i(X, P')} \frac{T_{\beta A}(P', p_A, E_A(p_A) + i0)}{P'^2 - E_A(p_A) - i0}. \quad (4.34)$$

Согласно (3.62) ядра  $T_{\beta A}$  равны сумме гладких и сингулярных членов. Последние преобразуем с помощью тождества

$$\begin{aligned} \Phi_A(k'_A)(P'^2 - E_A(p_A) - i0)^{-1}(E_B(p'_B) - \\ - E_A(p_A) - i0)^{-1} = -\psi_A(k'_A)((P'^2 - E_A(p_A) - i0)^{-1} - \\ - (E_B(p'_B) - E_A(p_A) - i0)^{-1}), \end{aligned}$$

где в правой части разделены трехчастичные и двухчастичные особенности. В результате функцию  $\Phi_{\beta A}(X, p_A)$  представим в виде суммы:

$$\Phi_{\beta A}(X, p_A) = \rho_{\beta A}(X, p_A) + \sum_j \psi_B(x_\beta) \sigma_{BA}(y_\beta, p_A). \quad (4.35)$$

Заметим теперь, что асимптотика интегралов  $\sigma_{BA}(y_\beta, p_A)$  определяется двухчастичными полюсными особенностями

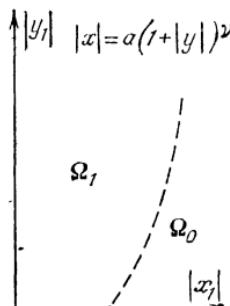


Рис. 11

$(E_B(p'_B) - E_A(p_A) - i0)^{-1}$  и может быть найдена с помощью формулы, аналогичной (4.4). Получим сферическую волну, амплитуда которой выражается через компоненты  $T$ -матрицы на энергетической поверхности формулой (4.32).

Асимптотика шестимерного интеграла  $\Phi_{\beta A}$  определяется полюсной особенностью  $(P'^2 - E_A(p_A) - i0)^{-1}$ . Она имеет вид шестимерной сферической волны с ограниченной амплитудой (4.32'). Собирая все вклады, получим искомое представление.

**Волновые функции  $\Psi_0(X, P)$**  Приступим теперь к исследованию асимптотики волновой функции  $\Psi_0(X, P)$ . Зададим эту функцию интегралом (4.30), где множитель  $(2\pi)^{-3/2}$  заменим единицей. С помощью (3.63) функция  $\Psi_0(X, P)$  может быть представлена в виде суммы:

$$\begin{aligned} \Psi_0(X, P) &= e^{i(X, P)} + \Phi_0(X, P), \\ \Phi_0(X, P) &= \sum_{\alpha} (\Phi_{\alpha}(X, P) + W_{\alpha 0}(X, P)), \end{aligned} \quad (4.36)$$

где функции  $\Phi_{\alpha}(X, P)$  и  $\Phi_{\alpha 0}(X, P)$  даются интегралами (4.34), в которых ядра  $T_{\beta A}$  следует заменить соответственно ядрами  $T_{\alpha}(P', P, P^2 + i0)$  и  $\sum_{\beta} W_{\alpha\beta}(P', P, P^2 + i0)$  и положить  $E_A = P^2$ .

В силу (4.3) функции  $\Phi_{\alpha}(X, P)$  выражаются через двухчастичные волновые функции  $\psi_{\alpha}(x, k)$  формулами

$$\Phi_{\alpha}(X, P) = \exp \{i(y_{\alpha}, p_{\alpha})\} \varphi_{\alpha}(x_{\alpha}, k_{\alpha}). \quad (4.37)$$

Если координата  $x_z$  ограничена, эта функция не убывает. При  $|x_{\alpha}| \rightarrow \infty$  рассеянные волны  $\varphi_{\alpha}(x_{\alpha}, k_{\alpha})$  можно заменить асимптотикой (4.4), так что  $\Phi_{\alpha}$  убывает здесь как  $|x_{\alpha}|^{-1}$ .

Рассмотрим далее слагаемые  $W_{\alpha 0}(X, P)$ . В отличие от рассмотренного выше случая волновых функций  $\Psi_A(X, P_A)$  подынтегральное выражение  $W_{\alpha 0}(X, P)$  кроме полюса  $(P'^2 - P^2 - i0)^{-1}$  имеет трехчастичные особенности, отвечающие первой итерации интегральных уравнений (3.28)  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$ . Мы выделим такие слагаемые и выразим их через двухчастичные волновые функции. С этой целью прибавим и вычтем из ядер  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}(P', P, P^2 + i0)$  вы-

ражения

$$T_{\alpha\beta}^{(0)}(P', P) = t_{\alpha} \left( k'_{\alpha}, \sqrt{P^2 - p'^2_{\alpha}} \hat{k}_{\alpha}(p'_{\alpha}, p_{\beta}), P^2 - p'^2_{\alpha} + i0 \right) \times \\ \times \frac{t_{\beta}(k_{\beta}(p'_{\alpha}, p_{\beta}), k^2_{\beta}, k^2_{\beta} + i0)}{k^2_{\beta}(p'_{\alpha}, p_{\beta}) - k^2_{\beta} - i0} \frac{1}{|s_{\alpha\beta}|^3}$$

и заметим, что ядро

$$\Delta Q_{\alpha\beta}^{(0)}(P', P) = Q_{\alpha\beta}^{(0)}(P', P, P^2 + i0) - T_{\alpha\beta}^{(0)}(P', P)$$

не имеет больше полюсной трехчастичной особенности, так как числитель и знаменатель  $\Delta Q_{\alpha\beta}^{(0)}$  одновременно обращаются в нуль. Если  $p'^2_{\alpha} > P^2$ , то несингулярно также и ядро  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$ . Таким образом, все трехчастичные особенности содержатся в ядре  $T_{\alpha\beta}^{(0)}$  при  $p'^2_{\alpha} \leq P^2$ .

Подставим ядро  $T_{\alpha\beta}^{(0)}$  в интеграл (4.34) и выберем в качестве независимых переменных интегрирования пару  $\{k'_{\alpha}, p'_{\alpha}\}$ . Принимая во внимание равенства (4.3), получим для соответствующего слагаемого волновой функции представление

$$\Phi_{\alpha\beta}(X, P) = \\ = \frac{1}{|s_{\alpha\beta}|^3} \int_{p'^2_{\alpha} \leq E} dp'_{\alpha} e^{i(y_{\alpha}, p'_{\alpha})} \varphi_{\alpha}(x_{\alpha}, \hat{k}_{\alpha}(p'_{\alpha}, p_{\beta}) \sqrt{E - p'^2_{\alpha}}) \times \\ \times \hat{\varphi}_{\beta}(k_{\beta}(p'_{\alpha}, p_{\beta}), k_{\beta}), \quad E = P^2, \quad (4.38)$$

где через  $\hat{\varphi}_{\beta}$  обозначено преобразование Фурье функции  $\varphi_{\beta}(x, k)$ :

$$\hat{\varphi}_{\beta}(k, k') = - \frac{t(k, k', k'^2 + i0)}{k^2 - k'^2 - i0}.$$

В результате представим волновую функцию  $\Psi_0(X, P)$  в виде суммы:

$$\Psi_0(X, P) = \exp\{i(X, P)\} + \sum_{\alpha} (\tilde{\Phi}_{\alpha}^{(s)}(X, P) + \tilde{W}_{\alpha 0}(X, P)), \quad (4.39)$$

где слагаемое  $\tilde{\Phi}_{\alpha}^{(s)}$  выражается через двухчастичные

волновые функции равенством

$$\tilde{\Phi}_{\alpha}^{(s)}(X, P) = \Phi_{\alpha}(X, P) + \sum_{\beta \neq \alpha} \Phi_{\alpha\beta}(X, P).$$

Функция  $\tilde{W}_{\alpha_0}(X, P)$  задается интегралом (4.34), где подинтегральное выражение имеет только два типа полюсных особенностей:  $(P'^2 - P^2 - i0)^{-1}$  и  $(E_A(p'_A) - P^2 - i0)^{-1}$ .

Таким образом, асимптотика  $\tilde{W}_{\alpha_0}(X, P)$  может быть найдена по такой же схеме, как и асимптотика интеграла (4.34) в случае функций  $\Psi_A(X, p_A)$ ,  $A \neq 0$ . Опишем окончательный результат.

Почти во всех направлениях конфигурационного пространства слагаемое  $\tilde{W}_{\alpha_0}(X, P)$  асимптотически имеет вид суммы (4.35) кластерных и шестимерных сферических волн. Амплитуды этих волн  $F_{A0}^{(\alpha)}(\hat{y}_A, P)$  и  $F_{00}^{(\alpha)}(\hat{X}, P)$  связаны с компонентами  $T$ -матрицы на энергетической поверхности соотношениями

$$F_{A0}^{(\alpha)}(\hat{p}'_A, P) = -2\pi^2 \sum_{\beta} J_{A\beta}(p'_A, P, E + i0), \\ p'^2_A = E + \kappa_A^2, \quad (4.40)$$

$$F_{00}^{(\alpha)}(P, P') = C_0(E) \left( \sum_{\beta} M_{\alpha\beta}(P, P', P'^2 + i0) - \right. \\ \left. - T_{\alpha}(P, P', P'^2 + i0) - \sum_{\beta \neq \alpha} \tilde{T}_{\alpha\beta}(\hat{P}, P') \right), \quad P^2 = P'^2 = E. \quad (4.41)$$

Здесь  $C_0(E) = -e^{i\pi/4} E^{3/4} \pi (2\pi)^{5/2}$ , а ядро  $\tilde{T}_{\alpha\beta}$  дается равенством

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}(\hat{P}, P') = \\ = -\frac{1}{|s_{\alpha\beta}|^3} \frac{t_{\alpha}(k'_{\alpha}, |k'_{\alpha}| \hat{k}'_{\alpha\beta}, k'^2_{\alpha\beta} + i0) t_{\beta}(|k_{\beta}| \hat{k}_{\beta\alpha}, k_{\beta}, k^2_{\beta} + i0)}{k^2_{\beta\alpha} - k^2_{\beta} - i0}, \quad (4.42)$$

где  $k'_{\alpha\beta} = k_{\alpha}(p'_{\alpha}, p_{\beta})$ ,  $k_{\beta\alpha} = k_{\beta}(p'_{\alpha}, p_{\beta})$ ,  $p'_{\alpha} = |X|^{-1} E^{1/2} y_{\alpha}$ .

В соответствии с описанной выше интерпретацией сферических волн, кластерные сферические волны можно сопоставить процессам захвата частиц ( $3 \rightarrow 2$ ), а шестимерные сферические волны — «истинно» трехчастичным

процессам упругого рассеяния ( $3 \rightarrow 3$ ). Слагаемое  $\tilde{\Phi}^{(s)} = \sum_{\alpha} \tilde{\Phi}_{\alpha}^{(s)}$ , порожденное первыми итерациями уравнений (3.28), отвечает процессам однократных и двухкратных парных столкновений.

Заметим, однако, что шестимерные сферические волны не во всех направлениях конфигурационного пространства правильно описывают асимптотику  $W_{\alpha_0}(X, P)$ . Дело в том, что, как мы видели в предыдущей главе, связная часть  $T$ -матрицы на энергетической поверхности  $\sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha\beta}(P', P, P^2 + i0)$ , кроме полюсных особенностей, имеет и более слабые особенности, отвечающие итерациям  $Q_{\alpha\beta}^{(n)}$  до четвертого порядка. Поэтому амплитуда  $F_{00}^{(\alpha)}$  может обращаться в бесконечность, если вектор  $\hat{X}$  попадает на особое направление. С помощью подходящих замен переменных интегрирования соответствующие этим итерациям интегралы можно привести к одномерным быстро осциллирующим интегралам со степенными особенностями. Асимптотика таких интегралов будет построена в § 5. Мы не будем, однако, описывать громоздкие замены переменных и анализировать асимптотику таких интегралов. Их явный вид не используется в задачах, которые рассматриваются в этой книге.

Чтобы не оговаривать каждый раз указанные особенности асимптотических формул, мы введем в рассмотрение более широкие классы функций  $\Phi_{\varepsilon, \varepsilon}, B_{\varepsilon, \varepsilon}$  и  $S_{\varepsilon, \varepsilon}$ . Допускается, что в этом случае амплитуды шестимерных сферических волн могут иметь слабые особенности в некоторых направлениях конфигурационного пространства и абсолютно интегрируемые на единичной сфере  $|P| = 1$  со степенью  $\varepsilon$ .

Итак, мы видим, что волновые функции в системе трех тел имеют качественно различное асимптотическое поведение в зависимости от типа начального состояния. Если асимптотика функций с двумя кластерами в начальном состоянии определяется простой суперпозицией сферических и кластерных волн, отвечающих конечным состояниям, то для описания волновых функций с тремя свободными частицами в начальном состоянии приходится различать также и более детализированные процессы попарного перерассеяния. Физическая причина их появления обусловлена тем, что область, где могут происходить попарные столкновения свободных частиц, не является

ограниченной в конфигурационном пространстве. Напротив, область, где сталкиваются связанные пары и третья частица, сосредоточена в окрестности начала координат и ее размер обусловлен радиусом действия сил. Это обстоятельство определяет привилегированное с точки зрения асимптотики положение волновых функций с двумя кластерами в начальном состоянии как в системе трех тел, так и в системах произвольного числа частиц.

Детальный анализ координатной асимптотики слагаемых, описывающих процессы попарного перерассеяния, мы проведем в следующем параграфе. Сейчас же перейдем к формулировке граничных задач для волновых функций.

**Граничные задачи.** Зная асимптотику волновых функций, мы можем поставить граничные задачи на основе уравнения Шредингера. Как и в системе двух тел, мы отделим падающие волны

$$\Psi_A(X, p_A) = \chi_A(X, p_A) + \Phi_A(X, p_A)$$

и будем рассматривать неоднородное уравнение Шредингера для рассеянных волн

$$\left( -\Delta + \sum_{\alpha} v_{\alpha}(x_{\alpha}) - E_A \right) \Phi_A(X, p_A) = -\bar{V}_A \chi_A(X, p_A). \quad (4.43)$$

Здесь, как и в главе II, через  $\bar{V}_A$  обозначена часть взаимодействия, отсутствующая в канале  $A$ , т. е.

$$\bar{V}_A = \sum_{\beta \neq \alpha} V_{\beta} \text{ при } A = \{\alpha, i\}, \quad \bar{V}_A = \sum_{\beta} V_{\beta} \text{ при } A = 0.$$

Если в начальном канале имеется только два кластера, асимптотические условия для соответствующих волновых функций сводятся к заданию суммы кластерных и шестимерных сферических волн. Другими словами, решение  $\Phi_A(X, p_A)$  уравнения (4.43) при  $A \neq 0$  следует искать в классе  $S_{E_A}(\hat{p}_A)$ .

Сложнее выглядят асимптотические условия для функций  $\Psi_0(X, P)$ . В данном случае, кроме плоской волны  $\exp\{i(X, P)\}$ , следует также выделять медленно убывающие слагаемые, отвечающие процессам однократных и двукратных столкновений. Последние известны в явном виде, так что определению подлежат только «истинно» трехчастичные рассеянные волны, которые следует искать в классе  $S_{E, \varepsilon}(\hat{P})$ ,  $\varepsilon < 2$ . Мы не будем выписывать здесь

довольно громоздкие уравнения для таких функций. Все необходимые для их вывода соотношения мы уже привели выше.

Получим далее дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют компоненты волновых функций. Запишем систему (3.59) в координатном представлении. Применим к обеим частям оператор  $H_\alpha - z$ . Придем к следующей системе дифференциальных уравнений для компонент функции Грина:

$$\begin{aligned} & (-\Delta_x + v_\alpha(x_\alpha) - z) R_{\alpha\beta}(X, X', z) = \\ & = -v_\alpha(x_\alpha) R_0(X, X', z) \delta_{\alpha\beta} - v_\alpha(x_\alpha) \sum_{\gamma \neq \alpha} R_{\gamma\beta}(X, X', z). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Используя определение компонент волновых функций (3.60), (3.61), получаем отсюда искомые уравнения:

$$\begin{aligned} & (-\Delta + v_\beta(x_\beta) - E_A) \Phi_{\beta A}(X) = \\ & = -v_\beta(x_\beta) \left( \chi_A^{(\beta)}(X) + \sum_{\gamma \neq \beta} \Phi_{\gamma A}(X) \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Компоненты  $\chi_0^{(\beta)}$  задаются равенством

$$\chi_0^{(\beta)} = e^{i(X, P)} \delta_{\beta\gamma}$$

при любом  $\gamma$ , а компоненты  $\chi_A^{(\beta)}$  при  $A \neq 0$  — равенством

$$\chi_A^{(\beta)}(X, p_A) = \delta_{\alpha\beta} \chi_A(X, p_A).$$

При этом волновые функции равны сумме

$$\Psi_A(X, p_A) = \chi_A(X, p_A) + \sum_{\beta} \Phi_{\beta A}(X, p_A).$$

Они подчиняются уравнению Шредингера

$$\left( -\Delta + \sum_{\alpha} v_\alpha(x_\alpha) - E_A(p_A) \right) \Psi_A(X, p_A) = 0, \quad (4.43')$$

а функции  $\sum_{\beta} \Phi_{\beta A}$  — неоднородным уравнениям (4.43).

Перейдем к постановке граничных задач на основе уравнений для компонент (4.45).

Рассмотрим сначала процессы с двумя кластерами в начальном состоянии. Как мы показали выше, компоненты  $\Phi_{\beta A}(X, p_A)$  асимптотически равны сумме (4.35) кла-

стерных сферических волн, отвечающих оператору  $h_\alpha$ , и шестимерных сферических волн. Следовательно, соответствующее решение системы уравнений (4.45) нужно искать в классе вектор-функций  $B_{E_A}(\hat{P}_A)$ . Напомним, что элемент  $\hat{\Phi}_A$  этого класса представляет совокупность трех компонент,  $\hat{\Phi}_A = \{\Phi_{1A}, \Phi_{2A}, \Phi_{3A}\}$ , с фиксированной асимптотикой (4.28) на бесконечности.

Асимптотические граничные условия для компонент волновых функций  $\Psi_\alpha(X, P)$  отличаются от аналогичных условий для двухкластерных столкновений лишь тем, что в этом случае необходимо выделять медленно убывающие слагаемые, описывающие перерассеяние. Оставшуюся часть компонент  $\tilde{W}_{\alpha 0}$ , определяемых представлением (4.39), следует искать в классе  $B_{E_\varepsilon}(\hat{P})$ ,  $0 < \varepsilon < 2$ .

Наметим схему оправдания граничных задач. Рассмотрим, например, граничную задачу для компонент волновых функций  $\Psi_A$  при  $A \neq 0$ . Пусть  $R_\alpha(X, X', z)$  — функция Грина для оператора  $H_\alpha$  (4.23). Применим формулу Грина (4.8) с  $\Omega = V_R$ ,  $u_1 = \Phi_{\beta A}(X', p_A)$  и  $u_2 = R_\beta(X, X', E_A + i0)$ . Напомним, что компоненты  $\Phi_{\beta A}(X', p_A)$  имеют асимптотику вида (4.35). Такую же асимптотику, согласно (4.24), (4.24'), имеют и функции Грина  $R(X, X', E_A + i0)$  при  $|X'| \rightarrow \infty$ . Опираясь на эти результаты, мы можем вычислить асимптотику интегралов в правой части (4.8) аналогично тому, как это было сделано в задаче двух тел. Получим в пределе  $R \rightarrow \infty$  нуль. Интеграл в левой части можно вычислить с помощью соотношений (4.45). В результате получим следующую систему интегральных уравнений для волновых функций:

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta A}(X, p_A) = - \int dX' R_\beta(X, X', E_A + i0) v_\beta(x'_\beta) \times \\ \times \left( \sum_{\gamma \neq \beta} \Phi_{\gamma A}(X', p_A) + \chi_A^{(\beta)}(X', p_A) \right). \end{aligned}$$

Эта система отвечает формальному обращению оператора  $H_\beta - E$  в (4.45). Мы увидим в § 4, что к этой системе, рассматриваемой в классе функций с асимптотикой (4.28), применима альтернатива Фредгольма. Отсюда, как и в задаче двух тел, можно получить, что сформулированная выше граничная задача для компонент корректна и однозначно разрешима.

Итак, мы сформулировали граничные задачи для волновых функций и их компонент, которые можно полно-

жить в основу альтернативного определения волновых операторов. С другой стороны, как мы отмечали выше, дифференциальная формулировка предпочтительна с точки зрения вычислительных возможностей.

Посмотрим теперь на граничные задачи с этой стороны.

Уравнение Шредингера является наиболее простым дифференциальным соотношением, которому удовлетворяют волновые функции. Однако асимптотические условия в этом случае выглядят довольно сложно. Во всех областях  $\Omega_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) имеются как отличные от нуля парные потенциалы, так и медленно убывающие кластерные сферические волны. Для их описания приходится использовать все три пары якобиевых координат. Данное обстоятельство существенно затрудняет численные расчеты.

Эти трудности исчезают после разделения волновых функций на компоненты. В каждом из уравнений (4.45) имеется только один потенциал, отвечающий данной паре  $\beta$ . При этом асимптотика компонент  $\Phi_{\beta A}$  содержит только один член, порожденный собственной функцией оператора энергии подсистемы из двух частиц (а не сумму по всем парам, как в случае уравнения Шредингера). В то же время уравнения для этих компонент обладают всеми преимуществами дифференциальных уравнений. В частности, в качестве входных данных используются парные потенциалы и собственные функции, а не  $T$ -матрицы, как в интегральных уравнениях. Таким образом, дифференциальные уравнения для компонент сочетают сильные стороны компактных интегральных уравнений, обусловленные корректным учетом структуры волновых функций, с простой формой, свойственной уравнению Шредингера. В главе VII мы покажем, как эти преимущества дифференциальных уравнений для компонент можно использовать для разработки эффективных численных методов задачи рассеяния.

### § 3. Вклад элементарных двухчастичных столкновений

В этом параграфе мы опишем координатную асимптотику слагаемых  $\Phi_\alpha$  и  $\Phi_{\alpha\beta}$ , отвечающих однократным и двукратным двухчастичным столкновениям. Мы покажем, что эти слагаемые занимают промежуточное положение между плоскими и сферическими волнами. Слагаемое  $\Phi_\alpha$

имеет порядок  $O(|x_\alpha|^{-1})$ , а порядок слагаемого  $\Phi_{\alpha\beta}$  изменяется в пределах от  $O(|X|^{-2})$  до  $O(|X|^{-5/2})$ .

В эвристических целях мы будем пользоваться терминологией, которая применяется в дифракционных задачах. В связи с этим следует отметить, что как в геометрическом отношении, так и с точки зрения математического аппарата квантовая задача рассеяния для системы трех частиц имеет много общего с задачей дифракции на полупрозрачном клине. Мы проведем сравнение между этими двумя задачами в конце параграфа.

**Однократные и двукратные столкновения классических частиц.** Мы докажем ниже, что показатели быстро осциллирующих экспонент, определяющих координатную асимптотику функций  $\Phi_\alpha$  и  $\Phi_{\alpha\beta}$ , можно описать в терминах действий. Поэтому целесообразно рассмотреть сначала процессы однократных и двукратных столкновений классических частиц и выразить асимптотические действия через кинематические переменные.

Процесс однократного столкновения пары  $\alpha$  схематически представлен на рис. 12, где через  $k_\alpha$  и  $p_\alpha$  обозначены относительные импульсы частиц до столкновения и через  $k'_\alpha$ ,  $p'_\alpha$  — их относительные импульсы после столкновения. Асимптотически, вне радиуса действия сил, справедливы равенства  $p'_\alpha = p_\alpha$  и  $k'_\alpha = |k_\alpha| \hat{x}_\alpha$ . Для укороченного действия  $\sqrt{E}Z_\alpha$ , отвечающего асимптотическому

$$\begin{array}{c} k_\alpha \quad (\alpha) \quad k'_\alpha \\ \hline p_\alpha \quad \quad \quad p'_\alpha \end{array}$$

Рис. 12

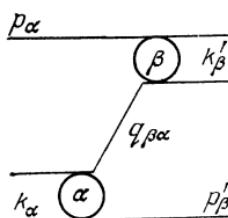


Рис. 13

движению частиц, находим с учетом этих соотношений представление

$$\sqrt{E}Z_\alpha = |k_\alpha| |x_\alpha| + (p_\alpha, y_\alpha).$$

Рассмотрим далее процесс двукратного столкновения частиц. Пусть сталкиваются сначала частицы пары  $\beta$ , а затем — пары  $\alpha$ . Схематически этот процесс представлен на рис. 13. Через  $k_{\alpha\beta}$  и  $p_{\alpha\beta}$  обозначим относительные

импульсы частиц после столкновений. Соответствующее укороченное действие  $\sqrt{E}Z_{\alpha\beta}$  определяется тогда выражением

$$\sqrt{E}Z_{\alpha\beta} = |k_{\alpha\beta}| |x_\alpha| + (p_{\alpha\beta}, y_\alpha). \quad (4.46)$$

При этом импульсы  $k_{\alpha\beta}$  и  $p_{\alpha\beta}$  могут быть найдены с помощью принципа наименьшего действия и законов сохранения импульса и энергии в последовательных двухчастичных столкновениях. Эти импульсы даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} k_{\alpha\beta} &= c_{\alpha\beta}q_{\beta\alpha} + s_{\alpha\beta}p_\beta, \\ p_{\alpha\beta} &= -s_{\alpha\beta}q_{\beta\alpha} + c_{\alpha\beta}p_\beta, \end{aligned} \quad k_{\alpha\beta}^2 + p_{\alpha\beta}^2 = E. \quad (4.47)$$

Здесь  $E = k_\alpha^2 + p_\alpha^2$  — кинетическая энергия,  $k_\alpha$  и  $p_\alpha$  — относительные импульсы частиц до столкновений. Промежуточный относительный импульс  $q_{\beta\alpha}$  пары  $\beta$  определяется соотношениями

$$\begin{aligned} q_{\beta\alpha} = |q| &(\cos \theta_{\alpha\beta} \hat{p}_\beta + \sin \theta_{\alpha\beta} \cos \varphi_{\alpha\beta} e_\beta^{(2)} + \\ &+ \sin \theta_{\alpha\beta} \sin \varphi_{\alpha\beta} e_\beta^{(3)}), \quad q^2 = k_\beta^2, \end{aligned} \quad (4.47')$$

где векторы  $\hat{p}_\beta$ ,  $e_\beta^{(2)}$  и  $e_\beta^{(3)}$  образуют ортогональный базис в  $\mathbf{R}^3$ :

$$\begin{aligned} e_\beta^{(2)} &= -\operatorname{ctg} \tilde{\theta}_\beta \hat{p}_\beta + \operatorname{cosec} \tilde{\theta}_\beta \hat{k}_\beta, \\ \cos \tilde{\theta}_\beta &= (\hat{k}_\beta, \hat{p}_\beta), \quad e_\beta^{(3)} = [\hat{p}_\beta, e_\beta^{(2)}]. \end{aligned}$$

Углы  $\theta_{\alpha\beta}$  и  $\varphi_{\alpha\beta}$  определяются из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{\alpha\beta}} Z_{\alpha\beta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_{\alpha\beta}} Z_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.48)$$

которые вытекают из принципа наименьшего действия. При этом функция  $Z_{\alpha\beta}$  выражается через  $\theta_{\alpha\beta}$  и  $\varphi_{\alpha\beta}$  формулами (4.46) — (4.48).

Из этих равенств находим, что точка  $q_{\beta\alpha}$  лежит в плоскости, паянной на векторы  $\hat{p}_\beta$  и  $y_\alpha$ , а для  $Z_{\alpha\beta}$  получаем представление

$$\begin{aligned} \sqrt{E}Z_{\alpha\beta} = |x_\alpha| &(E_{\alpha\beta} + 2s_{\alpha\beta}c_{\alpha\beta}|k_\beta| |p_\beta| \cos \theta_{\alpha\beta})^{1/2} - \\ &- s_{\alpha\beta}|y_\alpha| |k_\beta| \cos (\theta_{\alpha\beta} - \tilde{\theta}_{\alpha\beta}) + c_{\alpha\beta}(p_\beta, y_\alpha), \end{aligned}$$

где  $E_{\alpha\beta}^2 = c_{\alpha\beta}^2 k_\beta^2 + s_{\alpha\beta}^2 p_\beta^2$  и  $\cos \tilde{\theta}_{\alpha\beta} = (\hat{y}_\alpha, \hat{p}_\beta)$ . Угол  $\tilde{\theta}_{\alpha\beta}$  определяется из уравнения (4.48), решение которого удается найти в явном виде лишь для нескольких предельных случаев. Например, если  $\tilde{\theta}_{\alpha\beta} = 0$ , то для  $\theta_{\alpha\beta}$  получаем два значения:  $\theta_{\alpha\beta}^{(1,2)} = 0, \pi$ .

Из определения функций  $Z_\alpha$  и  $Z_{\alpha\beta}$  следует, что они удовлетворяют *уравнению эйконала*

$$|\nabla L(X)|^2 = 1. \quad (4.49)$$

Мы будем называть функции  $Z_\alpha$  *однократными*, а функции  $Z_{\alpha\beta}$  — *двукратными эйконалами*. Отметим, что фазы плоских и сферических волн  $(X, \hat{P})$  и  $|X|$  также подчиняются *уравнению эйконала*. Мы будем называть эти функции *плоским и сферическим эйконалами*.

**Асимптотика функций  $\Phi_\alpha$  и  $\Phi_{\alpha\beta}$ .** Приступим к исследованию координатной асимптотики слагаемых  $\Phi_\alpha$  и  $\Phi_{\alpha\beta}$ .

Если  $|x_\alpha| \rightarrow \infty$ , то, как мы отмечали в предыдущем параграфе, двухчастичные функции  $\varphi_\alpha(x, k)$  в (4.37) можно заменить их асимптотическими выражениями (4.4). В старшем порядке получим формулу

$$\Phi_\alpha(X, P) \sim \frac{\exp \{i \sqrt{E} Z_\alpha\}}{|x_\alpha|} (f_\alpha(\hat{x}_\alpha, k_\alpha) + O(|x_\alpha|^{-v})), \quad (4.50)$$

где  $f_\alpha(\hat{x}_\alpha, k_\alpha)$  — амплитуда рассеяния для волновой функции  $\psi_\alpha(x_\alpha, k_\alpha)$ . Отметим, что если потенциалы  $v_\alpha(x_\alpha)$  убывают быстрее любой степени  $|x_\alpha|^{-N}$ , то асимптотические разложения двухчастичных волновых функций можно дополнить членами младшего порядка  $|x_\alpha|^{-j}$ ,  $j = 2, 3, \dots$ , так, чтобы уравнение Шредингера для асимптотического решения  $\Phi_\alpha$  выполнялось с точностью до произвольной степени  $Z_\alpha^{-N}$ .

Сложнее найти асимптотику функций  $\Phi_{\alpha\beta}$ . Мы рассмотрим только наиболее типичный случай, когда все частицы сильно разделены до и после столкновения. Более точно, будем предполагать выполнеными условия

$$|x_\alpha| > a(1 + |y_\alpha|)^v, \quad v > 1/2, \\ k_\beta^2 > |X|^{-1-v'}, \quad v' > 1/2. \quad (4.51)$$

Используя асимптотическое представление функций  $\varphi_\alpha(x, k)$ , запишем интеграл  $\Phi_{\alpha\beta}$  в следующем виде:

$$\Phi_{\alpha\beta}(X, P) \sim \int_{\substack{p'_\alpha^2 \leq E \\ p'_\alpha}} dp'_\alpha \exp \{i\sqrt{E} Z_\alpha(p'_\alpha, X)\} \times \times \frac{\tilde{T}_{\alpha\beta}(\hat{x}_\alpha, p'_\alpha; P)}{k_\beta^2(p'_\alpha, p_\beta) - k_\beta^2 - i0}. \quad (4.52)$$

Здесь

$$Z_\alpha(p'_\alpha, X) = \frac{1}{\sqrt{E}} \left( (p'_\alpha, y_\alpha) + \sqrt{E - p'^2_\alpha} |x_\alpha| \right) \quad (4.53)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\alpha\beta}(\hat{x}_\alpha, p'_\alpha, P) &= \\ &= \frac{2\pi^2}{|s_{\alpha\beta}|^3} t_\alpha \left( \sqrt{E - p'^2_\alpha} \hat{x}_\alpha, \sqrt{E - p'^2_\alpha} \hat{k}'_{\alpha\beta}, E - p'^2_\alpha + i0 \right) \times \\ &\quad \times t_\beta(k_{\beta\alpha}, k_\beta, k_\beta^2 + i0). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Главная часть этого интеграла при  $|X| \rightarrow \infty$  порождается характеристическими точками двух типов — окрестностью единственной точки стационарной фазы  $p_\alpha^{(0)}$ ,  $p_\alpha^{(0)} = E^{1/2} |X|^{-1} y_\alpha$ , которая находится из уравнения

$$\nabla_{p'_\alpha} Z_\alpha(p'_\alpha, X) = 0,$$

и множеством нулей  $\Omega^{(s)}$  сингулярного знаменателя, где  $k_\beta^2(p'_\alpha, p_\beta) - k_\beta^2 = 0$ .

Если точка  $p_\alpha^{(0)}$  расположена достаточно далеко от многообразия  $\Omega^{(s)}$ , так что

$$|k_\beta^2(p_\alpha^{(0)}, p_\beta) - k_\beta^2| \geq C > 0, \quad (4.55)$$

то вклады характеристических точек в асимптотику  $\Phi_{\alpha\beta}$  можно изучать по отдельности.

В критической точке  $p_\alpha^{(0)}$  имеет место равенство

$$Z_\alpha(p_\alpha^{(0)}, X) = |X|,$$

и ее окрестность порождает сферическую волну в  $\mathbf{R}^6$ , амплитуда которой равна  $C_0(E) T_{\alpha\beta}^{(0)}(|P| \hat{X}, P)$ . Эту волну можно объединить с «истинно» трехчастичной частью

$\sum_{\alpha} \widetilde{W}_{\alpha_0}$  из (4.39). В результате получим сферическую волну с амплитудой  $C_0(E)T_c(\widehat{X}, P)$ :

$$T_c(\widehat{X}, P) = T(\sqrt{E}\widehat{X}, P, P^2 + i0) - \\ - \sum_{\alpha} T_{\alpha}(\sqrt{E}\widehat{X}, P, P^2 + i0). \quad (4.56)$$

Отметим, что если критическая точка  $p_{\alpha}^{(0)}$  близка к  $\Omega^{(s)}$ , то описанная форма асимптотики теряет смысл, так как амплитуда сферической волны (4.56) обращается в бесконечность из-за трехчастичных полюсных особенностей ядра  $T_{\alpha\beta}^{(0)}$ . Ниже мы покажем, что асимптотика  $\Phi_{\alpha\beta}$  при этом описывается посредством интегралов Френеля.

Перейдем к исследованию вклада полюсной особенности (4.52). Делая под интегралом (4.52) замену переменной  $q = k_{\beta}(p'_{\alpha}, p_{\beta})$ , придем к следующему представлению:

$$\Phi_{\alpha\beta} \sim \int_{V_E} dq \frac{\exp\{i\sqrt{E}|X|\tilde{Z}_{\alpha}(q, \widehat{X})\}}{q^2 - k_{\beta}^2 - i0} \tilde{T}_{\alpha\beta}(q, \widehat{x}_{\alpha}, P). \quad (4.57)$$

Здесь через  $\tilde{T}_{\alpha\beta}$  обозначена функция (4.54), выраженная в терминах переменной  $q$ . Функция  $|X|\tilde{Z}_{\alpha}$  дается формулой (4.53), где

$$p'_{\alpha} = -s_{\alpha\beta}q + c_{\alpha\beta}p_{\beta}.$$

Интегрирование ведется по шару  $V_E$  радиуса  $E^{1/2}|s_{\beta\alpha}|^{-1}$  с центром в точке  $q_0 = c_{\alpha\beta}(s_{\alpha\beta})^{-1}p_{\beta}$ . Введем сферические координаты  $|q|, \theta, \phi$  по отношению к вектору  $p_{\beta}$ , так что

$$q = |q|(\cos\theta\widehat{p}_{\beta} + \sin\theta\cos\phi e_{\beta}^{(2)} + \sin\theta\sin\phi e_{\beta}^{(3)}).$$

Проведем внутреннее интегрирование по угловым переменным  $\theta$  и  $\phi$ . В силу условий (4.50) многообразие  $\Omega^{(s)}$  и точка  $p_{\alpha}^{(0)}$  отдалены от границы области интегрирования и вектор  $\widehat{q}$  принимает все значения на единичной сфере. Так как подынтегральное выражение гладко зависит от  $\theta$  и  $\phi$ , координатная асимптотика этого интеграла может быть найдена с помощью метода стационарной фазы. Учитывая, что критическая точка  $\widehat{q}_0 = \{\theta_0, \phi_0\}$  определяется

равенствами (4.48), получим асимптотическую формулу

$$\Phi_{\alpha\beta} \sim \frac{A_{\alpha\beta}(\hat{X}, P)}{|x_\alpha| |y_\alpha|} \Phi_{\alpha\beta}^{(1)}(X, P), \quad (4.58)$$

где

$$A_{\alpha\beta}(\hat{X}, P) = \left( \frac{|k_\beta| |y_\alpha| \sin \theta_{\alpha\beta}}{\sin \tilde{\theta}_{\alpha\beta} |s_{\alpha\beta}|} \right)^{1/2} \left| \frac{\partial^2 Z_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial \theta_{\alpha\beta}^2} \right|^{-1/2}, \quad (4.59)$$

а функция  $\Phi_{\alpha\beta}^{(1)}$  представляется в виде интеграла

$$\Phi_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{-2\pi i}{|k_\beta|^{1/2}} \int_0^\infty dt t^{3/2} \frac{\exp\{iZ_{\alpha\beta}(t)\}}{t^2 - k_\beta^2 - i0} \tilde{T}_{\alpha\beta}(\hat{x}_\alpha, \hat{t}q_0, P).$$

Функция  $Z_{\alpha\beta}(t)$  определяется формулами (4.46)–(4.48), где следует положить  $|q| = t$ , а дифференцирование  $Z_{\alpha\beta}(t)$  относительно  $\theta_{\alpha\beta}$  вести при фиксированных  $\varphi_{\alpha\beta}$ ,  $x_\alpha$  и  $y_\alpha$ .

Так как вклад критической точки был изучен выше, мы ограничимся описанием только второго слагаемого  $\Phi_{\alpha\beta}^{(s)}$ . Согласно формуле (4.121) из § 6, асимптотика этого интеграла имеет различный вид в зависимости от взаимного расположения стационарной точки  $t = |k_{\beta\alpha}|$  и полюса  $t = |k_\beta|$ . При этом конфигурационное пространство разбивается на две части в соответствии со знаком  $\hat{\omega}_{\alpha\beta} = \text{sign}(k_\beta^2 - k_{\beta\alpha}^2)$ . Множество точек, где  $\hat{\omega}_{\alpha\beta} = -1$ , мы будем обозначать через  $\Omega_{\alpha\beta}^{(-)}$  и называть *областью света*, а дополнение к нему  $\Omega_{\alpha\beta}^{(+)}$  — *областью тени*. Смысл этих названий станет ясным после того, как мы сравним задачу рассеяния с задачей дифракции плоских волн на клине.

В области света асимптотика  $\Phi_{\alpha\beta}^{(s)}$  определяется вычетом в полюсе и имеет порядок  $O(|x_\alpha|^{-1} |y_\alpha|^{-1})$ , а в области тени это слагаемое экспоненциально мало. Таким образом, имеет место асимптотическая формула

$$\Phi_{\alpha\beta}^{(s)}(X, P) \sim \frac{A_{\alpha\beta}(\hat{X}, P)}{|x_\alpha| |y_\alpha|} T_{\alpha\beta}^{(s)}(\hat{X}, P) \exp\{i\sqrt{E}Z_{\alpha\beta}\} E(\hat{\omega}_{\alpha\beta}), \quad (4.60)$$

где  $E(t)$  — функция единичного скачка,  $E(t) = 1$ ,  $t > 0$ ;  $E(t) = 0$ ,  $t < 0$ . Амплитуда  $T_{\alpha\beta}^{(s)}$  выражается через двух-

частичные  $T$ -матрицы на энергетической поверхности равенством

$$T_{\alpha\beta}^{(s)}(\hat{X}, P) =$$

$$= \frac{4\pi^4}{|s_{\alpha\beta}|^3} t_\alpha(\hat{x}_\alpha | k_{\alpha\beta}|, k_{\alpha\beta}, k_{\alpha\beta}^2 + i0) t_\beta(|k_\beta| \hat{q}_{\beta\alpha}, k_\beta, k_\beta^2 + i0),$$

где импульсы  $k_{\alpha\beta}$  и  $q_{\beta\alpha}$  определяются соотношениями (4.47), (4.47').

Если же критическая точка сливается с множеством  $\Omega^{(s)}$ , то, как мы отмечали выше, формулы (4.56) и (4.60) теряют смысл. В этом случае справедливы новые асимптотические представления, использующие интегралы Френеля

$$\Phi(t) = \int_t^\infty e^{it^2} d\tau:$$

$$\Phi_{\alpha\beta} \sim \frac{e^{i\pi/4} A_{\alpha\beta}(\hat{X}, P)}{\sqrt{\pi} |x_\alpha| |y_\alpha|} T_{\alpha\beta}^{(s)}(\hat{X}, P) \Phi(E^{1/4} \xi_{\alpha\beta}^{1/2} \hat{\omega}_{\alpha\beta}). \quad (4.61)$$

Здесь через  $\xi_{\alpha\beta}$  обозначена переменная  $\xi_{\alpha\beta} = |X| - Z_{\alpha\beta}$ . Она равна нулю на границе  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$  между областями  $\Omega_{\alpha\beta}^{(+)}$  и  $\Omega_{\alpha\beta}^{(-)}$ . Если  $\xi_{\alpha\beta} \rightarrow \infty$  и  $\hat{\omega}_{\alpha\beta} = 1$ , т. е. точка лежит в тени, то, заменяя интеграл Френеля его асимптотикой  $\Phi(t) \sim \sim \frac{i}{2t} e^{it^2}$ , можно преобразовать  $\Phi_{\alpha\beta}$  в сферическую волну, амплитуда которой равна  $C_0(E) T_{\alpha\beta}^{(0)}(|P| \hat{X}, P)$ . В другом крайнем случае, когда точка  $X$  переходит в область света,  $\hat{\omega}_{\alpha\beta} = -1$ , интеграл Френеля отрицательного аргумента может быть представлен в виде суммы постоянной и стремящегося к нулю слагаемого:

$$\Phi(-t) \sim \sqrt{\pi} e^{-i\pi/4} - \frac{i}{2t} e^{it^2}, \quad t > 0.$$

В результате получим сумму сферической волны и слагаемого  $\Phi_{\alpha\beta}^{(s)}$ , что обеспечивает гладкое сшивание переходной асимптотики с обычным режимом (4.60).

Отметим, что интеграл Френеля  $\Phi(E^{1/4} \xi_{\alpha\beta}^{1/2} \hat{\omega}_{\alpha\beta})$  можно считать функцией только  $E^{1/4} \xi_{\alpha\beta}^{1/2}$ , если рассматривать эту переменную как точку на комплексной плоскости с разрезом  $\Pi_0$  (рис. 14). При этом области  $\Omega_{\alpha\beta}^{(+)}$  отвечают вещественные значения  $\xi_{\alpha\beta}$  на верхнем берегу разреза,  $\arg \xi_{\alpha\beta} = 0$ , а перемещению  $X$  в область тени отвечает

переход  $\xi_{\alpha\beta}$  вокруг начала координат на нижний берег разреза, где  $\arg \xi_{\alpha\beta} = 2\pi$ ,

$$\Phi(E^{1/4}\xi_{\alpha\beta}\hat{\omega}_{\alpha\beta}) \rightarrow \Phi(E^{1/4}\xi_{\alpha\beta}), \quad \xi_{\alpha\beta} \in \Pi_0.$$

На основании описанных выше результатов мы приходим к выводу, что волновая функция  $\Psi_0(X, P)$  может быть записана в виде суммы:

$$\begin{aligned} \Psi_0(X, P) &= \\ &= e^{i(X, P)} + \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}(X, P) + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} \Phi_{\alpha\beta}(X, P) + \tilde{\Phi}_0(X, P), \end{aligned} \quad (4.62)$$

где слагаемое  $\tilde{\Phi}_0(X, P)$  принадлежит классу  $\Phi_{E, \epsilon}(\hat{P})$ , причем амплитуда шестимерной сферической волны  $\tilde{F}_{00}(\hat{X}, P)$  выражается через матрицы рассеяния формулой

$$\tilde{F}_{00}(\hat{X}, P) = C_0(E) \left( T_c(\hat{X}, P) - \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} T_{\alpha\beta}(\hat{X} | P |, P) \right), \quad (4.63)$$

в которой ядро  $T_{\alpha\beta}$  определяется равенством (3.79). Амплитуды сферических волн в  $\mathbf{R}^3$ , описывающих процессы захвата частиц, определены в терминах компонент  $T$ -матрицы формулами (4.40). Асимптотика функций  $\Phi_{\alpha}$  описывается соотношением (4.49), а асимптотика функций  $\Phi_{\alpha\beta}$  — формулой (4.61). Отметим, что, когда потенциалы  $v_{\alpha}(x)$  убывают быстрее любой степени  $|x|^{-r}$ , асимптотические слагаемые младшего порядка для этих функций можно задать с помощью рекуррентных соотношений. Уравнение Шредингера будет выполняться при этом с точностью до произвольной степени  $|x|^{-r}$ . Такие рекуррентные соотношения будут приведены в § 1 следующей главы.

Итак, мы видим, что для описания координатной асимптотики волновых функций  $\Psi_0(X, P)$  недостаточно элементарных функций. В ряде направлений конфигурационного пространства эта асимптотика задается с помощью специальных функций — интегралов Френеля.

Чтобы понять физическую причину появления интегралов Френеля, сравним асимптотику слагаемого  $\Phi_{\alpha\beta}(X, P)$  с асимптотикой поля в задаче дифракции плос-

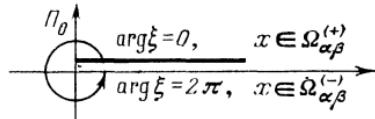


Рис. 14

кой волны на полупрозрачном клине. Из соображений наглядности мы будем считать, что частицы движутся по одной прямой до и после столкновений. Будем предполагать также, что частицы имеют одинаковые массы:  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ .

Опишем сначала асимптотику волнового поля для дифракции Фраунгофера на непрозрачном клине. Пусть

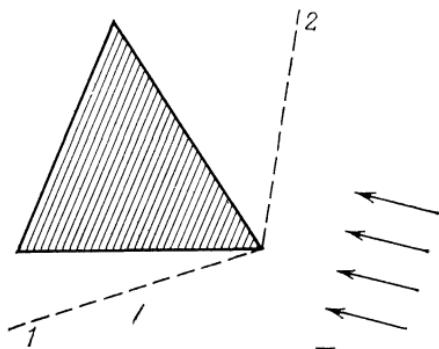


Рис. 15

плоская волна падает перпендикулярно ребру клина, как это изображено на рис. 15. Асимптотика поля вдали от границ 1 и 2 зеркально отраженных плоских волн представляется суммой плоских (падающей и отраженной или только падающей) и рассеянной цилиндрической волн. Однако по мере приближения к границе 1 или 2 амплитуда

цилиндрической волны неограниченно возрастает, так что асимптотика поля в указанной форме теряет смысл. Это объясняется тем, что около границ 1 и 2 геометрической полутени рассеянное поле не сводится к цилиндрической волне, а имеет более сложный вид. Оно описывается здесь посредством интеграла Френеля.

В обсуждаемом процессе рассеяния трех одинаковых частиц «по прямой» движение частиц происходит в подпространстве  $R^2$  конфигурационного пространства  $R^6$ . Это подпространство изображено на рис. 16. Штриховкой помечена область, в которой потенциалы взаимодействия между частицами 2, 3 и 3, 1 существенно отличны от пуля. Они сосредоточены около клиньев, образованных прямыми  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ . Взаимодействие между частицами 1, 2 на рис. 16 не отмечено. Пусть движение частиц до столкновения описывается плоской волной с импульсом  $P$ . Граница  $\Omega_{12}^{(0)}$  в этом случае состоит из следующих четырех лучей. Луч  $A$  отвечает плоской волне, идущей в прежнем направлении  $P$ . Он является границей, прошедшей без отражения волны («дифрагирующее тело» — клин (102') или (201')). Лучи  $B$  и  $C$  совпадают с направлениями плоских волн, зеркально отраженных от граней (11') и (22'). Эти лучи являются границами волн, отра-

женных от названных грапей клиньев (102') или (201'). Наконец, луч  $D$  совпадает с направлением дважды отраженной волны — сначала от грани (02) и затем от грани (01) клина (201). Этот луч совпадает с границей таких волн. Подчеркнем, что все клинья следует считать полу-прозрачными.

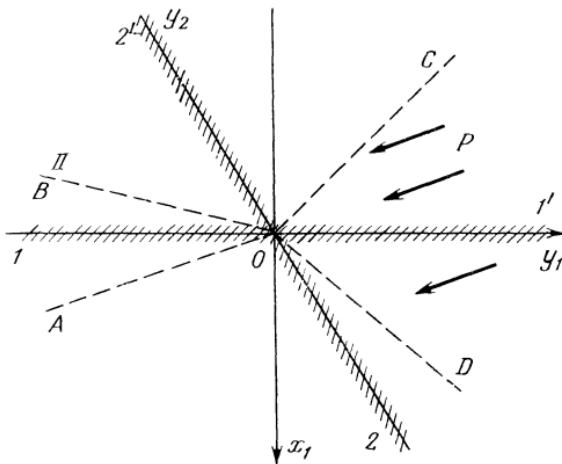


Рис. 16

Слагаемое  $\Phi_{12}$  вдали от  $\Omega_{12}^{(0)}$  играет роль цилиндрической рассеянной волны в случае дифракции на клине. Близи же от  $\Omega_{12}^{(0)}$  это слагаемое описывается посредством интеграла Френеля, в полной аналогии с дифракцией на клине.

Слагаемое  $\Phi_{\alpha\beta}^{(s)}$  отлично от нуля только в секторах  $AOB$  и  $COD$ , следовательно, секторы  $COB$  и  $COA$  являются областями тени. В области  $AOB$  фазовый множитель  $\Phi_{\alpha\beta}^{(s)}$  имеет вид  $\exp\{i(|x_1| |k_1| + (y_1, p_1))\}$  и отвечает плоской волне, распространяющейся в направлении  $P$  при  $x_1 > 0$  или  $OB$  при  $x_1 < 0$ . В области  $COD$  фаза равна  $|x_1| \left| \frac{\sqrt{3}}{2} p_2 - \frac{1}{2} k_1 \right| - y_1 \left| \frac{\sqrt{3}}{2} k_2 + \frac{1}{2} p_2 \right|$ , что соответствует плоской волне, направленной по лучу  $C$  при  $x_1 > 0$  и по лучу  $D$  при  $x_1 < 0$ . Амплитуды таких «плоских волн» убывают как  $|x_1|^{-1}|y_1|^{-1}$ .

Отметим, что направления  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  можно также описать в терминах классических частиц. Законаами сохранения импульса и энергии при последовательных

двучастичных столкновениях разрешены траектории, лежащие в области света. Их границами являются лучи  $OA, OB, OC, OD$ . Направления движения классических частиц после столкновений совпадают с этими лучами.

**Экспоненциальное убывание собственных функций.** Наряду с асимптотикой волновых функций, во многих задачах используется координатная асимптотика собственных функций оператора энергии. Соответствующие формулы, как и способ их доказательства, имеют много общего с описанными выше представлениями для волновых функций. Мы приведем здесь эти формулы, не останавливаясь, однако, на их обосновании.

Собственные функции  $\psi_i(x)$  для системы двух частиц во всех направлениях конфигурационного пространства убывают, как  $|x|^{-1} \exp\{-\kappa_i|x|\}$ . В случае трех тел экспоненциальный характер убывания по-прежнему имеет место, однако форма этой зависимости от расстояния в различных частях конфигурационного пространства неодинакова.

Чтобы описать асимптотику трехчастичных собственных функций, введем ряд обозначений. Пусть  $\hat{Q}_0(X)$  — функция, получающаяся из шестимерной сферической волны аналитическим продолжением в точку  $-E, E > 0$ :

$$\hat{Q}_0 = \frac{\exp\{-\sqrt{E}|X|\}}{|X|^{5/2}} F_0(\hat{X}).$$

Пусть, далее,

$$\hat{Q}_\alpha = \frac{\exp\{-\kappa_\alpha|x_\alpha| - \sqrt{E - \kappa_\alpha^2}|y_\alpha|\}}{|x_\alpha||y_\alpha|} F_\alpha(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha),$$

— результат аналитического продолжения кластерной сферической волны, отвечающей минимальному двухчастичному собственному значению  $-\kappa_\alpha^2 = \min_j (-\kappa_{\alpha j}^2)$ . Эти функции и определяют асимптотику собственных функций в различных частях конфигурационного пространства.

Обозначим через  $\xi_\alpha$  разность между показателями экспоненты  $\hat{Q}_0$  и  $\hat{Q}_\alpha$ , аналогичную введенной выше координате  $\xi_{\alpha\beta}$ :

$$\xi_\alpha = \sqrt{E}|X| - (\kappa_\alpha|x_\alpha| + \sqrt{E - \kappa_\alpha^2}|y_\alpha|).$$

Заметим, далее, что справедливо представление

$$\xi_\alpha = \omega_\alpha^2 \left( \sqrt{E} |X| + \kappa_\alpha |x_\alpha| + \sqrt{E - \kappa_\alpha^2} |y_\alpha| \right),$$

где  $\omega_\alpha = \sqrt{E - \kappa_\alpha^2} |x_\alpha| - \kappa_\alpha |y_\alpha|$ , из которого следует, что переменная  $\xi_\alpha$  принимает положительные значения во всех частях конфигурационного пространства, кроме направлений  $\partial\Omega_\alpha^{(0)}$ , задаваемых условием  $\omega_\alpha = 0$ . В этих направлениях  $\xi_\alpha = 0$ . Через  $\Omega_\alpha^{(+)} (\Omega_\alpha^{(-)})$  мы обозначим области в конфигурационном пространстве, где величина  $\omega_\alpha$  положительна,  $\omega_\alpha > 0$  (отрицательна,  $\omega_\alpha < 0$ ), и через  $\Omega_\alpha^{(0)}$  — окрестность направления  $\partial\Omega_\alpha^{(0)}$ , где  $|\omega_\alpha| \leq |X|^{-v}$ ,  $0 < v < 1/2$ .

Собственная функция  $\Psi(X)$  равна сумме компонент  $\Phi_\alpha$ , удовлетворяющих однородным уравнениям (4.45):

$$\Psi(X) = \sum_\alpha \Phi_\alpha(X), \quad (4.64)$$

которые имеют следующую асимптотическую форму. В области  $\Omega_\alpha^{(+)}$  слагаемое  $\Phi_\alpha$  имеет вид «сферической волны»,  $\Phi_\alpha(X) \sim \hat{Q}_0(X)$ , а в области  $\Omega_\alpha^{(-)}$  — кластерных функций,  $\Phi_\alpha(X) \sim \hat{Q}_\alpha(X)$ . В переходных областях  $\Omega_\alpha^{(0)}$  координатная асимптотика  $\Phi_\alpha(X)$  описывается с помощью

функции  $\operatorname{erfc}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-\tau^2} d\tau$ :

$$\Phi_\alpha(X) \sim \hat{Q}_\alpha(X) \operatorname{erfc}(\hat{\omega}_\alpha \sqrt{\xi_\alpha}) + \hat{Q}_0(X), \quad (4.65)$$

$$\hat{\omega}_\alpha = \operatorname{sign} \omega_\alpha.$$

Поясним подробнее характер асимптотики  $\Psi(X)$  в случае, когда точка  $X$  перемещается по плоскости  $x_\alpha = t_1 c$ ,  $y_\alpha = t_2 c$ , где  $c$  — некоторый фиксированный вектор,  $c \in \mathbf{R}^3$ . Соответствующее двумерное подпространство конфигурационного пространства изображено на рис. 17.

Будем называть *фронтом асимптотики* геометрическое место точек, где постоянны показатели экспоненциальных множителей. На рис. 16 фронт изображен сплошной кривой. В области  $\Omega_\alpha^{(+)}$  слагаемое  $\Phi_\alpha$  имеет сферический фронт. Если же  $|x_\alpha| \rightarrow \infty$  и  $X \in \Omega_\alpha^{(-)}$ , то фронт плоский, причем множители амплитуды, зависящие от  $\hat{x}_\alpha$ , равны

соответствующим двухчастичным амплитудам  $f_\alpha(\hat{x}_\alpha)$  собственных функций основного состояния  $\psi_\alpha(x_\alpha)$ . При переходе через направление  $x_\alpha = 0$  плоский фронт плавно меняет ориентацию. Множитель, зависящий от  $x_\alpha$ , равен при этом собственной функции  $\psi_\alpha(x_\alpha)$ . В области  $\Omega_\alpha^{(0)}$  плоский

фронт переходит в сферический, причем изменение вида фронта описывается с помощью функций  $\text{erfc}(t)$ . Асимптотика же

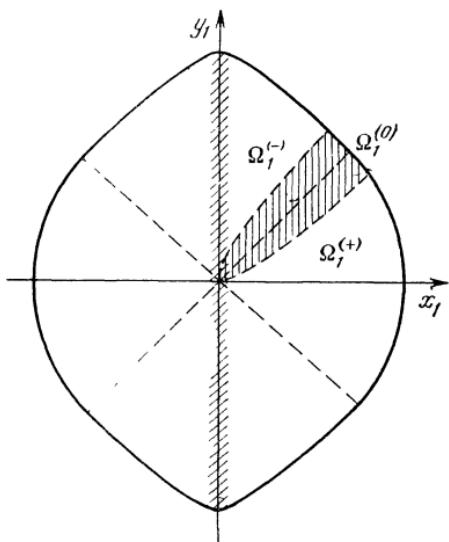


Рис. 17.

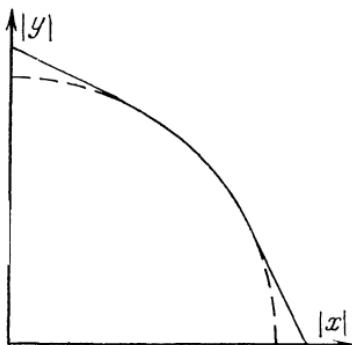


Рис. 18.

собственных функций  $\Psi(X)$  определяется старшими по порядку членами в сумме (4.64). Ее фронт изображен на рис. 18.

#### § 4. Функция Грина

В этом параграфе мы опишем свойства трехчастичной функции Грина. Эта функция может быть определена как решение дифференциального уравнения

$$\left( -\Delta_X + \sum_\alpha v_\alpha(x_\alpha) - z \right) R(X, X', z) = \delta(X - X')$$

или аналогичного уравнения по переменной  $X'$ .

С другой стороны, функция Грина может быть разделена на компоненты, которые подчиняются системе компактных уравнений (3.59). Эти уравнения наиболее подходят для изучения свойств функции Грина.

**Особенности и асимптотика.** Интегральные уравнения в конфигурационном пространстве (3.59) могут быть исследованы по такой же схеме, как и система компактных уравнений для  $T$ -матрицы (3.28). Отличие состоит лишь в том, что в импульсном представлении ядра итераций имели вид интегралов с полюсными сингулярностями, в то время как после перехода в координатное представление соответствующие особенности выражаются в медленном убывании и осцилляции ядер на бесконечности. Поэтому вместо утверждений о сингулярных интегралах основным техническим средством в этом случае является метод стационарной фазы. В эвристических целях мы проведем сравнение между двумя типами особенностей на нескольких встречающихся выше примерах.

Простейший пример соотношения между асимптотикой и сингулярностями дает формула (4.4), согласно которой полюсные особенности  $(p^2 - E - i0)^{-1}$  порождают приближенное решение уравнения Шредингера в форме сферической волны.

Самую сильную особенность в импульсном пространстве имеет ядро свободной резольвенты  $\delta(P - P')(P'^2 - z)^{-1}$ . Соответствующая функция Грина известна в явном виде:

$$R_0(X, X', z) = \frac{iz}{(4\pi)^2} \frac{H_2^{(1)}(\sqrt{z}|X - X'|)}{|X - X'|^2}. \quad (4.66)$$

Ее асимптотика определяется эйконалом  $|X - X'|$ , который можно сопоставить процессу распространения сферической волны в точку  $X$  от источника с координатой  $X'$ :

$$R_0(X, X', z) \sim C_z \frac{\exp\{i\sqrt{z}|X - X'|\}}{|X - X'|^{5/2}}, \quad (4.67)$$

$$C_z = -\frac{e^{i\pi/4} z^{3/4}}{2(2\pi)^{5/2}}.$$

Следующая по силе особенность порождается процессами однократного перерассеяния и имеет вид произведения  $\delta(p_\alpha - p'_\alpha)(k_\alpha'^2 - z)^{-1}$ . В конфигурационном пространстве эти особенности порождают медленно убывающие слагаемые. Мы детально описали такие слагаемые на примере волновых функций  $\Psi_0$ . Приведем асимптотику

аналогичных слагаемых для функции Грина:

$$(R_\alpha - R_0)(X, X', E + i0) \sim C_z \frac{|x_\alpha| + |x'_\alpha|}{|x_\alpha| |x'_\alpha|} f_\alpha \left( \hat{x}_\alpha, \frac{|x_\alpha| + |x'_\alpha|}{Z_\alpha(X, X')} \sqrt{E} \hat{x}'_\alpha \right) \times \frac{\exp \{ \pm i \sqrt{E} Z_\alpha(X, X') \}}{Z_\alpha^{3/2}}. \quad (4.68)$$

Здесь через  $Z_\alpha$  обозначен эйконал, описывающий распространение луча из точки  $X'$  в точку  $X$ , с точкой излома на гиперплоскости  $x_\alpha = 0$ :

$$Z_\alpha(X, X') = ((|x_\alpha| + |x'_\alpha|)^2 + |y_\alpha - y'_\alpha|^2)^{1/2}.$$

Эта формула может быть получена из (4.23) с помощью метода перевала.

Кроме перечисленных сингулярностей, ядро резольвенты имеет второстепенные особенности, которые зависят не только от величин, но и от направлений импульсных переменных. Мы видели в § 3, что наиболее сильные из них, полюсные, порождают асимптотические решения уравнения Шредингера, отвечающие двукратным эйконалам  $Z_{\alpha\beta}$ . Аналогичные члены имеются и в асимптотике функции Грина. Они описываются в терминах эйконалов  $Z_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_n\beta}^{(n)}(X, X')$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , отвечающих процессам распространения сферической волны из точки  $X'$  в точку  $X$  путем многократных отражений от гиперплоскостей  $x_\alpha = 0$ ,  $x_{\alpha_1} = 0, \dots, x_\beta = 0$ ,  $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_1 \neq \alpha_2, \dots, \alpha_n \neq \beta$ .

Явное выражение для  $Z_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_n\beta}^{(n)}$  может быть найдено минимизацией оптического пути

$$\begin{aligned} Z^{(n-2)}(X, X^{(1)}, X^{(2)} \dots X^{(n)}, X') = & |X - X^{(1)}| + \\ & + |X^{(1)} - X^{(2)}| + \dots + |X^{(n)} - X'| \end{aligned}$$

относительно промежуточных точек излома  $X^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), расположенных на гиперплоскостях  $x_{\alpha_n}^{(n)} = 0$ , т. е. из уравнений

$$\nabla_{X^{(n)}} \tilde{Z}^{(n-2)}(X, X^{(1)}, \dots, X^{(n)}, X') = 0, \quad x_{\alpha_n}^{(n)} = 0, \quad (4.69)$$

$$X^{(k)} = \{x_{\alpha_k}^{(k)}, y_{\alpha_k}^{(k)}\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Следует отметить, что число отражений от граней клиньев ограничено некоторой постоянной, зависящей

лишь от углов между гиперплоскостями  $x_{\alpha_k}^{(k)} = 0$ , т. е. только от соотношения между массами частиц. Например, в плоской задаче о распространении луча из точки  $X$  в точку  $X'$  посредством  $n$  отражений возможно лишь  $N_{\max} = E(\pi/\varphi)$  отражений, где  $\varphi$  — угол раствора клина и  $E(t)$  — целая часть числа. Если процесс  $n$ -кратного отражения запрещен, то уравнения (4.69) приводят к условию прохождения лучей через вершину  $X^{(k)} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). В таком случае решение (4.69) есть сумма сферических эйконалов  $Z_s(X, X') = |X| + |X'|$ . Это обстоятельство находит свое выражение в том, что ядра итераций  $R_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}$  в импульсном представлении становятся гладкими, начиная с  $n = 4$ , так что соответствующие слагаемые волновых функций имеют асимптотику типа сферических волн.

**Итерации  $R_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ .** Переидем к изучению решения системы уравнений для компонент резольвенты (3.59). Выпишем эти уравнения подробно:

$$R_{\alpha\beta}(X, X', z) = (R_\alpha - R_0)(X, X', z) - \\ - \int R_\alpha(X, X'', z) v_\alpha(x'_\alpha) \sum_{\gamma \neq \alpha} R_{\gamma\beta}(X'', X', z). \quad (4.70)$$

Рассмотрим сначала итерации

$$R_{\alpha\beta}^{(n)}(z) = \sum'_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n} R_{\alpha\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n\beta}^{(n)}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (4.70')$$

здесь операторы  $R_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}$  даются равенствами

$$R_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}(z) = \\ = (-1)^{n-1} R_\alpha(z) v_\alpha R_{\gamma_1}(z) v_{\gamma_1} \dots R_{\gamma_n}(z) v_{\gamma_n} (R_\beta(z) - R_0(z)). \quad (4.71')$$

Ядра этих операторов имеют вид многократных интегралов:

$$R_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}(X, X', z) = (-1)^{n-1} \int dX^{(1)} dX^{(2)} \dots \\ \dots dX^{(n+1)} R_\alpha(X, X^{(1)}, z) v_\alpha(x_\alpha^{(1)}) R_{\gamma_1}(X^{(1)}, X^{(2)}, z) v_{\gamma_1}(x_{\gamma_1}^{(2)}) \dots \\ \dots v_{\gamma_n}(x_{\gamma_n}^{(n+1)}) (R_\beta - R_0)(X^{(n+1)}, X', z). \quad (4.71)$$

С помощью представления (4.29) эти ядра можно записать в виде суммы:

$$\begin{aligned} Q(X, X', z) = & F(X, X', z) + \sum_{\beta} G_B(X, y'_{\beta}, z) \psi_B^*(x'_{\beta}) + \\ & + \sum_{\alpha} \psi_A(x_{\alpha}) J_A(y_{\alpha}, X', z) + \\ & + \sum_i \sum_j \psi_A(x_A) H_{AB}(y_A, y'_B, z) \psi_B^*(x'_B). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Здесь ради краткости опущены индексы  $\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta$ , нумерующие ядра, т. е.  $R_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)} \equiv Q$ . По смыслу это представление аналогично представлению (3.36) для компонент  $T$ -матрицы. Как и в импульсном пространстве, мы будем называть ядра, представимые в таком виде, ядрами типа  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ , а функции  $F$ ,  $G$ ,  $J$  и  $H$  — компонентами этих ядер. Изучим свойства этих компонент.

Мы рассмотрим сначала наиболее трудный в техническом отношении случай компонент  $F$ . Заметим, прежде всего, что асимптотика отвечающих им интегралов определяется теми частями областей интегрирования, где сосредоточены потенциалы  $v_{\gamma_i}(x_{\gamma_i})$ . В этом случае первый  $X^{(\gamma_{i-1})}$  и второй  $X^{(\gamma_i)}$  аргументы ядер  $R_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}$  расположены в различных частях конфигурационного пространства. Данное обстоятельство позволяет ограничиться детальным исследованием асимптотики лишь при специальном расположении аргументов, что делает более простой задачу исследования ядер итераций  $R_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ .

Положим сперва  $n=2$ . В соответствии со сделанным выше замечанием будем считать, что точка  $X$  лежит в области, где частицы пары  $\alpha$  сильно разделены. Согласно (4.68) ядро  $R_{\alpha\beta}^{(0)}(X, X', z)$  можно записать в виде интеграла:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}^{(0)}(X, X', z) = & \\ = & \int dX^{(1)} \frac{\exp\{i\sqrt{z}(|X - X^{(1)}| + Z_{\beta}(X^{(1)}, X'))\}}{|X - X^{(1)}|^{5/2} Z_{\beta}^{3/2}(X^{(1)}, X')} \times \\ & \times v_{\alpha}(x_{\alpha}^{(1)}) \frac{|x_{\beta}^{(1)}| + |x'_{\beta}|}{|x_{\beta}^{(1)}||x'_{\beta}|} \tilde{f}_{\alpha\beta}(X^{(1)}, X, X', z), \end{aligned} \quad (4.73)$$

где  $\tilde{f}_{\alpha\beta}$  — гладкая функция. При этом ясно, что переменная интегрирования  $X^{(1)}$  сосредоточена в области  $\Omega_{\alpha}$ , где

потенциал  $v_\alpha(x_\alpha)$  существенно отличен от нуля. Асимптотика этого интеграла определяется окрестностями точек трех типов — критической точкой  $X_0, X_0 = \{0, y_\alpha^{(0)}\}$ , которая задается уравнением  $\nabla_{y_\alpha^{(1)}}(|X - X^{(1)}| + Z_\beta(X^{(1)}, X')) = 0$ , точками  $X$  и  $X'$ , где подынтегральная функция имеет особенности, и, наконец, точками, расположенными в некоторой окрестности начала координат. В качестве последней мы возьмем шар радиуса  $R$ ,  $R = (|X| + |X'|)^v$ ,  $v < 1/2$ , с центром в начале координат.

В интеграле  $I_R$  по шару  $V_R$  отношение  $|X^{(1)}|(|X| + |X'|)^{-1}$  является малым параметром. Раскладывая функции  $|X - X^{(1)}|$  и  $Z_\beta(X^{(1)}, X')$  в ряд по этому параметру, придем к заключению, что асимптотика имеет вид произведения экспоненциально убывающих при  $|X|, |X'| \rightarrow \infty$  функций

$$I_R \sim \frac{\exp\{i\sqrt{z}(|X| + |X'|)\}}{|X|^{5/2}|X'|^{5/2}} \tilde{A}(\hat{X}, \hat{X}', z). \quad (4.74)$$

При вещественных  $z$  асимптотика  $I_R$  имеет вид произведения сферических волн по  $X$  и  $X'$ .

Интегралы, которые порождаются окрестностями точек  $X$  и  $X'$ , можно оценить интегрированием по частям относительно переменной  $\tau_1 = |X - X^{(1)}|$  или  $\tau_2 = |X^{(1)} - X'|$ . Можно показать, что эти интегралы быстро убывают и не влияют на старшие члены асимптотики ядра  $R_{\alpha\beta}^{(0)}(X, X', z)$ .

Рассмотрим, наконец, интеграл  $I_0$  по окрестности критической точки  $X^{(0)}$ . Исследуем его асимптотику при вещественных  $z = E + i0$ . Сделаем замену переменной интегрирования  $y = \lambda y_\alpha^{(1)}$ , где  $\lambda = |X| + |X'|$ . В результате запишем функцию  $I_0$  в виде интеграла с большим параметром:

$$I_0 = \int dx_\alpha^{(1)} \int dy e^{i\sqrt{E}\lambda\varphi_{\alpha\beta}(y)} v_\alpha(x_\alpha^{(1)}) \tilde{f}_{\alpha\beta}(y, x_\alpha^{(1)}, X, X', E).$$

Его асимптотика может быть найдена с помощью метода стационарной фазы. Заметим, что уравнение

$$\nabla_y \varphi_{\alpha\beta}(y) = 0, \quad (4.75)$$

определяющее критическую точку, имеет решение  $X^{(0)}$  только в том случае, когда точки  $X$  и  $X'$  можно соединить ломаной с двумя точками излома  $y_\alpha^{(0)}$  и  $y_\beta^{(1)}$  на гипер-

плоскостях  $x_\alpha = 0$  и  $x_\beta = 0$ . Показатель экспоненты  $\lambda \varphi_{\alpha\beta}(y)$  равен при этом эйконалу  $Z_{\alpha\beta}(X, X')$ .

Явный вид асимптотики может быть найден с помощью формулы (4.115) из § 6. Приведем окончательный результат, который получается с помощью тождественного преобразования этой формулы. Справедливо следующее представление через двухчастичные амплитуды расстояния:

$$I_0 \sim C_E \frac{A_{\alpha\beta}(X, X')}{|x_\alpha| |x'_\beta|} f_\alpha(\hat{x}_\alpha, k_\alpha) f_\beta(\hat{k}_\beta, |k_\beta| \hat{x}'_\beta) \frac{\exp\{i\sqrt{E} Z_{\alpha\beta}\}}{Z_{\alpha\beta}^{5/2}}. \quad (4.76)$$

Здесь использованы обозначения  $C_E = -e^{i\pi/4} (2\pi)^{-5/2} \times 2^{-1} E^{3/4}$ ,

$$k_\alpha = -s_{\alpha\beta} \frac{|x_\alpha|}{Z_\alpha(X, X^0)} y_\alpha^{(0)}, \quad k_\beta = -s_{\beta\alpha} \frac{|x'_\beta|}{Z_\beta(X^{(1)}, X')} y_\beta^{(1)},$$

$$X^{(1)} = \{0, y_\beta^{(1)}\}.$$

Функция  $A_{\alpha\beta}(X, X')$  является гладкой и ограниченной:

$$A_{\alpha\beta}(X, X') = \frac{(1 + \sigma_\alpha)(1 + \sigma_\beta)(1 - c_{\alpha\beta}^2 \sigma_\alpha \bar{\sigma}_\beta)^{1/2}}{\left( (1 - c_{\alpha\beta}^2 \sigma_\alpha \sigma_\beta)^2 + c_{\alpha\beta}^2 s_\alpha^4 \sigma_\alpha^3 \sigma_\beta^3 \frac{|y_\alpha, y'_\beta|}{x_\alpha^2 x_\beta'^2} \right)^{1/2}},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{Z_\alpha(X, X_0^{(\alpha)})}{Z_\beta(X_0^{(\alpha)}, X')}, \quad \sigma_\beta = \frac{Z_\beta(X', X^{(1)})}{Z_\alpha(X^{(1)}, X)}.$$

Множество точек  $\{X, X'\}$ , для которых справедлива формула (4.76), мы будем обозначать через  $\Omega_{\alpha\beta}^{(-)}$ . В этих частях конфигурационного пространства функция  $I_0$  убывает медленнее произведения сферических волн (4.74).

Если уравнение (4.75) имеет решение лишь при  $y = 0$ , так что указанный процесс двукратного преломления невозможен, то асимптотика интеграла  $I_0$  имеет факторизованный вид (4.74). Соответствующее множество точек  $\{X, X'\}$  мы обозначим через  $\Omega_{\alpha\beta}^{(+)}$ .

В переходной области асимптотика интеграла  $I_0$  описывается с помощью интеграла Френеля аналогично тому, как это было для волновых функций. В данном случае правую часть формулы (4.76) следует умножить на функцию

$$\pi^{-1/2} e^{i\pi/4} \Phi(\hat{\omega}_\alpha^{(\pm)} E^{1/4} (Z_s(X, X') - Z_{\alpha\beta}(X, X'))^{1/2}),$$

где параметр  $\hat{\omega}_{\alpha\beta}^{(\pm)}$  принимает значения 1, когда точки  $\{X, X'\}$  лежат в  $\Omega_{\alpha\beta}^{(+)}$  и  $-1$ , когда они находятся в  $\Omega_{\alpha\beta}^{(-)}$ .

Аналогично можно оценить интеграл  $I_0$  и в случае комплексных  $z$ . При этом осциллирующие множители перейдут в экспоненциально убывающие.

Таким образом, мы рассмотрели компоненту  $F$  и показали, что при комплексных  $z$  это ядро убывает, как произвольная степень  $|Z_s(X, X')|^{-n}$ . Если же переменная  $z$  выходит на вещественную ось, то оно становится медленно убывающим. Его старшие асимптотические члены определяются суммой функций (4.74) и (4.76).

Точно так же могут быть рассмотрены интегралы, отвечающие компонентам  $G$ ,  $J$  и  $H$ . При этом под знаком интеграла типа (4.73) появляются произведения  $\psi_\alpha(x_\alpha^{(1)})\psi_\beta(x_\beta^{(1)})$  или  $v_\alpha(x_\alpha^{(1)})\psi_\beta(x_\beta^{(1)})$ , которые быстро убывают во всех направлениях конфигурационного пространства. Поэтому асимптотика таких интегралов будет определяться лишь областью интегрирования; расположенной в окрестности начала координат.

В результате можно показать, что при вещественных  $z$  компоненты  $G(X, y'_B; z)$  и  $J(y_A, X', z)$  асимптотически имеют вид произведения кластерных и шестимерных сферических волн по соответствующим переменным, например:  $G(X, y'_B, E + i0) \sim |X|^{-5/2}|y'_B|^{-1} \exp\{i\sqrt{E}|X| + i\sqrt{E + \kappa_B^2}|y'_B|\} \tilde{g}$ . Асимптотика компонент  $H(y_A, y_B, E + i0)$  задается произведением кластерных сферических волн

$$\begin{aligned} H(y_A, y'_B, E + i0) &\sim \\ &\sim \exp\left\{i\sqrt{E + \kappa_A^2}|y_A| + i\sqrt{E + \kappa_B^2}|y'_B|\right\} |y_A|^{-1} \times \\ &\quad \times |y'_B|^{-1} \tilde{h}(\hat{y}_A, \hat{y}'_B, E). \end{aligned}$$

При комплексных  $z$  все эти компоненты быстро убывают.

Коротко опишем поведение ядер  $R_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}(z)$  при  $n \geq 1$ . Рассмотрим ядра  $R_{\alpha\gamma_1\beta}^{(1)}(z)$ , отвечающие итерациям второго порядка. Они выражаются через ядра  $R_{\gamma_1\beta}^{(0)}(z)$  равенством

$$\begin{aligned} R_{\alpha\gamma_1\beta}^{(1)}(X, X', z) &= \\ &= \int R_\alpha(X, X'', z) v_\alpha(x''_\alpha) \cdot R_{\gamma_1\beta}^{(0)}(X'', X', z) dX''. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что эти ядра являются ядрами типа  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ . Зная свойства ядер  $R_\alpha$  и  $R_{\gamma_1\beta}^{(0)}$ , мы можем изучить асимптотику компонент на основе рассуждений, которые мы провели в случае ядер  $R_{\alpha\beta}^{(0)}$ .

Можно показать, что асимптотика компонент  $G$ ,  $J$  и  $H$  имеет такой же вид, как и асимптотика аналогичных компонент ядер  $R_{\alpha\beta}^{(0)}$ . Асимптотика компонент  $F(X, X', z)$  этих ядер, как и в случае ядер  $R_{\alpha\beta}^{(0)}(X, X', z)$ , порождается окрестностями перечисленных ранее характеристических точек. При этом самыми опасными будут члены, которые возникают от критической точки экспоненты, где выполняется равенство

$$\nabla_{v''_\alpha}(|X - X''| + Z_{\gamma_1\beta}(X'', X'))|_{x''_\alpha=0} = 0.$$

Эти члены в ряде особых направлений конфигурационного пространства убывают медленнее произведения сферических волн (4.74).

Таким же способом можно рассмотреть и ядра  $\hat{R}_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n\beta}^{(n)}$  более высокого порядка. Можно показать, что эти ядра являются ядрами типа  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ , причем, начиная с  $n=4$ , асимптотика компонент типа  $F$  стабилизируется и уже не содержит членов, убывающих при вещественных  $z$  медленнее произведения сферических волн. При вещественных  $z=E+i0$  и фиксированном  $\beta$  ядра  $R_{\alpha\beta}^{(n)}$  представляют собой компоненты функций класса  $B_E$ , зависящие от  $X$ . При этом асимптотические представления (4.25), (4.29) равномерны относительно  $X'$ . Ядра, обладающие такими свойствами, мы будем называть ядрами класса  $\tilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta}$ .

**Компактные уравнения.** После того, как мы исследовали поведение ядер итераций  $R_{\alpha\beta}^{(n)}(X, X', z)$ , можно перейти к доказательству компактности интегральных уравнений (4.70).

Формальная процедура сведения последних к компактным уравнениям в подходящем функциональном пространстве полностью аналогична процедуре, использованной в случае интегральных уравнений для  $T$ -матрицы (3.28). Именно, в соответствии со структурой ядер итераций, мы должны рассмотреть множество непрерывных вектор-функций (4.27) с заданным убыванием компонент

на бесконечности:

$$\rho_\alpha(X) \sim (1 + |X|)^{-5/2+v}, \quad \sigma_A(y_A) \sim (1 + |y_A|)^{-1+v}, \\ v > 0. \quad (4.77')$$

При этом совокупность компонент  $\omega_\beta(X, X', z) = \{F_{\alpha\beta}(X, X', z), J_{\alpha\beta}(y_A, X', z)\}$  и  $\omega_B(X, y'_B, z) = \{G_{\alpha\beta}(X, y'_B, z), H_{AB}(y_A, y'_B, z)\}$  можно рассматривать как элементы такого класса. Компактные интегральные уравнения второго рода получаются из (4.70), если разбить ядра  $R_{\alpha\beta}$  и  $R_\alpha$  на компоненты (4.71) и (4.29) и приравнять соответствующие слагаемые в левой и правой частях. Этим уравнениям отвечает следующий оператор:  $\omega' = A\omega$  означает, что

$$\sigma'_A(y_A) = -\frac{1}{4\pi} \int dX' \frac{\exp \{i \sqrt{z + \kappa_A^2} |y_A - y'_A|\}}{|y_A - y'_A|} \times \\ \times \psi_A^*(x'_A) v_A(x'_A) \sum_{\beta \neq \alpha} \Phi_\beta(X'), \quad (4.77)$$

$$\rho'_\alpha(X) = - \int dX' \widetilde{R}_\alpha(X, X', z) v_\alpha(x'_\alpha) \sum_{\beta \neq \alpha} \Phi_\beta(X').$$

Здесь через  $\widetilde{R}_\alpha(X, X', z)$  обозначена инвариантная часть функции Грина (4.23), действующая в подпространстве  $\mathfrak{H}_\alpha^{(c)} = (I - \sum_j P_A) \mathfrak{H}$ . Функции  $\Phi_\alpha(X)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , выражаются в терминах компонент  $\rho_\alpha$  и  $\sigma_A$  равенствами

$$\Phi_\alpha(X) = \rho_\alpha(X) + \sum_j \psi_A(x_\alpha) \sigma_A(y_\alpha).$$

При этом из оценок, которые мы привели выше, следует, что оператор  $A(z)$  переводит множество функций с асимптотикой (4.77') в класс  $\Phi_e(X')$ .

Опираясь на эти результаты, можно показать, что достаточно высокая степень оператора, определяемого этим уравнением, является вполне непрерывным оператором. При этом особые точки, где однородное уравнение (4.77) имеет нетривиальное решение, совпадают с точками дискретного спектра оператора  $H$ . Мы не будем повторять здесь уже знакомые по главе III рассуждения, которые нужно провести для доказательства этих утверждений.

Перечислим основные свойства функции Грина, которые вытекают из результатов, полученных выше.

Функция Грипа симметрична по отношению к перестановке аргументов,  $R(X, X', z) = \overline{R(X', X, \bar{z})}$ .

Справедливо представление

$$R(z) = R_0(z) + \sum_{\alpha} (R_{\alpha}(z) - R_0(z)) + \\ + \sum_{n=0}^4 \sum_{\alpha, \beta} R_{\alpha\beta}^{(n)}(z) + \sum_{\alpha, \beta} \tilde{R}_{\alpha\beta}^{(4)}(z), \quad (4.78)$$

где ядра операторов  $\tilde{R}_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$  в конфигурационном пространстве являются ядрами класса  $\tilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta}$ . Асимптотическое поведение остальных слагаемых мы описали выше.

При  $X \neq X'$  функция Грина  $R(X, X', z)$  является гладкой функцией  $X$  и  $X'$  и имеет конечные пределы, когда переменная  $z$  принимает вещественные значения, не совпадающие с особыми точками интегральных уравнений.

Приведем, наконец, асимптотическую формулу

$$R(X, X', E \pm i0) \underset{|X'| \rightarrow \infty}{\sim} C_E \Psi_0(X, P) \frac{\exp\{i\sqrt{E}|X|\}}{|X|^{5/2}} + \\ + \sum_{A \neq 0} \frac{1}{4\pi} \Psi_A(X, p_A) \frac{\exp\{i\sqrt{E+\kappa_A^2}|y_A|\}}{|y_A|} \Psi_A(x_A), \quad (4.79)$$

которая устанавливает явное соотношение между функцией Грина и волновыми функциями. Эта формула, аналогично (4.21), может быть использована для альтернативного определения волновых функций, независимого от сформулированных выше граничных задач. Аналогичное соотношение имеет место между компонентами функции Грина  $R_{\alpha\beta}$  и компонентами  $\Phi_{\alpha\beta}$  волновых функций.

## § 5. Дифференциальные уравнения для компонент волновых функций в системе $N$ тел

В этом параграфе мы опишем дифференциальные уравнения для компонент функции Грина и волновых функций в системе  $N$  тел. Эти уравнения эквивалентны компактным интегральным уравнениям и могут быть использованы для альтернативной формулировки задачи рассеяния. Мы проведем детальный вывод дифференциальных уравнений на примере системы четырех тел. В общем случае мы только опишем основные результаты и наметим схему их доказательства.

**Формальный вывод дифференциальных уравнений в системе трех и четырех частиц.** Опишем сначала схему формального вывода дифференциальных уравнений для компонент на примере системы трех тел. Разобьем волновую функцию  $\Psi(X)$  на три компоненты, которые отвечают возможным асимптотическим состояниям системы:

$$\Phi_\alpha = -R_0(E + i0)V_\alpha\Psi. \quad (4.80)$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор  $H_0 - E$ , получим его дифференциальный аналог:

$$(H_0 - E)\Phi_\alpha = -V_\alpha\Psi.$$

Выразим затем волновую функцию через компоненты:  $\Psi = \sum_\alpha \Phi_\alpha$ . Перенося диагональный член с  $\beta = \alpha$  в левую часть равенства, придем к искомым уравнениям:

$$(H_0 + V_\alpha - E)\Phi_\alpha = -V_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \Phi_\beta. \quad (4.81)$$

Таким образом, мы непосредственно перешли от уравнения Шредингера к дифференциальным уравнениям для компонент, избежав анализа громоздких интегральных уравнений. Конечно, чтобы строго обосновать эти уравнения и доказать, что их решения совпадают с решениями компактных уравнений, необходимо повторить длинные рассуждения, которые мы провели в § 2. Тем не менее мы видим, что алгебраическая часть задачи предельно проста и базируется лишь на определении компонент и их связи с волновой функцией.

Аналогичная процедура может быть использована и для вывода дифференциальных уравнений в системе четырех тел. Именно, рассмотрим  $a_3$ -компоненты волновых функций

$$\Phi_{a_3} = -R_0(E + i0)V_{a_3}\Psi. \quad (4.82)$$

Как и в системе трех тел, волновая функция равна их сумме:

$$\Psi = \sum_{a_3} \Phi_{a_3},$$

а сами компоненты подчиняются уравнениям

$$(H_0 + V_{a_3} - E)\Phi_{a_3} = -V_{a_3} \sum_{b_3 \neq a_3} \Phi_{b_3}. \quad (4.83)$$

С помощью этих компонент построим  $A_2$ -компоненты по формулам

$$\Phi_{a_3 a_2} = -R_{a_3}(E + i0) V_{a_3} \sum_{(b_3 \neq a_3) \subset a_2} \Phi_{b_3}. \quad (4.84)$$

При этом обратное соотношение имеет вид

$$\Phi_{a_3} = \sum_{a_2 \supset a_3} \Phi_{a_3 a_2}.$$

Применяя оператор  $H_{a_3} - E$  к обеим частям равенства (4.84), получим соотношение

$$(H_0 + V_{a_3} - E) \Phi_{a_3 a_2} = -V_{a_3} \sum_{(b_3 \neq a_3) \subset a_3} \Phi_{b_3}.$$

Выразим далее  $b_3$ -компоненты в правой части через  $B_2$ -компоненты  $\Phi_{b_3 b_2}$  и перенесем член с  $b_2 = a_2$  в левую часть. Получим следующую систему дифференциальных уравнений для  $A_2$ -компонент:

$$\begin{aligned} (H_0 + V_{a_3} - E) \Phi_{a_3 a_2} + V_{a_3} \sum_{(b_3 \neq a_3) \subset a_2} \Phi_{b_3 a_2} &= \\ = -V_{a_3} \sum_{b_2 \neq a_2} \sum_{(b_3 \neq a_3) \subset a_2} \Phi_{b_3 b_2}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Эта система представляет искомое обобщение уравнений (4.83) на случай задачи четырех тел. Чтобы однозначно определить компоненты волновых функций, мы должны еще задать асимптотические граничные условия. Последние мы опишем в конце параграфа.

Выпишем подробно уравнения (4.85) в случае четырех тождественных частиц. Обозначим через  $a_2$  трехчастичное разбиение (123)(4) и через  $b_2$  — двухчастичное разбиение (12)(34). Через  $a_3$  и  $b_3$  будем обозначать разбиения на три кластера, следующие за  $a_2$  и  $b_2$  соответственно и отвечающие паре (12):  $a_3 = (12)(3)(4)$ ,  $b_3 = (12)(3)(4)$ . Так как все частицы предполагаются одинаковыми, то система из 16 уравнений оказывается эквивалентной двум зацепленным уравнениям для компонент  $\Phi_{a_2 a_3}$  и  $\Phi_{b_2 b_3}$ , которые, однако, зависят от коорди-

нат Якоби различного типа:

$$\begin{aligned}
 & (-\Delta_x + v(x_{12}) - E) \Phi_{A_2}(x_{12}, y_3^{(12)}, y_4) + \\
 & + v(x_{12})(\Phi_{A_2}(x_{23}, y_1^{(23)}, y_4) + \Phi_{A_2}(x_{31}, y_2^{(31)}, y_4)) = \\
 & = -v(x_{12})(\Phi_{A_2}(x_{23}, y_4^{(23)}, y_1) + \Phi_{A_2}(x_{13}, y_4^{(13)}, y_2) + \\
 & + \Phi_{B_2}(x_{23}, x_{14}, y_{14}) + \Phi_{B_2}(x_{13}, x_{24}, y_{13})); \quad (4.86) \\
 & (-\Delta + v(x_{12}) - E) \Phi_{B_2}(x_{12}, x_{34}, y_{12}) + \\
 & + V(x_{12}) \Phi_{B_2}(x_{34}, x_{12}, y_{12}) = \\
 & = -v(x_{12})(\Phi_{A_2}(x_{34}, y_1^{(34)}, y_2) + \Phi_{A_2}(x_{34}, y_2^{(34)}, y_1)).
 \end{aligned}$$

В каждом слагаемом из правой части используются якобиевы координаты, отвечающие цепочкам разбиений, по которым ведется суммирование в (4.85). При этом мы использовали следующие сокращенные обозначения:

$$y_4 = y_{123,4}, \quad y_3^{(12)} = y_{12,3}, \quad y_{12} = y_{12,34},$$

и аналогично для других индексов.

Следующая задача состоит в том, чтобы установить соотношение между этими уравнениями и компактными интегральными уравнениями для волновых функций. Чтобы решить эту задачу, мы рассмотрим дифференциальные уравнения для компонент резольвенты.

**Дифференциальные уравнения для компонент резольвенты в системе четырех тел.** Пусть  $R(z)$  — резольвента оператора энергии системы четырех тел. Аналогично (5.37), определим  $a_3$ -компоненты резольвенты равенствами

$$R_{a_3 b_3}(z) = -R_0(z) M_{a_3 b_3}(z) R_0(z), \quad (4.87)$$

где компоненты  $T$ -матрицы  $M_{a_3 b_3}(z)$  выражаются через  $R(z)$  соотношениями (3.83) при  $N=4$ . При этом для резольвенты справедливо представление

$$R(z) = R_0(z) + \sum_{a_3 b_3} R_{a_3 b_3}(z).$$

Введем далее  $A_2$ -компоненты  $R_{A_2 B_2}$ , отвечающие цепочкам разбиений, по формулам

$$R_{A_2 B_2} = -R_{a_3} V_{a_3} R_0 \delta_{a_3 b_3} \delta_{a_2 b_2} - R_{a_3} V_{a_3} \sum_{(d_3 \neq a_3) \subset a_2} R_{d_3 b_3}. \quad (4.88)$$

Эти компоненты связаны с определенными выше компонентами  $T$ -матрицы  $M_{A_2 B_2}$  равенствами

$$R_{A_2 B_2} = - R_0 M_{A_2 B_2} R_0.$$

Заметим, далее, что из правила сумм (3.101) следует обратное к (4.88) соотношение

$$R_{a_3 b_3} = \sum_{a_2} R_{a_3 a_2, b_3 b_2}$$

при любом  $b_2$ . Отсюда находим для  $R(z)$  представление

$$R(z) = R_0(z) + \sum_{a_2} \sum_{a_3, b_3} R_{a_3 a_2, b_3 b_2}(z),$$

где при суммировании по  $b_3$  должны выбираться разбиения  $b_2$ , удовлетворяющие условию  $b_2 \supset b_3$ .

Перейдем к выводу дифференциальных уравнений для компонент  $R_{A_2 B_2}(z)$ . С этой целью, как и в случае волновых функций, заменим  $a_3$ -компоненты  $R_{d_3 b_3}$  в правой части (4.88) на соответствующие выражения через  $A_2$ -компоненты  $R_{A_2 B_2}$ . Затем применим к полученным уравнениям слева оператор  $H_0 + V_{a_3} - z$  и перенесем в левую часть диагональные члены с  $d_2 = a_2$ . В результате для ядер операторов  $R_{A_2 B_2}$  в конфигурационном пространстве, называемых  $A_2$ -компонентами функций Грина, получим следующую систему дифференциальных уравнений, аналогичную (4.85):

$$\begin{aligned} & (-\Delta_X + v_{a_3}(x_{a_3}) - z) R_{A_2 B_2}(X, X', z) + \\ & + v_{a_3}(x_{a_3}) \sum_{(c_3 \neq a_3) \subset a_2} R_{c_3 a_2, B_2}(X, X', z) = \\ & = -v_{a_3}(x_{a_3}) R_0(X, X', z) \delta_{a_3 b_3} \delta_{a_2 b_2} - \\ & - v_{a_3}(x_{a_3}) \sum_{d_2 \neq a_2} \sum_{(d_3 \neq a_3) \subset a_2} R_{d_3 d_2, B_2}(X, X', z). \quad (4.89) \end{aligned}$$

Покажем теперь, что эти уравнения формально эквивалентны системе компактных интегральных уравнений (3.103).

Пусть  $R_{A_2 B_2}(X, X', z)$  — гладкое при  $X \neq X'$  решение (4.89). Применяя к (4.89) оператор  $R_{a_3}(z)$  и, пользуясь соотношением  $R_{a_3} V_{a_3} = R_0 T_{a_3}$ , перепишем эту си-

стему в виде

$$\begin{aligned} R_{A_2 B_2} + R_0 T_{a_3} \sum_{(c_3 \neq a_3) \subset a_2} R_{c_3 a_2 B_2} = \\ = -R_0 T_{a_3} R_0 \delta_{a_3 b_3} \delta_{a_2 b_2} - R_0 T_{a_3} \sum_{d_2 \neq a_2} \sum_{(d_3 \neq a_3) \subset a_2} R_{d_3 d_2, B_2}, \end{aligned} \quad (4.90)$$

Заметим, далее, что матричный интегральный оператор, порожденный левой частью этой системы, имеет блочную структуру, соответствующую двухкластерным разбиениям  $a_2$ . Мы встречались с подобным оператором при выводе интегральных уравнений. Для обращения этого оператора, как и выше, рассмотрим вырожденные задачи четырех частиц, отвечающие разбиениям  $a_2$ . Соответствующие компоненты  $T$ -матрицы, определяемые формулой (3.97) при  $k = 2$  и  $N = 4$ , подчиняются системе компактных уравнений

$$M_{a_3 c_3}^{(a_2)} + T_{a_3} R_0 \sum_{(d_3 \neq a_3) \subset a_2} M_{d_3 c_3}^{(a_2)} = T_{a_3} \delta_{a_3 c_3}. \quad (4.91)$$

Сравнивая левые части систем (4.91) и (4.90), замечаем, что матричный интегральный оператор, отвечающий каждому блоку в (4.90), с точностью до множителя  $R_0$  совпадает с оператором в левой части (4.91) при соответствующем  $a_2$ . Поэтому обращение левой части (4.90), как и при выводе интегральных уравнений (3.103), может быть произведено в терминах операторов  $M_{a_3 c_3}^{(a_2)}$ . В результате этого обращения приходим к системе интегральных уравнений для компонент  $R_{A_2 B_2}$ :

$$R_{A_2 B_2} = R_{a_3 b_3}^{(a_2)} \delta_{a_2 b_2} - R_0 \sum_{\substack{d_2 \neq a_2 \\ (d_3 \neq c_3) \subset a_2}} M_{a_3 c_3}^{(a_2)} R_{d_3 d_2, B_2}, \quad (4.92)$$

где  $R_{a_3 b_3}^{(a_2)} = -R_0 M_{a_3 b_3}^{(a_2)} R_0$ . Тем самым показано, что решение системы дифференциальных уравнений (4.89) удовлетворяет и интегральным уравнениям (4.92), эквивалентным системе (3.103).

Верно и обратное. Именно, пусть  $R_{A_2 B_2}$  — решение системы интегральных уравнений (4.92). В силу обратимости преобразований от (4.90) к (4.92), компоненты  $R_{A_2 B_2}$  удовлетворяют и уравнениям (4.90). Дифференци-

руя последние, устанавливаем, что решения компактных интегральных уравнений удовлетворяют и дифференциальным уравнениям (4.89).

Дифференциальные уравнения для  $A_2$ -компонент волновой функции могут быть получены обычным путем из дифференциальных уравнений (4.90) для компонент резольвенты. Напомним, что волновая функция  $\Psi_A^{(\pm)}$ , отвечающая каналу  $A$ , определяется соотношением (2.3). В соответствии с этим равенством введем компоненты волновой функции по формулам

$$\Phi_{B_2 A}^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mp i\varepsilon \sum_{c_3} R_{B_2 c_2} (E_A \pm i\varepsilon) L_A (E_A). \quad (4.93)$$

При этом для волновой функции  $\Psi_A^{(\pm)}$  справедливо представление

$$\Psi_A^{(\pm)}(X, p_A) = e^{i(P, X)\delta_{k4}} + \sum_{B_2} \Phi_{B_2 A}^{(\pm)}(X, p_A).$$

Случай  $k = 4$ , когда в правой части появляется плоская волна  $e^{i(P, X)}$ , отвечает четырем свободным частицам в начальном состоянии. Компактные уравнения в дифференциальной форме для компонент  $\Phi_{B_2 A}$  получаются из (4.89) с учетом этого определения:

$$\begin{aligned} & (-\Delta_X + v_{b_3}(x_{b_3}) - E_A) \Phi_{AB_2}(X, p_A) + \\ & + v_{b_3}(x_{b_3}) \sum_{(c_3 \neq b_3) \subset b_2} \Phi_{c_3 b_2, A}(X, p_A) = \\ & = -v_{b_3}(x_{b_3}) e^{i(X, P)\delta_{k4}} \delta_{b_2 b_2'} - v_{b_3}(x_{b_3}) \sum_{\substack{d_2 \neq b_2 \\ (d_3 \neq b_3) \subset b_2}} \Phi_{D_2, A}(X, p_A). \end{aligned} \quad (4.94)$$

Здесь  $E_A = p_A^2 - \kappa_A^2$ ,  $b_2'$  — любое разбиение, удовлетворяющее условию  $b_2' \supset b_2$ . Отметим, что суммирование этих уравнений по всем  $B_2$  приводит к уравнению Шредингера для функций  $\Phi_A(X, p_A) = \Psi_A(X, p_A) - \delta_{k4} \exp\{i(X, P)\}$ :

$$(-\Delta_X + V(X) - E) \Phi_A(X, p_A) = -V(X) \delta_{k4} e^{i(X, P)}.$$

Полученные уравнения при  $k = 4$  неоднородны. Будем обозначать компоненты волновой функции в этом случае через  $\Phi_{B_2}^{(b)}$ . Чтобы получить однородные дифференциаль-

ные уравнения, введем новые компоненты по формулам

$$\Phi_{B_2,0}(X, P) = \Phi_{B_2}^{(0)}(X, P) - e^{i(X, P)} \left( \sum_{(c_3 \neq b_3) \subset b_2} \delta_{c_3 f_3} - \delta_{b_2 b'_2} \right),$$

где  $f_3$  — любое разбиение на три подсистемы, а разбиение  $b_2$  выбирается тем же, что и в (4.94). Подставляя это равенство в уравнения (4.94), устанавливаем, что введенные компоненты  $\Phi_{B_2,0}$  удовлетворяют однородной системе дифференциальных уравнений (4.85). Полная волновая функция  $\Psi_0$  получается из компонент  $\Phi_{B_2,0}$  суммированием по всем цепочкам:

$$\Psi_0(X, P) = \sum_{B_2} \Phi_{B_2,0}(X, P).$$

Можно показать, наконец, что данные компоненты совпадают с компонентами, определенными равенствами (4.84).

Перейдем к выводу дифференциальных уравнений в системе  $N$  тел.

**Дифференциальные уравнения для компонент в системе  $N$  тел.** Пусть  $R_{a_{N-1} b_{N-1}}$  — компоненты резольвенты задачи  $N$  тел, построенные с помощью формул (4.87), где значки  $a_3$  и  $b_3$  следует заменить на  $a_{N-1}$  и  $b_{N-1}$  соответственно. Определим  $A_k$ -компоненты резольвенты  $R_{A_k B_k}$ ,  $2 \leq k < N - 1$ , рекуррентными формулами

$$R_{A_k B_k} = R_{A_{k+2} B_{k+2}}^{(a_{k+1})} \delta_{a_{k+1} b_{k+1}} \delta_{a_k b_k} - \sum_{\substack{d_{k+1} \neq a_{k+1} \\ d_{k+1} \subset a_k}} \sum_{(D_{k+2} \neq c_{k+2}) \subset a_{k+1}} R_0 M_{A_{k+2} C_{k+2}}^{(a_{k+1})} R_{D_{k+1} B_{k+1}}, \quad (4.95)$$

где  $R_{A_{k+2} B_{k+2}}^{(a_{k+1})} = -R_0 M_{A_{k+2} B_{k+2}}^{(a_{k+1})} R_0$ . Операторы  $M_{A_{k+2} B_{k+2}}^{(a_{k+1})}$  определяются равенствами (3.98). Используя правило сумм (3.101), получаем обратное к этим формулам соотношение

$$R_{A_{k+1} B_{k+1}} = \sum_{a_k} R_{A_k B_k} \text{ при любом } b_k. \quad (4.96)$$

Согласно (3.103) операторы  $R_{A_k B_k}$  удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$R_{A_k B_k} = R_{A_{k+1} B_{k+1}}^{(a_k)} \delta_{a_k b_k} - \sum_{d_k \neq a_k} \sum_{(D_{k+1} \neq c_{k+1}) \subset a_k} R_0 M_{A_{k+1} C_{k+1}}^{(a_k)} R_{d_k D_{k+1} B_k}.$$

Покажем, что компоненты  $R_{A_k B_k}$  подчиняются также и дифференциальным уравнениям. С этой целью докажем следующее утверждение.

*Ядра операторов  $R_{A_k B_k}$  в конфигурационном пространстве при любом  $k$ ,  $2 \leq k \leq N-1$ , удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} & (-\Delta_X + v_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}}) - z) R_{A_k B_k}(X, X', z) + \\ & + v_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}}) \sum''_{(C_{k+1} \neq A_{k+1}) \subset a_k} R_{a_k C_{k+1} B_k}(X, X', z) = \\ & = -v_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}}) R_0(X, X', z) \delta_{a_k b_k} \dots \delta_{a_{N-1} b_{N-1}} - \\ & - v_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}}) \sum'_{\substack{d_k \neq a_k \\ (A_{k+1} \neq D_{k+1}) \subset a_k}} R_{d_k D_{k+1} B_k}(X, X', z), \quad (4.97) \end{aligned}$$

где

$$\sum''_{(C_{k+1} \neq A_{k+1}) \subset a_k} R_{a_k C_{k+1} B_k} = \sum_{i=k+1}^{N-1} \sum_{(C_i \neq A_i) \subset a_{i+1}} R_{a_k a_{k+1} \dots a_{i-1} C_i, B_k}.$$

На первом этапе доказательства заметим, что при  $k = N-1$  и  $k = N-2$  утверждение справедливо, так как в этих случаях (4.97) совпадает с системой дифференциальных уравнений для  $a_{N-1}$ -компонент (4.83) и с системой (4.89), описанной выше, соответственно.

На следующем этапе покажем, что это утверждение выполнено и при  $k = N-3$ . Заметим, что компоненты  $R_{A_{N-3} B_{N-3}}$ , в силу формул (4.95) и (4.96), подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} R_{A_{N-3} B_{N-3}} &= R_{a_{N-1} b_{N-1}}^{(a_{N-2})} \delta_{a_{N-3} b_{N-3}} \dots \delta_{a_{N-2} b_{N-2}} - \\ &- \sum_{(d_{N-2} \neq a_{N-2}) \subset a_{N-3}} \sum_{(d_{N-1} \neq c_{N-1}) \subset a_{N-2}} \sum_{d_{N-2}} R_0 M_a^{(a_{N-2})}_{N-1 c_{N-1}} \times \\ &\times R_{d_{N-3} d_{N-2}, B_{N-3}}. \quad (4.98) \end{aligned}$$

Чтобы получить дифференциальные уравнения (4.97), воспользуемся тем обстоятельством, что компоненты  $R_{a_{N-1} b_{N-1}}^{(a_{N-2})}$  удовлетворяют также системе дифференциаль-

ных уравнений

$$(-\Delta + v_{a_{N-1}} - z) R_{a_{N-1} b_{N-1}}^{(a_{N-2})} + \\ + v_{a_{N-1}} \sum_{(c_{N-1} \neq a_{N-1})} R_{c_{N-1} b_{N-1}}^{(a_{N-2})} = -v_{a_{N-1}} R_0 \delta_{a_{N-1} b_{N-1}}, \quad (4.99)$$

где для сокращения записи опущены аргументы у функций  $v_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}})$  и  $R_{a_{N-1} b_{N-1}}^{(a_{N-2})}(X, X', z)$ . Очевидно, что ядра операторов  $R_0(z) M_{a_{N-1} c_{N-1}}^{(a_{N-2})}(z)$  также подчиняются системе (4.99), в которой свободный член следует заменить на  $V_{a_{N-1}} \delta_{a_{N-1} b_{N-1}}$ . Заметим теперь, что матричный интегральный оператор в правой части (4.98) имеет блочную структуру, отвечающую разбиениям  $a_{N-2}$ , и применим к уравнениям (4.98) при фиксированном  $a_{N-2}$  дифференциальный оператор, порожденный левой частью (4.99) при соответствующем  $a_{N-2}$ . Вычисляя результат в правой части системы (4.98) с помощью (4.99), получаем следующую систему дифференциальных уравнений для  $R_{A_{N-3} B_{N-3}}$ :

$$-(\Delta + v_{a_{N-1}} - z) R_{A_{N-3} B_{N-3}} + \\ + v_{a_{N-1}} \sum_{(c_{N-1} \neq a_{N-1}) \subset a_{N-2}} R_{a_{N-3} a_{N-2} c_{N-1}, B_{N-3}} = \\ = -v_{a_{N-1}} R_0 \delta_{a_{N-3} b_{N-3}} \delta_{a_{N-2} b_{N-2}} \delta_{a_{N-1} b_{N-1}} - \\ - v_{a_{N-1}} \sum_{d_3} \sum'_{(D_{N-2} \neq A_{N-2}) \subset a_{N-3}} R_{d_{N-3} D_{N-2} B_{N-3}}.$$

Перенося в левую часть слагаемое с  $d_{N-3} = a_{N-3}$ , приходим к дифференциальным уравнениям (4.97) для  $R_{A_{N-3} B_{N-3}}$ .

Продолжая и далее описанную процедуру вывода уравнений, убеждаемся в справедливости (4.97) при всех  $k$ .

Итак, мы описали семейство дифференциальных уравнений, которым подчиняются  $A_k$ -компоненты резольвенты разного типа. Система уравнений (4.97) при  $k=2$  и является обобщением компактных уравнений в дифференциальной форме на случай  $N$  частиц.

Коротко опишем дифференциальные уравнения для компонент волновых функций. Эти уравнения получаются обычным путем из дифференциальных уравнений для

компонент резольвенты. Определим компоненты волновой функции  $\Psi_A$ , отвечающей  $l$ -кластерному каналу, соотношениями

$$\Phi_{B_k A}^{(\pm)} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mp i\epsilon \sum_{c_{N-1}} R_{B_k c_k} (E_A \pm i\epsilon) L_A. \quad (4.100)$$

Волновая функция  $\Psi_A$  выражается через введенные компоненты формулой

$$\Psi_A^{(\pm)}(X, p_A) = \exp\{i(X, P)\} \delta_{IN} + \sum_{B_k} \Phi_{B_k A}^{(\pm)}(X, p_A). \quad (4.100')$$

Используя уравнения (4.97) и определение компонент, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений для компонент волновой функции:

$$\begin{aligned} & (-\Delta x + v_{b_{N-1}}(x_{b_{N-1}}) - E_A) \Phi_{B_k A}(x) + \\ & + v_{b_{N-1}}(x_{b_{N-1}}) \sum'_{(c_{k+1} \neq A_{k+1}) \subset b_k} \Phi_{b_k c_{k+1} A}(X) = \\ & = e^{i(X, P)} v_{b_{N-1}}(x_{b_{N-1}}) \delta_{IN} \delta_{b_k c_k} \delta_{b_{k+1} c_{k+1}} \dots \delta_{b_{N-1} c_{N-1}} - \\ & - v_{b_{N-1}}(x_{b_{N-1}}) \sum_{d_k \neq b_k} \sum'_{(B_{k+1} \neq D_{k+1}) \subset b_k} \Phi_{D_k A}(X), \end{aligned} \quad (4.101)$$

где  $c_{N-2}$  выбирается из условия  $c_{N-2} \supset b_{N-1}$ . При  $k=2$  получаем искомое обобщение компактных уравнений в дифференциальной форме для компонент волновых функций на случай  $N$  частиц. Так же, как и в случае четырех частиц, суммирование (4.100) по всем  $B_k$  приводит к уравнению Шредингера для  $\Phi_A^{(\pm)} = \Psi_A^{(\pm)} - \delta_{IN} \exp\{i(X, P)\}$ .

**Асимптотические граничные условия.** Чтобы выделить из множества решений дифференциальных уравнений единственное решение, совпадающее с компонентами волновых функций, мы должны присоединить к этим уравнениям асимптотические граничные условия. Как и в случае системы трех тел, последние можно определить путем изучения координатной асимптотики преобразований Фурье ядер волновых операторов. Однако, как мы уже отмечали, в отличие от задачи трех тел, полного описания сингулярностей ядер волновых операторов (включая второстепенные полюсные особенности, отвечающие процессам перерассеяния кластеров) до сих пор не проведено. Поэтому мы ограничимся описанием асимпто-

тики волновых функций для процессов с двумя кластерами в начальном состоянии, когда второстепенные особенности отсутствуют.

Итак, рассмотрим волновые функции  $\Psi_A^{(\pm)}(X, p_A)$ , где символ  $A$  отвечает двухкластерному разбиению. Для определенности мы проведем рассуждения на примере функций со значком  $(+)$ . Асимптотика функций типа  $(-)$  получается с помощью соотношения (4.16''). Сперва проведем разбиение волновой функции и функции начального состояния на компоненты. Пусть  $\psi_A^{(Bj)}$  — компоненты собственных функций внутреннего гамильтониона, определенные равенством

$$\psi_A^{(Bj)} = r_0^{(int)}(-\kappa_A^2) \Phi_A^{(Bj)}, \quad (4.102)$$

где  $\Phi_A^{(Bj)}$  — компоненты форм-фактора  $\Phi_A$ . Определим компоненты начального состояния формулами

$$\chi_A^{(Bj)} = \psi_A^{(Bj)}(x_A) \exp\{i(p_A, y_A)\}.$$

Компоненты волновой функции  $\Phi_{B_2A}(X, p_A)$  определим равенствами

$$\begin{aligned} \Phi_{B_2A}(X, p_A) &= \\ &= (2\pi)^{\frac{3}{2}(l_A - N)} \int dP' \exp\{i(X, P')\} U_{B_2A}(P', p_A), \end{aligned}$$

где через  $l_A$  обозначено число кластеров детализированного разбиения  $A$  и через  $U_{B_2A}$  — компоненты ядер волновых операторов (3.98'). При этом волновая функция равна сумме (4.100'). Заметим, что ядра  $U_{B_2A}(P', p_A)$  имеют особенности, которые порождаются полюсами, выделенными в представлениях (2.23) и (3.108). Мы можем записать эти компоненты в виде суммы:

$$U_{B_2A}(P', p_A) = L_A^{(B_2)}(P', p_A) \delta_{a_2 b_2} + \frac{T_{B_2A}(P', p_A)}{P'^2 - E_A(p_A) - i0}, \quad (4.103)$$

где через  $L_A^{(B_2)}(P', p_A)$  обозначены преобразования Фурье функций  $\chi_A^{(Bj)}(X, p_A)$ . Ядра  $T_{B_2A}(P', p_A)$  имеют

кластерные особенности, которые отражает представление

$$T_{B_2A}(P', p_A) = G_{B_2A}(P', p_A) + \\ + \sum_{l=2}^{N-1} \frac{\Phi_B^{(B_l+1)}(k'_B)}{E_B(p'_B) - E_A(p_A) - i0} H_{BA}^{b_2 \dots b_{l-1}}(p_B, p_A), \quad (4.104)$$

где ядра  $H_{BA}^{b_2 \dots b_{l-1}}$  и  $G_{B_2A}$  являются гладкими ограниченными функциями; индекс  $B$  отвечает детализованному разбиению  $I_{B_l}$ .

Напомним, что знаменатели в формулах (4.103) и (4.104) обращаются в пуль в разных частях пространства  $\mathbf{R}^6$ . Это позволяет разбить область интегрирования на части, в каждой из которых функция  $U_{B_2A}$  имеет лишь один полюс. Асимптотика возникающих таким образом интегралов может быть вычислена с помощью формул (4.119), приведенных в § 6. При этом каждый полюс  $(E_B(p'_B) - E_A(p_A) - i0)^{-1}$  порождает сферическую волну в  $3(l-1)$ -мерном пространстве

$$Q_B(y_B, E) = \frac{\exp\left\{i\sqrt{E + \kappa_B^2}|y_B|\right\}}{|y_B|^{(3l-4)/2}},$$

где  $l$  равно числу кластеров детализированного разбиения  $B$ . Случай  $l=N$  ( $B=0$ ,  $\kappa_B^2=0$ ) соответствует  $N$  свободным частицам. В результате получаем следующее представление:

$$\Phi_{B_2A}(X, p_A) = \chi_A^{(B_3)}(X, p_A) \delta_{a_2 b_2} + \\ + \sum_{l=3}^N \sum_B \psi_B^{(B_l)}(x_B) \sigma_{BA}^{b_2 \dots b_{l-2}}(y_B, p_A) + \rho_{B_2A}(X, p_A). \quad (4.105)$$

Функции  $\sigma_{BA}^{b_2 \dots b_{l-1}}$  асимптотически переходят в сферические волны в  $3(l-1)$ -мерном пространстве:

$$\sigma_{BA}^{b_2 \dots b_{l-1}} \sim (2\pi)^{\frac{3}{2}(l_A - l_B)} C_l H_{BA}^{b_2 \dots b_{l-1}}(|p_B| \hat{y}_B, p_A) \times \\ \times Q_B(y_B, E_A). \quad (4.106)$$

Здесь  $p_B^2 = E_A(p_A) + \kappa_B^2$ ,  $C_l = i\pi(2\pi)^{(3l-4)/2} E^{(3l-4)/4} \times l^{-i\pi(3l-4)/4}$ . Эти функции отвечают процессам  $(A \rightarrow B)$

образования  $l$  кластеров в конечном состоянии  $l \equiv l_B$ . Слагаемое  $\rho_{B_2 A}$  отвечает процессу распада системы на  $N$  свободных частиц. Асимптотически оно равно сферической волне в пространстве  $\mathbf{R}^{3(N-1)}$ :

$$\rho_{B_2 A}(X, p_A) \sim C_N T_{B_2 A}(E_A^{1/2} \hat{X}, p_A) Q_0(X, E_A). \quad (4.107)$$

Как видно из представления (4.105), асимптотика компоненты  $\Phi_{B_2 A}$  для разбиения  $B_2$  содержит лишь те сферические волны, которые отвечают разбиениям, следующим за  $B_2$ .

Волновые функции  $\Psi_A(X, p_A)$  задаются суммой компонент  $\Phi_{B_2 A}(X, p_A)$  по всем разбиениям  $B_2$ . Поэтому их асимптотика будет содержать сферические волны, отвечающие всем открытым каналам:

$$\begin{aligned} \Psi_A(X, p_A) &\sim \chi_A(X, p_A) + \\ &+ \sum_{\substack{B \\ -\omega_B^2 \leq E_B}} F_{BA}(\hat{y}_B, p_A) Q_B(\hat{y}_B, E_A). \end{aligned} \quad (4.108)$$

Амплитуды этих волн выражаются через компоненты равенствами

$$\begin{aligned} F_{BA}(\hat{y}_B, p_A) &= \\ &= \sum_{b_2 \dots b_{l-1}} (2\pi)^{\frac{3}{2}(l_A - l_B)} C_{l_B} H_{BA}^{b_2 \dots b_{l-1}}(|p_B| \hat{y}_B, p_A), \quad B \equiv I_{bl}, \\ F_{0A}(\hat{X}, p_A) &= \sum_{B_2} C_N T_{B_2 A}(E_A^{1/2} \hat{X}, p_A). \end{aligned}$$

Отметим, пакопец, что если в начальном состоянии имеется три или более кластеров, то асимптотика волновых функций уже не сводится к суперпозиции кластерных плоских и рассеянных сферических волн. Наряду с такими волнами в этом случае появляются медленно убывающие слагаемые, отвечающие процессам перерассечения кластеров.

После того, как мы описали координатную асимптотику волновых функций и их компонент, мы можем сформулировать граничные задачи для них на основе уравнения Шредингера или дифференциальных уравнений для компонент.

Дифференциальные уравнения для компонент (4.101) имеют единственное решение в классе гладких функций

с фиксированной асимптотикой (4.105)–(4.107). При этом волновая функция дается суммой компонент по всем разбиениям (4.100'). Границные условия для уравнения Шредингера определены равенствами (4.108). Это уравнение также имеет единственное решение, отвечающее данным условиям.

Дифференциальная формулировка задачи рассеяния может быть обоснована с помощью рассуждений, аналогичных рассмотренным на примере задачи трех частиц. В этих рассуждениях используются, в частности, асимптотические представления функций Грина. Последние определяются как решения уравнения

$$\left( -\Delta_X + \sum_{a_{N-1}} v_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}}) - z \right) R(X, X', z) = \delta(X - X'). \quad (4.109)$$

Коротко опишем свойства этих функций. При  $X \neq X'$  функция Грина  $R(X, X', z)$  является гладкой ограниченной функцией, а при  $X = X'$  имеет особенность вида

$\frac{\Gamma\left(\frac{3N-5}{2}\right)}{4} (2\pi)^{\frac{-3N+3}{2}} |X - X'|^{-3N+5}$ . Если  $\operatorname{Im} z \neq 0$ , она быстро убывает при  $|X - X'| \rightarrow \infty$ . Ее асимптотика при вещественных  $z = E \pm i0$  и  $|X'| \rightarrow \infty$  определяется суммой сферических волн:

$$R(X, X', E \pm i0) \underset{|X'| \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{\substack{B \\ -\kappa_B^2 < E}} A_B^{(\pm)}(X, p_B) \times \Psi_B(x'_B) Q_B^{(\pm)}(y'_B, E), \quad (4.110)$$

где суммирование ведется по всем открытым каналам. Импульсные переменные  $p_B$  даются равенствами  $p_B = \mp \frac{\sqrt{E}}{|X|} y'_B$ ;  $Q_B^{(-)} = Q_B^{(+)*}$ ,  $Q_B^{(+)} \equiv Q_B$ .

Амплитуды сферических волн  $A_B^{(\pm)}$  явно выражаются через волновые функции, которые отвечают детализованному разбиению  $B$ :

$$A_B^{(\pm)}(X, p_B) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{|p_B|}{2\pi} \right)^{(3l_B-6)/2} e^{\mp i \frac{\pi}{4}(3l_B-6)} \Psi_B^{(\pm)}(X, p_B). \quad (4.111)$$

Наконец, асимптотика при  $|X| \rightarrow \infty$  может быть получе-

на из этих формул с помощью условий симметрии

$$R(X, X', z) = \overline{R(X', X, \bar{z})}.$$

Во многих случаях необходимо знать асимптотику функций Грина операторов Лапласа в  $3(N-1)$ -мерном пространстве  $R_0^{(N)}(X, X', z)$ . Эти функции известны в явном виде:

$$R_0^{(N)}(X, X', z) = \frac{i}{4} \left( \frac{\sqrt{z}}{2\pi} \right)^{(3N-5)/2} \frac{H_{(3N-5)/2}^{(1)}(\sqrt{z}|X-X'|)}{|X-X'|^{(3N-5)/2}}, \quad (4.112)$$

так что их асимптотика определяется асимптотикой функций Ханкеля. Например, если  $|X'| \rightarrow \infty$ , а переменная  $X$  фиксирована, то справедлива формула

$$R_0^{(N)}(X, X', E + i0) \sim C_0^{(N)} e^{i(X, P)} \frac{\exp\{i\sqrt{E}|X|\}}{|X|^{(3N-4)/2}}$$

$$\text{где } P = -\sqrt{E}\hat{X}' \text{ и } C_0^{(N)} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\sqrt{z}}{2\pi} \right)^{(3N-6)/2} e^{-i\frac{\pi}{4}(3N-6)}.$$

Отметим, что эти функции можно также задать с помощью преобразования Фурье:

$$R_0^{(N)}(X, X', z) = (2\pi)^{[-3(N-1)]/2} \int dP \frac{\exp\{i(P, X-X')\}}{P^2 - z}. \quad (4.113)$$

На этом мы закончим исследование задачи рассеяния для  $N$  нейтральных частиц.

## § 6. Быстро осциллирующие интегралы

Этот параграф представляет собой математическое дополнение, в котором мы опишем асимптотику интегралов вида

$$I(\lambda, q) = \int e^{i\lambda\Phi(q, q')} f(q, q', \lambda) dq' \quad (4.114)$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

В основном содержащиеся здесь результаты хорошо известны. Мы приводим их ради полноты изложения.

Чтобы не загромождать формулы оценками остаточных членов, мы будем считать, что функция  $f$  является финитной.

Рассмотрим сначала самый простой случай, когда функции  $\varphi$  и  $f$  зависят лишь от переменной интегрирования  $q'$ .

Если функция  $\varphi(q')$  не имеет критических точек, то асимптотика  $I(\lambda)$  обусловлена поведением функции  $f$  на границе области интегрирования. Для финитной  $f(q')$  интеграл  $I(\lambda)$  быстро убывает, как произвольная степень  $\lambda^{-N}$ ,  $N \gg 1$ . Если же критическая точка существует, то основной вклад порождается ее окрестностью. Чтобы описать асимптотику  $I(\lambda)$  в этом случае, сделаем ряд предположений о свойствах функции  $\varphi(q')$ .

Пусть  $\varphi(q)$  имеет единственную невырожденную критическую точку  $q_0$ , так что

$$\nabla_q \varphi(q)|_{q=q_0} = 0, \quad \det \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} \Big|_{q=q_0} \neq 0,$$

а матрица  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}$  имеет  $v_+$  положительных собственных чисел и  $v_-$  — отрицательных. Через  $\text{sign} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}$  мы обозначим сигнатуру квадратичной формы с матрицей  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}$ :

$$\text{sign} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = v_+ - v_-, \quad \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} \right)_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial q_j}, \\ q = (q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Справедлива следующая асимптотическая формула:

$$I(\lambda) \sim \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \left| \det \frac{\partial^2 \varphi(q_0)}{\partial q^2} \right|^{-1/2} f(q_0) \times \\ \times \exp \left\{ i\lambda \varphi(q_0) + i \frac{\pi}{4} \text{sign} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} \right\} \left( 1 + O \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right). \quad (4.115)$$

Сделаем несколько замечаний по поводу доказательства этой формулы. Основной вклад в интеграл дают точки, расположенные в шаре радиуса  $\lambda^{-1/2+\epsilon}$  с центром в точке  $q_0$ . В этом шаре функция  $\varphi(q)$  в старшем порядке дается равенством

$$\varphi(q) = \varphi(q_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}(q - q_0), q - q_0 \right) + O(|q - q_0|^3).$$

Если ввести базис, в котором матрица  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}$  приводится к диагональному виду, то интеграл  $I(\lambda)$  можно представить в старшем порядке в виде произведения  $n$  эталонных интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda v_i t^2/2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |v_i|}} e^{i\frac{\pi}{4}\text{sign}v_i} \quad (4.116)$$

на не зависящий от переменной интегрирования множитель  $f(q_0) \exp\{i\lambda\varphi(q_0)\}$ . Получившийся результат можно переписать в виде (4.115).

В большинстве задач, которые мы рассматривали выше, функция  $f$  зависела от дополнительных переменных и, более того, от большого параметра  $\lambda$ . Функция  $\varphi$  обычно также зависит от дополнительных параметров. Чтобы пользоваться формулой метода стационарной фазы (4.115) в этом случае, следует сделать предположение о характере осцилляции функции  $f(q, q', \lambda)$ .

Будем называть гладкую функцию  $f(q, q', \lambda)$  медленно осциллирующей функцией большого параметра  $\lambda$ , если она вместе со своими производными подчиняется оценке

$$\left| D_q^\kappa D_{q'}^{\kappa'} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f(q, q', \lambda) \right| \leq C \lambda^{m-n}, \quad D_q^\kappa = \frac{\partial^{|\kappa|}}{\partial q_1^{\kappa_1} \dots \partial q_n^{\kappa_n}}, \\ |\kappa| = \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_n, \quad (4.117)$$

где  $m$  — фиксированное число. Эта оценка гарантирует правомерность использования обычных асимптотических формул.

Именно, можно показать, что если функция  $\varphi(q, q')$  при всех  $q$  из области определения имеет единственную невырожденную критическую точку, а функция  $f(q, q', \lambda)$  является медленно осциллирующей, то асимптотика интеграла (4.114) снова задается формулой (4.115). Большой параметр  $\lambda$  может принимать значения и на комплексной плоскости. Соответствующие асимптотические формулы могут быть получены на основе метода перевала. Для нас практический интерес имеет только случай, когда параметр имеет вид произведения  $\lambda \sqrt{z}$ , где переменная  $z$  принимает значения на комплексной плоскости с разрезом  $\Pi_0$ . Можно показать, что если все собст-

венные числа матрицы  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}$  отрицательны, то вклад критической точки описывается формулой (4.115), где ветвь функции  $(\sqrt{z})^{-n/2}$  выбирается из условия  $\arg(\sqrt{z})^{-n/2} = 0$  при  $\arg z = 0$ .

Если функция  $f$  имеет особенности, то основной вклад в асимптотику наряду с критическими точками дают и особые точки. При этом наиболее сложная задача состоит в описании асимптотики при сближении критических и особых точек. Мы рассмотрим несколько примеров таких интегралов.

В этой главе мы часто встречались с интегралами вида

$$I(q, x) = \int dq \frac{e^{i(q, x)} g(q)}{q^2 - E \mp i0}, \quad (4.118)$$

где  $g(q)$  — гладкая функция. Следующее предложение описывает асимптотику таких интегралов при  $|x| \rightarrow \infty$ .

**Предложение А.** *При  $\sqrt{E}|x| \rightarrow \infty$  имеет место асимптотическая формула*

$$I(x, E) \sim \pm i \left( \frac{2\pi}{|x|} \right)^{\frac{n-1}{2}} \pi E^{\frac{n-3}{4}} e^{\pm i\sqrt{E}|x| \mp i\frac{(n-1)\pi}{4}} \times \\ \times (f(\pm \sqrt{E} \hat{x}) + O(|\sqrt{E} x|^{-1})). \quad (4.119)$$

Доказательство этой формулы проведем в два шага. Введем сферические координаты  $|q|$  и  $\hat{q}$  и проинтегрируем сперва по  $(n-1)$ -мерной сфере  $S^{(n-1)}$ . Асимптотика этого интеграла может быть найдена с помощью метода стационарной фазы. Основной вклад от критических точек  $\hat{q} = \pm \hat{x}$  может быть представлен в виде суммы

$$I(x, E) \sim \left( \frac{2\pi}{|x|} \right)^{\frac{n-1}{2}} (I^{(+)}(x, E) - I^{(-)}(x, E)),$$

где через  $I^{(\pm)}$  обозначены интегралы по радиальной переменной:

$$I^{(\pm)}(x, E) = \\ = \int_0^\infty d\xi \frac{\exp \left\{ \pm i\xi \sqrt{E} |x| \mp i\frac{(n-1)\pi}{4} \right\}}{\xi^2 - E \mp i0} \xi^{\frac{n-1}{2}} f(\pm \xi \hat{x}).$$

Заметим, далее, что основной вклад в интегралах  $I^{(\pm)}$

порождают полюсные особенности. Его значение легко вычислить, дополняя путь интегрирования в окрестности полюса до замкнутого контура и применяя теорему о вычетах. При этом в случае интеграла  $I^{(+)}$  путь следует замыкать в верхней полуплоскости и в случае интеграла  $I^{(-)}$  — в нижней. При таком способе замыкания интеграла по добавленным кривым имеют младший порядок. В результате получим формулу (4.119).

Более сложная ситуация возникает в том случае, когда функция  $\varphi(q)$  не сводится к линейной ( $x, q$ ) и может иметь критические точки. Мы не будем рассматривать такие интегралы в самом общем виде, а ограничимся изучением асимптотики одномерных интегралов вида

$$F(\lambda, E) = \int_a^b dt \frac{e^{i\lambda\varphi(t)}}{t - E - i0} f(t), \quad (4.120)$$

где  $\varphi$  и  $f$  — гладкие функции.

Предположим сначала, что функция  $\varphi(t)$  не имеет критических точек на промежутке интегрирования. Тогда основной вклад, который порождает полюсная особенность, может быть вычислен таким же путем, как и в случае линейной функции. Справедлива асимптотическая формула

$$F(\lambda, E) \sim 2i\pi e^{i\lambda\varphi(E)} f(E) E(\operatorname{sign} \varphi'(E)), \quad (4.121)$$

где через  $E(t)$  обозначена функция единичного скачка

$$E(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Предположим, далее, что  $\varphi(t)$  имеет единственную критическую точку  $t_0$ , причем  $\varphi''(t_0) < 0$ . Следующее предложение описывает асимптотику интеграла (4.120) в этом случае.

**Предложение B.** *Если  $t_0 \neq E$ , то при  $\lambda \rightarrow \infty$  справедливо представление*

$$F(\lambda, E) \sim F_0(\lambda, E) + F_e(\lambda, E), \quad (4.122)$$

где функция  $F_e$  дается равенством (4.121), а

$$F_0(\lambda, E) = \left( \frac{2\pi}{|\varphi''(t_0)|\lambda} \right)^{1/2} \frac{f(t_0) \exp \left\{ i\lambda\varphi(t_0) - i\frac{\pi}{4} \right\}}{t_0 - E}.$$

Если критическая точка  $t_0$  расположена в окрестности полюса, так что

$$|t_0 - E| = o(\lambda^{-v}), \quad v > 0,$$

то асимптотика  $I(\lambda)$  имеет вид суммы

$$F(\lambda, E) \sim \tilde{F}_0(\lambda, E) + F_s(\lambda, E), \quad (4.123)$$

где

$$\tilde{F}_0(\lambda_0, E) = \frac{f(t_0) - f(E)}{t_0 - E} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\varphi''(t_0)|}} e^{-i\frac{\pi}{4} + i\lambda\varphi(t_0)}, \quad (4.124)$$

а функция  $F_s$  выражается через интеграл Френеля

$$\Phi(t) = \int_t^\infty e^{it^2} dt:$$

$$F_s(\lambda, E) =$$

$$= 2 \sqrt{\pi} e^{3i\frac{\pi}{4}} f(E) \Phi(-\lambda^{1/2} \operatorname{sign}(t_0 - E) |\varphi(E) - \varphi(t_0)|^{1/2}).$$

Коротко опишем доказательство этого предложения. Разобьем интеграл  $F(\lambda, E)$  на два слагаемых, отвечающих представлению

$$f(t) = f(E) + (f(t) - f(E)).$$

Подынтегральная функция интеграла  $\tilde{F}_0$ , содержащего разность  $f(t) - f(E)$ , несингулярна, и его асимптотика (4.124) может быть найдена с помощью метода стационарной фазы.

Второе слагаемое  $F_s$  представим в виде произведения:

$$F_s(\lambda, E) = e^{i\lambda\varphi(E)} f(E) \tilde{I}(\lambda, E).$$

Дифференцируя интеграл  $\tilde{I}$  по параметру  $\lambda$ , получаем

$$\frac{\partial \tilde{I}(\lambda, E)}{\partial \lambda} = i \int_a^b dt \frac{\varphi(t) - \varphi(E)}{t - E} e^{i\lambda(\varphi(t) - \varphi(E))}.$$

Подынтегральное выражение интеграла  $\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \lambda}$  несингулярно, и его асимптотика задается формулой

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \lambda} \sim i \left( \frac{2\pi}{\lambda (\varphi''(t_0))} \right)^{1/2} \frac{\varphi(t_0) - \varphi(E)}{t_0 - E} \times \\ \times \exp \left\{ i\lambda (\varphi(t_0) - \varphi(E)) - i \frac{\pi}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем это равенство относительно  $\lambda$ . Заметим, что при  $t_0 \neq E$  справедливо представление (4.122), что задает граничные условия, которые позволяют определить константу интегрирования. В результате придем к асимптотической формуле

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\lambda, E) \sim & 2 \left( \frac{2\pi}{|\varphi''(t_0)|} \right)^{1/2} \frac{|\varphi(E) - \varphi(t_0)|^{1/2}}{t_0 - E} \times \\ & \times e^{-i\frac{\pi}{4}} \Phi(\lambda^{1/2} |\varphi(E) - \varphi(t_0)|^{1/2}) + 2i\pi E(t_0 - E). \end{aligned} \quad (4.125)$$

Если критическая точка  $t_0$  расположена достаточно далеко от полюса,  $|t_0 - E| \geq \delta > 0$ , то интеграл Френеля  $\Phi(t)$  в (4.125) можно заменить его асимптотикой. Получим тогда представление (4.122), где разделены вклады полюса и критической точки. При слиянии критической точки с полюсом, когда  $|t_0 - E| = O(\lambda^{-v})$ , в старшем порядке выполняется равенство

$$\frac{|\varphi(t_0) - \varphi(E)|^{1/2}}{t_0 - E} \sim \sqrt{\frac{|\varphi''(t_0)|}{2}} \operatorname{sign}(t_0 - E),$$

из которого следует (4.123).

Определенный интерес для нас представляют также интегралы (4.114), в которых функция  $f$  имеет слабые особенности. Чтобы понять характер асимптотики таких выражений, рассмотрим в качестве примера одномерный интеграл

$$I(\lambda) = \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t^{1-r}} e^{i\lambda\varphi(t)} dt, \quad (4.126)$$

где  $f$  и  $\varphi$  — голоморфные функции. Будем считать, что ветвь функции  $t^{r-1}$ , заданной на плоскости с разрезом  $\Pi_0$ , фиксируется условием  $\arg t^{r-1} = 0$  при  $\arg t = 0$ .

Если на промежутке интегрирования  $\varphi'(t) \neq 0$ , то старшие члены асимптотики порождаются особой точкой  $t = 0$ . Они описываются тогда формулой, аналогичной (4.121):

$$I(\lambda) \sim (i\lambda)^{-r} \Gamma(r) f(0) e^{i\lambda\varphi(0)}. \quad (4.127)$$

Если критическая точка  $t_0$  существует, но  $t_0 \neq 0$ , то ее вклад добавляется к вкладу особой точки. При этом справедливо представление типа (4.122). Приближение

критической точки с особенностью асимптотика  $I(\lambda)$  описывается с помощью специальной функции. Ее вид можно найти, раскладывая функцию  $\varphi(t)$  в ряд по степеням  $t$  и сохраняя старшие члены до второго порядка. При  $t_0 = O(\lambda^{-1/2+\nu})$  имеет место представление

$$I(\lambda) \sim f(0) \frac{e^{i\lambda\varphi(0)}}{\lambda^{r/2}} B_r^*(-\Delta_\lambda) + f'(0) \frac{e^{i\lambda\varphi(0)}}{\lambda^{r/2+1/2}} B_{r+1}(-\Delta_\lambda), \quad (4.128)$$

где через  $B_r(\xi)$  обозначен эталонный интеграл:

$$B_r(\xi) = \int_0^\infty t^{1+r} e^{-i\left(\frac{t^2}{2} + \xi t\right)} dt, \quad \Delta_\lambda = \lambda^{1/2} (\varphi(t_0) - \varphi(0))^{1/2}.$$

Отметим, что  $B_r(\xi)$  выражается через функцию параболического цилиндра  $D_r(\xi)$ :

$$B_r(\xi) = \Gamma(r) \exp\left\{-ir\frac{\pi}{4} + i\frac{\xi^2}{4}\right\} D_{-r}(-e^{i\pi/4}\xi).$$

Когда критическая точка  $t_0$  удаляется от особой точки  $\lambda|\varphi(t_0) - \varphi(0)|^{1/2} \rightarrow \infty$ , функцию  $D_r(\xi)$  можно заменить ее асимптотикой при  $|\xi| \rightarrow +\infty$ ,  $\arg \xi = 3\pi/4$ :

$$D_{-r}(\xi) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(r)} e^{-r\pi i} \xi^{r-1} e^{\xi^2/4} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) + \\ + \xi^{-r} e^{-\xi^2/4} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right).$$

Правая часть (4.128) принимает тогда вид суммы двух членов, отвечающих вкладам особой и критической точек.

## ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей главе мы изучим волновые функции и функцию Грина для систем заряженных частиц. Парные потенциалы будем предполагать равными сумме кулоновской и короткодействующей частей:

$$v_\alpha(x) = \frac{n_\alpha}{|x|} + v_\alpha^{(s)}(x),$$

где множитель  $n_\alpha$  выражается через заряды частиц и их массы формулой  $n_\alpha = \gamma q_i q_j (2\mu_{ij})^{-1/2}$ ,  $\alpha = (i, j)$ . Как и в случае нейтральных частиц, мы опишем в этой главе координатную асимптотику волновых функций и сформулируем определяющие их граничные задачи на основе уравнения Шредингера и дифференциальных уравнений для компонент. Кроме того, мы получим компактные интегральные уравнения в конфигурационном пространстве, которые могут быть использованы для исследования волновых операторов и матрицы рассеяния при любых энергиях, в том числе при  $E > 0$ , когда открывается канал раз渲ла на  $N$  свободных частиц. В основном мы будем проводить вычисления на примере системы трех тел, а в случае  $N$  частиц опишем лишь конечные результаты.

### § 1. Две заряженные частицы

Рассмотрим сначала систему двух заряженных частиц и покажем на ее примере некоторые особенности задачи рассеяния в конфигурационном пространстве.

**Волновые функции.** Заметим прежде всего, что волновые функции для системы двух частиц, взаимодействие между которыми задается кулоновскими потенциалами, можно найти в явном виде, так как уравнение Шредингера допускает разделение переменных. Действительно, введем параболические координаты  $\xi$  и  $\zeta$ :

$$\xi = |x| - (\hat{k}, x), \quad \zeta = |x| + (\hat{k}, x),$$

где вектор  $\hat{k}$  задает направление оси  $z$ , и обозначим че-  
13\*

рез  $\varphi$  угол поворота вокруг этой оси. В этих переменных уравнение Шредингера

$$\left( -\frac{4}{\xi + \zeta} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) - \frac{1}{\xi \zeta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2n}{\xi + \zeta} \right) \psi_c = k^2 \psi_c$$

имеет решение в виде произведения плоской волны на функцию, зависящую только от координаты  $\xi$ :

$$\psi_c(x, k) = e^{i(x, k)} \varphi_c(\xi, k), \quad (5.1)$$

которая удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$\xi \varphi_c''(\xi) + (1 - i|k|\xi) \varphi_c'(\xi) - \frac{n}{2} \varphi_c(\xi) = 0.$$

Волновой функции  $\psi_c(x, k)$  отвечает регулярное решение этого уравнения, которое выбирается в следующей нормировке:

$$\varphi_c(\xi, k) = e^{-\pi\eta/2} \Gamma(1 + i\eta) \Phi(-i\eta, 1, i|k|\xi), \quad (5.2)$$

где вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(a, b, t)$  определяется рядом

$$\Phi(a, b, t) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(b+j)} \frac{t^j}{j!}$$

и через  $\eta$  обозначен характерный кулоновский параметр  $\eta = \frac{n}{2|k|}$ .

При  $t \rightarrow \infty$  для  $\Phi$  справедливо асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \Phi(a, b, t) &\sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} e^{-a \ln(-t)} (1 + O(t^{-1})) + \\ &+ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{t+(a-b)\ln t} (1 + O(t^{-1})). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Поэтому волновая функция  $\psi_c(x, k)$  при больших значениях  $|k|\xi$  равна сумме

$$\begin{aligned} \psi_c(x, k) &= \exp\{i(x, k) + iw(x, k)\} (1 + O(|k|\xi^{-1})) + \\ &+ f_c(\hat{x}, k) \frac{\exp\{i|k||x| + iw_0(x, k)\}}{|x|} (1 + O(|k|\xi^{-1})). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь первое слагаемое принято называть *искаженной*

плоской волной, а второе — искаженной сферической волной. Кулоновские фазы  $w$  и  $w_0$ , искажающие плоские и сферические волны, даются равенствами

$$w(x, k) = \eta \ln(|k| |x| - (k, x)),$$

$$w_0(x, k) = -\eta \ln 2|k| |x|,$$

а амплитуда искаженной сферической волны — равенством

$$f_c(\hat{x}, k) = \frac{\eta}{2|k| \sin^2 \frac{\theta}{2}} \exp \left\{ -i\eta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i\delta_0 \right\}, \quad (5.5)$$

где  $\cos \theta = (\hat{x}, \hat{k})$  и  $\delta_0 = \arg \Gamma(1 + i\eta)$ .

Отметим, что эти асимптотические формулы верны лишь при достаточно больших значениях импульсной переменной, удовлетворяющей неравенству

$$|k| > \xi^{-2/3+\epsilon}, \quad \epsilon > 0. \quad (5.6)$$

Другими словами, при  $|k| \rightarrow 0$  область действия асимптотики (5.3) удаляется на бесконечность. При малых импульсах  $k$ , ограниченных условием

$$|k| = O(\xi^{-3/4+\epsilon}), \quad (5.6')$$

волновая функция  $\psi_c(x, k)$  принимает квазиклассический вид:

$$\psi_c(x, k) \sim e^{i|k|\xi/2} \Gamma(1 + i\eta) e^{-\pi\eta/2} J_0(\sqrt{2n\xi}), \quad (5.7)$$

где через  $J_0$  обозначена функция Бесселя. В переходной области действуют весьма громоздкие представления, и мы не будем приводить их здесь. Отметим, что в случае притяжения,  $n < 0$ , волновые функции быстро осцилируют и растут при  $k \rightarrow 0$ :

$$\psi_c(x, k) \sim |2\pi\eta|^{1/2} e^{-i|\eta|(1n|\eta|-1)} \cdot e^{i|k|\xi/2} J_0(\sqrt{2|n|\xi}), \quad (5.8)$$

а в случае отталкивания,  $n > 0$ , экспоненциально убывают:

$$\psi_c(x, k) \sim \sqrt{2\pi\eta} e^{-\pi\eta+i\eta(1n|\eta|-1)} \cdot e^{i|k|\xi/2} J_0(\sqrt{2n\xi}). \quad (5.9)$$

Мы построили волновые функции, которые описывают расходящиеся рассеянные волны. Волновые функции  $\Psi^{(-)}(x, k)$ , отвечающие сходящимся сферическим волнам,

задаются с помощью соотношения

$$\psi^{(-)}(x, k) = \psi^*(x, -k). \quad (5.10)$$

Можно установить, что эти функции с точностью до множителя  $(2\pi)^{-3/2}$  совпадают с ядрами модифицированных волновых операторов  $U_c^{(\pm)}$ , которые в данном случае определяются соотношением

$$U_c^{(\pm)} = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \exp\{iht\} L \exp\{-ik^2 t - i w_t(k)\}, \quad (5.11)$$

где

$$w_t(k) = \text{sign } t \cdot \eta \ln 4k^2|t|.$$

Мы приведем доказательство этого утверждения в главе VI.

Итак, мы видим, что волновые функции  $\psi_c(x, k)$  существенно отличаются от аналогичных решений уравнения Шредингера для короткодействующих потенциалов по ряду признаков. Как мы показали в предыдущей главе, асимптотика волновой функции для нейтральных частиц сводится к сумме плоской волны, описывающей свободное движение незаимодействующих частиц, и рассеяющей сферической волны с гладкой амплитудой. В случае заряженных частиц плоские и сферические волны искажаются фазовыми множителями, логарифмически зависящими от расстояния между частицами. Это искажение обусловлено физическим обстоятельством, которое мы отмечали при построении модифицированных нестационарных волновых операторов: асимптотическое движение частиц в кулоновском поле никогда не бывает свободным, и частицы слабо взаимодействуют при сколь угодно больших расстояниях между ними. Второе специфическое свойство кулоновских волновых функций состоит в том, что амплитуда рассеяния  $f_c(\hat{x}, k)$  имеет сингулярность в направлении рассеяния вперед. Эта сингулярность столь значительна, что функция  $f_c(\hat{x}, k)$  оказывается неинтегрируемой по угловым переменным  $\theta, \varphi$ , и интегралы, в которых она появляется, следует понимать в смысле обобщенных функций. Мы не будем сейчас уточнять это замечание и вернемся к вопросу об определении соответствующей обобщенной функции в следующей главе. Наконец, в отличие от нейтральных частиц, асимптотическая формула (5.4) не во всех направлениях правильно описывает поведение волновой функции. При

ограниченном  $|k|\xi$ , т. е. в направлении рассеяния вперед, необходимо использовать точные выражения (5.1), (5.2) в терминах вырожденной гипергеометрической функции.

Несмотря на указанные различия, асимптотические формулы (4.2)–(4.4) и (5.4) объединяет одно свойство. Именно, быстро осциллирующие экспоненты, определяющие плоскую и сферическую волны, совпадают в этих двух случаях, и эти выражения различаются только фазовыми множителями. Заметим также, что указанные дополнительные кулоновские фазы имеют квазиклассическое происхождение.

Действительно, рассмотрим эйкональное приближение для волновой функции  $\psi_c(x, k)$ , отвечающее прямолинейному движению с импульсом  $k$ . Справедливо представление

$$\psi_c(x, k) \sim \exp \{i(x, k) + iw(x, k)\},$$

где функция  $w$  определяет сдвиг фазы в кулоновском поле вдоль прямолинейной траектории, начинающейся в далеких точках и проходящей через точку наблюдения  $x$ :

$$w(x, k) = \frac{1}{2|k|} \int_{z_0}^z dt v_c(u + \hat{k}t), \quad (5.12)$$

$$z = (\hat{k}, x), \quad v_c(x) = \frac{n}{|x|}.$$

Здесь через  $u$  обозначена проекция вектора  $x$  на плоскость, перпендикулярную импульсу  $k$ ,  $u = x - (x, \hat{k})\hat{k}$ . Вычисляя этот интеграл, получим с точностью до постоянного слагаемого фазу  $w$ , искажающую плоскую волну (5.4). Аналогично, функция  $w_0$  может быть определена как сдвиг фазы волновой функции вдоль траектории с направляющим вектором  $\hat{x}$ . При этом векторы  $\hat{k}$  или  $\hat{x}$ , вдоль которых перемещаются частицы, связаны с укороченными действиями  $(\hat{k}, x)$  и  $|x|$ , которые задают рассматриваемое состояние движения соотношениями  $\hat{k} = -\nabla(\hat{k}, x)$ ,  $\hat{x} = \nabla|x|$ . Мы будем называть функции  $(\hat{k}, x)$  и  $|x|$  *плоским и сферическим эйконалами*, имея в виду отмеченную выше аналогию квантовой задачи рассеяния с задачами распространения волн.

Таким образом, искаженные плоские и сферические волны (5.4) можно интерпретировать как эйкональные

приближения волновой функции, построенные вдоль траекторий движения, которые определяются эйконалами  $(\hat{k}, x)$  и  $|x|$  соответственно.

Мы видим, что квазиклассические соображения, которые привели нас к модифицированному определению нестационарных волновых операторов в главе I, позволяют найти правильную асимптотику волновых функций и в стационарной формулировке. В задаче двух тел этот факт не имеет принципиального значения, так как кулоновская волновая функция известна в явном виде. Можно ожидать, однако, что квазиклассический подход является плодотворным и в задаче трех и более заряженных частиц, где точного решения уравнения Шредингера уже не существует.

**Функция Грина.** Опишем свойства функции Грина для оператора энергии двух кулоновских частиц  $h_c$ ,  $h_c = h_0 + v_c$ .

Замечательное свойство двухчастичной кулоновской задачи рассеяния состоит в том, что функция Грина  $r_c(x, x', z)$ , удовлетворяющая неоднородному уравнению Шредингера

$$\left( -\Delta_x + \frac{n}{|x|} - z \right) r_c(x, x', z) = \delta(x - x'),$$

так же, как и волновые функции, известна в явном виде:

$$r_c(x, x', z) = \frac{\sqrt{z}}{4\pi|x-x'|} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \right) ts \varphi_c^{(1)}(s, z) \varphi_c^{(2)}(t, z). \quad (5.13)$$

Здесь введены следующие обозначения. Функции  $\varphi_c^{(1)}$  и  $\varphi_c^{(2)}$ , называемые *кулоновскими радиальными функциями*, выражаются через регулярное  $\Phi(a, b, t)$  и иррегулярное  $\Psi(a, b, t)$  решения вырожденного гипергеометрического уравнения равенствами

$$\begin{aligned} \varphi_c^{(1)}(s, z) &= \\ &= e^{-\frac{n\pi}{2\sqrt{z}}} \Gamma\left(1 + i\frac{n}{2\sqrt{z}}\right) e^{i\sqrt{z}s} \Phi\left(1 + i\frac{n}{2\sqrt{z}}, 2, -2i\sqrt{z}s\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_c^{(2)}(t, z) &= \\ &= 2e^{-\frac{n\pi}{2\sqrt{z}}} \frac{e^{i\sqrt{z}t-i\pi/2}}{\Gamma\left(1 - i\frac{n}{2\sqrt{z}}\right)} \Psi\left(1 + i\frac{n}{2\sqrt{z}}, 2, -2i\sqrt{z}t\right), \end{aligned}$$

а параболические координаты  $s$  и  $t$  в данном случае задаются равенствами

$$2s = |x| + |x'| - |x - x'|, \quad 2t = |x| + |x'| + |x - x'|.$$

Функция Грина упрощается асимптотически, когда  $|x - x'| \rightarrow \infty$ , и

$$|x| |x'| + (x, x') \geq | |x| + |x'| |^{1+\nu}, \quad \nu > 2/3,$$

так что точки  $x$  и  $x'$  не расположены на прямой, проходящей через начало координат по разные стороны от него. Используя асимптотическое представление (5.3) для вырожденной гипергеометрической функции и аналогичное равенство для линейно независимого решения  $\Psi(a, b, t) \sim t^{-a}$ , придем к формуле

$$r_c(x, x', z) \sim \frac{1}{4\pi} \frac{\exp \{ i\sqrt{z} |x - x'| + iw_z(x, x') \}}{|x - x'|}, \quad (5.14)$$

где

$$w_z(x, x') = i \frac{n}{2\sqrt{z}} \ln \frac{|x| |x - x'| + (x, x - x')}{|x'| |x - x'| + (x', x - x')} \quad (5.14')$$

Сравнивая эту формулу с определением эйкональной фазы (5.12), придем к выводу, что функция  $w_z(x, x')$  может быть получена на основе этой формулы, если за-

менить импульс  $\hat{k}$  на направление  $\overrightarrow{x - x'}$  вектора, соединяющего точку  $x$  с точкой  $x'$ . Следовательно, как и в случае волновых функций, кулоновская функция Грина  $r_c(x, x', z)$  асимптотически отличается от свободной функции Грина  $r_0(x, x', z)$  фазовым множителем, имеющим квазиклассическую природу.

Отметим, наконец, что, аналогично случаю нейтральных частиц, при  $|x'| \rightarrow \infty$  имеет место следующее соотношение между функцией Грина и волновыми функциями:

$$\begin{aligned} r_c(x, x', E \pm i0) &\sim \\ &\sim \frac{1}{4\pi} \Psi_c^{(\pm)}(x, k) \frac{\exp \{ \pm i |k| |x'| \pm iw_0(x') \}}{|x'|}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Здесь импульсная переменная дается равенством  $k = \mp \sqrt{E} \hat{x}'$ .

Существование явного представления для функции Грина полностью решает задачу спектрального анализа

оператора энергии  $h_c$ . В частности, в случае притяжения, при  $n < 0$ , полюсы функции Грина в точках  $E_N = -\frac{n^2}{4N^2}$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , где Г-функция обращается в бесконечность, определяют собственные значения оператора  $h_c$ . При этом собственные значения являются  $N^2$ -кратно вырожденными и соответствующие собственные функции даются равенствами

$$\psi_{Nl}^m(x) = R_{Nl}(r) Y_l^m(\hat{x}),$$

где  $r = |x|$ ,  $Y_l^m$  — сферические функции, а функция  $R_{Nl}$ , зависящая от радиальной переменной, выражается через вырожденные гипергеометрические функции равенствами

$$R_{Nl}(r) = \frac{2}{N^{l+2} (2l+1)!} \left( \frac{(N+l)!}{(N-l-1)!} \right)^{1/2} (2rn)^l \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{rn}{N} \right\} \Phi \left( -N + l + 1, 2l + 2, \frac{2rn}{N} \right). \quad (5.16)$$

Отметим, что ядро  $r_c(x, x', z)$  может быть задано спектральным представлением

$$r_c(x, x', z) = \sum_{N, l, m} \frac{\psi_{Nl}^m(x) \overline{\psi_{Nl}^m(x')}}{z + \frac{n^2}{4N^2}} + \\ + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\psi_c^{(\pm)}(x, k) \overline{\psi_c^{(\pm)}(x', k)}}{k^2 - z} dk, \quad (5.17)$$

где интеграл отвечает непрерывному спектру, а сумма — дискретному спектру оператора  $h_c$ .

**Суперпозиция кулоновского и короткодействующего потенциалов.** Рассмотрим теперь задачу рассеяния для заряженных частиц, потенциал взаимодействия между которыми, кроме кулоновской части, содержит короткодействующее слагаемое  $v^{(s)}(x)$ . Если в операторном тождестве (2.8) в качестве операторов А и В выбрать пару  $h_c - z$  и  $h - z$ ,  $h = h_c + v^{(s)}$ , то мы придем к следующему модифицированному уравнению теории возмущений:

$$r(z) = r_c(z) - r_c(z) v^{(s)} r(z). \quad (5.18)$$

Последнее можно записать в терминах функций Грина

как интегральное уравнение второго рода:

$$r(x, x', z) = r_c(x, x', z) - \int r_c(x, y, z) v^{(s)}(y) r(y, x', z) dy. \quad (5.19)$$

Это уравнение может быть исследовано совершенно так же, как и аналогичное уравнение (4.14) в случае пейтимальных частиц.

Опишем без доказательства ряд результатов, вытекающих из этого уравнения.

Функция Грипа  $r(x, x', z)$  при  $|x'| \rightarrow \infty$  может быть представлена в виде (5.15), где амплитуда искаженной сферической волны совпадает с волновой функцией  $\psi^{(\pm)}(x, k)$  оператора  $h$ . Эта волновая функция удовлетворяет компактному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \psi^{(\pm)}(x, k) &= \psi_c^{(\pm)}(x, k) - \\ &- \int r_c(x, y, k^2 \pm i0) v^{(s)}(y) \psi^{(\pm)}(y, k) dy \end{aligned} \quad (5.20)$$

и может быть представлена в виде суммы:

$$\psi^{(\pm)}(x, k) = \psi_c^{(\pm)}(x, k) + \varphi_{cs}^{(\pm)}(x, k), \quad (5.21)$$

где слагаемое  $\varphi_{cs}^{(\pm)}$  асимптотически равно искаженной сферической волне с гладкой амплитудой  $f_{cs}^{(\pm)}(\hat{x}, k)$ . Поскольку асимптотика функции  $\psi_c^{(\pm)}(x, k)$  также содержит искаженную сферическую волну, полная амплитуда рассеянной волны для функции  $\psi^{(\pm)}(x, k)$  равна сумме сингулярной чисто кулоновской части  $f_c^{(\pm)}(\hat{x}, k)$  и гладкого слагаемого  $f_{cs}^{(\pm)}$ , называемого *короткодействующей частью* амплитуды:

$$f^{(\pm)}(\hat{x}, k) = f_c^{(\pm)}(\hat{x}, k) + f_{cs}^{(\pm)}(\hat{x}, k). \quad (5.22)$$

Из уравнения (5.20) вытекает следующее интегральное представление для  $f_{cs}^{(\pm)}(\hat{x}, k)$ :

$$f_{cs}^{(\pm)}(\hat{x}, k) = \frac{1}{4\pi} \int \psi_c^{(\mp)}(y, -|k|\hat{x}) v^{(s)}(y) \psi^{(\pm)}(y, k) dy. \quad (5.23)$$

Альтернативно (5.20), волновые функции  $\psi^{(\pm)}(x, k)$  можно определить как решения уравнения Шредингера

$$\left( -\Delta + \frac{n}{|x|} + v^{(s)}(x) - k^2 \right) \psi(x) = 0 \quad (5.24')$$

в классе гладких функций, равных сумме (5.21), где асимптотика неизвестной функции  $\varphi_{cs}(x, k)$  имеет вид искаженной сферической волны с ограниченной амплитудой:

$$\varphi_{cs}^{(\pm)}(x, k) \sim f_{cs}^{(\pm)}(x, k) \frac{\exp\{\pm i|k||x| \pm iw_0(x, k)\}}{|x|}. \quad (5.24)$$

Рассуждения, которые нужно провести для обоснования дифференциальной формулировки задачи рассеяния, ничем не отличаются от рассуждений, которые мы провели в случае нейтральных частиц.

**Угловые особенности амплитуды рассеяния.** Выше мы считали, что короткодействующий потенциал  $v^{(s)}(x)$  достаточно быстро убывает при  $|x| \rightarrow \infty$ , по крайней мере как степень  $|x|^{-3-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ . При этом оказалось, что короткодействующая часть амплитуды рассеяния является ограниченной функцией. Если же этот потенциал убывает медленнее, например, содержит мультипольные части:

$$v^{(s)}(x) \sim \frac{\mu_1(\hat{x})}{|x|^2} + \frac{\mu_2(\hat{x})}{|x|^3} + \dots,$$

то функция  $f_{cs}$  имеет особенности в направлении рассеяния вперед  $\hat{x} = \hat{k}$ . Коротко опишем последние.

Представим волновые функции в виде суммы:

$$\psi(x, k) = \psi_c(x, k) + \sum_{l=1}^2 (r_c v^{(s)})^l \psi_c(x, k) + \tilde{\varphi}(x, k), \quad (5.25)$$

где слагаемые  $(r_c v^{(s)})^l \psi_c$  отвечают двум первым итерациям интегральных уравнений (5.19). Соответственно для амплитуды рассеяния получаем представление

$$f(\hat{x}, k) = f_c(\hat{x}, k) + \sum_{j=1}^2 f_{j1}(\hat{x}, k) + f_{j2}(\hat{x}, k) + \tilde{f}_{cs}(\hat{x}, k), \quad (5.26)$$

где  $f_c(\hat{x}, k)$  — кулоновская амплитуда (5.5), а  $\tilde{f}_{cs}$  — гладкая функция. Функции  $f_{j1}$  и  $f_{j2}$  имеют особенности. При этом функции  $f_{j1}$  описывают вклад мультипольных слагаемых  $\mu_1|x|^{-2}$  и  $\mu_2|x|^{-3}$  в первую итерацию  $r_c v^{(s)} \psi_c$ :

$$f_{j1}(\hat{k}', k) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int dx \psi_c(x, -|k|\hat{k}') \frac{\mu_l(\hat{x})}{|x|^{l+1}} \psi_c(x, k) e^{-\varepsilon|x|}. \quad (5.27)$$

Функция  $f_{12}$  учитывает вклад дипольного потенциала во вторую итерацию:

$$\begin{aligned} f_{12}(\hat{k}', k) = & \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int dx dy e^{-\epsilon|x| - \epsilon|y|} \psi_c(x, -|k|\hat{k}') \times \\ & \times \frac{\mu_1(\hat{x})}{|x|^2} \frac{\mu_1(\hat{y})}{|y|^2} r_c(x, y, k^2 + i0) \psi_c(x, k); \quad (5.28) \end{aligned}$$

В качестве примера изучим функцию  $f_{11}$ , которая содержит старшую сингулярность после кулоновской. Ясно, что особенность возникает в тех точках  $k'$  и  $k$ , где интеграл (5.27) становится расходящимся. Интеграл в (5.27) по конечной области является гладкой функцией векторов  $k'$  и  $k$ . Поэтому расходимости определяются поведением подынтегральной функции на больших расстояниях.

Для качественного описания особенности мы ограничимся только рассмотрением интеграла по области, не содержащей окрестностей направлений  $x = \hat{k}$  и  $\hat{x} = -\hat{k}'$ . В этой области асимптотика кулоновских волновых функций в старшем порядке определяется искаженной плоской волной (5.4). Заменим в (5.27) кулоновские волновые функции их асимптотикой и перейдем к интегрированию по новой переменной  $y = |q|x$ , где  $q = k - k'$ . В результате получим представление

$$\begin{aligned} f_{11}(\hat{k}', k) = & \\ = & |q|^{-1-2i\eta} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int \exp\{i(\hat{q}, y) - \epsilon|y|\} |y|^{2i\eta} g(\hat{y}) d\hat{y} d|y|, \end{aligned}$$

где  $g(\hat{y})$  — гладкая функция. Интеграл по угловой переменной можно оценить методом стационарной фазы:

$$\begin{aligned} \int d\hat{y} g(\hat{y}) \exp\{i(\hat{q}, y)\} \sim & \frac{1}{i|y|} \{e^{i|y|} g(\hat{q}) - \\ & - e^{-i|y|} g(-\hat{q})\} + \dots \end{aligned}$$

Из этой оценки вытекает, что асимптотическое поведение подынтегральной функции в интеграле по радиальной переменной гарантирует сходимость этого интеграла. Поэтому сходится и исходный интеграл. Следовательно, особенность порождается только сингулярным в направлении рассеяния вперед множителем  $|q|^{-1-2i\eta}$ .

Полученное представление правильно передает вид старшей особенности функции  $f_{11}$ . Однако, поскольку

асимптотика (5.4) перестает быть верной в окрестности направления рассеяния вперед, для определения точного значения коэффициента перед особенностью следует использовать явное выражение для кулоновских волновых функций. Мы не будем описывать здесь соответствующие выкладки, а приведем только окончательные результаты.

Для функций  $f_{ij}$  справедливы представления

$$\begin{aligned} f_{11}(\hat{k}', k) &= a_{11}|k - k'|^{-1-2i\eta} + b_{11}|k - k'|^{-2i\eta} + \delta f_{11}(\hat{k}', k), \\ f_{21}(\hat{k}', k) &= a_{21}|k - k'|^{-2i\eta} + \delta f_{21}(\hat{k}', k), \\ f_{12}(\hat{k}', k) &= a_{12}|k - k'|^{-2i\eta} + \delta f_{12}(\hat{k}', k), \end{aligned}$$

в которых сингулярные множители выделены явно, а коэффициенты  $a_{ij}$  и  $\delta f_{ij}$  — гладкие ограниченные функции. Коэффициенты  $a_{ii}$  при старшей особенности функций  $f_{ii}$  ( $i = 1, 2$ ) можно представить в виде

$$a_{11}(\hat{k}', k) = \frac{(-i)^l}{4\pi} |k|^{2i\eta} e^{-\pi\eta} \Gamma(2 - l + 2i\eta) \tilde{a}_{11}(\hat{k}', k), \quad (5.29)$$

где множители  $\tilde{a}_{11}$  выражаются через мультипольные моменты  $\mu_l$  потенциала с помощью интегрального представления:

$$\tilde{a}_{11}(\hat{k}', k) = \int d\hat{x} \mu_l(\hat{x}) (1 - (\hat{p}, \hat{x})^2)^{i\eta} ((\hat{q}, \hat{x}) + i0)^{l-2-2i\eta}. \quad (5.30)$$

Здесь  $q$  — вектор переданного импульса,  $q = k - k'$ , а  $p$  — сумма начального и конечного импульсов,  $p = k + k'$ . Далее, коэффициент  $b_{11}$  при младшей особенности функции  $f_{11}$  дается равенством

$$\begin{aligned} b_{11}(\hat{k}', k) &= \frac{i}{4\pi} (2|k|)^{2i\eta} \exp\{2i \arg \Gamma(i\eta)\} \times \\ &\quad \times (\mu_1(\hat{p}) + \mu_1(-\hat{p})). \end{aligned}$$

Наконец, функция  $a_{12}$  представляется в виде

$$\begin{aligned} a_{12}(\hat{k}', k) &= \\ &= i(8\pi|k|)^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi a_{11}(\hat{k}, k + k'') a_{11}^{(0)}(\hat{k} + \hat{k}'', k) (\sin^2 \varphi)^{-i\eta} \times \\ &\quad \times (B(1/2, i\eta) + 2 \cos \varphi F(1 - i\eta, 1/2, 3/2, \cos^2 \varphi)), \quad (5.31) \end{aligned}$$

где  $B(x, y)$  — бета-функция, а  $F(a, b, c, t)$  — гипергеометрическая функция. Интегрирование в (5.31) ведется по окружности  $|k''| = |k - k'|$ , которая лежит в плоскости, ортогональной к вектору  $k$ ,  $\cos \varphi = (\hat{k}'', \hat{q})$ . Функция  $a_{11}^{(0)}$  определяется представлением (5.30), в котором параметр  $\eta$  полагается равным нулю.

Подчеркнем, что степень старшей дипольной особенности на единицу меньше показателя кулоновской сингулярности (5.5). Порядок особенностей, отвечающих мультипольным слагаемым, также понижается на единицу с увеличением степени убывания потенциала.

Итак, мы видим, что амплитуда рассеяния  $f$  представляется в виде

$$f(\hat{k}', k) = f_{\text{sin}}(\hat{k}', k) + \tilde{f}(\hat{k}', k),$$

где  $\tilde{f}$  — гладкая ограниченная функция, а  $f_{\text{sin}}$  — сингулярная часть. Для функции  $f_{\text{sin}}$  справедливо представление

$$f_{\text{sin}}(\hat{k}', k) = f_c(\hat{k}', k) + \sum_{l=1}^2 \frac{b_l(\hat{k}', k)}{|k' - k|^{2-l+2i\eta}}, \quad k' = |k|\hat{k}', \quad (5.32)$$

в котором коэффициенты  $b_l$  выражаются через функции  $a_{1j}$  и  $b_{11}$ :

$$b_1 = a_{11}, \quad b_2 = a_{12} + a_{21} + b_{11}.$$

В некоторых случаях коэффициенты  $b_l$  вычисляются явно. Например, для сферически симметричного потенциала  $\frac{\mu}{|x|^2}$ , т. е.  $\mu_1(\hat{x}) = \text{const}$ , коэффициент  $b_1$  при старшей дипольной особенности имеет вид .

$$b_1 = -\frac{\pi\mu}{2} (2|k|)^{2i\eta} \exp \left\{ 2i \arg \Gamma \left( \frac{1}{2} + i\eta \right) \right\}.$$

Для потенциала двух фиксированных кулоновских центров,  $\mu_1(\hat{x}) = d \cos \theta$ ,  $\cos \theta = (\hat{x}, \hat{R})$ , этот коэффициент определяется равенством .

$$b_1(\hat{k}', k) = id(2|k|)^{2i\eta} \exp \{ 2i \arg \Gamma(1 + i\eta) \} (\hat{q}, \hat{R}),$$

$$q = k - k'.$$

Функцию  $b_2$  для указанных потенциалов также можно

вычислить явно. Однако соответствующие формулы слишком громоздки, и мы их здесь не приводим.

Следует отметить, что представление (5.32) перестает быть справедливым, если потенциал  $v(x)$  равен сумме мультипольных частей и не содержит кулоновской части. Действуя по описанной выше схеме, можно показать, что амплитуда рассеяния в этом случае имеет сингулярности вида

$$f_{\text{sin}}(\hat{k}', k) = a_{11}^{(0)}(\hat{k}', k) |k' - k'|^{-1} + (a_{12}^{(0)}(\hat{k}', k) + a_{21}^{(0)}(\hat{k}', k)) \ln |k - k'|, \quad (5.33)$$

где  $a_{jl}^{(0)}$  — гладкие ограниченные функции. Функция  $a_{11}^{(0)}$  определена представлениями (5.29) и (5.30), в которых  $\eta = 0$ . Коэффициент  $a_{21}^{(0)}$  дается равенством

$$a_{21}^{(0)} = -\frac{1}{4\pi} \int d\hat{x} \mu_2(\hat{x}).$$

Функция  $a_{12}^{(0)}$ , как и для заряженных частиц, выражается через свертку функций  $a_{11}^{(0)}$ :

$$a_{12}^{(0)}(\hat{k}', k) = -\frac{i}{4\pi |k|} \int_0^{2\pi} d\varphi a_{11}^{(0)}(k + \hat{k}'', k) \hat{a}_{11}^{(0)}(\hat{k}, k + \hat{k}''),$$

где параметры  $\varphi$  и  $k''$  определены в (5.31).

**Кулоновский потенциал в  $R^{3N-3}$ .** В методических целях мы рассмотрим в этом параграфе также модельную задачу рассеяния, порожденную сферически симметричным медленно убывающим потенциалом  $q_0|X|^{-1}$  в  $(3N - 3)$ -мерном пространстве. Мы будем называть последний *кулоновским потенциалом* в  $R^{3N-3}$ .

Как и в трехмерном пространстве, уравнение Шредингера

$$\left( -\Delta_X + \frac{q_0}{|X|} - P^2 \right) \Psi_N(X, P) = 0 \quad (5.34)$$

может быть решено методом разделения переменных в параболических координатах. Волновые функции  $\Psi_N(X, P)$  представляются в виде произведения

$$\Psi(X, P) = \exp \{i(X, P)\} \Phi_N(\xi, P), \quad (5.35)$$

где функция  $\Phi$  зависит лишь от параболической координаты  $\xi = |X| - (X, \hat{P})$ :

$$\Phi_N(\xi, P) = e^{\frac{-\eta\pi}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3N-4}{2} + i\eta\right)}{\Gamma\left(\frac{3N-4}{2}\right)} \Phi\left(-i\eta, \frac{3N-4}{2}, i|P|\xi\right), \quad (5.36)$$

$\eta = \frac{q_0}{2|P|}$ . Волевые функции, отмечаемые значком  $(-)$ , выражаются через  $\Psi(X, P)$  равенством

$$\Psi_N^{(-)}(X, P) = \Psi_N^{(+)*}(X, -P), \quad \Psi_N^{(+)} \equiv \Psi_N.$$

Если  $\xi \rightarrow \infty$ , то согласно асимптотической формуле (5.3) функция  $\Psi_N$  становится равной сумме искаженных плоских и сферических волн:

$$\begin{aligned} \Psi_N(X, P) \sim & e^{i(X, P) + iW_N(X, P)} (1 + O(|P|\xi^{-1})) + \\ & + f_N(\hat{X}, P) \frac{\exp\left\{i|X||P| + iW_N^{(0)}(X, P)\right\}}{|X|^{\frac{3N-4}{2}}}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

где кулоновские фазы даются равенствами

$$\begin{aligned} W_N(X, P) &= \eta \ln(|P||X| - (P, X)), \\ W_N^{(0)} &= -\eta \ln 2|P||X|, \end{aligned}$$

а амплитуда сферической волны определяется соотношением

$$\begin{aligned} f_N(\hat{X}, P) &= \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{3N-4}{2} + i\eta\right)}{\Gamma(-i\eta)} \frac{e^{-i\eta \ln 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{\left(2|P|\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3N-4}{2}}} e^{-(3N-4)\frac{i\pi}{4}}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

При  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = (\hat{X}, \hat{P})$  эта амплитуда имеет сильную особенность. Нетрудно убедиться, что последняя неинтегрируема на единичной сфере  $|P| = 1$ .

Функцию Грина  $R_N(X, X', z)$  можно задать с помощью спектрального представления

$$R_N(X, X', z) = \sum_A \frac{\Psi_A(X) \Psi_A^*(X')}{z + \kappa_A^2} + \\ + \frac{1}{(2\pi)^{3N-3}} \int \frac{\Psi_N^{(\pm)}(X, P) \Psi_N^{(\pm)*}(X', P) dP}{P^2 - z}, \quad (5.39)$$

где сумма по собственным значениям оператора (5.34)

$$\kappa_A^2 = -\frac{q_0^2}{4\left(j + \frac{3N-4}{2}\right)^2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

отлична от нуля лишь при  $q_0 < 0$ .

Справедливы также равенства

$$R_N(X, X', z) = \\ = \left(-\frac{1}{2\pi y} \frac{\partial}{\partial y}\right)^{\frac{m-1}{2}} G_1(x, y); \quad m = 3N - 3, \quad m = 3, 9, \dots, \\ R_N(X, X', z) = \left(-\frac{1}{2\pi y} \frac{\partial}{\partial y}\right)^{\frac{m-2}{2}} G_2(x, y); \quad m = 6, 12, \dots, \\ G_1(x, y) = \frac{\Gamma(1+i\eta)}{2i} \sqrt{z} (y^2 - x^2) e^{-i\sqrt{z}x} \times \\ \times \Phi(1+i\eta, 2, -i\sqrt{z}(x+y)) \Psi(1+i\eta, 2, -i\sqrt{z}(x-y)) \\ G_2(x, y) = \\ = i \frac{\exp\{-i\pi(i\eta+1/2)\}}{\sin \pi(i\eta+1/2)} \int_{+\infty}^{(1+)} d\zeta (1+\zeta)^{-i\eta-1/2} \times \\ \times (\zeta-1)^{i\eta-1/2} \frac{e^{i\sqrt{z}x\zeta}}{4\sqrt{\pi}} \frac{I_{-1/2}(-i\sqrt{z}(x^2-y^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2})}{\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{z}(x^2-y^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}\right)^{-1/2}} \quad (5.40)$$

где  $x = |X| + |X'|$ ,  $y = |X - X'|$  и через  $I_v$  обозначена функция Бесселя мнимого аргумента. Таким образом, в отличие от двухчастичной задачи, функция Грина для кулоновского потенциала в  $\mathbf{R}^{3N-3}$  задается довольно громоздким интегральным представлением. Однако, если  $N$  нечетное,  $N = 2l + 1$ , это представление можно упростить

и явно выразить  $R_N(X, X', z)$  через вырожденные гипергеометрические функции.

Отметим, что функция  $R_N(X, X', z)$  является гладкой, если координаты  $X$  и  $X'$  не совпадают,  $X \neq X'$ , а при равных значениях этих координат,  $X = X'$ , имеет такую же полярную особенность, как и свободная функция Грина:

$$-R_N(X, X', z) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{3N-5}{2}\right)}{4} \frac{(2\pi)^{\frac{-3N+3}{2}}}{|X - X'|^{\frac{3N-5}{2}}}. \quad (5.41)$$

Опишем асимптотические представления для функции  $R_N(X, X', z)$ . Проведем через точку  $X$  и начало координат прямую  $s(t) = t\hat{X}$ . Множество точек  $X_t$ , расположенных в окрестности этой прямой по другую сторону от начала координат и удовлетворяющих неравенству

$$\begin{aligned} |X| |X'| + (X, X') &\leqslant \\ &\leqslant (|X| + |X'|)^{1+v}, \end{aligned}$$

$v > 2/3,$

мы будем называть особой областью  $\Omega_s(X, X')$ , отвечающей вектору  $X$  (рис. 19). Если переменные  $X$  и  $X'$  стремятся к бесконечности, причем второй аргумент  $X'$  функции Грина не располагается в особой области, то  $R_N(X, X', z)$  асимптотически принимает эйкональный вид:

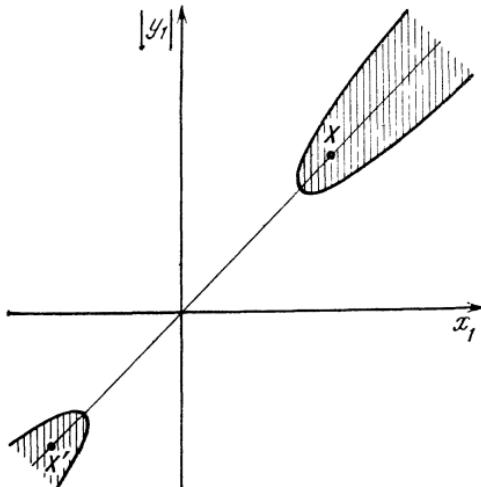


Рис. 19

$$R_N(X, X', z) \sim C_0^{(N)} \frac{\exp\left\{i\sqrt{z}|X - X'|\right\}}{|X - X'|^{\frac{3N-4}{2}}} \Phi_N(X, X', z), \quad (5.42)$$

где  $C_0^{(N)} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sqrt{z}}{2\pi}\right)^{\frac{3N-6}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}(3N-6)}$  и

$$\Phi_N(X, X', z) = \exp\left\{i \frac{q_0}{2\sqrt{z}} \ln \frac{|X||X - X'| + (X, X - X')}{|X'||X - X'| + (X', X - X')} \right\}.$$

Если один из аргументов, например  $X$ , фиксирован, а второй стремится к бесконечности, то функция Грина становится искаженной сферической волной, амплитуда которой выражается через волновые функции  $\Psi_N^{(\pm)}(X, P)$ :

$$R_N(X, X', E + i0) \sim$$

$$\sim C_0^{(N)} \Psi_N^{(\pm)}(X, P) \frac{\exp\{\pm i \sqrt{E} |X'| \pm i W_N^{(0)}(X')\}}{|X'|^{\frac{3N-4}{2}}},$$

где  $P = \mp \sqrt{E} \hat{X}'$ . Асимптотика функции Грина при  $|X'| \rightarrow \infty$  получается из этой формулы с помощью равенства

$$R_N(X, X', z) = \overline{R_N(X', X, \bar{z})}.$$

Если, наконец, переменные  $X$  и  $X'$  стремятся к бесконечности и находятся при этом в окрестности направления  $\hat{X}$ , но по одну сторону от начала координат, т. е.

$$(X, X') > 0, \quad (5.43)$$

$$|X| |X'| - (X, X') \leq (|X| + |X'|)^{1+v}, \quad v > 0,$$

то асимптотика функции Грина  $R_N$  при  $|X|, |X'| \rightarrow \infty$  определяется выражением

$$R_0^{(N)}(X, X', z) \exp\left\{i \frac{q_0}{2 \sqrt{z}} \ln \frac{|X|}{|X'|}\right\}, \quad (5.44)$$

где  $R_0^{(N)}(X, X', z)$  — функция Грина оператора  $H_0$ .

Итак, мы перечислили общие свойства функции Грина  $R_N(X, X', z)$ . В случае необходимости более детальная информация о ее поведении может быть получена с помощью интегрального представления (5.40).

## § 2. Координатная асимптотика волновых функций для системы трех заряженных частиц

Основная часть этого параграфа посвящена исследованию асимптотики волновых функций  $\Psi_v(X, P)$ , отвечающих процессам с тремя свободными частицами в начальном состоянии. Случай функций типа  $\Psi_A(X, p_A)$ ,  $A \neq 0$ , которые описывают процессы  $(2 \rightarrow 2)$  и  $(2 \rightarrow 3)$ , является более простым в техническом отношении, и мы рассмотрим его в конце параграфа. При этом мы оставляем пока в стороне вопросы об оправдании асимптоти-

ческих формул и о существовании таких волновых функций.

**Эйкональные приближения.** Приведем сначала эвристические соображения, которые лежат в основе используемого здесь метода построения асимптотических формул. В случае нейтральных частиц для построения асимптотик мы воспользовались методом преобразования Фурье, опираясь на изученные ранее свойства ядер волновых операторов в импульсном представлении. Этот метод не может быть использован в случае трех заряженных частиц, поскольку, как мы уже отмечали, нам неизвестны свойства ядер резольвенты или  $T$ -матрицы при положительных энергиях. Однако данный способ исследования координатных асимптотик решений дифференциальных уравнений не исчерпывает всех возможностей. Напротив, если мы найдем асимптотику с помощью независимых соображений, то мы сможем исследовать и свойства  $T$ -матрицы в импульсном представлении, делая обратное преобразование Фурье. Посмотрим, какие методы можно использовать с этой целью.

В математической физике существуют прямые асимптотические методы, основанные на свойстве локальности дифференциальных уравнений: метод эталонных уравнений, метод квазиклассических приближений и его частный случай — метод эйкональных приближений. При этом, поскольку при  $|X| \rightarrow \infty$  кулоновский потенциал становится сколь угодно малым по величине, так что  $V_c(X)E^{-1} \ll 1$ , для построения координатных асимптотик волновых функций естественно использовать метод эйкональных приближений, который действует в случае возмущений, малых по сравнению с энергией.

При таком подходе мы сталкиваемся с проблемой выбора траекторий, которые определяют эйкональные приближения. Однако эту трудность можно обойти, если опираться на соображения аналогии. В самом деле, мы видели на примере двух заряженных частиц, что если сохранить набор асимптотических волн, которые имелись в случае нейтральных частиц (плоские и сферические), то координатная асимптотика для заряженных частиц почти во всех направлениях рассеяния может быть получена простой их модификацией, которая в старшем порядке сводится к добавлению кулоновских фаз. При этом фазы логарифмически зависят от расстояния и могут быть получены с помощью эйкональных приближе-

ний вдоль асимптотических траекторий частиц. Можно предположить, что и для систем большего числа частиц набор асимптотических волн не зависит от того, заряжены частицы или нет. В системе трех нейтральных частиц, как мы показали в § 1 главы IV координатная асимптотика определяется четырьмя типами эйконалов — плоским ( $\hat{P}, X$ ), сферическим  $|X|$ , однократными  $Z_\alpha$  и двукратными  $Z_{\alpha\beta}$ . В согласии с нашей гипотезой этот же набор эйконалов мы должны рассматривать и в случае заряженных частиц. Можно ожидать также, что, как и в системе двух частиц, эйкональная форма асимптотики окажется неправильной в ряде особых направлений. Мы, однако, не будем задерживаться здесь на обсуждении этого тонкого вопроса, а вернемся к нему в следующем параграфе.

Перейдем к техническому оформлению этих соображений. Опишем сначала схему построения эйкональных приближений. Так как конструкция последних не зависит от размерности, мы будем считать, что число частиц произвольно, так что точка  $X$  лежит в пространстве  $\mathbf{R}^{3(N-1)}, N = 3, 4, \dots$

Пусть  $Z(X)$  — некоторое решение уравнения эйконала  $|\nabla Z(X)|^2 = 1$ .

Будем искать решение уравнения Шредингера

$$\left( -\Delta + \sum_{a_{N-1}} n_{a_{N-1}} |x_{a_{N-1}}|^{-1} \right) \Psi(X) = E \Psi(X), \quad (5.45)$$

порожденное эйконалом  $Z$ , в виде

$$\Psi_z = A_z(X) \exp \{i\sqrt{E}Z + iW_z\}, \quad (5.46)$$

где  $\exp \{iW_z(X)\}$  — медленно осциллирующая при  $\sqrt{E}Z \rightarrow \infty$  функция и  $A_z(X)$  — решение уравнения непрерывности

$$2(\nabla A_z, \nabla Z) + A_z \Delta Z = 0, \quad (5.47)$$

Можно показать, что функция  $A_z(X) \exp \{i\sqrt{E}Z\}$  является асимптотическим решением уравнения Шредингера без взаимодействия. Дополнительную фазу  $W_z$  мы определим так, чтобы удовлетворить уравнению Шредингера с кулоновскими потенциалами (5.45) при  $\sqrt{E}Z \rightarrow \infty$ .

Подставляя функцию (5.46) в уравнение Шредингера (5.45), получим следующее соотношение для вычисления

фазы  $\tilde{W}_z$ :

$$2\sqrt{E}(\nabla \tilde{W}_z, \nabla Z) - \delta W_z = -V_c(X). \quad (5.47')$$

Здесь  $V_c$  — сумма дальнодействующих кулоновских потенциалов:

$$V_c(X) = \sum_{a_{N-1}} n_{a_{N-1}} |x_{a_{N-1}}|^{-1},$$

$$\delta \tilde{W}_z = i\Delta \tilde{W}_z - (\nabla \tilde{W}_z)^2 + 2i \left( \nabla \tilde{W}_z, \frac{\nabla A_z}{A_z} \right) + \frac{\Delta A_z}{A_z}.$$

Формальное решение уравнения (5.47) можно искать в виде ряда по степеням  $E^{-k/2}$ :

$$\tilde{W}_z(X) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(X) E^{-k/2-1/2}, \quad (5.48)$$

который, вообще говоря, имеет асимптотический характер при  $\sqrt{E}Z \rightarrow \infty$ .

Подставляя это разложение в уравнение (5.47) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $E^{-k/2-1/2}$ , получим рекуррентные соотношения для определения функций  $d_k(X)$ :

$$2(\nabla d_0, \nabla Z) = -V_c + A_z^{-1} \Delta A_z, \quad (5.49)$$

$$2(\nabla d_{k+1}, \nabla Z) = f(d_k). \quad (5.49')$$

Здесь

$$f(d_k) = i\Delta d_k - (\nabla d_k)^2 + 2i \left( \nabla d_k, \frac{\nabla A_z}{A_z} \right).$$

Решим эти уравнения. Обозначим через  $s = s(t)$  прямую с направляющим вектором  $\hat{K} = \nabla Z$ , проходящую при  $t = Z$  через рассматриваемую точку  $X$ . Пусть  $M$  — координата этой точки на трансверсальной поверхности  $Z = \text{const}$ . Точки  $X$ , на прямой  $s(t)$  задаются равенством  $X_t = t\hat{K} + M$ , где  $M = X - (\hat{K}, X)\hat{K}$ . Интегрируя уравнение (5.49) вдоль прямой  $s(t)$ , представим его решение в виде

$$d_0(X) = C_0(M) + W_z(X) + \delta f_0(X),$$

где  $C_0(M)$  — произвольная функция  $M$  и

$$W_z(X) = -\frac{1}{2} \int_{z_0}^z dt V_c(t\hat{K} + M),$$

$$\delta f_0(X) = \frac{1}{2} \int_{z_0}^z dt \frac{\Delta A_z}{A_z}(t\hat{K} + M),$$

где интегралы берутся вдоль отрезка траектории  $s(t)$  с концом в точке  $X$ . Аналогично находим, что коэффициенты  $d_{k+1}$  при  $k \geq 0$  даются равенствами

$$d_{k+1}(X) = \int_{z_0}^z dt f(d_k(t\hat{K} + M)).$$

Мы будем называть далее эйкональным приближение волновой функции, отвечающее траектории с направляющим вектором  $\nabla Z$ , старший член  $\Psi_z$  в разложениях (5.46) и (5.48)

$$\Psi_z(X) = f_z(M) A_z(X) \exp\{i\bar{E}Z + iW_z(X)\}. \quad (5.50)$$

Отметим, что векторные поля  $Z(X)$  и  $M(X)$  порождают криволинейную ортогональную систему координат в  $3(N-1)$ -мерном пространстве (переменные типа действие-угол), причем вектор  $X$  может быть представлен в виде суммы

$$X = Z\nabla Z + M,$$

где  $(\nabla Z, M) = 0$ .

В формуле (5.50) фиксирована зависимость функции  $\Psi_z$  от эйкональной переменной  $Z$ , а произвольные функции трансверсального векторного поля должны быть определены с помощью дополнительных условий. Мы найдем такие условия на основе свойства локальности уравнения Шредингера.

Перейдем к построению приближенных решений  $\Psi_z$  для указанных выше эйконалов трехчастичной задачи. Будем далее считать  $X$  шестимерным вектором,  $X \in \mathbf{R}^6$ .

Плоский эйконал  $Z$ ,  $Z = (\hat{P}, X)$ . Вектор  $X$  может быть записан в виде ортогональной суммы  $X = Z\hat{P} + M$ ,  $(P, M) = 0$ , где вектор  $M$  отвечает точкам на гиперплоскости  $\mathbf{R}^5$ , задаваемой уравнением  $(\hat{P}, X) = \text{const}$ . Не-

трудно видеть, что волновая функция в приближении плоского эйконала является искаженной плоской волной:

$$L_c = \exp \{i(X, P) + iW(X, P)\}. \quad (5.51)$$

Фаза  $W(X, P)$  дается равенством

$$W(X, P) = \sum_{\alpha} (2|k_{\alpha}|)^{-1} n_{\alpha} \ln |k_{\alpha}| \xi^{(\alpha)}, \quad (5.52)$$

где  $\xi^{(\alpha)} = |x_{\alpha}| - (x_{\alpha}, \hat{k}_{\alpha})$  — двухчастичные параболические переменные. Следующие по порядку члены в разложении (5.48) определяются из рекуррентных соотношений (5.49). Можно убедиться, что  $k$ -й коэффициент  $d_k(X)$ ,  $k \geq 1$ , имеет порядок  $O\left(\left(\sum_{\alpha} |k_{\alpha}| \xi^{(\alpha)}\right)^{-\frac{k+1}{2}}\right)$  при  $|k_{\alpha}| \xi^{(\alpha)} \rightarrow \infty$ . Уравнение Шредингера для  $L_c$  выполняется при этом с точностью до членов порядка  $\sum_{\alpha} (|k_{\alpha}| \xi^{(\alpha)})^{-\frac{k+1}{2}-2}$ . Отсюда следует, что ряд (5.48) теряет асимптотический характер в направлениях, где переменные  $|k_{\alpha}| \xi^{(\alpha)}$  в существенном ограничены.

Отметим, что в качестве приближения плоского эйконала можно взять также функцию  $C(M)L_c$ , где множитель  $C(M)$  является произвольной функцией переменных  $M$ .

**Сферический эйконал  $|X|$ .** Этот эйконал, как и в системе двух тел, порождает искаженную сферическую волну

$$Q_c(X, P) = f(\hat{X}) |X|^{-5/2} \exp \{i\sqrt{E}|X| + iW_0(X, P)\}, \quad (5.53)$$

где кулоновская фаза имеет вид суммы

$$W_0(X, P) = -\frac{|X|}{2\sqrt{E}} \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{|x_{\alpha}|} \ln 2\sqrt{E}|X|.$$

Трансверсальная поверхность  $Z(X) = \text{const}$  является в этом случае сферой.

**Однократный эйконал  $Z_{\alpha}$ .** Напомним, что эйконал  $Z_{\alpha}$ , описывающий процессы однократного столкновения частиц пары  $\alpha$ , равен сумме сферического и плоского двухчастичных эйконалов,  $Z_{\alpha} = E^{-1/2}(|k_{\alpha}| |x_{\alpha}| + (p_{\alpha}, y_{\alpha}))$ . Вектор  $X$  может быть представлен в виде ортогональной

суммы

$$X = Z_\alpha \hat{K}_\alpha + M_\alpha,$$

где вектор  $\hat{K}_\alpha$ , определяющий направление асимптотического движения системы, задается равенством

$$\hat{K}_\alpha = E^{-1/2} \{ |k_\alpha| \hat{x}_\alpha, p_\alpha \}. \quad (5.54)$$

Здесь использована система координат, связанная с парой  $\alpha$ .

В качестве ортогональных координат на поверхности  $Z_\alpha = \text{const}$  можно взять сферические координаты вектора  $x_\alpha$ , декартовы координаты  $u_\alpha$  проекции вектора  $y_\alpha$  на плоскость  $(p_\alpha, y_\alpha) = \text{const}$  и переменную

$$\omega_\alpha = E^{-1/2} (|k_\alpha| (\hat{p}_\alpha, y_\alpha) - |x_\alpha| |y_\alpha|).$$

При этом переменной  $\omega_\alpha$  отвечает направляющий вектор  $e_{\omega_\alpha}$ , который в указанной выше системе координат дается равенством

$$e_{\omega_\alpha} = E^{-1/2} \{ |k_\alpha| \hat{p}_\alpha, - |p_\alpha| \hat{x}_\alpha \}.$$

Векторное поле  $M_\alpha$  является функцией координат  $\hat{x}_\alpha$ ,  $u_\alpha$  и  $\omega_\alpha$ , причем справедливо равенство

$$|M_\alpha| = (u_\alpha^2 + \omega_\alpha^2)^{1/2}.$$

Ниже мы будем рассматривать совокупность переменных  $|x_\alpha|$  и  $y_\alpha$  как точку  $\tilde{M}_\alpha$  в четырехмерном пространстве  $\mathbf{R}^4$ ,  $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^3$ ,  $\tilde{M}_\alpha = \{|x_\alpha|, y_\alpha\}$ . Отметим, что  $|\tilde{M}_\alpha| = |X|$ . Можно показать, наконец, что уравнению непрерывности (5.47) удовлетворяет функция  $|x_\alpha|^{-1}$ .

Вычислим эйкональную фазу  $W_z$ . Рассмотрим интеграл

$$W_\alpha^{(\beta)} = - \frac{1}{2\sqrt{E}} \int_{s_\alpha} \frac{n_\beta dt}{|x_\beta(t, M_\alpha)|}, \quad (5.55)$$

где интегрирование ведется вдоль прямой  $s_\alpha(t) = t\hat{K}_\alpha + M_\alpha$ . Вначале положим  $\alpha = \beta$ . Так как согласно (5.54) справедливо равенство  $x_\alpha(t, M_\alpha) = t|k_\alpha|E^{-1/2}$ , этот интеграл совпадает с двухчастичной фазой

$$W_\alpha^{(\alpha)} = - \frac{n_\alpha}{2|k_\alpha|} \ln 2|k_\alpha||x_\alpha|.$$

Пусть, далее,  $\alpha \neq \beta$ . Выразим  $x_\beta(t)$  через координаты  $x_\alpha(t)$  и  $y_\alpha(t)$  с помощью формул (3.22), учитывая при этом равенство (5.54). Получим

$$x_\beta(t, M_\alpha) = tk_\beta^{(\alpha)} E^{-1/2} + x_\beta^{(\alpha)}, \quad (5.56)$$

где

$$k_\beta^{(\alpha)} = c_{\beta\alpha} |k_\alpha| \hat{x}_\alpha + s_{\beta\alpha} p_\alpha, \quad x_\beta^{(\alpha)} = x_\beta - Z_\alpha k_\beta^{(\alpha)} E^{-1/2},$$

причем вектор  $x_\beta^{(\alpha)}$  является функцией лишь векторного поля  $M_\alpha$ ,  $x_\beta^{(\alpha)} = x_\beta^{(\alpha)}(M_\alpha)$ . Подставляя (5.56) в подынтегральное выражение (5.55) и беря интегралы, придем к представлению

$$W_\alpha^{(\beta)} = -\frac{n_\beta}{2 |k_\beta^{(\alpha)}|} \ln(|k_\beta^{(\alpha)}| |x_\beta| + (k_\beta^{(\alpha)}, x_\beta)). \quad (5.57)$$

Выбирая иначе начало пути интегрирования, можно получить для интеграла (5.55) представление в виде  $-W_\alpha^{(\beta)}(x_\beta, -k_\beta^{(\alpha)})$ , где функция  $W_\alpha^{(\beta)}$  дается равенством (5.57). При этом разность между функциями  $W_\alpha^{(\beta)}(x_\beta, k_\beta^{(\alpha)})$  и  $-W_\alpha^{(\beta)}(x_\beta, -k_\beta^{(\alpha)})$  зависит лишь от  $M_\alpha$ :

$$W_\alpha^{(\beta)}(x_\beta, k_\beta^{(\alpha)}) + W_\alpha^{(\beta)}(x_\beta, -k_\beta^{(\alpha)}) = -\frac{n_\beta}{|k_\beta^{(\alpha)}|} \ln |k_\beta^{(\alpha)}| |x_\beta^{(\alpha)}|.$$

Отметим, наконец, что мы можем записать импульсы  $k_\beta^{(\alpha)}$  в виде градиентов по соответствующим координатам:

$$k_\beta^{(\alpha)} = \nabla \bar{E} \nabla_{x_\beta} Z_\alpha.$$

Итак, однократному эйконалу  $Z_\alpha$  отвечает приближенное решение уравнения Шредингера

$$\Psi_\alpha(X, P) = C_\alpha(M_\alpha) \frac{\exp \{i \sqrt{E} Z_\alpha + i W_\alpha\}}{|x_\alpha|}, \quad (5.58)$$

где кулоновская фаза  $W_\alpha$  равна сумме интегралов  $W_\alpha^{(\beta)}$ ,  $W_\alpha = \sum_\beta W_\alpha^{(\beta)}$ . Неизвестная функция трансверсального векторного поля  $C_\alpha(M_\alpha)$  будет определена ниже.

Двукратный эйконал  $Z_{\alpha\beta}$ . Эйконал  $Z_{\alpha\beta}$ , отвечающий процессам последовательных двухчастичных столкновений ( $\beta \rightarrow \alpha$ ), выражается в терминах кинематических переменных равенством (4.46). Соответственно вектор  $X$

представляем в виде суммы  $X = \hat{K}_{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}$ , где направляющий вектор  $\hat{K}_{\alpha\beta}$  в системе координат, ассоциированной с парой  $\alpha$ , равен  $K_{\alpha\beta} = \{|k_{\alpha\beta}| \hat{x}_\alpha, p_{\alpha\beta}\}$ .

Можно показать, что углы  $\theta_{\alpha\beta}$  и  $\varphi_{\alpha\beta}$ , которые задаются соотношениями (4.48), единичный вектор  $\hat{x}_\alpha$  и переменная  $\omega_{\alpha\beta}$ ,  $\omega_{\alpha\beta} = (X^2 - Z_{\alpha\beta}^2)^{1/2}$ , образуют ортогональную криволинейную систему координат на поверхности  $Z_{\alpha\beta} = \text{const}$ . При этом прямым вычислением коэффициентов Ламэ можно убедиться, что оператор Лапласа в новых переменных действует согласно формуле

$$\begin{aligned} \Delta f = & \\ = & \frac{A_{\alpha\beta}}{\sqrt{\sin \theta_{\alpha\beta} |x_\alpha| |y_\alpha|}} \left( \frac{\partial^2}{\partial Z_{\alpha\beta}^2} + \frac{\partial^2}{\partial M_{\alpha\beta}^2} \right) \frac{\sqrt{\sin \theta_{\alpha\beta} |x_\alpha| |y_\alpha|}}{A_{\alpha\beta}} f + \\ & + O(|x_\alpha|^{-1} |y_\alpha|^{-1} |X|^{-2}), \quad (5.59) \end{aligned}$$

где функция  $A_{\alpha\beta}$  определена равенством (4.52) в § 2 предыдущей главы. Отсюда следует, в частности, что функция  $|x_\alpha|^{-1} |y_\alpha|^{-1} A_{\alpha\beta}$  удовлетворяет с точностью до членов порядка  $O(|x_\alpha|^{-1} |y_\alpha|^{-1} |X|^{-2})$  уравнению непрерывности (5.47).

Вычислим интегралы

$$W_{\alpha\beta}^{(\gamma)} = - \frac{n_\gamma}{2 \sqrt{E}} \int_{s_{\alpha\beta}} \frac{dt}{|x_\gamma(t, M_{\alpha\beta})|},$$

где интегрирование ведется вдоль прямой  $s_{\alpha\beta} = t \hat{K}_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}$ . При  $\gamma = \alpha$ , как и в случае однократного эйконала, легко находим

$$W_{\alpha\beta}^{(\alpha)} = - \frac{n_\alpha}{2 |k_{\alpha\beta}|} \ln 2 |k_{\alpha\beta}| |x_\alpha|. \quad (5.60)$$

При  $\gamma \neq \alpha$  имеют место равенства

$$x_\gamma(t, M_{\alpha\beta}) = t k_{\gamma, \alpha\beta} E^{-1/2} + x_{\gamma, \alpha\beta}, \quad (5.61)$$

где  $k_{\gamma, \alpha\beta} = \nabla_{x_\gamma} Z_{\alpha\beta}$  или, в явном виде,

$$k_{\gamma, \alpha\beta} = c_{\gamma\alpha} |k_{\alpha\beta}| \hat{x}_\alpha + s_{\gamma\alpha} p_{\alpha\beta}, \quad x_{\gamma, \alpha\beta} = x_\gamma - Z_{\alpha\beta} k_{\gamma, \alpha\beta} E^{-1/2}.$$

По определению полагается  $k_{\alpha, \alpha\beta} = k_{\alpha\beta}$ . Подставляя (5.61) в подынтегральное выражение  $W_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$ , получим, что

$$W_{\alpha\beta}^{(\gamma)} = - \frac{n_\gamma}{2 |k_{\gamma, \alpha\beta}|} \ln (|k_{\gamma, \alpha\beta}| |x_\gamma| + (k_{\gamma, \alpha\beta}, x_\gamma)) \quad (5.62)$$

или с точностью до слагаемого

$$-\frac{n_\gamma}{2|n_{\gamma,\alpha\beta}|} \ln 2|k_{\gamma,\alpha\beta}||x_{\gamma,\alpha\beta}|;$$

зависящего только от трансверсальных координат  $M_{\alpha\beta}$ , можем взять в качестве эйкональной фазы функцию —  $W_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(x_\gamma, -k_{\gamma,\alpha\beta})$ .

Таким образом, двукратному эйконалу  $Z_{\alpha\beta}$  отвечает следующее асимптотическое решение уравнения Шредингера:

$$\Psi_{\alpha\beta}(X, P) = \frac{C_{\alpha\beta}(M_{\alpha\beta})}{|x_\alpha||y_\alpha|} A_{\alpha\beta}(X) \exp\{i\sqrt{E}Z_{\alpha\beta} + iW_{\alpha\beta}\}. \quad (5.63)$$

Здесь кулоновская фаза  $W_{\alpha\beta}$  равна сумме интегралов (5.60) и (5.62):

$$W_{\alpha\beta} = \sum_\gamma W_{\alpha\beta}^{(\gamma)}.$$

Итак, мы построили эйкональные асимптотические приближения, отвечающие волновым функциям, которые сопровождаются значком (+). Чтобы получить формулы для волновых функций типа  $\Psi^{(-)}$ , следует воспользоваться соотношением  $\Psi^{(-)}(X, P) \sim \Psi^{(+)*}(X, -P)$ , где в качестве функций  $\Psi^{(+)}$  берутся эйкональные приближения (5.51) — (5.63). Переходим далее к анализу асимптотики функции  $\Psi_0$ .

**Асимптотика функций  $\Psi_0$ .** Мы построим асимптотическое решение уравнения Шредингера, которое нормировано на искаженную плоскую волну с единичной амплитудой (5.51). В согласии с принятой выше гипотезой мы будем искать асимптотику этой волновой функции в виде суммы эйкональных приближений, отвечающих перечисленным выше эйконам задачи трех тел:

$$\Psi_0(X, P) \sim L_c^! + \sum_\alpha \Psi_\alpha + \sum_{\alpha \neq \beta} \Psi_{\alpha\beta} + \tilde{\Phi}_0. \quad (5.64)$$

Нам, однако, неизвестны амплитуды  $C_\alpha(M_\alpha)$  и  $C_{\alpha\beta}(M_{\alpha\beta})$  для приближений однократного и двукратного эйконалов. Для их определения мы применим метод сшивания асимптотик.

Будем говорить, что гладкая функция  $F$  удовлетворяет в окрестности направления  $\Omega$  условиям сшивания с эйкональным приближением  $\Psi_z$ , если она подчиняется

уравнению Шредингера  $(H - E)F = 0$  с точностью до быстро убывающих при  $|X| \rightarrow \infty$  членов и переходит в соответствующее эйкональное приближение при удалении  $X$  от направления  $\Omega$ . Мы будем требовать, чтобы поправочное слагаемое убывало быстрее произведения  $Z^{-1}F$  функции  $F$  на обратную степень эйконала.

В теории рассеяния широко используется простейший вариант метода сшивания решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае в точке, где производится сшивание, сравнивают решения, которые содержат конечное число неопределенных коэффициентов. Последние, в результате, определяются путем решения системы алгебраических уравнений. Процедура сшивания значительно более сложна в случае уравнений в частных производных, когда произвол в общем решении не сводится к конечному числу неопределенных постоянных. Метод сшивания в этом случае опирается на принцип локальности дифференциальных уравнений, который дает возможность строить решения в «малом». Утверждение, которое называют принципом локальности, в данном случае состоит в том, что свойство решения в окрестности многообразия  $\Omega$ , где производится сшивание, зависит только от характеристик потенциала в этой окрестности и от вида решения на  $\Omega$ . Это обстоятельство позволяет решить задачу сшивания для уравнения Шредингера путем сравнения асимптотики решений дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, которые получаются, если отбросить малые по величине возмущения, с эйкональными асимптотиками. Такой прием называется методом эталонного уравнения. В задаче трех заряженных частиц он принимает специальную форму, и мы детально обсудим возникающие здесь вопросы в следующих параграфах. В этом параграфе мы покажем сперва, что младшие члены асимптотического разложения функций  $\Psi_0$ , вплоть до искаженных сферических волн, могут быть однозначно определены из условий сшивания на направлениях  $\Omega_\alpha$ , где частицы попарно близки одна к другой.

Выкладки мы приведем на примере системы, в которой только две частицы имеют заряды. Это предположение значительно упрощает описываемые здесь конструкции. Все построения, однако, легко обобщаются на случай, когда заряжены все три частицы. Мы обсудим необходимые для такого обобщения модификации вычис-

лений в конце этого параграфа. Там же мы приведем окончательные формулы для общего случая.

Для определенности предположим, что заряд частицы 1 равен нулю, так что  $n_2 = n_3 = 0$ , а  $n_1 \neq 0$ . Кроме того, при выводе асимптотических формул будем дополнительно считать, что двухчастичные гамильтонианы  $k_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) не имеют связанных состояний, а относительные импульсы налетающих частиц не равны нулю,  $k_\alpha \neq 0$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Из первого предположения следует, в частности, что  $n_1 > 0$ . Асимптотические формулы в случае разноименно заряженных частиц мы опишем в конце этого параграфа.

Вдали от особых направлений асимптотика слагаемого  $L_c$  имеет вид искаженной плоской волны:

$$L_c \sim \exp\{i(X, P) + iW\}, \quad W = \frac{n_1}{2|k_1|} \ln |k_1| \xi^{(1)}. \quad (5.65)$$

Как уже отмечалось выше, эта формула теряет смысл на направлениях рассеяния вперед пары 1, где переменная  $\xi^{(1)}$  ограничена. Легко видеть, однако, что при  $|x_\alpha| \rightarrow \infty$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) переменные делятся и уравнение Шредингера имеет следующее решение  $\Psi_c^{(1)}(X, P)$ , переходящее при  $\xi^{(1)} \rightarrow \infty$  в искаженную плоскую волну:

$$\Psi_c^{(1)}(X, P) = \exp\{i(X, P)\} \varphi_c(k_1, \xi^{(1)}). \quad (5.66)$$

Здесь функция  $\varphi_c(k_1, \xi^{(1)})$  является решением задачи рассеяния для двух частиц и выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию  $\Phi(a, b, t)$  равенствами (5.1), (5.2). Подчеркнем, что функция  $\Psi_c^{(1)}$  является точным решением трехчастичного уравнения Шредингера (5.45), в котором взаимодействие задается единственным кулоновским потенциалом  $n_1|x_1|^{-1}$ .

Таким образом, старшие члены  $\Psi_0$  в особом направлении, где ограничена переменная  $\xi^{(1)}$ , описываются с помощью функции  $\Psi_c^{(1)}$ :

$$\Psi_0(X, P) \sim \Psi_c^{(1)}(X, P).$$

При  $\xi^{(1)} \rightarrow \infty$  функция  $\Psi_c^{(1)}$  имеет вид суммы искаженной плоской волны  $L_c$  и слагаемого  $\varphi_c^{(1)}$ , отвечающего однократному эйконалу:

$$\varphi_c^{(1)}(X, P) = f_c(\hat{x}_1, k_1) \frac{\exp\{i\sqrt{E}Z_1 + iW_1\}}{|x_1|}. \quad (5.67)$$

Здесь  $f_c$  — двухчастичная кулоновская амплитуда рассеяния, задаваемая равенством (5.5).

Рассмотрим уравнение Шредингера в областях  $\Omega_\alpha$ , где частицы попарно близки одна к другой.

Если точка  $X$  расположена в области  $\Omega_1$ , то асимптотически, при  $|X| \rightarrow \infty$ , все потенциалы, кроме  $v_1(x_1)$ , обращаются в нуль и уравнение Шредингера

$$\left( -\Delta_{x_1} - \Delta_{y_1} + v_1^{(s)}(x_1) + n_1 |x_1|^{-1} - E \right) \Psi = 0$$

имеет решение

$$\Psi = e^{i(p_1 \cdot y_1)} \Psi_1(x_1, k_1),$$

которое может быть найдено методом разделения переменных. Через  $\Psi_1(x_1, k_1)$  здесь обозначена волновая функция, отвечающая гамильтониану  $h_1 = h_0 + v_1$ . При  $\xi^{(1)} \rightarrow \infty$  эта функция имеет вид суммы искаженных трехмерных плоских и сферических волн, а соответствующая амплитуда рассеяния  $f_1(\hat{x}_1, k_1)$  равна сумме короткодействующих и кулоновской частей (5.22).

Сравнивая равенства (5.58), (5.21) и (5.67), приходим к заключению, что вдали от направления, где переменная  $\xi^{(1)}$  ограничена, слагаемое  $\Psi_0$ , отвечающее эйконалу  $\xi^{(1)}$ , дается формулой (5.58), где  $C_1(M_1) = f_1(\hat{x}_1, k_1)$ .

Определим далее амплитуды  $C_\alpha(M_\alpha)$  при  $\alpha \neq 1$ . Пусть точка  $X$  лежит в области  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha \neq 1$ . Используя формулы (3.22), выразим вектор  $x_1$  через  $x_\alpha$  и  $y_\alpha$  и разложим кулоновский потенциал  $n_1 |x_1|^{-1}$  в ряд по малому параметру  $|x_\alpha| |y_\alpha|^{-1}$ . Получим равенство

$$\frac{n_1}{|x_1|} = \frac{n_{1\alpha}}{|y_\alpha|} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \theta_\alpha) \left( \frac{|x_\alpha| c_{1\alpha}}{|y_\alpha| s_{1\alpha}} \right)^k, \quad \cos \theta_\alpha = (\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha), \quad (5.68)$$

где  $n_{1\alpha} = n_1 |s_{1\alpha}|^{-1}$  и через  $P_k(\zeta)$  обозначены полиномы Лежандра. При построении старшего члена асимптотики волновой функции будем учитывать лишь первое слагаемое в этом разложении. Тем самым построенное решение будет удовлетворять уравнению Шредингера в  $\Omega_\alpha$  с точностью до членов порядка  $|x_\alpha| |y_\alpha|^{-2}$ .

Будем искать решение уравнения Шредингера в области  $\Omega_\alpha$  при  $\alpha \neq 1$ , переходящее при  $|x_\alpha| \rightarrow \infty$  в искаженную плоскую волну  $L_c$ . Подставляя сумму  $\Psi_c^{(1)} + \Phi_\alpha$

в уравнение Шредингера, получим в старшем порядке следующее уравнение для  $\Phi_\alpha$ :

$$\left( -\Delta_{x_\alpha} - \Delta_{y_\alpha} + v_\alpha(x_\alpha) + \frac{n_{1\alpha}}{|y_\alpha|} - E \right) \Phi_\alpha = -v_\alpha(x_\alpha) \Psi_c^{(1)}. \quad (5.69)$$

Чтобы описать решение этого уравнения, введем в рассмотрение ряд функций.

Пусть, как и выше,  $\psi_\alpha(x_\alpha, k_\alpha)$  — волновые функции двухчастичного гамильтониана  $h_\alpha$ ,  $h_\alpha = h_0 + v_\alpha$ , и  $f_\alpha(\hat{x}_\alpha, k_\alpha)$  — амплитуда рассеяния для  $h_\alpha$ . Пусть, далее,  $\psi_\alpha^c(y_\alpha, p_\alpha)$  — волновые функции модельного двухчастичного гамильтониана  $h_\alpha^c$ , отвечающего эффективному кулоновскому взаимодействию этой пары с третьей частицей,

$$h_\alpha^c f(y_\alpha) = (-\Delta_{y_\alpha} + n_{1\alpha} |y_\alpha|^{-1}) f(y_\alpha). \quad (5.70)$$

Эти функции выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию  $\Phi(a, b, t)$  формулами (5.1), (5.2), где вместо величин  $n_1$ ,  $k_1$  и  $x_1$  следует подставить переменные  $n_{1\alpha}$ ,  $p_\alpha$  и  $y_\alpha$ . Обозначим через  $R_\alpha^c(X, X', z)$  функцию Грина оператора энергии  $H_\alpha^c$ , порожденного уравнением Шредингера (5.69):

$$H_\alpha^c = h_\alpha + h_\alpha^c. \quad (5.71)$$

Так как переменные в этом уравнении делятся, функцию Грина можно представить в виде контурного интеграла:

$$R_\alpha^c(z) = (2\pi i)^{-1} \oint r_\alpha(\zeta) r_\alpha^c(z - \zeta) d\zeta, \quad (5.71')$$

где через  $r_\alpha(\zeta)$  и  $r_\alpha^c(\zeta)$  обозначены двухчастичные функции Грина для операторов  $h_\alpha$  и  $h_\alpha^c$  соответственно.

Пусть  $\chi_1^F(\xi^{(1)})$  — характеристическая функция особого направления, где переменная  $\xi^{(1)}$  ограничена:

$$\chi_1^F(\xi^{(1)}) = \begin{cases} 1, & \xi^{(1)} \leqslant (1 + |x_1|)^v, \\ 0, & \xi^{(1)} \geqslant (1 + |x_1|)^{v'}, \end{cases} \quad v > 0, \quad v < v' < 2/3.$$

Используя соотношение между функциями  $\Phi(a, b, t)$

и  $\Psi(a, b, t)$ :

$$\begin{aligned}\Phi(a, b, it) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} e^{iat\pi} \Psi(a, b, it) + \\ &+ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{it} e^{i\pi(a-b)} \Psi(b-a, b, -it), \quad t > 0,\end{aligned}$$

представим функцию  $\Psi_c^{(1)}$  в виде суммы

$$\Psi_c^{(1)}(X, P) = (\varphi_c^{(1)}(x_1, k_1) + \varphi_c^{(2)}(x_2, k_2)) e^{i(X, P)}, \quad (5.72)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_c^{(1)}(x_1, k_1) &= \chi_1^F(\xi_1) \Psi(-i\eta_1, 1, i|k_1|\xi^{(1)}) - \\ &- \frac{\Gamma(1+i\eta_1)}{\Gamma(-i\eta_1)} e^{i|k_1|\xi^{(1)}} \Psi(1+i\eta_1, 1-i|k_1|\xi^{(1)}),\end{aligned}$$

$$\varphi_c^{(2)}(x_1, k_1) = (1 - \chi_1^F(\xi_1)) \Psi(-i\eta_1, 1, i|k_1|\xi^{(1)}).$$

Нетрудно видеть, что функция  $\varphi_c^{(1)}$  является старшей по отношению к  $\varphi_c^{(2)}$  при  $|x_1| \rightarrow \infty$ . При этом вдали от особого направления, когда  $\xi^{(1)} \rightarrow \infty$ , справедливы соотношения

$$\varphi_c^{(1)} = O(1), \quad \varphi_c^{(2)} = O((\xi^{(1)})^{-1}).$$

В соответствии с этим представлением правая часть уравнения (5.69) может быть записана в виде суммы двух слагаемых. Мы рассмотрим сначала уравнение в старшем порядке:

$$(H_\alpha^c - E) \Phi^{(1)}(X) = -v_\alpha(x_\alpha) \varphi_c^{(1)}(x_1) e^{i(X, P)}, \quad (5.73)$$

а затем в младшем порядке:

$$(H_\alpha^c - E) \Phi^{(2)}(X) = -v_\alpha(x_\alpha) \varphi_c^{(2)}(x_1) e^{i(X, P)}. \quad (5.74)$$

Вследствие линейности решение (5.69) дается суммой  $\Phi_\alpha(X, P) = \Phi^{(1)}(X) + \Phi^{(2)}(X)$ .

Решение первого уравнения можно представить в виде интеграла

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)}(X) &= \\ &= -\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int R_\alpha^c(X, X', E + ie) v_\alpha(x'_\alpha) \varphi_c^{(1)}(x'_1) e^{i(X', P)} dX'.\end{aligned} \quad (5.75)$$

Так как это уравнение должно выполняться лишь асимптотически, при  $|y_\alpha| \rightarrow \infty$ , интегрирование относительно  $X'$  можно вести только по области, где  $|y_\alpha - y'_\alpha| \leq |y_\alpha|^v$ ,  $v < 1$ .

Для того чтобы спиць функцию  $\Phi^{(1)}$  с эйкональным приближением (5.58) и найти коэффициенты  $C_\alpha(M_\alpha)$ , исследуем асимптотику интеграла (5.75) при  $|x_\alpha| \rightarrow \infty$ . Заметим сначала, что в области  $\Omega$  параболическая координата  $\xi^{(1)}$  может быть представлена в виде суммы

$$\xi^{(1)} = \tilde{\xi}_\alpha^{(1)} + c_{1\alpha}(x_\alpha, \hat{y}_\alpha - \hat{k}_1) + O(|x_\alpha|^2 |y_\alpha|^{-1}), \quad (5.76)$$

где переменная  $\tilde{\xi}_\alpha^{(1)} = |s_{1\alpha} y_\alpha| - s_{1\alpha}(\hat{k}_1, y_1)$  является старшей при всех направлениях вектора  $y_\alpha$  в силу неравенства  $|(x_\alpha, \hat{y}_\alpha - \hat{k}_1)| \leq c \tilde{\xi}_\alpha^{(1)} |x_\alpha| |y_\alpha|^{-1}$ . Отсюда вытекает, что при  $|y_\alpha| \rightarrow \infty$  функция  $\Phi_c^{(1)}$  с точностью до членов порядка  $O(|y_\alpha|^{-v})$ ,  $0 < v < 1$ , зависит лишь от координаты  $\tilde{\xi}_\alpha^{(1)}$ .

Поскольку потенциал  $v_\alpha(x_\alpha)$  является быстро убывающей функцией, главный член асимптотики интеграла (5.75) при  $|x_\alpha| \rightarrow \infty$  порождается той частью области интегрирования, где выполняется неравенство  $|x'_\alpha| < |x_\alpha|^v$ ,  $v < 1/2$ . Вспоминая асимптотическую формулу (4.17), которая выполняется при указанных выше условиях, и интегральное представление для амплитуды рассеяния (4.18), получим соотношение

$$\Phi^{(1)}(X, P) \sim \frac{f_\alpha(\hat{x}_\alpha, k_\alpha)}{|x_\alpha|} \widetilde{\Phi}^{(1)}(X, P), \quad (5.77)$$

где функция  $\widetilde{\Phi}^{(1)}$  задается интегралом

$$\widetilde{\Phi}^{(1)}(X, P) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dt t e^{it|x_\alpha|} u_1(y_\alpha, p_\alpha, t) \quad (5.78)$$

и

$$u_1(y_\alpha, p_\alpha, t) =$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int dy'_\alpha r_\alpha^c(y_\alpha, y'_\alpha, E - t^2 + i\epsilon) e^{i(p_\alpha, y'_\alpha)} \Phi_c^{(1)}(\tilde{\xi}_\alpha^{(1)}, k_1).$$

Заметим, далее, что, поскольку переменные  $y_\alpha$  и  $y'_\alpha$  расположены не слишком далеко одна от другой,  $|y_\alpha - y'_\alpha| = O(|y_\alpha|^v)$ , функция  $r_\alpha^{(c)}$  асимптотически совпадает со

свободной функцией Грина. Предположим, что  $\tilde{\xi}_\alpha^{(1)} \rightarrow \infty$ . Тогда в старшем порядке функция  $\Phi_c^{(1)}$  будет зависеть только от  $y_\alpha$ , и поэтому данную функцию можно вынести за знак интеграла. В результате интеграл явно вычисляется, и мы получаем представление

$$u_1(y_\alpha, p_\alpha, t) \sim \frac{e^{i(p_\alpha \cdot y_\alpha)}}{t^2 + p_\alpha^2 - E - i0} \Phi_c^{(1)}(\tilde{\xi}_\alpha^{(1)}, k_1).$$

Подставим это выражение в (5.78). При  $|x_\alpha| \rightarrow \infty$  путь интегрирования по  $t$  можно замкнуть в верхней полуплоскости с точностью до членов порядка  $O(|x_\alpha|^{-1-\nu})$ ,  $\nu > 0$ . Вычисляя интеграл по вычетам, получим формулу

$$\tilde{\Phi}^{(1)}(X, P) \sim e^{i\sqrt{E}Z_\alpha} \Phi_c^{(1)}(\tilde{\xi}_\alpha^{(1)}, k_1). \quad (5.79)$$

Заметим далее, что в области  $\Omega_\alpha$  переменная  $\tilde{\xi}_\alpha^{(1)}$  с точностью до членов порядка  $O(|x_\alpha|^2 |y_\alpha|^{-1})$  выражается в терминах векторного поля  $M_\alpha$  равенством

$$\tilde{\xi}_\alpha^{(1)} = \xi_1^{(\alpha)} + O(|x_\alpha|^2 |y_\alpha|^{-1}),$$

$$\text{где } \xi_1^{(\alpha)} = |u_1^\alpha| - (u_1^\alpha, k_1) \operatorname{sign} s_{1\alpha}.$$

Здесь через  $u_1^\alpha$  обозначено векторное поле, задаваемое соотношением

$$u_1^\alpha = |k_\alpha|^{-1} (|k_\alpha| |y_\alpha - p_\alpha| |x_\alpha|).$$

Так как  $\xi_1^{(\alpha)} \rightarrow \infty$ , мы можем заменить функцию  $\Phi_c^{(1)}$  асимптотикой. Получим в старшем порядке формулу

$$\Phi^{(1)}(X, P) \sim$$

$$\sim \frac{f_\alpha(\tilde{x}_\alpha, k_\alpha)}{|x_\alpha|} \exp \{i\sqrt{E}Z_\alpha + i\delta\tilde{W}_1^\alpha + i\eta_1 \ln |M_\alpha|\}, \quad (5.80)$$

где слагаемое  $\delta\tilde{W}_1^\alpha$  зависит только от угловых переменных  $\tilde{M}_\alpha$ :

$$\delta\tilde{W}_1^\alpha = \eta_1 \ln |M_\alpha|^{-1} |s_{1\alpha} k_1| \xi_1^\alpha, \quad \eta_1 = \frac{n_1}{2 |k_1|}.$$

Рассмотрим теперь эйкональное приближение  $\Psi_\alpha$  на границе области  $\Omega$ . Заметим, что старшее слагаемое эйконала  $Z_\alpha$  в  $\Omega_\alpha$  определяется величиной  $Z_{\alpha 0} = |p_\alpha| |k_\alpha|^{-1} \omega_\alpha$ . Для кулоновской фазы  $W_\alpha^{(1)}$  в старшем порядке получим

в этом случае следующее представление:

$$W_{\alpha}^{(1)} = -\frac{n_1}{2|k_1^{(\alpha)}|} \ln |M_{\alpha}| + \widetilde{W}_{\alpha}^{(1)}. \quad (5.81)$$

Здесь

$$\widetilde{W}_{\alpha}^{(1)} = -\frac{n_1}{2|k_1^{(\alpha)}|} \ln |M_{\alpha}|^{-1} k_1^{(\alpha)} \zeta_1^{(\alpha)},$$

и через  $\zeta_1^{(\alpha)}$  обозначена параболическая координата

$$\zeta_1^{(\alpha)} = |x_1^{(\alpha_0)}| + (x_1^{(\alpha_0)}, \hat{k}_1^{(\alpha)}), \quad x_1^{(\alpha_0)} = x_1 - |x_{\alpha}| |k_{\alpha}|^{-1} |k_1^{(\alpha)}|$$

Подчеркнем, что фаза  $W_{\alpha}^{(1)}$  зависит только от координаты  $M_{\alpha}$  на поверхности  $Z_{\alpha} = \text{const}$  и не меняется при движении точки  $X$  по траектории с направляющим вектором  $\nabla Z_{\alpha}$ . При этом вся зависимость от величины вектора  $M_{\alpha}$  сосредоточена в первом слагаемом (5.81), а фаза  $\widetilde{W}_{\alpha}^{(1)}$  является функцией лишь угловых переменных  $\hat{M}_{\alpha}$ .

Сравнивая асимптотические представления (5.58) и (5.80) и учитывая при этом соотношение (5.81), придем к заключению, что при  $\zeta_1^{(\alpha)} \rightarrow \infty$  амплитуда  $C_{\alpha}(M_{\alpha})$  дается равенством

$$C_{\alpha}(M_{\alpha}) = f_{\alpha}(\hat{x}_{\alpha}, k_{\alpha}) \exp \{ia_{\alpha}^{(1)} \ln |M_{\alpha}| + i\delta W_{\alpha}^{(1)}\}, \quad (5.82)$$

где

$$a_{\alpha}^{(1)} = \frac{n_1}{2|k_1|} + \frac{n_1}{2|k_1^{(\alpha)}|}, \quad \delta W_{\alpha}^{(1)} = \delta \widetilde{W}_1^{(\alpha)} - \widetilde{W}_{\alpha}^{(1)}.$$

Отметим, что формула (5.82) теряет смысл в областях, где фаза обращается в бесконечность.

Рассмотрим далее уравнение (5.74). При  $|y_{\alpha}| \rightarrow \infty$  функция  $e^{i(X, P)} \varphi_c^{(2)}$  имеет следующий асимптотический вид:

$$\begin{aligned} e^{i(X, P)} \varphi_c^{(2)}(X, P) &\sim \frac{\tilde{f}_c(s_{1\alpha} y_{\alpha}, k_1)}{|s_{1\alpha} y_{\alpha}|} \exp \{i(p_{\alpha_0}^{(1)}, y_{\alpha}) + \\ &+ i(k_{\alpha_0}^{(1)}, x_{\alpha}) - i\eta_1 \ln 2|k_1| |s_{1\alpha} y_{\alpha}|\}, \end{aligned} \quad (5.83)$$

где через  $\tilde{f}_c$  обозначена кулоновская амплитуда, обрезан-

ная в направлении рассеяния вперед:

$$\tilde{f}_c(s_{1\alpha} \hat{y}_\alpha, k_1) = (1 - \chi_1(\xi_{1\alpha}^{(1)})) f_c(s_{1\alpha} \hat{y}_\alpha, k_1),$$

$$\xi_{1\alpha}^{(1)} = |s_{1\alpha} y_\alpha| - (\hat{k}_1, s_{1\alpha} y_\alpha),$$

$$p_{\alpha 0}^{(1)} = -s_{\alpha 1}|k_1|\hat{y}_\alpha + c_{\alpha 1}p_1, \quad k_{\alpha 0}^{(1)} = s_{\alpha 1}p_1 + c_{\alpha 1}|k_1|s_{1\alpha} \hat{y}_\alpha.$$

Обозначим через  $\Phi_{\alpha c}^{(2)}$  функцию, которая получается умножением правой части (5.83) на  $|s_{1\alpha} y_\alpha|$ , и представим решение уравнения (5.74) в виде

$$\Phi^{(2)}(X, P) = |s_{1\alpha} y_\alpha|^{-1}(\tilde{\Phi}^{(2)}(X, P) + O(|x_\alpha||y_\alpha|^{-2})),$$

где функция  $\tilde{\Phi}^{(2)}$  дается формулой (5.75), в которой следует произвести замену  $\Phi_c^{(1)} \rightarrow \Phi_{\alpha c}^{(2)}$ . Асимптотика получившегося интеграла при  $|x_\alpha| \rightarrow \infty$  может быть исследована таким же путем, как мы это сделали при вычислении аналогичного интеграла (5.75). Справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(X, P) \sim & f_\alpha(\hat{x}_\alpha, k_{\alpha 0}^{(1)}) \tilde{f}_c(\hat{q}_{1\alpha}, k_1) |s_{1\alpha} y_\alpha|^{-1} |x_\alpha|^{-1} \times \\ & \times \exp\{i\sqrt{E}Z_{\alpha 1} + i\eta_1 \ln|M_{\alpha 1}| + i\widetilde{W}_1^{(\alpha 1)}\}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

где фаза  $\widetilde{W}_1^{(\alpha 1)}$  дается равенством

$$\widetilde{W}_1^{(\alpha 1)} = -\eta_1 \ln 2|k_1 s_{1\alpha}| \sin \Xi_{\alpha 1}, \quad \cos \Xi_{\alpha 1} = \frac{(p_{\alpha 1}, \hat{q}_{1\alpha})}{\sqrt{E}}.$$

Рассмотрим теперь эйкональное приближение  $\Psi_{\alpha 1}$  в области  $\Omega_\alpha$ . Заметим сначала, что импульсы  $k_{\alpha 0}^{(1)}$  и  $p_{\alpha 0}^{(1)}$  с точностью до величин порядка  $|x_\alpha||y_\alpha|^{-2}$  совпадают здесь с импульсами  $k_{\alpha 1}$  и  $p_{\alpha 1}$ , определяющими двукратный эйконал  $Z_{\alpha 1}$ ,

$$k_{\alpha 0}^{(1)} = k_{\alpha 1} + O(|x_\alpha||y_\alpha|^{-2}), \quad p_{\alpha 0}^{(1)} = p_{\alpha 1} + O(|x_\alpha||y_\alpha|^{-2}).$$

Последний в старшем порядке равен величине

$$Z_{\alpha 1}^{(0)} = |M_{\alpha 1}| \operatorname{ctg} \Xi_{\alpha 1}.$$

Поэтому логарифмическая фаза  $W_{\alpha 1}^{(1)}$  может быть представлена в виде

$$W_{\alpha 1}^{(1)} = \frac{n_1}{2|k_{1,\alpha 1}|} \ln|M_{\alpha 1}| + \widetilde{W}_{\alpha 1}^{(1)} + O(|x_\alpha||y_\alpha|^{-2}), \quad (5.85)$$

где

$$\widetilde{W}_{\alpha 1}^{(1)} = - \frac{n_1}{2|k_{1,\alpha 1}|} \ln \left( \frac{|k_{1,\alpha 1}|}{|M_{\alpha 1}|} (|x_{10}^{(\alpha,1)}| + (\hat{k}_{1,\alpha 1}, x_{10}^{(\alpha,1)})) \right)$$

и координата  $x_{10}^{(\alpha 1)}$ , равная значению вектора  $x_{1,\alpha 1}$  в области  $\Omega_\alpha$ , выражена в терминах векторного поля  $M_\alpha$ :

$$x_{10}^{(\alpha 1)} = x_1 - |k_{\alpha 1}|^{-1} |x_\alpha| k_{1,\alpha 1}.$$

Сравним асимптотические формулы (5.63) и (5.84), принимая во внимание соотношение (5.85). Найдем на основании принципа локальности, что при  $|x_\alpha| \rightarrow \infty$  функция  $\varphi^{(2)}$  переходит в приближение двукратного эйконала  $\Psi_{\alpha 1}$ , которое определяется формулой (5.63), где амплитуда  $C_{\alpha 1}$  равна величине

$$C_{\alpha 1} = f_\alpha(\hat{x}_\alpha, k_\alpha) \tilde{f}_c(\hat{q}_{1\alpha}, k_1) \exp \{ia_{\alpha 1}^{(1)} \ln |M_{\alpha 1}| + i\delta W_{\alpha 1}^{(1)}\}, \quad (5.86)$$

где

$$a_{\alpha 1}^{(1)} = - \frac{n_1}{2|k_1|} + \frac{n_1}{2|k_{\alpha 1}|}, \quad \delta W_{\alpha 1}^{(1)} = \widetilde{W}_1^{(\alpha 1)} - \widetilde{W}_{\alpha 1}^{(1)}.$$

Отметим, что в тех направлениях конфигурационного пространства, где  $(\hat{q}_{1\alpha}, \hat{k}_1) \neq 1$ , амплитуда  $\tilde{f}_c$  равна двухчастичной кулоновской амплитуде (5.5). В направлении, где  $(\hat{q}_{1\alpha}, \hat{k}_1) = 1$ , амплитуда  $\tilde{f}_c$  равна нулю, причем это направление совпадает с особым направлением, в котором обращается в нуль переменная  $\xi_1^{(\alpha)}$ .

Построенная функция  $\Phi^{(2)}$  не исчерпывает, однако, полностью вклада, отвечающего эйконалу  $Z_{\alpha 1}$ . Рассматривая уравнение Шредингера в  $\Omega_\alpha$  с точностью до членов порядка  $O(|y_\alpha|^{-1})$ , необходимо учесть также слагаемое асимптотики  $\psi_i(x_i, k_i)$ , соответствующее короткодействующей части амплитуды рассеяния  $f_{cs}$  из (5.22). Требуя, чтобы уравнение Шредингера выполнялось с точностью до членов порядка  $O(|x_\alpha||y_\alpha|^{-2})$ , придем к заключению, что в  $\Omega_\alpha$  должно удовлетворяться соотношение

$$(H_\alpha^c - E) \Phi_s^{(2)}(X) = -v_\alpha(\dot{x}_\alpha) \varphi_s^{(2)}(X),$$

где

$$\varphi_s^{(2)}(X) = f_{cs}(\hat{x}_1, k_1) \frac{\exp \{i\sqrt{E} Z_1 + iW_1\}}{|x_1|}.$$

Решение этого уравнения и его асимптотика могут быть получены таким же путем, как и в случае уравнений (5.73) и (5.74). Производя сшивание с приближением двукратного эйконала, найдем, что функция  $\Phi_s^{(2)}$  переходит в эйкональное приближение  $\Psi_{\alpha 1}$ , в котором амплитуда  $C_{\alpha 1}$  дается соотношением (5.86), где следует заменить кулоновскую амплитуду  $f_c$  с короткодействующей частью  $f_{cs}$ .

Итак, мы показали, что вклад в асимптотику волновой функции, отвечающей двукратному эйконалу  $Z_{\alpha 1}$ , равен сумме функций  $\Phi^{(2)}$  и  $\Phi_s^{(2)}$ :

$$\Psi_{\alpha 1}(X, P) \sim \Phi^{(2)}(X, P) + \Phi_s^{(2)}(X, P).$$

Построенные асимптотические представления теряют смысл в направлениях, где фаза обращается в бесконечность. Это происходит в случае, если равен нулю один из импульсов  $k_1$ ,  $k_{\alpha 1}$  или  $k_{1, \alpha 1}$  либо если в нуль обращается координата  $M_{\alpha 1}$ . При этом следует отметить, что вся зависимость от величины вектора  $M_{\alpha 1}$  сосредоточена в слагаемом  $ia_{\alpha 1}^{(1)} \ln |M_{\alpha 1}|$ . Мы будем обозначать через  $\Omega_{\alpha 1}^{(0)}$  множество точек, где  $|M_{\alpha 1}| = 0$ .

С помощью аналогичных вычислений можно построить также все остальные слагаемые  $\Psi_{\alpha \beta}$ , отвечающие эйконалам  $Z_{\alpha \beta}$  при  $\beta \neq 1$ . Можно показать, что вдали от особых направлений эти слагаемые даются формулами (5.63), где амплитуды  $C_{\alpha \beta}$  определяются следующими соотношениями:

$$C_{\alpha \beta} = f_{\alpha}(\hat{x}_{\alpha}, k_{\alpha \beta}) f_{\beta}(\hat{q}_{\beta \alpha}, k_{\beta}) \exp \{ia_{\alpha \beta}^{(1)} \ln |M_{\alpha \beta}| + i\delta W_{\alpha \beta}^{(1)}\}. \quad (5.86')$$

Здесь при  $\alpha = 1$  величина  $a_{\alpha \beta}^{(1)}$  и фаза  $\delta W_{\alpha \beta}^{(1)}$  даются равенствами

$$\begin{aligned} a_{1 \beta}^{(1)} &= \frac{n_1}{2|k_1|} - \frac{n_1}{2|k_{1 \beta}|}, \\ \delta W_{1 \beta}^{(1)} &= \frac{n_1}{2|k_1|} \ln \frac{|s_{1 \beta} k_1|}{|k_{\beta}| \sin \Xi_{1 \beta}} (|k_{1 \beta}| + (k_{1 \beta}, \hat{k}_1)) - \\ &\quad - \frac{n_1}{2|k_{1 \beta}|} \ln \frac{2k_{1 \beta}^2 |s_{1 \beta}|}{|k_{\beta}| \sin \Xi_{1 \beta}}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

а при  $\alpha \neq 1$  — равенствами

$$a_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{n_1}{2|k_1|} - \frac{n_1}{2|k_{1,\alpha\beta}|}, \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{\alpha\beta}^{(1)} = & \frac{n_1}{2|k_1|} \ln \frac{|s_{1\beta} k_1|}{|k_\beta| \sin \Xi_{\alpha\beta}} (|k_{\alpha\beta}| - (\hat{k}_1, k_{\alpha\beta}) \times \\ & \times \operatorname{sign}(s_{\alpha\beta} s_{1\beta})) + \frac{n_1}{2|k_1^{(\alpha\beta)}|} \ln \frac{(\hat{k}_1^{(\alpha\beta)}, x_1^{(\alpha\beta)}) + |x_1^{(\alpha\beta)}|}{|s_{1\alpha}|((\hat{k}_{1,\alpha\beta}, \hat{q}_{\alpha\beta}) + 1)} + \\ & + \frac{n_1}{2|k_{1,\alpha\beta}|} \ln \frac{|k_{1,\alpha\beta}| |x_{1,\alpha\beta}^{(0)}| + (k_{1,\alpha\beta}, x_{1,\alpha\beta}^{(0)})}{|M_{\alpha\beta}|}. \end{aligned} \quad (5.89)$$

В этих равенствах использованы следующие новые обозначения:

$$\begin{aligned} \cos \Xi_{\alpha\beta} = & E^{-1/2} (p_{\alpha\beta}, \hat{q}_{\beta\alpha}), \quad k_1^{(\alpha, \beta)} = c_{1\beta} |k_\beta| \hat{q}_{\beta\alpha} + s_{1\beta} p_\beta, \\ x_1^{(\alpha, \beta)} = & |k_\beta|^{-1} (s_{1\alpha} q_{\beta\alpha} - |s_{\beta\alpha}| |k_\beta|^{-1} k_1^{(\alpha, \beta)}), \\ x_{1,\alpha\beta}^{(0)} = & x_1 - |x_\alpha| |k_{\alpha\beta}|^{-1} k_{1,\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Как и выше, мы явно выделили слагаемое  $i a_{\alpha\beta}^{(1)} \ln |M_{\alpha\beta}|$ , в котором сосредоточена вся зависимость амплитуды от величины вектора  $M_{\alpha\beta}$ . Через  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$  мы будем обозначать множество точек, где  $|M_{\alpha\beta}| = 0$ .

Отметим, что, аналогично случаю нейтральных частиц, слагаемые  $\Psi_{\alpha\beta}$  при пересечении точкой  $X$  особых областей  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$  изменяют форму и переходят в искаженные сферические волны. Переходные явления будут рассмотрены в следующем параграфе.

Если положить заряды частиц равными нулю, то все кулоновские фазы также обратятся в нуль. Формулы (5.58), (5.63), (5.82) и (5.86) для эйкональных приближений  $\Psi_\alpha$  и  $\Psi_{\alpha\beta}$  переходят при этом в представления (4.49) и (4.58) для соответствующих слагаемых в случае нейтральных частиц. При этом рекуррентные соотношения (5.49) и (5.49') могут служить для вычисления поправок высшего порядка малости и в системе незаряженных частиц.

Подчеркнем, что, в отличие от нейтральных частиц, амплитуды  $C_\alpha$  и  $C_{\alpha\beta}$  зависят от переменных  $|M_\alpha| = \sqrt{X^2 - Z_\alpha^2}$  и  $|M_{\alpha\beta}| = \sqrt{X^2 - Z_{\alpha\beta}^2}$ . Это свойство эйкональных приближений обусловлено тем обстоятельст-

вом, что дальнодействие приводит к появлению кулоновских фазовых сдвигов не только после столкновений, но и в процессах, предшествовавших сформировавшемуся асимптотическому движению. Другими словами, фаза в представлениях (5.82) и (5.86) отвечает состоянию системы в момент столкновений, а фазы  $W_\alpha$  и  $W_{\alpha\beta}$  из (5.58) и (5.63) описывают асимптотическое движение частиц после столкновений, когда частицы движутся в направлениях  $\nabla Z_\alpha$  и  $\nabla Z_{\alpha\beta}$ .

Рассмотрим теперь общий случай, когда все три частицы заряжены и их заряды могут иметь разные знаки. При  $|x_\alpha| \rightarrow \infty$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) вдали от особых направлений координатная асимптотика слагаемых  $\Psi_\alpha$  и  $\Psi_{\alpha\beta}$  сохраняет вид, описанный выше. Амплитуды  $C_\alpha$  и  $C_{\alpha\beta}$  даются формулами (5.82) и (5.86'), где вместо величин  $a_\alpha^{(1)}$ ,  $a_{\alpha\beta}^{(1)}$ ,  $\delta W_\alpha^{(1)}$  и  $\delta W_{\alpha\beta}^{(1)}$  следует подставить величины  $a_\alpha$ ,  $a_{\alpha\beta}$ ,  $\delta W_\alpha$  и  $\delta W_{\alpha\beta}$ , в которых аддитивно учтены кулоновские взаимодействия всех пар частиц:

$$\begin{aligned} a_\alpha &= \sum_{\gamma \neq \alpha} a_\alpha^{(\gamma)}, \quad \delta W_\alpha = \sum_{\gamma \neq \alpha} \delta W_\alpha^{(\gamma)}, \\ a_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma a_{\alpha\beta}^{(\gamma)}, \quad \delta W_{\alpha\beta} = \sum_\gamma \delta W_{\alpha\beta}^{(\gamma)}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Функции  $a_\alpha^{(\gamma)}$ ,  $\delta W_\alpha^{(\gamma)}$ ,  $a_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$  и  $\delta W_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$  с различными сочетаниями индексов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  определены в данном параграфе формулами (5.82), (5.86), (5.86') и (5.87)–(5.90).

Эти асимптотические формулы могут быть получены путем таких же вычислений, как и в случае, когда заряжены только две частицы. Необходимо лишь вместо функции  $\Psi_c^{(1)}$ , задаваемой соотношением (5.66), взять в качестве нулевого приближения новую функцию, асимптотика которой при  $\xi^{(\alpha)} \rightarrow \infty$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) описывается формулами (5.51), (5.52). При этом вместо простого представления в терминах вырожденной гипергеометрической функции здесь появляются громоздкие конструкции, с помощью которых новая функция  $\Psi_{as}$  задается в особых направлениях. Причиной появления таких сложных функций является то обстоятельство, что в случае трех заряженных частиц даже асимптотически не происходит разделения переменных в уравнении Шредингера в целом. В результате для сшивания решения применяются различные эталонные уравнения, в зависимости от положения точки в конфигурационном пространстве. Если же

заряжены только две частицы пары  $\alpha$ , то переменные в уравнении Шредингера без ядерных потенциалов делятся в базисе  $\{\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha\}$ , что и отражает представление (5.66). Упомянутая выше функция  $\Psi_{as}$  будет описана в следующем параграфе.

Итак, мы рассмотрели случай, когда точка  $X$  расположена в области  $\Omega_0$ , где все частицы сильно разделены. Мы показали, что функция (5.64) является асимптотическим решением уравнения Шредингера, и описали эйкональные приближения  $\Psi_\alpha$  и  $\Psi_{\alpha\beta}$ . Мы видели при этом, что слагаемые  $\Psi_\alpha$ , отвечающие процессам однократного перерассеяния, возникают в результате решения уравнения Шредингера (5.69) в окрестности направления  $x_\alpha = 0$  с искаженной плоской волной в качестве «источника». Аналогично, «источником», приводящим к появлению приближений двукратного эйконала в области  $\Omega_\beta$ ,  $\beta \neq \alpha$ , является функция  $\Psi_\alpha$ , образовавшаяся при перерассеянии плоской волны в области  $\Omega_\alpha$ . Разумеется, описанный здесь метод построения асимптотики путем последовательного рассмотрения процессов перерассеяния в областях  $\Omega_\alpha$  применим и для систем нейтральных частиц.

Рассмотрим далее случай, когда частицы разделены слабо и двухчастичные подсистемы имеют связанные состояния. При этом в областях  $\Omega_\alpha$ , где частицы попарно близки одна к другой, к описанным выше слагаемым добавляются искаженные кластерные сферические волны

$$\sum_j F_{A0}(y_\alpha, P) \psi_A(x_\alpha) \frac{\exp \left\{ i |y_\alpha| \sqrt{P^2 + \kappa_A^2} + iW_A \right\}}{|y_\alpha|}, \quad (5.92)$$

$$A = \{\alpha, j\},$$

которые сопоставляются процессам  $(3 \rightarrow 2)$  захвата частиц. Фазы  $W_A$  совпадают с двухчастичными фазами, отвечающими движению частицы в эффективном кулоновском поле, создаваемом связанный парой:

$$W_A = -\frac{n_{\alpha\alpha}}{2|p_A|} \ln 2|p_A| |y_A|, \quad |p_A| = \sqrt{P^2 + \kappa_A^2}.$$

Параметр  $n_{\alpha\alpha}$ , характеризующий величину эффективного кулоновского взаимодействия, с точностью до множителя равен произведению суммарного заряда пары  $\alpha$  на заряд третьей частицы:

$$n_{\alpha\alpha} = \gamma \sqrt{2\mu_{l,\alpha}} e_l(e_i + e_j), \quad \alpha = (i, j), \quad l \neq i \neq j,$$

или в терминах коэффициентов  $s_{\beta\alpha}$  и  $n_\beta$ :

$$n_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} n_\beta |s_{\beta\alpha}|^{-1}.$$

Слагаемые (5.92) быстро убывают при  $|x_\alpha| \rightarrow \infty$  и не дают вклада в асимптотику  $\Psi_0(X, P)$  в области  $\Omega_0$ . Чтобы увидеть причину их возникновения, обратимся к представлению (5.75), которое задает решение в  $\Omega_\alpha$ . Если оператор  $h_\alpha$  имеет связанные состояния, то функция Грина (5.71) содержит отвечающие им слагаемые (4.23). Поэтому наряду с функциями, которые мы уже описали, появляются новые слагаемые, которые и собраны в представлении (5.92).

Итак, мы описали асимптотику волновых функций с помощью эйкональных приближений. Мы также установили, что последние теряют смысл в ряде направлений конфигурационного пространства, называемых особыми. Эти направления можно разбить на две группы. Будем называть главными особые направления  $\Omega_F$ ,  $\Omega_\alpha^{(0)}$  и  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$ , где эйконалы  $Z$ ,  $Z_\alpha$  и  $Z_{\alpha\beta}$  совпадают со сферическим эйконалом  $|X|$ . Мы покажем, что амплитуда искаженной сферической волны имеет в главных особых направлениях неинтегрируемые по единичной сфере особенности.

Все остальные особые направления и отвечающие им сингулярности будем называть второстепенными. Анализируя полученные выше формулы, приходим к заключению, что второстепенные особенности возникают по следующим причинам. Во-первых, если относительные импульсы частиц малы после столкновений либо, как в случае эйконалов  $Z_\alpha$  и  $Z_{\alpha\beta}$ , в момент столкновения. Например, в формуле (5.86) это имеет место при  $k_1, \alpha_1 = 0$  или  $k_{\alpha_1} = 0$ . Во-вторых, эйкональная форма асимптотики теряет смысл в тех случаях, когда относительно малы параболические координаты типа  $\xi_1^{(\alpha)}$  для одной или двух пар частиц после столкновений или в момент его.

Отметим, наконец, что особые направления соответствуют тем областям конфигурационного пространства, где теряют силу квазиклассические асимптотики. Действительно, квазиклассические волновые функции имеют вид

$$\Psi_s(X) = A_s(X) e^{is(X)},$$

где через  $S(X)$  обозначено действие, определяемое урав-

нением Гамильтона — Якоби  $(\nabla S)^2 = E - V(X)$ , и через  $A_s(X)$  — отвечающее ему решение уравнения неразрывности  $2(\nabla A, \nabla S) + A \Delta S = 0$ . Квазиклассические приближения переходят в эйкональные, если отношение потенциала и кинетической энергии частиц стремится к нулю:  $VE^{-1/2} \rightarrow 0$ . При этом эйкональное выражение под знаком экспоненты  $\exp\{i\sqrt{E}Z + iW_z\}$  совпадает со старшим членом разложения действия в ряд по малому параметру  $VE^{-1/2}$ . Так как вдали от особых направлений выполняется неравенство  $|\nabla W_z| \ll 1$ , величина  $\nabla S$  отлична от нуля, поскольку  $|\nabla Z|^2 = 1$ . На особых направлениях значение  $\nabla W_z$  возрастает, поэтому сумма  $\nabla(Z + W_z) \sim \nabla S$  может оказаться равной нулю. Это означает, что здесь имеются точки поворота, в окрестности которых квазиклассическое приближение неприменимо.

Мы рассмотрим поведение волновых функций  $\Psi_0$  в окрестности особых направлений в следующем параграфе.

**Волновые функции  $\Psi_A(X, p_A)$ .** Опишем, наконец, координатную асимптотику волновых функций  $\Psi_A(X, p_A)$ , которые отвечают процессам рассеяния связанный пары на третьей частице.

Согласно методу, использованному выше, мы будем искать волновые функции  $\Psi_A(X, p_A)$  в областях  $\Omega_\beta$  ( $\beta = 1, 2, 3$ ), где частицы слабо разделены, в виде суммы падающих и рассеянных волн:

$$\Psi_A(X, p_A) = \psi_A(x_A) \psi_c^{(\alpha)}(y_\alpha, p_\alpha) + \Phi_{\beta A}(X, p_A). \quad (5.93)$$

Функция  $\psi_c^{(\alpha)}$  в этом случае описывает асимптотическое движение связанный пары  $\alpha$  в кулоновском поле, создаваемом третьей частицей, и выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию равенствами (5.1), (5.2), где нужно подставить новые кулоновские параметры

$$n_\alpha \rightarrow n_{\alpha\alpha}, \quad x_\alpha \rightarrow y_\alpha, \quad k_\alpha \rightarrow p_\alpha. \quad (5.94)$$

Решая уравнение (5.69) в области  $\Omega_\beta$ , получим для рассеянной волны  $\Phi_{\beta A}$  интегральное представление

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta A}(X, p_A) &= \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int R_\beta^c(X, X', E_A + i\epsilon) \psi_A(x'_A) \psi_c^{(\alpha)}(y'_\alpha, p_\alpha) dX'. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Здесь через  $R_\beta^c$  обозначена функция Грина модельного

оператора  $H_B^c$ , определяемого равенствами (5.69)–(5.71), в которые следует подставить новые параметры кулоновского взаимодействия  $n_1|s_{1b}| \rightarrow n_{bb}$ . Следующая задача состоит в том, чтобы изучить асимптотическое поведение интеграла в правой части (5.95). Это можно сделать таким же способом, как и в случае интеграла (5.75). Однако технически данная задача даже проще, так как функция  $\Psi_A(x'_A)$  быстро убывает при  $|x'_A| \rightarrow \infty$ . Это также приводит к тому, что в данном случае не возникает медленно убывающих слагаемых, которые описывают перерассеяния в областях  $\Omega_b$  при  $\beta \neq \alpha$ . Аналогично системе нейтральных частиц, все медленно убывающие члены сводятся к сумме искаженных сферических и кластерных волн. Мы не будем проводить здесь детальные вычисления в доказательство этого утверждения. Необходимая для этого техника уже была описана на более трудном примере функций  $\Psi_0$ . Приведем только окончательные формулы.

Рассмотрим сначала  $\Psi_A$  в области  $\Omega_\alpha$ , где частицы пары  $\alpha$  достаточно близки одна к другой, т. е. в области, где происходит упругое рассеяние. Координатная асимптотика  $\Psi_A(X, p_A)$  содержит тогда лишь члены, отвечающие процессам упругого рассеяния и внутренней перестройки частиц пары  $\alpha$ . Если при этом относительная координата  $y_\alpha$  третьей частицы не параллельна импульсу  $p_\alpha$ , то асимптотика  $\Psi_A$  описывается формулами

$$\Psi_A(X, p_A) \sim L_A^c(X, p_A) + \sum_j \Phi_{A'A}(X, p_A), \quad A' = \{\alpha, j\}, \quad (5.96)$$

где первое слагаемое представляет собой искаженную кластерную плоскую волну:

$$L_A^c(X, p_A) =$$

$$= \Psi_A(x_A) \exp \{i(p_\alpha, y_\alpha) + iw_\alpha^{(0)}(y_\alpha, p_\alpha)\} (1 + O((\tilde{\xi}^\alpha)^{-1})).$$

Суммирование ведется по всем внутренним состояниям пары  $\alpha$ , и каждый член асимптотически равен искаженной кластерной сферической волне:

$$\Phi_{A'A}(X, p_A) \sim$$

$$\sim \Psi_{A'}(x_A) \frac{\exp \{i|p_{A'}||y_\alpha| + iw_{A'}(y_\alpha, p_\alpha)\}}{|y_\alpha|} F_{A'A}(\hat{y}_\alpha, p_A). \quad (5.97)$$

Кулоновские фазы, искажающие плоскую и сферические волны, даются равенствами

$$\begin{aligned} w_{\alpha}^{(0)} &= \frac{n_{\alpha\alpha}}{2|p_{\alpha}|} \ln |p_{\alpha}| \tilde{\xi}^{(\alpha)}, \\ w_A(y_{\alpha}, p_{\alpha}) &= -\frac{n_{\alpha\alpha}}{2|p_A'|} \ln 2|p_{A'}||y_{\alpha}|, \\ \tilde{\xi}^{\alpha} &= |y_{\alpha}| - |y_{\alpha}, \hat{p}_{\alpha}|, \quad |p_{A'}|^2 = E_A(p_A) + \kappa_{A'}^2. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Амплитуды процессов внутренней перестройки  $F_{A'A}$  при  $A' \neq A$  являются гладкими функциями угловой переменной  $\hat{y}_{\alpha}$ . Амплитуды упругого рассеяния обращаются в бесконечность в направлении рассеяния вперед. Справедливо представление

$$F_{AA}(\hat{y}_{\alpha}, p_A) = f_{cA}(\hat{y}_{\alpha}, p_A) + \tilde{f}_{AA}(\hat{y}_{\alpha}, p_A), \quad (5.99)$$

где  $f_{cA}$  задается формулой (5.5), в которой кулоновские параметры следует заменить согласно (5.94). Слагаемое  $\tilde{f}_{AA}$ , однако, также может иметь особенности в направлении рассеяния вперед, хотя и более слабые, чем (5.5). Дело в том, что эффективное взаимодействие между частицей и связанный парой задается потенциалом (5.68), усредненным по внутреннему состоянию пары  $\alpha$ :

$$v_A^{(c)}(y_{\alpha}) = \sum_{\beta \neq \alpha} n_{\beta} \int dx_{\alpha} |\Psi_A(x_{\alpha})|^2 |c_{\beta\alpha}x_{\alpha} + s_{\beta\alpha}y_{\alpha}|^{-1}. \quad (5.100)$$

При  $|y_{\alpha}| \rightarrow \infty$  этот потенциал равен сумме кулоновской и мультипольной частей:

$$v_A^{(c)}(y_{\alpha}) = \frac{n_{\alpha\alpha}}{|y_{\alpha}|} + |y_{\alpha}|^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k(\hat{y}_{\alpha})}{|y_{\alpha}|^k}, \quad (5.101)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_k(\hat{y}_{\alpha}) &= \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{|c_{\alpha\beta}|^k}{|s_{\alpha\beta}|^{k+1}} \int |\Psi_A(x_{\alpha})|^2 P_k(\cos \theta_{\alpha}) |x_{\alpha}|^k dx_{\alpha}, \\ \cos \theta_{\alpha} &= (\hat{x}_{\alpha}, \hat{y}_{\alpha}). \end{aligned}$$

Обозначим через  $h_A^{(c)}$  оператор энергии, порожденный этим потенциалом:

$$h_A^{(c)} f(y) = -\Delta_y + v_A^{(c)}(y),$$

и через  $\psi_A^{(c)}(y, p)$  — волновые функции этого оператора. Как ясно из сказанного, асимптотика  $\Psi_A$  в направлении рассеяния вперед в действительности описывается с помощью функции  $\psi_A^{(c)}$ . Таким образом, в представлении (5.93) функцию  $\psi_c^{(\alpha)}$  следует заменить функцией  $\psi_A^{(c)}$ , и тогда слагаемое  $\Phi_{AA}$  будет асимптотически равно искаженным кластерным сферическим волнам с ограниченными во всех направлениях амплитудами. Но, как мы видели в § 1, мультипольные слагаемые (5.101) порождают особенности в амплитуде рассеяния, которые описываются представлением (5.32). Следовательно, и слагаемое  $\tilde{f}_{AA}$  из (5.99) будет иметь такие же особенности в направлении рассеяния вперед.

Следует отметить, однако, что если связанное состояние  $\psi_A(x_\alpha)$  является сферически симметричным, то мультипольные моменты  $\mu_k$  равны нулю, так что сингулярная часть амплитуды  $F_{AA}$  совпадает с чисто кулоновской  $f_{cA}$ .

Рассмотрим далее функцию  $\Psi_A(X, p_A)$  в областях  $\Omega_\beta$  при  $\beta \neq \alpha$ , т. е. в областях, которые отвечают перестроенным парам. Падающая волна  $\Psi_A \psi_c^{(\alpha)}$  в этих областях быстро убывает, так что старшие члены асимптотики исчерпываются искаженными кластерными сферическими волнами:

$$\Psi_A(X, p_A) \sim \sum_j \Phi_{BA}(X, p_A), \quad B = \{\beta, j\}, \quad (5.102)$$

где

$$\Phi_{BA} \sim \psi_B(x_\beta) \frac{\exp\{i|p_B||y_\beta| + iW_B(y_\beta, p_B)\}}{|y_\beta|} F_{BA}(\hat{y}_\beta, p_A).$$

Кулоновские фазы определяются согласно (5.98) с  $p_B^2 = E_A(p_A) + \kappa_B^2$ . Амплитуды  $F_{BA}$  являются гладкими ограниченными функциями во всех направлениях рассеяния  $\hat{y}_\beta$ .

Наконец, опишем асимптотическое поведение волновой функции  $\Psi_A(X, p_A)$  в области  $\Omega_0$ , где все частицы далеки одна от другой. Предположим, что для всех  $\beta = 1, 2, 3$  справедливы условия  $|x_\beta||X|^{-1} \geq \delta > 0$ . В этом случае  $\Psi_A(X, p_A)$  имеет вид искаженной шестимерной сферической волны с ограниченной амплитудой:

$$\Psi_A(X, p_A) \sim F_{0A}(\hat{X}, p_A) \frac{\exp\{i\sqrt{E_A}|X| + iW_0(X, E_A)\}}{|X|^{5/2}}. \quad (5.103)$$

При малых значениях  $|x_\beta| |X|^{-1}$ , т. е. при приближении к областям  $\Omega_\beta$ , эта амплитуда имеет довольно сложное поведение. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим сначала функцию Грина (5.71), которая согласно (5.95) задает решение уравнения Шредингера в  $\Omega_\beta$ . Аналогично (4.24), асимптотика этой функции может быть выражена через асимптотики (5.14) функций  $r_\beta$  и  $r_\beta^c$  с помощью метода перевала. При этом критическая точка определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (|x_\beta - x'_\beta| \sqrt{\zeta} + |y_\beta - y'_\beta| \sqrt{z - \zeta}) = 0$$

и задается равенством

$$\zeta_0 = \frac{|x_\beta - x'_\beta|^2}{|X - X'|^2} \cdot z.$$

Соответственно показатель экспоненты становится равным  $i\sqrt{z}|X - X'|$ . Если  $|X| \rightarrow \infty$  и  $|x_\beta| |X|^{-1} \geq \delta > 0$ , то асимптотика функции Грина принимает вид искаженной сферической волны в  $\mathbf{R}^6$ . Такой же вид будет иметь и решение (5.95), которое можно тогда сшить с (5.103). Если же  $x_\beta$  становится слишком малым, так что  $\sqrt{\zeta_0} = O(|x_\beta|^{-3/4})$ , то функция Грина  $r_\beta(x_\beta, x'_\beta, \zeta)$  из (5.71) имеет аномальное асимптотическое поведение типа (5.8) или (5.9) и приведенные аргументы теряют силу. В этом случае асимптотическое представление (5.103) нужно модифицировать в соответствии с (5.8) и (5.9). Опираясь на эти соображения, можно показать, что если частицы пары  $\beta$  заряжены разноименно,  $n_\beta < 0$ , то, в согласии с формулой (5.8), амплитуда развода  $F_{0A}$  обращается в бесконечность при  $\theta_\beta = 0$ ,  $\sin \theta_\beta = |x_\beta| |X|^{-1}$ :

$$F_{0A}(\hat{X}, p_A) \sim (\sin \theta_B)^{-1/2} \exp \{i\eta_\beta (\ln |\eta_\beta| - 1)\} \tilde{f},$$

$$\eta_\beta = \frac{n_\beta}{2 \sqrt{E_B} \sin \theta_\beta}, \quad (5.103')$$

а в случае кулоновского отталкивания она убывает как некоторая степень:

$$F_{0B} \sim (\sin \theta_\beta)^N, \quad N \gg 1.$$

Закончим на этом описание асимптотики функции  $\Psi_A(X, p_A)$ . Мы видим, что эта функция устроена почти

так же просто, как аналогичная функция для трех нейтральных частиц. Нужно лишь заменить плоские и сферические волны их искаженными аналогами. Конечно, определенные трудности возникают в системе заряженных частиц при описании волновых функций в направлении рассеяния вперед. Однако все особенности имеют двухчастичную природу и отвечают эффективному взаимодействию пары со свободной частицей.

### § 3. Асимптотика $\Psi_0$ в направлении рассеяния вперед

В этом и следующем параграфах мы продолжим исследование волновой функции  $\Psi_0(X, P)$ . Мы видели выше, что эйкональные формулы неправильно описывают асимптотику  $\Psi_0(X, P)$  в ряде направлений конфигурационного пространства, где фазы обращаются в бесконечность. Для построения асимптотики  $\Psi_0(X, P)$  в таких особых областях мы проведем спшивание решений уравнений в частных производных на основе метода параболического уравнения. Согласно этому методу в окрестности особых направлений следует выбрать характерные параметры, называемые локальными параболическими координатами, отбросить члены высшего порядка и решить оставшееся уравнение точно. Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям спшивания, однозначно определяется путем сравнения его асимптотики при удалении от особого направления с соответствующим эйкональным приближением.

**Искаженные плоские волны.** Исследование асимптотики  $\Psi_0(X, P)$  мы проведем в два этапа. Будем изучать сначала эффекты дальнодействия кулоновских потенциалов, а затем рассмотрим процессы перерассеяния, обусловленные взаимодействием частиц на близких расстояниях. Заметим в этой связи, что, как было показано в предыдущем параграфе, перерассеяние частиц происходит за счет тех частей потенциалов, которые сосредоточены в областях  $\Omega_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), где частицы сильно взаимодействуют. Напротив, в области  $\Omega_0$  частицы движутся почти свободно и их траектории лишь незначительно искажаются слабым по величине кулоновским полем. Поэтому парные потенциалы целесообразно разделить на две части, выделяя малый по величине дальнодействующий кулоновский фон:

$$v_\alpha(x_\alpha) = \hat{v}_\alpha(X) + v_\alpha^{(a)}(X),$$

так что соответствующее ему слагаемое  $v_\alpha^{(a)}$  отлично от нуля лишь в области  $\Omega_\alpha$ , где  $|x_\alpha| > a(1 + |y_\alpha|)^v$ , и равно там чисто кулоновскому потенциалу:

$$\begin{aligned} v_\alpha^{(a)}(X) &= (1 - \hat{\chi}_\alpha(X)) \frac{n_\alpha}{|x_\alpha|}, \\ \hat{\chi}_\alpha(X) &= v_\alpha^{(s)}(X) + \frac{n_\alpha}{|x_\alpha|} \hat{\chi}_\alpha(X). \end{aligned} \quad (5.104)$$

Через  $\hat{\chi}_\alpha(X)$  обозначена характеристическая функция области  $\Omega_\alpha$ , равная нулю за пределами некоторой окрестности этой области:

$$\hat{\chi}_\alpha(X) = \begin{cases} 1, & |x| < a(1 + |y_\alpha|)^v, \quad v' > v, \\ 0, & |x| > a'(1 + |y_\alpha|)^{v'}, \quad a' > a. \end{cases} \quad (5.104')$$

При этом в качестве такой функции можно также взять и любую функцию, которая не обязательно обращается в нуль за пределами области  $\Omega_\alpha$ , но достаточно быстро стремится к нулю при  $|x_\alpha||y_\alpha|^{-v} \rightarrow \infty$  — например, как  $e^{-a|x_\alpha||y_\alpha|^{-v}}$ .

Мы будем называть  $\hat{v}_\alpha$  короткодействующей частью потенциала  $v_\alpha(x_\alpha)$  и  $v_\alpha^{(a)}$  — дальнодействующей. Через  $H_a$  мы будем обозначать оператор энергии, порожденный дальнодействующими частями потенциалов:

$$H_a = H_0 + V^{(a)}, \quad V^{(a)} = \sum_\alpha V_\alpha^{(a)}.$$

Этот оператор можно интерпретировать как гамильтониан системы трех частиц, которые движутся на фоне малых по величине кулоновских возмущений. Подчеркнем, что величина возмущения  $v^{(a)}$  может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора постоянной экранирования  $a$ .

Мы будем действовать по следующему плану. В начале этого параграфа мы построим гладкую ограниченную функцию  $\Psi_{as}(X, P)$ , которая определена во всей области изменения переменных, совпадает с искаженными плоскими волнами вдали от особых направлений и удовлетворяет уравнению Шредингера для оператора  $H_a$  с точностью до быстро убывающих при  $|X| \rightarrow \infty$  членов. В результате мы получим приближенную волновую функцию для  $H_a$ , которая правильно описывает эффекты дальнодействия кулоновских потенциалов. Эта функция

может быть выбрана в качестве нулевого приближения для волновой функции  $\Psi_0(X, P)$ , о котором мы упоминали в предыдущем параграфе. Повторяя приведенные там вычисления, можно получить эйкональные представления для слагаемых  $\Psi_\alpha$  и  $\Psi_{\alpha\beta}$ , отвечающих процессам перерассеяния частиц. Следующая задача заключается в исследовании асимптотики этих слагаемых в особых областях и будет рассмотрена в § 4.

Приближенная волновая функция  $\Psi_{as}(X, P)$  зависит от координат  $X$  и импульсов  $P$  частиц. Мы будем рассматривать ее как функцию одной переменной  $\{X, P\}$ , изменяющейся в области  $R_{cm} = R^6 \oplus R^6$ . Эту область мы разделим на части, в которых функция  $\Psi_{as}(X, P)$  задается различными аналитическими выражениями. При этом задача состоит в том, чтобы доопределить эту функцию в тех областях, где не могут применяться эйкональные формулы. Последние же теряют смысл не только при ограниченных значениях параболических координат  $\xi^{(\alpha)}$ , т. е. в направлении рассеяния вперед, но и при относительно малых импульсах, удовлетворяющих условиям типа (5.6). Именно по этой причине ограничения необходимо накладывать не только на координатные, но и на импульсные переменные.

С учетом этих замечаний мы введем в рассмотрение следующие характеристические области. Областью, отвечающей конечным относительным импульсам  $\mathcal{D}_\alpha^{(+)}$ , мы будем называть множество точек в  $R_{cm}$ , удовлетворяющих неравенствам

$$|k_\alpha| > (a_0 + \xi^{(\alpha)})^{-1/2+\nu}, \quad \nu > 0. \quad (5.105)$$

Множество точек, удовлетворяющих противоположному неравенству, мы будем называть областью нулевых импульсов для пары  $\alpha$  и обозначать через  $\mathcal{D}_\alpha^{(-)}$ . Пересечение областей  $\mathcal{D}_\alpha^{(+)}$ , где всем парам отвечают отличные от нуля импульсы, будем обозначать через  $\mathcal{D}^{(+)}$ ,  $\mathcal{D}^{(+)} = \bigcap_\alpha \mathcal{D}_\alpha^{(+)}$ .

Областью рассеяния вперед пары  $\alpha$  будем называть множество точек  $\mathcal{D}_F^{(\alpha)}$ , в которых выполняются неравенства

$$\xi^{(\alpha)} < |x_\alpha|^\nu, \quad 0 < \nu < 1/2. \quad (5.105')$$

Через  $\mathcal{D}_F$  будем обозначать трехчастичную область рас-

сения вперед, где переменные  $\xi^{(\alpha)}$  ограничены этими неравенствами при всех  $\alpha$ . Мы будем также называть областью рассеяния вперед множество точек в конфигурационном пространстве  $\Omega_F$ , которые удовлетворяют перечисленным выше условиям при фиксированных импульсных переменных.

Эйкональной областью  $\mathcal{D}_e$  мы будем называть множество точек из  $\mathcal{D}^{(+)}$ , которые подчиняются неравенствам, противоположным (5.105), (5.105'). Таким образом, в эйкональной области должны быть относительно большими как начальные импульсы  $k_\alpha$ , так и параболические координаты  $\xi^{(\alpha)}$ .

Перейдем к описанию функции  $\Psi_{as}(X, P)$ . Предположим сначала, что точка  $\{X, P\}$  расположена в эйкональной области  $\mathcal{D}_e$ . В этом случае мы зададим  $\Psi_{as}(X, P)$  с помощью асимптотического разложения (5.46), (5.48) при  $Z = (X, \hat{P})$ , где следует взять некоторое конечное число членов  $N$ ,  $N \gg 1$ :

$$\Psi_{as}(X, P) = \Psi_e^{(N)}(X, P). \quad (5.106)$$

Функцию  $\Psi_e^{(N)}$  запишем в виде произведения плоской волны на фазовый множитель:

$$\Psi_e^{(N)}(X, P) = \exp\{i(X, P)\} \widetilde{\Phi}_e^{(N)}(X, P),$$

который дается равенством

$$\widetilde{\Phi}_e^{(N)}(X, P) = \exp\{iW_{as}(X, P) + i\delta W_N(X, P)\}.$$

Если все частицы хорошо разделены,  $X \in \Omega_0$ , то кулоновская фаза  $W_{as}(X, P)$  равна сумме (5.52). Если же точка наблюдения расположена в  $\Omega_\alpha$ ,  $X \in \Omega_\alpha$ , то соответствующее слагаемое в (5.52) заменяется величиной

$$\widetilde{W}^{(\alpha)} = \frac{1}{2\sqrt{E}} \int_{Z_0}^Z v_\alpha^{(\alpha)}(t\hat{P} + M) dt - W^{(\alpha)}(X_0, P),$$

$$W^{(\alpha)} = \frac{n_\alpha}{2|k_\alpha|} \ln |k_\alpha| \xi^{(\alpha)}, \quad (5.106')$$

где  $X_0, X_0 = \{Z_0, M\} \equiv \{x_\alpha^{(0)}, y_\alpha^{(0)}\}$ , — произвольная точка из  $\Omega_0$ , в которой  $(x_\alpha^{(0)}, k_\alpha) < 0$ . При этом фаза  $W^{(\alpha)}$

совпадает с  $W^{(\alpha)}$ , когда  $X$  лежит в  $\Omega_{0\alpha}$ ,  $\Omega_{0\alpha} = \mathbf{R}^6 \setminus \Omega_\alpha$ . Правочное слагаемое  $\delta W_N$  выражается через эйкональную фазу  $W_{as}$  рекуррентными формулами (5.49), (5.49'). Отметим, что фаза  $\tilde{W}^{(\alpha)}$  подбрана с таким условием, чтобы функция  $\Psi_e^{(N)}$  оставалась непрерывной при переходе точки  $X$  из чисто кулоновской области  $\Omega_0$  в область  $\Omega_\alpha$ , где кулоновский потенциал экранируется с помощью функции  $\tilde{\chi}_\alpha(X)$ .

Обозначим через  $A_{as}(X, P)$  результат применения оператора  $H_0 - P^2$  к функции  $\Psi_{as}(X, P)$ :

$$(H_{as} - P^2)\Psi_{as}(X, P) = A_{as}(X, P). \quad (5.107)$$

Отметим, что порядок функции  $A_{as}(X, P)$  при  $|X| \rightarrow \infty$  характеризует степень приближения функции  $\Psi_{as}(X, P)$  к истинному решению уравнения Шредингера.

Из формул (5.48), (5.106) вытекает, что в эйкональной области  $\mathcal{D}_e$  функция  $A_{as}(X, P)$  является гладкой, быстро убывающей и вместе со своими производными подчиняется оценке

$$|A_{as}(X, P)| \leq C \left( a + \sum_{\alpha} |k_{\alpha}| |\xi^{(\alpha)}| \right)^{-N}, \quad N \gg 1. \quad (5.108)$$

Следовательно, эйкональные формулы с хорошей точностью передают поведение волновой функции в области  $\Omega_0$ .

Если точка  $\{X, P\}$  выходит за пределы  $\mathcal{D}_e$ , эйкональная формула (5.106) теряет смысл. В этом случае мы опишем  $\Psi_{as}(X, P)$  с помощью специальных функций.

Пусть  $S_{cm}^{(s)}$  — поверхность в  $\mathbf{R}_{cm}$ , которая состоит из точек  $X$  и  $P$ , лежащих на единичной сфере  $|X| = 1$ ,  $|P| = 1$ . Обозначим через  $\mathcal{D}_s$  множество точек на  $S_{cm}^{(s)}$ , определяющих направления импульсных и координатных переменных, где приближение эйконала перестает быть верным. Ясно, что это множество имеет нулевую меру в пределе  $|X| \rightarrow \infty$ . В этом смысле можно сказать, что приближение эйконала действует почти во всех направлениях конфигурационного пространства.

**Рассеяние вперед.** Предположим, что пространственная переменная  $X$  лежит в области  $\Omega_0$ . Построим  $\Psi_{as}(X, P)$  в области рассеяния вперед  $\mathcal{D}_F$ . Так как в области  $\Omega_0$  потенциалы взаимодействия являются чисто кулоновскими, то, по аналогии с (5.66), мы определим нулевое приближение для  $\Psi_{as}(X, P)$  в факторизованном

виде:

$$\Psi_F^{(0)} = \exp \{i(X, P)\} \prod_{\alpha} \varphi_{\alpha}^{(c)}(\xi^{(\alpha)}, k_{\alpha}), \quad (5.109)$$

где двухчастичные функции  $\varphi_{\alpha}^{(c)}$  выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию равенствами (5.1), (5.2). При этом функция  $\Psi_F^{(0)}$  непрерывно переходит в эйкональные приближения (5.51), определяющие старшие члены асимптотики  $\Psi_o(X, P)$  при  $\xi^{(\alpha)} \rightarrow \infty$ .

Однако эта функция не удовлетворяет условиям сшивания, так как она недостаточно точно передает поведение решения уравнения Шредингера в окрестности направления рассеяния вперед. Это обстоятельство находит свое отражение в медленном убывании функции  $A_F$ , задаваемой равенством

$$A_F(X, P) = (H_a - P^2) \Psi_F^{(0)}(X, P).$$

Действительно, продифференцируем произведение (5.104), учитывая при этом, что функции  $\exp \{i(k_{\alpha}, x_{\alpha})\} \varphi_{\alpha}^{(c)}(\xi^{(\alpha)}, k_{\alpha})$  удовлетворяют двухчастичному уравнению Шредингера с потенциалами  $n_{\alpha}|x_{\alpha}|^{-1}$ . Получим представление

$$A_F(X, P) = 2 \exp \{i(P, X)\} (1 + P_{231} + P_{321}) c_{21} \times \\ \times \varphi_3^{(c)}(\xi^{(3)}, k_3) (\nabla_{x_1} \varphi_1^{(c)}(\xi^{(1)}, k_1), \nabla_{x_2} \varphi_2^{(c)}(\xi^{(2)}, k_2)), \quad (5.110)$$

где участвуют производные первого порядка функций  $\varphi^{(c)}$ . Символы  $P_{231}$  и  $P_{321}$  обозначают операторы циклической перестановки номеров частиц. Заметим в связи с этой формулой, что если заряжена только одна пара частиц, например (12), то функция  $A_F$  обращается в ноль, поскольку тогда  $\varphi_1^{(c)} = \varphi_2^{(c)} = 1$  и асимптотика  $\Psi_o$ , в согласии с формулой (5.66), правильно описывается функцией  $\Psi_F^{(0)}$ .

Так как функция  $\varphi^{(c)}$  зависит от  $x_{\alpha}$  посредством параболической координаты  $\xi^{(\alpha)}$ , мы можем записать скалярное произведение градиентов в виде

$$(\nabla_{x_1} \varphi_1^{(c)}, \nabla_{x_2} \varphi_2^{(c)}) = \varphi_1^{(c)'} \varphi_2^{(c)'} (\nabla_{x_1} \xi^{(1)}, \nabla_{x_2} \xi^{(2)}), \quad (5.111)$$

где через  $\varphi_{\alpha}^{(c)'}$  обозначена производная функции  $\varphi_{\alpha}^{(c)}(\xi^{(\alpha)}, k_{\alpha})$  по первому аргументу. Вычисляя затем производные параболических координат, придем к

соотношению

$$\begin{aligned} (\nabla_{x_1} \xi^{(1)}, \nabla_{x_2} \xi^{(2)}) &= \frac{\xi^{(1)} \left( \xi^{(2)} \cos \theta_{21} - \sqrt{\xi^{(2)} \xi^{(2)}} (\hat{u}_2, k_1) \right)}{|x_1| |x_2|} - \\ &- \frac{\sqrt{\xi^{(1)} \xi^{(1)}} (\hat{u}_1, e_1^{(1)}) \sin \theta_{21}}{|x_1| |x_2|} + \frac{\sqrt{\xi^{(1)} \xi^{(1)} \xi^{(2)} \xi^{(2)}}}{|x_1| |x_2|} (\hat{u}_1, \hat{u}_2), \quad (5.112) \end{aligned}$$

где через  $u_\alpha$  обозначена проекция вектора  $x_\alpha$  на плоскость, ортогональную вектору  $k_\alpha$ , а переменные  $\xi^{(\alpha)}$ ,  $\cos \theta_{21}$  и вектор  $e_1^{(1)}$  задаются равенствами

$$e_1^{(1)} = \frac{\hat{k}_2}{\sin \theta_{21}} - \hat{k}_1 \operatorname{ctg} \theta_{21},$$

$$\cos \theta_{21} = (\hat{k}_2, \hat{k}_1), \quad \xi^{(\alpha)} = |x_\alpha| + (x_\alpha, \hat{k}_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Вспоминая, наконец, свойства функций  $\varphi^{(c)}$ , описанные в § 1, получим неравенство

$$\begin{aligned} |A_F(X, P)| &\leq \sum_{\alpha \neq \beta} c_\alpha(k_\alpha) c_\beta(k_\beta) |u_\alpha| |u_\beta| (1 + a + |x_\alpha|)^{-1} \times \\ &\times (1 + |x_\beta|)^{-1} (1 + |k_\alpha| \xi^{(\alpha)})^{-1} (1 + |k_\beta| \xi^{(\beta)})^{-1}, \quad (5.113) \end{aligned}$$

которое показывает, что при ограниченных  $\xi^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) функция  $A_F$  убывает не быстрее кулоновского потенциала и поэтому не может быть опущена как поправка высшего порядка. Если же  $\xi^{(\alpha)} \rightarrow \infty$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), то эта функция имеет порядок  $O(|X|^{-1-v})$ ,  $v > 0$ , и может считаться малым возмущением.

Таким образом, мы должны «подправить»  $\Psi_F^{(0)}$  в направлении рассеяния вперед так, чтобы получить функцию, удовлетворяющую уравнению Шредингера по крайней мере с точностью до членов порядка  $O(|X|^{-1-v})$ ,  $v > 0$ . С этой целью рассмотрим более детально уравнение Шредингера в окрестности направления рассеяния вперед. Введем параболические координаты  $\xi$  и  $\zeta$ :  $\xi = \frac{|X| - Z}{2}$ ,  $\zeta = \frac{|X| + Z}{2}$ , где через  $Z$  обозначена составляющая вектора  $X$  по направлению вектора  $P$ . Через  $M$  обозначим проекцию вектора  $X$  на плоскость  $R^5$ , ортогональную  $P$ , так что  $X^2 = Z^2 + M^2$ ,  $M^2 = \xi \zeta$ . Раскладывая дальнодействующий потенциал  $v^{(a)}(X)$  в окрестности направления рассеяния вперед по степеням малого параметра  $\xi \zeta^{-1}$ , получим представление  $v^{(a)}(X) = V_P(X) + O(\xi \zeta^{-2})$ , где  $V_P(X)$  — сферически симметричный куло-

новский потенциал в  $\mathbf{R}^6$ :  $V_P(X) = q_0(P)/|X|$ . При этом эффективный заряд  $q_0(P)$  меняется в зависимости от начального направления потока частиц согласно равенству  $q_0(P) = |P| \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{|k_{\alpha}|}$ . Через  $H_P$  мы обозначим модельный гамильтониан, порожденный этим потенциалом,  $H_P = H_0 + V_P$ .

Зададим функцию  $\Psi_{as}(X, P)$  в окрестности направления рассеяния вперед в виде суммы

$$\Psi_{as}(X, P) = \Psi_F^{(0)}(X, P) + \Phi_F(X, P) \quad (5.114)$$

и будем искать функцию  $\Phi_F$  с таким расчетом, чтобы удовлетворить уравнению Шредингера с точностью до членов порядка  $|X|^{-1-\nu}$ ,  $\nu > 0$ . Подставляя эту сумму в уравнение Шредингера и отбрасывая члены порядка  $\xi \zeta^{-2}$ , получим для определения  $\Phi_F$  неоднородное уравнение Шредингера со сферически симметричным потенциалом  $V_P(X)$ :

$$(-\Delta_X + q_0(P)|X|^{-1} - P^2)\Phi_F(X, P) = -A_F(X, P). \quad (5.115)$$

Здесь функция  $A_F(X, P)$  определяется равенством (5.107). Решение этого уравнения, которое мы будем сплавывать с эйкональным приближением (5.51), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_F(X, P) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int R_P(X, X', P^2 + i\epsilon) \times \\ \times \chi_F(X') A_F(X', P) dX', \end{aligned} \quad (5.116)$$

где  $R_P(X, X', z)$  — функция Грина модельного гамильтониана  $H_P$ , а  $\chi_F$  — характеристическая функция особого направления, равная единице в  $\Omega_F$  и гладко исчезающая, когда точка  $X$  выходит за пределы области рассеяния вперед.

По построению сумма  $\Psi_F = \Psi_F^{(s)} + \Phi_F$  удовлетворяет уравнению Шредингера в окрестности направления рассеяния вперед с точностью до членов порядка  $\xi \zeta^{-2}$ . Следовательно, чтобы проверить выполнение условий сплавления, достаточно показать, что эта функция при  $\xi \rightarrow \infty$  принимает эйкональную форму.

**Асимптотика функции  $\Phi_F$ .** Исследуем асимптотическое поведение функции  $\Phi_F$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . Вначале выразим функцию  $A_F(X, P)$ , стоящую под знаком интеграла в (5.116), через параболические координаты. С этой целью

воспользуемся формулами (5.110)–(5.113) и учтем равенство  $\xi^{(\alpha)} = \xi |P| |k_\alpha|^{-1} \cos^2 \theta_\alpha + O(\xi \zeta^{-2})$ , в котором через  $\cos \theta_\alpha$  обозначено отношение  $\cos \theta_\alpha = |u_\alpha| |M|^{-1}$ . В результате получим представление

$$A_F(X, P) = \frac{\xi}{\xi + \zeta} e^{i(X, P)} V_F(\xi, \hat{M}), \quad (5.117)$$

где функция  $V_F(\xi, \hat{M})$  дается равенством

$$\begin{aligned} V_F(\xi, M) &= (1 + P_{321} + P_{123}) c_{21} \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 (\hat{u}_1, \hat{u}_2) \times \\ &\times \varphi_1^{(c)'}(\tilde{\xi}^{(1)}, k_1) \varphi_2^{(c)'}(\tilde{\xi}^{(2)}, k_2) \varphi_3^{(c)}(\tilde{\xi}^{(3)}, k_3) (1 + O(\xi \zeta^{-2})); \\ \tilde{\xi}^{(\alpha)} &= \xi \left| \frac{P}{|k_\alpha|} \right| \cos^2 \theta_\alpha. \end{aligned}$$

Заметим, далее, что как переменная интегрирования  $X'$ , так и первый аргумент  $X$  функции Грина  $R_P(X, X', E + i0)$  расположены в окрестности направления рассеяния вперед  $\Omega_F$ . Поэтому при  $|X| \rightarrow \infty$  ядро  $R_P(X, X', E + i0)$  можно заменить асимптотическим представлением (5.42). Интегрируя по частям относительно переменной  $q = |X - X'|$ , можно убедиться, что интеграл по области, расположенной в окрестности точки  $X$ , при  $|q| \leq |X|^v$ ,  $v < 1/2$ , является гладкой функцией  $X$ . Из формулы (5.117) вытекает, что эта функция может быть представлена в виде произведения плоской волны на стремящийся к нулю множитель порядка  $O(|X|^{-v'})$ ,  $v' > 0$ , и, следовательно, является поправкой высшего порядка к эйкональному приближению  $L_c(X, P)$ .

Рассмотрим оставшийся интеграл по внешности шара радиуса  $|X|^v$  с центром в точке  $X$ . Заметим, что основной вклад в этот интеграл дают точки, в которых выполняется условие  $|Z - Z'| \gg |M - M'|$ , где  $Z$  и  $Z'$  — проекции точек  $X$  и  $X'$  на ось  $P$ , а  $M$  и  $M'$  — проекции этих точек на ортогональную к вектору  $P$  плоскость. Пользуясь этим условием, разложим разность  $|X - X'|$  в ряд по малому параметру  $|Z - Z'|^{-1} |M - M'|$ :

$$|X - X'| = |Z - Z'| + \frac{1}{2} \frac{|M - M'|^2}{|Z - Z'|} + O\left(\frac{|M - M'|^2}{|Z - Z'|^3}\right),$$

и выражим затем старшие члены через параболические переменные. Нетрудно видеть при этом, что старшие слагаемые  $A_F$  при  $|X| \rightarrow \infty$  порождаются точками  $Z'$ , удовлетворяющими неравенству  $Z' \leq Z - Z'$ ,  $v < 1$ . Делая

замену переменных  $q = \sqrt{\frac{\xi'}{|X|}} \hat{M}'$ ,  $q \in \mathbf{R}^5$ , приедем к асимптотическому равенству

$$\Phi_F(X, P) \sim e^{i(X, P)} \tilde{\Phi}_F(\xi, M), \quad (5.118)$$

где функция  $\tilde{\Phi}_F$  задается интегралом

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_F(\xi, M) = & e^{i|P|\xi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty d\xi' \xi'^{5/2} \int_{|q| \leq 1} \exp \left\{ -i|P| \sqrt{\xi \xi'}(q, \hat{M}) - \right. \\ & \left. - i \frac{q_0(P)}{2|P|} \ln \frac{|q|}{2} + i \frac{|P| q^2 \xi'}{2} - \varepsilon \xi' \right\} V_F(\xi', \hat{M}') \varepsilon(q). \end{aligned} \quad (5.119)$$

Здесь через  $\varepsilon(q)$  обозначена гладкая срезающая функция, равная единице внутри единичного шара  $|q| \leq 1$  и нулю в некоторой окрестности его границы.

При малых  $\xi$  функция  $\Phi_F(\xi, M)$  не стремится к нулю, когда  $|X| \rightarrow \infty$ . Поэтому можно сказать, что эта функция «подправляет» нулевое приближение  $\Psi_F^{(0)}$  в окрестности рассеяния вперед. Чтобы найти асимптотику  $\Phi_F$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , сделаем в интеграле (5.119) замену переменной  $\sqrt{\xi}q = q'$ . После простых преобразований получим асимптотическое представление

$$\Phi_F(X, P) \sim F_{as}(\theta, \hat{M}) |X|^{-5/2} \exp \{i|X||P| + iW_0(X, P)\}. \quad (5.120)$$

Итак, при удалении от особого направления  $\Phi_F$  принимает форму сферической волны. Амплитуда этой волны имеет сильную особенность в направлении рассеяния вперед:

$$F_{as}(\theta, \hat{M}) = \frac{f_0(\theta, M)}{(1 - \cos \theta)^{5/2 + iq_0/2|P|}}, \quad \cos \theta = (\hat{X}, \hat{P}). \quad (5.121)$$

Коэффициент  $f_0$  является гладкой функцией угловых переменных  $\hat{M}$  и не зависит в старшем порядке от угла между векторами  $X$  и  $P$ :

$$\begin{aligned} f_0(\theta, M) \sim & \lim_{\varepsilon_1 \downarrow 0, \varepsilon_2 \downarrow 0} \int_0^\infty d\xi' \xi'^{3/2} \int dq' e^{-\varepsilon_1 \xi' - \varepsilon_2 |q'|} \times \\ & \times V_F(\xi', \hat{M}') \exp \left\{ -i|P| \sqrt{\xi'}(q', M) - i \frac{q_0(P)}{2|P|} \ln |q'| \right\}. \end{aligned} \quad (5.122)$$

На этом мы закончим построение функции  $\Psi_{as}(X, P)$  в направлении рассеяния вперед. Мы установили, что эта функция удовлетворяет уравнению Шредингера с точностью до членов порядка  $|X|^{-1-v}$ ,  $v > 0$ , и в окрестности направления рассеяния вперед в старшем порядке имеет вид произведения

$$\Psi_{as}(X, P) = e^{i(X, P)} \tilde{\Phi}_{as}(X, P), \quad (5.123)$$

где функция  $\tilde{\Phi}_{as}(X, P)$  равна сумме

$$\Phi_{as}(X, P) = \prod_{\alpha} \varphi_{\alpha}^{(c)}(\xi^{(\alpha)}, k_{\alpha}) + \tilde{\Phi}_F(X, P).$$

При удалении точки  $X$  от этого направления  $\Psi_{as}$  переходит в сумму эйкональных приближений, отвечающих плоскому и сферическому эйконалам. При этом функция  $A_{as}$ , определяемая равенством (5.107), в этом случае подчиняется оценке

$$|A_{as}(X, P)| \leq \left(1 + \sum_{\alpha} |k_{\alpha}| |x_{\alpha}| \right)^{-1-v}, \quad 0 < v \leq 1. \quad (5.123')$$

Опишем далее функцию  $\Psi_{as}$  в остальных особых областях. Если точка  $X$  выходит за пределы области рассеяния вперед, но еще не попадает в эйкональную область, то мы положим функцию  $\Psi_{as}$  равной произведению плоской волны на двухчастичные функции  $\varphi_{\alpha}^{(c)}$ , т. е.

$$\Psi_{as}(X, P) = \Psi_F^{(0)}(X, P). \quad (5.124)$$

Если, однако, для некоторых пар  $\alpha$  импульсы или координаты попадают в эйкональную область, то соответствующую функцию  $\varphi_{\alpha}^{(c)}$  мы будем заменять старшими асимптотическими членами:  $\varphi_{\alpha}^{(c)} \sim (\xi^{(\alpha)})^{in_{\alpha}}$ ,  $n_{\alpha} = \frac{n_{\alpha}}{2|k_{\alpha}|}$ .

Функция  $A_{as}(X, P)$  является при этом гладкой и подчиняется оценке (5.113), если парные импульсы достаточно велики,  $\{X, P\} \in \mathcal{D}^{(+)}$ . При малых относительных импульсах, когда  $\{X, P\} \in \mathcal{D}^{(-)}$ , оценочные функции  $c_{\alpha}$  и  $c_{\beta}$  в этом неравенстве зависят от импульсных переменных  $|k_{\alpha}|$  и  $|k_{\beta}|$ . Детальное описание  $A_{as}$  в этом случае может быть получено с помощью асимптотических представлений для  $\Phi(a, b, x)$  при больших значениях параметра  $a$ . Мы не будем приводить здесь подробные формулы при  $|k_{\alpha}| \rightarrow 0$ . Отметим, что, в согласии с равенствами

(5.8) и (5.9), функции  $c_\alpha$  убывают, если частицы пары  $\alpha$  заряжены одноименно,  $n_\alpha > 0$ , и растут, как  $|k_\alpha|^{-1/2}$ , в случае кулоновских потенциалов притяжения,  $n_\alpha < 0$ .

Итак, мы полностью рассмотрели случай, когда пространственная переменная расположена в области  $\Omega_0$ , отвечающей сильно разделенным частицам.

**Плоские волны в  $\Omega_\alpha$ .** Если точка  $X$  переходит в область  $\Omega_\alpha$ , где близки частицы пары  $\alpha$ , то для сшивания асимптотических решений следует использовать новые эталонные гамильтонианы, которые адекватно описывают поведение решения при сближении частиц на небольшие расстояния. Как мы видели в предыдущем параграфе, малым параметром, по которому следует вести разложение потенциала  $v^{(a)}(X)$ , является в этом случае отношение  $|x_\alpha||y_\alpha|^{-1}$ . С точностью до членов порядка  $|x_\alpha||y_\alpha|^{-2}$  в  $\Omega_\alpha$  справедливо асимптотическое равенство

$$v^{(a)}(X) = v_\alpha^{(a)}(x_\alpha, y_\alpha) + \tilde{v}_\alpha^{(c)}(y_\alpha) + O(|x_\alpha||y_\alpha|^{-2}),$$

где потенциал  $v_\alpha^{(a)}$ , описывающий взаимодействие в паре  $\alpha$ , зависит от переменной  $y_\alpha$  как от параметра, а слагаемое  $\tilde{v}_\alpha^{(c)}(y_\alpha)$  отвечает эффективному взаимодействию этой пары с третьей частицей:

$$\tilde{v}_\alpha^{(c)}(y_\alpha) = \sum_{\beta \neq \alpha} v_\beta^{(a)}(x_\beta, y_\beta)|_{x_\alpha=0}.$$

При достаточно больших  $|y_\alpha|$  потенциал  $\tilde{v}_\alpha^{(c)}$  совпадает с чисто кулоновским потенциалом  $n_{\alpha\alpha}/|y_\alpha|$  из (5.101).

В соответствии с этим замечанием мы введем в рассмотрение модельный трехчастичный гамильтониан, отвечающий старшим членам асимптотики потенциала  $\tilde{v}_\alpha^{(c)}$  в области  $\Omega_\alpha$ :

$$H_{as}^{(\alpha)} = H_0 + V_{as}^{(\alpha)}, \quad V_{as}^{(\alpha)} = V_\alpha^{(a)} + \tilde{V}_\alpha^{(c)}. \quad (5.125)$$

Чтобы описать строение функции Грина этого оператора, рассмотрим двухчастичные гамильтонианы  $h_\alpha^{(a)}$  и  $h_\alpha^{(c)}$ , которые порождаются потенциалами  $v_\alpha^{(a)}$  и  $\tilde{v}_\alpha^{(c)}$  соответственно.

Оператор  $h_\alpha^{(a)}$  зададим соотношением

$$(h_\alpha^{(a)} f)(x_\alpha) = (-\Delta_{x_\alpha} + v_\alpha^{(a)}(x_\alpha, y_\alpha)) f(x_\alpha).$$

Будем считать переменную  $y_\alpha$  параметром, который опре-

деляет радиус обрезания  $a(1 + |y_\alpha|)^v$  кулоновского потенциала при  $|x_\alpha| > a(1 + |y_\alpha|)^v$ . Волновые функции этого оператора можно изучить с помощью модифицированного уравнения теории возмущений (5.20). Заметим, что величина потенциала  $n_\alpha |x_\alpha|^{-1}$  вне шара  $|x_\alpha| \leq a(1 + |y_\alpha|)^v$ , в котором оператор  $h_\alpha^{(a)}$  равен свободному гамильтониану  $h_0$ , стремится к нулю при  $|y_\alpha| \rightarrow \infty$ . Сделаем преобразование масштаба  $x_\alpha \rightarrow |y_\alpha|^v \cdot a \cdot x_\alpha$ . В результате радиус обрезания станет конечным, а энергия рассеяния  $k_\alpha'^2$  и эффективный заряд  $n_\alpha'$  примут новые значения:

$$k_\alpha'^2 = a^2 |y_\alpha|^{2v} k_\alpha^2, \quad n_\alpha' = a |y_\alpha|^v n_\alpha, \quad (5.126)$$

которые стремятся к бесконечности при  $|y_\alpha| \rightarrow \infty$ . Из формул (5.20)–(5.24) следует тогда, что волновые функции  $\Psi_\alpha^{(a)}(X, k_\alpha)$  этого гамильтониана можно представить в виде суммы

$$\Psi_\alpha^{(a)}(X, k_\alpha) = e^{i(k_\alpha \cdot x_\alpha)} (\varphi_c(x_\alpha', k_\alpha') + \tilde{\varphi}_\alpha^{(a)}(X', k_\alpha')),$$

$$X' = \{x_\alpha', y_\alpha\},$$

где первое слагаемое совпадает с кулоновской волновой функцией, параметры которой определяются равенствами (5.126), а второе отвечает короткодействующему потенциалу. Последний равен потенциалу  $\frac{n_\alpha}{|x_\alpha|} \chi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$  из (5.104), взятому с обратным знаком, т. е. представляет собой компенсационный потенциал, который обрезает кулоновский потенциал на малых расстояниях,  $0 \leq |x_\alpha| \leq a(1 + |y_\alpha|)^v$ . Согласно формулам (5.20)–(5.23) асимптотика функции  $\Psi_\alpha^{(a)}$  при  $|k_\alpha| |y_\alpha|^v \xi^{(a)} \rightarrow \infty$  имеет вид суммы искаженной плоской и сферической волн, причем амплитуда последней имеет малую величину  $O(|y_\alpha|^{-v})$  вне направления рассеяния вперед,  $f_\alpha^{(a)}(\hat{x}_\alpha, y_\alpha, k_\alpha) = O(|y_\alpha|^{-v})$ ,

$$\Psi_\alpha^{(a)}(X, k_\alpha) \sim$$

$$\sim e^{i(k_\alpha \cdot x_\alpha)} + iW_\alpha + f_\alpha^{(a)}(\hat{x}_\alpha) \frac{\exp \{i|k_\alpha||x_\alpha| + iw_\alpha^{(0)}\}}{|x_\alpha|}. \quad (5.127)$$

Если же относительный импульс  $k_\alpha$  уменьшается настолько, что  $|k_\alpha| |y_\alpha|^v \rightarrow 0$ , то кулоновские параметры пе-

рекходят в квазиклассическую область. Асимптотика  $\psi_\alpha^{(a)}$  будет определяться тогда точным решением  $\psi_c(x_\alpha, k_\alpha)$ , которое в этом случае имеет достаточно сложную форму. Мы не будем описывать здесь все асимптотические режимы, а ограничимся ссылкой на формулу (5.7).

Если частицы пары  $\alpha$  заряжены разноименно, то оператор  $h_\alpha^{(a)}$  имеет дискретный спектр. Однако при увеличении параметра  $a(1+|y_\alpha|)^v$  нижняя граница собственных чисел  $-\chi_i^{(a)}$  стремится к нулю, так что ни одна из точек, сколь угодно близких к началу координат, не может принадлежать дискретному спектру  $h_\alpha^{(a)}$ , начиная с некоторого достаточно большого  $|y_\alpha|$ .

Оператор  $\tilde{h}_\alpha^{(c)}$ , задаваемый равенством

$$(\tilde{h}_\alpha^{(c)} f)(y_\alpha) = \left( -\Delta_{y_\alpha} + \tilde{v}_\alpha^{(c)}(y_\alpha) \right) f(y_\alpha),$$

отвечает, как уже отмечалось, эффективному взаимодействию пары  $\alpha$  с третьей частицей. В зависимости от суммарного заряда пары  $\alpha$  кулоновская часть потенциала  $\tilde{v}_\alpha^{(c)}$  определяет притяжение или отталкивание. Если же заряды частиц компенсируются, то этот потенциал является короткодействующим. Строение волновых функций таких операторов мы уже описали в § 1.

Представим модельный оператор  $H_{as}^{(\alpha)}$  в виде суммы  $H_{as}^{(\alpha)} = h_\alpha^{(a)} + \tilde{h}_\alpha^{(c)}$ ,

$$\begin{aligned} (H_{as}^{(\alpha)} f)(x_\alpha, y_\alpha) &= \left( -\Delta_{x_\alpha} + v_\alpha^{(a)}(x_\alpha, y_\alpha^{(0)}) \right) f(x_\alpha, y_\alpha) + \\ &\quad + \left( -\Delta_{y_\alpha} + \tilde{v}_\alpha^{(c)}(y_\alpha) \right) f(x_\alpha, y_\alpha), \end{aligned}$$

и будем считать фиксированной переменной  $y_\alpha^{(0)}$ , входящую в определение оператора  $h_\alpha^{(a)}$ . Мы будем полагать, что  $y_\alpha$  лежит в цилиндрическом слое ширины  $(|y_\alpha^{(0)}| + a)^v$ , содержащем точку  $y_\alpha^{(0)}$ :

$$|y_\alpha - y_\alpha^{(0)}| \leq |a + |y_\alpha^{(0)}||^v.$$

Производя спшивание решений в терминах этого оператора, следует учитывать, что асимптотики функций  $\psi_\alpha^{(a)}(x_\alpha, y_\alpha^{(0)}, k)$  при различных  $y_\alpha^{(0)}$ , удовлетворяющих указанному неравенству, совпадают с точностью до искаженных сферических волн с бесконечно малой амплитудой порядка  $|y_\alpha|^{-v}$ . Отметим, что резольвента оператора

ра  $H_{as}^{(\alpha)}$ ,  $R_{as}^{(\alpha)} = (H_{as}^{(\alpha)} - z)^{-1}$ , явно выражается через резольвенты двухчастичных гамильтонианов  $h_\alpha^{(a)}$  и  $\tilde{h}_\alpha^{(c)}$  с помощью соотношения (5.71').

Зная свойства функции Грина модельного гамильтониана  $H_{as}^{(\alpha)}$ , мы можем построить функцию  $\Psi_{as}$  в  $\Omega_\alpha$ , действуя по такой же схеме, как и в рассмотренном выше случае больших расстояний между частицами. Необходимые изменения сводятся к замене чисто кулоновских функций  $\varphi_\alpha^{(c)}(\xi^{(\alpha)}, k_\alpha)$  функциями  $\varphi_\alpha^{(a)}(X, k_\alpha) = e^{-i(x_\alpha, k_\alpha)} \psi_\alpha^{(a)}(X, k_\alpha)$  и модельного оператора  $H_p$  — операторами  $H_{as}^{(\alpha)}$ .

Можно показать, что функция  $A_{as}$ , определяемая равенством (5.107), при  $X \in \Omega_\alpha$  подчиняется оценкам (5.108) или имеет порядок  $O(|X|^{-1-v})$  в зависимости от значений импульсных переменных. Необходимые для доказательства этого утверждения вычисления аналогичны проведенным в § 1 при построении асимптотики слагаемых  $\Phi^{(1)}(X)$ . Отметим, что, в отличие от упомянутых слагаемых  $\Phi^{(1)}$ , асимптотика функции  $\Psi_{as}(X, P)$  не содержит членов, отвечающих эйкональным приближениям  $\Psi_\alpha$  и  $\Psi_{\alpha\beta}$ . Действительно, как мы видели в § 2, такие члены получались в результате перерассеяния плоских или сферических волн в областях  $\Omega_\alpha$  и  $\Omega_\beta$ , где парные потенциалы существенно отличны от нуля. В случае операторов  $H_{as}^{(\alpha)}$  взаимодействие  $V_{as}^{(\alpha)}$  в этих областях исчезает. Поэтому не возникает и вторичных перерассеянных волн. Мы не будем проводить дальнейшую формализацию этих рассуждений. Необходимая для этого техника была описана выше. Отметим также, что, поскольку при  $|y_\alpha| \rightarrow \infty$  операторы  $h_\alpha^{(a)}$  не имеют ненулевых собственных чисел, координатная асимптотика функций  $\Psi_{as}$  не содержит также и кластерных волн (5.92), которые отвечают рассеянию частицы на связанный паре.

Итак, мы описали функцию  $\Psi_{as}(X, P)$  во всей области определения  $R_{cm}$ . Переход от одной аналитической формы к другой осуществляется с помощью характеристических функций введенных выше областей. Важно при этом, что, по построению, различные представления для  $\Psi_{as}(X, P)$  совпадают в смежных областях в старших порядках.

#### § 4. Асимптотика функций $\Psi_\alpha$ в особых направлениях $\Omega_\alpha^{(0)}$ и $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$

В этом параграфе мы изучим координатную асимптотику волновых функций  $\Psi_\alpha(X, P)$  в окрестности особых направлений  $\Omega_\alpha^{(0)}$  и  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$ .

**Направление  $\Omega_\alpha^{(0)}$ .** Рассмотрим эйкональное приближение  $\Psi_\alpha$ , которое задается формулами (5.58), (5.82) и (5.91). Будем предполагать временно, что векторы  $k_\alpha$  и  $p_\alpha$  не параллельны между собой,  $(\hat{k}_\alpha, \hat{p}_\alpha) \neq \pm 1$ . В этом случае главное особое направление не пересекается с второстепенным.

Пусть  $q_\alpha$  — трехмерное векторное поле, определяемое равенством

$$q_\alpha = \omega_\alpha p_\alpha + m_\alpha.$$

Через  $\tilde{\Omega}_\alpha^{(0)}$  обозначим окрестность направления  $\Omega_\alpha^{(0)}$ , которая задается неравенством  $|X| - Z_\alpha \leq |X|^v$ ,  $v < 1/2$ , и через  $\partial\tilde{\Omega}_\alpha^{(0)}$  — границу  $\tilde{\Omega}_\alpha^{(0)}$ .

Разложим функцию  $\Psi_\alpha$  на этой границе в ряд по сферическим функциям  $Y_l^m(\hat{q}_\alpha)$ :

$$\Psi_\alpha(X, P) = \sum_{l,m} \Psi_{\alpha l}^m(|q_\alpha|, Z_\alpha) Y_l^m(\hat{q}_\alpha) \frac{\tilde{f}_c^{(\alpha)}(\hat{x}_\alpha, k_\alpha)}{|x_\alpha|}. \quad (5.128)$$

Здесь через  $\tilde{f}_c^{(\alpha)}$  обозначена амплитуда рассеяния для пары  $\alpha$ , кулоновская часть которой умножена на срезающую функцию  $\chi_\alpha(\xi^{(\alpha)})$ , равную нулю в окрестности направления рассеяния вперед:

$$\tilde{f}_c^{(\alpha)}(\hat{x}_\alpha, k_\alpha) = f_c^{(\alpha)}(\hat{x}_\alpha, k_\alpha) \chi_\alpha^F(\xi^{(\alpha)}) + f_{cs}^{(\alpha)}(\hat{x}_\alpha, k_\alpha). \quad (5.128')$$

Напомним, что функция  $\chi_\alpha^F(\xi^{(\alpha)})$  использовалась ранее в представлении (5.72). Функции  $\Psi_{\alpha l}^m$  даются интегралами

$$\Psi_{\alpha l}^m(|q_\alpha|, Z_\alpha) = \int d\hat{q}_\alpha Y_l^{m*}(\hat{q}_\alpha) \Psi_\alpha(X, P). \quad (5.129)$$

Подставляя в (5.129) асимптотическое представление (5.58), придем к заключению, что старший член асимптотики  $\Psi_{\alpha l}^m$  при  $Z_\alpha \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\Psi_{\alpha l}^m \sim B_{\alpha l}^m \exp\{i\sqrt{E}Z_\alpha + iW_\alpha + ia_\alpha \ln|q_\alpha|\}, \quad (5.130)$$

где  $B_{\alpha l}^m$  — постоянная, зависящая лишь от номеров  $l$  и  $m$ :

$$B_{\alpha l}^m = \int d\hat{q}_\alpha Y_l^{m*}(\hat{q}_\alpha) \exp\{i\delta W_\alpha\}.$$

Определим продолжение функции  $\Psi_\alpha$  в особую область  $\tilde{\Omega}_\alpha^{(0)}$  с помощью разложения (5.128), где вместо функции  $\Psi_{\alpha l}^m$  подставим выражения  $\tilde{\Psi}_{\alpha l}^m = f_{\alpha l}^m \exp\{i\sqrt{E}Z_\alpha + iW_\alpha\}$  с неизвестными пока функциями  $f_{\alpha l}^m$ . Чтобы найти эти функции в области  $\tilde{\Omega}_\alpha^{(0)}$ , применим метод параболического уравнения.

Введем в окрестности  $\Omega_\alpha^{(0)}$  параболические координаты, отвечающие эйконалам  $Z_\alpha$  и  $|X|$ :  $\xi_\alpha = |X| - Z_\alpha$ ,  $\zeta_\alpha = |X| + Z_\alpha$ , так что  $|q_\alpha| = \sqrt{\xi_\alpha \zeta_\alpha}$ . Эти координаты правильно отражают масштаб изменения переменных в особой области. Подставим функцию  $\Psi_\alpha$  в виде (5.129) в уравнение Шредингера (5.45) и воспользуемся представлением оператора Лапласа в терминах параболических координат. Пренебрегая членами порядка  $\xi_\alpha \zeta_\alpha^{-2}$ , получим следующее параболическое уравнение для  $f_{\alpha l}^m$ :

$$\begin{aligned} \xi_\alpha^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \xi_\alpha^{3/2} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} f + 4i\sqrt{E} \left( \zeta_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} - \xi_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \right) f + \\ + \frac{l(l+1)}{4\xi_\alpha} f = 0. \end{aligned} \quad (5.131)$$

Решение этого уравнения можно найти методом разделения переменных:

$$f_{\alpha l}^m = C_{\alpha l}^m \xi_\alpha^{l/2} \zeta_\alpha^{i\mu/\sqrt{E}} \Phi\left(\frac{l}{2} - i\frac{\mu}{\sqrt{E}}, l + \frac{3}{2}, i\sqrt{E}\xi_\alpha\right), \quad (5.132)$$

а коэффициент  $C_{\alpha l}^m$  и постоянную  $\mu$  определить затем из условий спшивания  $f_{\alpha l}^m$  с эйкональной асимптотикой (5.130). Вспоминая асимптотическую форму вырожденной гипергеометрической функции (5.3), получим

$$C_{\alpha l}^m = \frac{\Gamma\left(\frac{l}{2} + \frac{3}{2} + i\frac{a_\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)} \left(i\sqrt{E}\right)^{\frac{l}{2} - i\frac{a_\alpha}{2}} B_{\alpha l}^m, \quad \mu = \frac{a_\alpha \sqrt{E}}{2}. \quad (5.133)$$

Заметим, далее, что асимптотика решения  $f_{\alpha l}^m$  содержит также слагаемое, отвечающее сферическому эйкона-

жу. На основании (5.3) находим, что функции  $f_{\alpha l}^m$ , с помощью которых описывается асимптотика функции  $\Psi_\alpha$  в  $\tilde{\Omega}_\alpha^{(0)}$ , порождают искаженную сферическую волну (5.53) с сингулярной при  $Z_\alpha = |X|$  амплитудой  $F_\alpha^{(s)}$ , которая определяется соотношением

$$F_\alpha^{(s)}(X, P) = \tilde{f}_c^{(\alpha)}(\hat{x}_\alpha, k_\alpha) \frac{A_\alpha^{(s)}(\hat{y}_\alpha, |x_\alpha| |X|^{-1})}{|Q_\alpha|^{3+ia_\alpha}}. \quad (5.134)$$

Здесь множитель  $A_\alpha^{(s)}$ , не зависящий от  $\hat{x}_\alpha$ , дается равенством

$$\begin{aligned} A_\alpha^{(s)} &= \frac{|P|}{|k_\alpha|} (i|P|)^{-i\frac{a_\alpha}{2}} \exp \left\{ -i \sum_\alpha \frac{n_\alpha |X|}{|P| |x_\alpha|} \ln \frac{|x_\alpha|}{|X|} \right\} \times \\ &\times \sum_{l,m} B_{\alpha l}^m \frac{\Gamma\left(\frac{l}{2} + \frac{3}{2} + i\frac{a_\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2} - i\frac{a_\alpha}{2}\right)} Y_l^m(\hat{q}_\alpha) \end{aligned} \quad (5.135)$$

и через  $Q_\alpha$  обозначена приведенная разность между сферическим и однократным эйконалами,  $Q_\alpha = (1 - |X|^{-1} \hat{Z}_\alpha)^{1/2}$ .

Итак, мы показали, что асимптотика слагаемого  $\Psi_\alpha$  в особых направлениях  $\tilde{\Omega}_\alpha^{(0)}$  описывается с помощью функции  $\tilde{\Psi}_\alpha$ , которая определяется формулами (5.128)–(5.133). Изучим свойства этой функции подробнее.

При сделанных выше предположениях о направлении векторов  $k_\alpha$  и  $p_\alpha$  функция  $\Psi_\alpha$  гладко зависит от углов  $\hat{q}_\alpha$ , так что коэффициенты  $B_{\alpha l}^m$  убывают, как произвольная степень  $l^{-N}$ ,  $N \gg 1$ . Поэтому ряды (5.129) и (5.135) быстро сходятся и также представляют собой гладкие ограниченные функции  $\hat{q}_\alpha$ . Если  $(\hat{n}_\alpha, \hat{p}_\alpha) = \pm 1$ , то при  $X \in \tilde{\Omega}_\alpha^{(0)}$  малы параболические координаты  $\xi_\beta^{(\alpha)}$ ,  $\beta \neq \alpha$ , описывающие состояния частиц пары  $\beta$  в момент соударения пары  $\alpha$ . Асимптотика функции  $\Psi_\alpha$  является при этом быстро меняющейся функцией углов  $\hat{q}_\alpha$ , ее производные по  $\hat{q}_\alpha$  растут, как  $|q_\alpha|$ . Формулы (5.128)–(5.135) можно получить и в данном случае, однако при этом трудно исследовать сходимость ряда, так как производные функции  $\Psi_\alpha$  относительно  $\hat{q}_\alpha$  неограничены при  $|q_\alpha| \rightarrow \infty$ . В описанной ситуации следует использовать

интегральные представления типа (5.116). Мы приведем их в следующем параграфе.

Введем на единичной сфере  $S^{(5)}$  координаты, ассоциированные с переменными  $k_\alpha$  и  $p_\alpha$ . При этом для элемента площади  $S^{(5)}$  справедливо представление

$$d\hat{X} = |X|^{-4} \sqrt{X^2 - y_\alpha^2} d\hat{x}_\alpha \wedge dy_\alpha. \quad (5.136)$$

Можно убедиться далее, что разность между эйконалами  $|X|$  и  $Z_\alpha$ , определяющая особенности амплитуд искаженной и сферической волны  $F_\alpha^{(s)}$ , пропорциональна разности между начальным и конечным импульсами:  $Q_\alpha = |p_\alpha - p'_\alpha| (\tilde{Q}_\alpha + O(|p_\alpha - p'_\alpha|))$ , где  $p'_\alpha = E^{-1/2} |X|^{-1} y_\alpha$  и  $\tilde{Q}_\alpha = \left(1 + \frac{p_\alpha^2}{E} (\hat{y}_\alpha, \hat{p}_\alpha)\right)$ . Из (5.134) следует тогда, что особенность  $F_\alpha^{(s)}$  имеет вид полярной сингулярности

$$|p_\alpha - p'_\alpha|^{-3-i\alpha_\alpha}.$$

В силу (5.136) такая особенность является неинтегрируемой на единичной сфере  $S^{(5)}$ . Таким образом, при интегрировании по  $S^{(5)}$  мы не можем понимать амплитуду  $F_\alpha^{(s)}$  как обычную функцию и будем сопоставлять ей обобщенную функцию. Определение этой функции будет дано в следующей главе.

**Направление  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$ .** Переидем к изучению асимптотики слагаемых  $\Psi_{\alpha\beta}$  в особых направлениях  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$ . Обозначим через  $\Omega_{\alpha\beta}^{(+)} (\Omega_{\alpha\beta}^{(-)})$  часть конфигурационного пространства, где величина  $\omega_{\alpha\beta} = E^{-1/2} (|x_\alpha| |p_{\alpha\beta}| - |k_{\alpha\beta}| |\hat{p}_{\alpha\beta}, y_\alpha|)$  положительна,  $\omega_{\alpha\beta} > 0$  (отрицательна,  $\omega_{\alpha\beta} < 0$ ). Нетрудно видеть, что в особом направлении  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$  эта величина равна нулю. Можно показать, что введенные области совпадают с разбиением конфигурационного пространства, которое мы произвели в главе IV с учетом знака функции  $k_\beta^2 - k_{\beta\alpha}^2$ .

С помощью модифицированных компактных интегральных уравнений, которые мы описем в § 5, можно показать, что, как и в случае нейтральных частиц, слагаемое  $\Psi_{\alpha\beta}$  при переходе точки  $X$  из  $\Omega_{\alpha\beta}^{(-)}$  в  $\Omega_{\alpha\beta}^{(+)}$  меняет форму волны, отвечающей двукратному эйконалу  $Z_{\alpha\beta}$ , на искаженную сферическую волну. Это обстоятельство мы будем учитывать далее при построении асимптотики  $\Psi_{\alpha\beta}$ .

Обозначим через  $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}^{(0)}$  окрестность направления  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$ , в которой выполняется неравенство  $|M_{\alpha\beta}| < Z_{\alpha\beta}^v$ ,  $0 < v < 1/2$ . Чтобы описать переходное поведение  $\Psi_{\alpha\beta}$  в  $\Omega_{\alpha\beta}$ , введем параболические координаты  $\xi_{\alpha\beta}$  и  $\zeta_{\alpha\beta}$  по формулам  $\xi_{\alpha\beta} = |X| - Z_{\alpha\beta}$ ,  $\zeta_{\alpha\beta} = |X| + Z_{\alpha\beta}$  и рассмотрим функцию  $\tilde{\Psi}_{\alpha\beta}$ , задаваемую соотношением

$$\tilde{\Psi}_{\alpha\beta}(X(P)) = f_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}, \zeta_{\alpha\beta}) \frac{f_c^{(\alpha)}(\hat{x}_\alpha, k_\alpha) f_c^{(\beta)}(\hat{q}_{\beta\alpha}, k_\beta)}{|x_\alpha| |y_\alpha|} \times \\ \times A_{\alpha\beta}(\hat{X}, P) \exp\{i\sqrt{E}Z_{\alpha\beta} + iW_{\alpha\beta}\}, \quad (5.137)$$

где функция  $f_{\alpha\beta}$  будет определена из условий сшивания  $\tilde{\Psi}_{\alpha\beta}$  с эйкапальпым приближением  $\Psi_{\alpha\beta}$ , которое было построено выше.

Подставим выражение (5.137) в уравнение Шредингера (5.45). Используя для оператора Лапласа представление (5.59) в терминах параболических координат и пренебрегая членами порядка  $\xi_{\alpha\beta}\zeta_{\alpha\beta}^{-2}$ , придем к следующему уравнению с разделяющимися переменными, которому подчиняется функция  $f_{\alpha\beta}$ :

$$\xi^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} f + i\sqrt{E} \left( \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) f = 0, \quad (5.138)$$

$$\xi \equiv \xi_{\alpha\beta}, \quad \zeta \equiv \zeta_{\alpha\beta}.$$

После разделения переменных уравнение относительно  $\xi$  сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Его решение, описывающее изменение асимптотической формы слагаемого  $\tilde{\Psi}_{\alpha\beta}$ , можно получить, если выбрать в качестве решения вырожденного гипергеометрического уравнения функцию  $\Psi(a, b, t)$ . При этом в области «тепи»  $\Omega_{\alpha\beta}^{(+)}$  функцию  $f_{\alpha\beta}$  следует определить соотношением

$$f_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}, \zeta_{\alpha\beta}) = C_{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta}^\mu e^{i\sqrt{E}\xi_{\alpha\beta}} \Psi\left(\frac{1}{2} + i\mu, \frac{1}{2}, -i\sqrt{E}\xi_{\alpha\beta}\right), \quad (5.139)$$

где постоянная деления  $\mu$  и амплитуда  $C_{\alpha\beta}$  находится путем сшивания с эйкапальпым приближением  $\Psi_{\alpha\beta}$  при  $\xi_{\alpha\beta} \rightarrow \infty$  в области  $\Omega_{\beta}^{(-)}$ , которое будет проведено ниже.

При описании перехода через особое направление  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$  будем считать, что переменная  $\xi_{\alpha\beta}$  изменяется на

комплексной плоскости с разрезом по положительной полуоси  $\Pi_0$ . Будем полагать, что верхний берег разреза отвечает области  $\Omega_{\alpha\beta}^{(+)}$ , так что в формуле (5.139) аргумент  $\xi_{\alpha\beta}$  фиксируется условием  $\arg \xi_{\alpha\beta} \neq 0$  при  $\xi_{\alpha\beta} > 0$ . Движению точки  $X$  в область  $\Omega_{\alpha\beta}^{(-)}$  отвечает переход переменной  $\xi_{\alpha\beta}$  на нижний берег разреза, где  $\arg \xi_{\alpha\beta} = 2\pi$  при  $\xi_{\alpha\beta} > 0$ . При этом функция  $f_{\alpha\beta}$  становится равной

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}(\zeta_{\alpha\beta}, \xi_{\alpha\beta}) = C_{\alpha\beta} \zeta_{\alpha\beta}^{i\mu} e^{i\sqrt{E}\xi_{\alpha\beta}} \left( \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+i\mu)} e^{-i\sqrt{E}\xi_{\alpha\beta}} \times \right. \\ \left. \times \Phi\left(-i\mu, \frac{1}{2}, i\sqrt{E}\xi_{\alpha\beta}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} + i\mu, \frac{1}{2}, -i\sqrt{E}\xi_{\alpha\beta}\right) \right). \end{aligned} \quad (5.140)$$

Учитывая асимптотику функций  $\Phi(a, b, t)$  и  $\Psi(a, b, t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , находим из условий сплавления, что

$$\mu = \frac{a_{\alpha\beta}}{2},$$

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} E^{\frac{i a_{\alpha\beta}}{4}} \Gamma\left(1 + i \frac{a_{\alpha\beta}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i \frac{a_{\alpha\beta}}{2}\right) \times \\ \times \exp\left\{i\delta W_{\alpha\beta} - \pi \frac{a_{\alpha\beta}}{4}\right\}. \end{aligned} \quad (5.141)$$

Приведем ряд следствий из формул (5.139)–(5.141). В области  $\Omega_{\alpha\beta}^{(-)}$  асимптотика  $\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}$  может быть представлена в виде суммы

$$\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}(X, P) \sim \Psi_{\alpha\beta}(X, P) + \Phi_{\alpha\beta}^{(-)}(X, P),$$

где эйкональное приближение  $\Psi_{\alpha\beta}$  описано в § 1, а  $\Phi_{\alpha\beta}^{(-)}$  — искаженная сферическая волна (5.53) с сингулярной амплитудой

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^{(-)}(\widehat{X}, P) = \\ = C_0(E) \frac{\widetilde{f}_c^{(\alpha)}(\widehat{x}_\alpha, k_\alpha(p'_\alpha, p_\beta)) \widetilde{f}_c^{(\beta)}(\widehat{k}_\beta(p'_\alpha, p_\beta), k_\beta)}{|s_{\alpha\beta}|^3 (k_\beta^2(p'_\alpha, p_\beta) - k_\beta^2 - i0)^{1+ia_{\alpha\beta}}} A_{\alpha\beta}^{(s)}. \end{aligned} \quad (5.142)$$

Здесь мы использовали следующее обозначение:

$$A_{\alpha\beta}^{(s)} = \left( \frac{A_{\alpha\beta} |s_{\alpha\beta}| E^{1/4}}{2 \sqrt{2} |k'_\alpha| |p'_\alpha|} \right)^{ia_{\alpha\beta}} \Gamma \left( 1 + i \frac{a_{\alpha\beta}}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} + i \frac{a_{\alpha\beta}}{2} \right) \times \\ \times \exp \left\{ i\delta W_{\alpha\beta} + \frac{a_{\alpha\beta}\pi}{2} \right\} \exp \left\{ -i \sum_\alpha \frac{n_\alpha}{\sqrt{E}} \frac{|X|}{|x_\alpha|} \ln \frac{|x_\alpha|}{|X|} \right\}.$$

Кроме того, как и выше, мы обозначили  $p'_\alpha = \sqrt{E} |X|^{-1} y_\alpha$  и учли равенство

$$1 - \frac{Z_{\alpha\beta}}{|X|} \simeq - (k_\beta^2(p'_\alpha, p_\beta) - k_\beta^2) \frac{A_{\alpha\beta} |s_{\alpha\beta}|}{2 \sqrt{2} |k'_\alpha| |p'_\alpha|}, \\ |k'_\alpha| = \sqrt{E - p'^2_\alpha}.$$

В области  $\Omega_{\alpha\beta}^{(+)}$  слагаемое  $\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}$ , отвечающее двукратному эйконалу  $Z_{\alpha\beta}$ , равно нулю и асимптотика  $\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}$  имеет вид искаженной сферической волны:

$$\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}(X, P) \sim F_{\alpha\beta}^{(+)}(\widehat{X}, P) |X|^{-5/2} \times \\ \times \exp \{i|X||P| - iW_0(X, P)\}.$$

При этом амплитуда  $F_{\alpha\beta}^{(+)}$  не равна по величине амплитуде  $F_{\alpha\beta}^{(-)}$ , как это было в случае нейтральных частиц. Эти амплитуды, вычисленные в симметричных по отношению к границе  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$  точках, связаны равенством

$$F_{\alpha\beta}^{(+)} = \exp \{i\pi(1 + ia_{\alpha\beta})\} F_{\alpha\beta}^{(-)}. \quad (5.143)$$

Отметим, что сингулярный знаменатель в (5.142) можно понимать как обобщенную функцию  $(t - i0)^{-1-i\alpha}$ . Тогда появление добавочного множителя  $\exp \{i\pi(1 + ia_{\alpha\beta})\}$  можно объяснить результатом аналитического продолжения этой функции из правой полуплоскости, где  $\arg t = 0$  при  $t > 0$ , в область отрицательных  $t$ ,  $\arg t = \pi$ . При этом точка  $t = 0$  обходится в положительном направлении. Напомним, что в системе нейтральных частиц сингулярность амплитуды сферической волны, отвечающая двукратным столкновениям, имеет вид полюса  $(t - i0)^{-1}$ , так что переход у переменной  $t$  в левую полуплоскость отвечает изменению знака этой амплитуды.

**Параболическое уравнение в области рассеяния вперед.** Итак, мы построили асимптотику функций  $\Psi_0(X, P)$  в окрестности особых направлений  $\Omega_\alpha^{(0)}$  и  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$ , решая

эталонные уравнения с разделяющимися переменными. При этом, в отличие от области рассеяния вперед, рассмотренной в предыдущем параграфе, мы получили ответ для  $\Psi_\alpha$  не в виде интегрального представления, а в виде ряда по сферическим функциям. Получим аналогичные представления и в окрестности направления рассеяния вперед.

Подставим функцию  $\Psi_{as}$  в виде произведения

$$\Psi_{as}(X, P) = e^{i(X, P)} \Phi_{as}(X, P)$$

в уравнение Шредингера, записанное в параболических координатах  $\xi$  и  $\zeta$ . Получим для функции  $\Phi_{as}$  уравнение

$$-\frac{4}{\xi + \zeta} \xi^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi - \frac{8}{\xi + \zeta} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Phi - \frac{4i\sqrt{E}}{\xi + \zeta} \left( \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Phi + \frac{q_0(p)}{\xi + \zeta} \Phi - \frac{1}{\xi \zeta} \Delta_{\widehat{M}} \Phi = 0, \quad (5.144)$$

которое выполняется с точностью до членов порядка  $\xi \zeta^{-2}$ . Здесь через  $\Delta_{\widehat{M}}$  обозначен оператор Бельтрами — Лапласа на единичной сфере  $S^{(4)}$  в пространстве  $\mathbf{R}^5$ . Пусть  $Y_J(\widehat{M})$  — сферические функции на  $S^{(4)}$ , которые определяются как нормированные собственные функции оператора  $\Delta_{\widehat{M}}$ :

$$-\Delta_{\widehat{M}} Y_J(\widehat{M}) = L_J Y_J(\widehat{M}).$$

Здесь  $J$  — мультииндекс,  $J = \{j, m_1, m_2, m_3\}$ , нумерующий эти функции, и  $L_J$  — собственные значения, равные

$$L_J = j(j+2), \quad j = 1, 2, \dots$$

Функции  $\Phi_{as}$ , как и выше, будем искать в виде ряда по сферическим функциям:

$$\Phi_{as}(X, P) = \sum_J f_J(\xi, \zeta) Y_J(\widehat{M}), \quad (5.145')$$

где функции  $f_J$  удовлетворяют уравнению (5.144), в котором оператор  $-\Delta_{\widehat{M}}$  следует заменить множителем  $L_J = j(j+2)$ . Чтобы найти нужное нам решение этого уравнения, зададим его асимптотику при  $\xi \rightarrow \infty$ , которая определяется условием сплавления с эйкональным приближением  $L_c$ .

С этой целью разложим функцию  $\Phi_{as}(X, P)$  на координатной поверхности  $\xi = |X|^\nu$  в ряд (5.145'), так что

коэффициенты  $f_J$  даются интегралами

$$f_J(\xi, \zeta) = \int dM Y_J^*(\widehat{M}) \prod_{\alpha} \varphi_c^{(\alpha)}(x_{\alpha}, k_{\alpha}), \quad (5.145)$$

и исследуем асимптотику  $f_J$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . В старшем порядке получим выражения

$$f_J(\xi, \zeta) \sim \exp \left\{ i \frac{q_0(P)}{2|P|} \ln \xi \right\} B_J, \quad (5.146)$$

не зависящие от  $\zeta$ . При этом, если собственные числа не очень велики,

$$L_J = O(|X^v|), \quad v < 1/2, \quad (5.146')$$

коэффициенты  $B_J$  можно вычислять по формуле (5.145), где функция  $\prod_{\alpha} \varphi_c^{(\alpha)}$  заменена ее асимптотикой

$$\exp \left\{ i \sum_{\alpha} \ln \left| \frac{P}{k_{\alpha}} \right| \cos^2 \theta_{\alpha} \right\}, \quad \cos \theta_{\alpha} = |u_{\alpha}| |M|^{-1}.$$

Поскольку асимптотические граничные условия (5.146) инвариантны относительно сдвигов по  $\zeta$ , мы должны взять решения уравнений (5.144), которые не зависят от  $\zeta$  в старшем порядке. С точностью до членов порядка  $\xi \zeta^{-2}$  такими решениями являются функции

$$f_J(\xi) = C_J \xi^{\mu_J/2} \Phi \left( \frac{\mu_J}{2} + i \frac{q_0(P)}{2|P|}, \mu_J + \frac{5}{2}, i \sqrt{E} \xi \right), \quad (5.147)$$

где постоянные  $\mu_J$  даются равенствами

$$\mu_J = \sqrt{\frac{9}{4} + L_J^2} - \frac{3}{2}.$$

Учитывая далее асимптотический вид функции  $\Phi(a, b, t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , найдем из условий сплавления, что

$$C_J = B_J \frac{\Gamma \left( \frac{\mu_J}{2} + \frac{5}{2} + i \frac{q_0(P)}{2|P|} \right)}{\Gamma(5/2 + \mu_J)} \left( i \sqrt{E} \right)^{\mu_J - i \frac{q_0(P)}{2|P|}}.$$

Заметим, наконец, что функция  $\Psi_{\alpha\beta}$  асимптотически содержит также искаженную сферическую волну с сингулярной при  $(\widehat{X}, \widehat{P}) = 1$  амплитудой, которая задается

рядом по гиперсферическим функциям

$$F_{as} = \frac{1}{(1 - \cos \theta)^{\frac{5}{2} + i \frac{q_0}{2|P|}}} f_0,$$

$$f_c = \sum_J B_J \frac{\Gamma\left(\frac{\mu_J}{2} + \frac{5}{2} + \frac{i}{2|P|} q_0(P)\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_J}{2} - \frac{i}{2|P|} q_0(P)\right)} \times$$

$$\times (i \sqrt{E})^{\mu_J - iq_0(P)|P|-1 - \frac{5}{2}} Y_J(\hat{M}), \quad (5.147')$$

$$\cos \theta = (\hat{P}, \hat{X}).$$

Это выражение представляет собой разложение в ряд по функциям  $Y_J(M)$  сингулярной амплитуды (5.121), полученной выше в результате решения неоднородного уравнения (5.115) в терминах функции Грина оператора  $H_P$ .

При выводе формул (5.147) и (5.147') мы считали, что собственные числа  $L_J$  подчиняются неравенствам (5.146'). Это означает, что в разложениях (5.145) и (5.147) должны эффективно учитываться лишь те члены, которые подчиняются указанным условиям. Однако, как можно показать, ряды (5.145) и (5.147) сходятся медленно, так что возникает необходимость рассматривать и члены, которые не удовлетворяют данным условиям. Поэтому разложения (5.145), (5.147) трудно использовать для изучения локальных свойств функций  $\Phi_{as}$  и  $f_c$ . Для этого больше подходят интегральные представления (5.116) и (5.119). Разложения (5.145) и (5.147) полезны прежде всего для работы с интегралами вида

$$\int \Psi_0(X, P) f(P) d\hat{P},$$

где  $f$  — гладкие функции. В этом случае получающиеся после усреднения ряды сходятся быстро, так что условия (5.146') можно считать выполненными. Мы рассмотрим такие интегралы в следующей главе при вычислении матричных элементов кулоновской матрицы рассеяния.

**Собственные функции.** В заключение этого параграфа опишем асимптотику собственных функций дискретного спектра. Для ее построения мы применим метод эйкональных разложений.

В случае дискретного спектра асимптотические решения уравнения Шредингера, отвечающие эйконалу  $Z$ ,

удобно представить в виде

$$\Psi_z(X) = A_z f_z(M) \tilde{W}_z \exp\{-\sqrt{E}Z\};$$

здесь использованы обозначения  $A_z$ ,  $f_z$ , которые мы ввели в § 1, а функция  $\tilde{W}_z$  задается формулой

$$\tilde{W}_z = \exp \left\{ (2 \sqrt{E})^{-1} \int_{s(t)} V_c(t \nabla Z + M) dt \right\}.$$

По аналогии с системой нейтральных частиц мы рассмотрим два типа эйконалов: сферический эйконал  $|X|$  и кластерные эйконалы

$$Z^\alpha = E^{-1/2} (E_\alpha^{1/2} |x_\alpha| + (E - E_\alpha)^{1/2} |y_\alpha|),$$

$$E_\alpha = \max_j x_A^2, \quad A = \{\alpha, j\}.$$

Эйкональное приближение, отвечающее сферическому эйконалу, имеет вид

$$\Psi_0(X, E) = f_0(\hat{X}) (2 \sqrt{E} |X|)^{\rho_0} \frac{\exp\{-\sqrt{E} |X|\}}{|X|^{5/2}}, \quad (5.148)$$

где показатель степени  $\rho_0$  равен сумме двухчастичных показателей:

$$\rho_0 = - \sum_\alpha \frac{n_\alpha}{2 \sqrt{E}} \frac{|X|}{|x_\alpha|}.$$

Кластерным эйконалам отвечают следующие приближения:

$$\Psi^{(\alpha)}(X, E) = F^{(\alpha)}(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha, \omega_\alpha) \tilde{W}^{(\alpha)} \frac{\exp\{-\sqrt{E} Z^{(\alpha)}\}}{|x_\alpha| |y_\alpha|}. \quad (5.149)$$

Функция  $\tilde{W}^{(\alpha)}$  в данном случае дается формулой

$$\tilde{W}^{(\alpha)} = (2 \sqrt{E_\alpha} |x_\alpha|)^{-\frac{n_\alpha}{2 \sqrt{E_\alpha}}} \prod_{\beta \neq \alpha} |k_{\beta\alpha} \xi_{\beta\alpha}|^{-\frac{n_\beta}{2 |k_{\beta\alpha}|}},$$

где

$$k_{\beta\alpha} = c_{\beta\alpha} \sqrt{E_\alpha} \hat{x}_\alpha - s_{\beta\alpha} \sqrt{E - E_\alpha} \hat{y}_\alpha, \quad \xi_{\beta\alpha} = |x_\beta| + (\hat{k}_{\beta\alpha}, x_\beta).$$

При этом функции  $W_0$  и  $W^{(\alpha)}$  определяют растущие или

убывающие множители, в зависимости от соотношения между зарядами.

Отметим, что, в согласии с общими формулами (5.50), угловые координаты  $\hat{x}_\alpha$ ,  $\hat{y}_\alpha$  и переменная  $\omega_\alpha = -E^{-1/2}(\sqrt{E - E_\alpha}|x_\alpha| - \sqrt{E_\alpha}|y_\alpha|)$  задают ортогональную систему координат на трансверсальной поверхности  $Z^{(\alpha)} = \text{const}$ .

Пусть  $\Omega_\alpha^{(\pm)}$  — область, где  $\text{sign } \omega_\alpha = \pm 1$ , и  $\Omega^{(0)}$  — переходная область, где выполняется неравенство  $|\omega_\alpha| \leq (1 + |X|)^v$ ,  $0 < v < 1/2$ . Мы уже встречались с таким разбиением конфигурационного пространства в случае нейтральных частиц. Напомним, что область  $\Omega_\alpha$ , где частицы пары  $\alpha$  разделены слабо, лежит в области  $\Omega_\alpha^{(-)}$ .

Собственную функцию  $\Psi(X)$ , отвечающую энергии связи  $-E$ , можно представить в виде суммы

$$\Psi(X) = \sum_\alpha \Phi_\alpha(X), \quad (5.150)$$

где слагаемые  $\Phi_\alpha$  имеют вид эйкональных приближений. Опишем эти слагаемые.

В области  $\Omega_\alpha$  функция  $\Phi_\alpha(X)$  равна произведению собственной функции основного состояния оператора  $h_\alpha$  и кластерной сферической волны (5.97), где переменная  $E$  равна собственному значению, т. е.

$$\Phi_\alpha(X) \sim g_\alpha(\hat{y}_\alpha) \psi_\alpha(x_\alpha) |y_\alpha|^{-\eta_\alpha} \frac{\exp\{-\sqrt{E - E_\alpha}|y_\alpha|\}}{|y_\alpha|}. \quad (5.151)$$

Здесь  $g_\alpha(\hat{y}_\alpha)$  — гладкая функция угловых переменных  $\hat{y}_\alpha$  и через  $\eta_\alpha$  обозначен кулоновский параметр  $\eta_\alpha = \frac{n_{\alpha\alpha}}{2} \times (E - E_\alpha)^{-1/2}$ . Если  $|x_\alpha| \rightarrow \infty$ , то двухчастичная собственная функция принимает асимптотическую форму:

$$\psi_\alpha(x_\alpha) \sim f_\alpha(\hat{x}_\alpha) |2\sqrt{E_\alpha}|x_\alpha| |^{-\frac{n_\alpha}{2\sqrt{E_\alpha}}} \frac{\exp\{-\sqrt{E_\alpha}|x_\alpha|\}}{|x_\alpha|}.$$

Соответственно функция  $\Phi_\alpha$  переходит в эйкональное приближение (5.149), где амплитуда  $F^{(\alpha)}$  задается

формулой

$$F^{(\alpha)} = \left( -\frac{V \bar{E} \omega_\alpha}{\sqrt{\bar{E}_\alpha}} \right)^{\tilde{\eta}_{\alpha\alpha}} \left( \sqrt{\frac{\bar{E}_\alpha}{E}} \right)^{\eta_\alpha} f_\alpha(\hat{x}_\alpha) g_\alpha(\hat{y}_\alpha) \times \\ \times \prod_{\beta \neq \alpha} (|s_{\beta\alpha} k_{\beta\alpha}| (1 - (\hat{k}_{\beta\alpha}, y_\alpha) \operatorname{sign} s_{\beta\alpha}))^{\frac{n_\beta}{2|k_{\beta\alpha}|}}.$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\tilde{\eta}_{\alpha\alpha} = -\frac{n_{\alpha\alpha}}{2\sqrt{\bar{E} - E_\alpha}} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{n_\beta}{2|k_{\beta\alpha}|}.$$

Эта амплитуда, как и в случае волновых функций  $\Psi_0(X, P)$ , определяется из условий сшивания эйконального приближения с функцией (5.151).

Аналогично системе нейтральных частиц, в области  $\Omega_\alpha^{(+)}$  функция  $\Phi_\alpha$  имеет вид эйконального приближения (5.148), отвечающего сферическому эйконалу. Таким образом, следующая задача состоит в том, чтобы сплить указанные асимптотические режимы и описать асимптотику  $\Phi_\alpha$  в переходной области  $\Omega_\alpha^{(0)}$ . Это можно сделать в рамках метода эталонного уравнения.

Введем отвечающие области  $\Omega_\alpha^{(0)}$  параболические координаты  $\xi = |X| - Z^{(\alpha)}$ ,  $\zeta = |X| + Z^{(\alpha)}$ . На границе между областями  $\Omega_\alpha^{(-)}$  и  $\Omega_\alpha^{(+)}$   $\xi = 0$ , а в переходной области  $\xi < |X|^v$ . Будем искать функцию  $\Phi_\alpha$  в переходной области  $\Omega_\alpha^{(0)}$  в виде произведения

$$\Phi_\alpha = F^{(\alpha)}(M_\alpha) W^{(\alpha)} \frac{\exp\{-\sqrt{\bar{E}} Z^{(\alpha)}\}}{|x_\alpha| |y_\alpha|} u_\alpha(\xi, \zeta), \quad (5.152)$$

где функция  $u_\alpha(\xi, \zeta)$  зависит только от переменных  $\xi$  и  $\zeta$ . Подставляя это выражение в уравнение Шредингера (5.45) и пренебрегая малыми поправками порядка  $\xi \zeta^{-2}$ , получим следующее уравнение для функции  $u_\alpha(\xi, \zeta)$ :

$$\left( \xi^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} - V \bar{E} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right) u_\alpha(\xi, \zeta) = 0. \quad (5.153)$$

Условие сшивания дает следующие граничные условия для этого уравнения: функция (5.152) должна иметь асимптотику (5.148), если  $\xi \rightarrow \infty$  и  $X$  лежит в  $\Omega_\alpha^{(+)}$ , и становится кластерной сферической волной (5.149), если  $\xi \rightarrow \infty$  по другую сторону границы.

Заметим, далее, что уравнение (5.153) имеет решение вида

$$u_\alpha(\xi, \zeta) = C_\alpha \xi^\mu F_\alpha(-\sqrt{E}\xi),$$

где функция  $F_\alpha$  подчиняется вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$\xi F_\alpha'' + \left(\frac{1}{2} - \xi\right) F_\alpha' - \mu F_\alpha = 0.$$

Указанные выше графические условия дают следующие значения постоянных:

$$\mu = \frac{1}{2} \tilde{\eta}_{\alpha\alpha}, \quad C_\alpha = - \frac{\Gamma(1+\mu) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu\right)}{2\pi E^{\mu/2}},$$

и определяют решение

$$F_\alpha(-\sqrt{E}\xi) = e^{-\sqrt{E}\xi} \Psi\left(\frac{1}{2} + \mu, \frac{1}{2}, \sqrt{E}\xi\right).$$

Если  $\xi \rightarrow \infty$ , мы можем заменить функцию  $\Psi(a, b, t)$  ее асимптотикой  $\Psi(a, b, t) \sim t^{a-b}$ . Решение (5.152) перейдет тогда в приближение сферического эйконала (5.148).

Чтобы получить функцию (5.152) в области  $\Omega_\alpha^{(-)}$ , рассмотрим, как и выше, координату  $\xi$  в качестве переменной на комплексной плоскости с разрезом  $\Pi_0$ . Будем считать, что для  $X$  из  $\Omega_\alpha^{(+)}$  переменная  $\xi$  принадлежит верхнему берегу разреза,  $\xi = \lambda + i0$ , а области  $\Omega_\alpha^{(-)}$  соответствует нижний берег разреза. Выполняя аналитическое продолжение вдоль контура, обходящего точку  $\xi = 0$  в положительном направлении, и учитывая формулу (5.140), получим приближение кластерного эйконала (5.149).

Итак, мы описали асимптотическую форму функций  $\Phi_\alpha$ . Асимптотика собственной функции  $\Psi(X)$ , как и в случае нейтральных частиц, задается старшими по порядку членами в сумме (5.150).

## § 5. Компактные уравнения в конфигурационном пространстве

В этом параграфе мы опишем интегральные уравнения для резольвенты и волновых функций в конфигурационном пространстве. Как мы отмечали в главе III, ос-

новная трудность, которую нужно преодолеть, чтобы получить уравнения типа Фредгольма в системе заряженных частиц, обусловлена нетривиальным действием кулоновского потенциала на больших расстояниях. В частности, это обстоятельство приводит к тому, что методы, основанные на теории возмущений, в данном случае не применимы.

Заметим, однако, что адекватный математический аппарат, который выходит за рамки теории возмущений и позволяет описать дальнодействующие поправки, был развит нами при построении координатной асимптотики волновой функции. Фактически мы нашли в первых двух параграфах сингулярную часть оператора  $(H - z)^{-1}$ , отвечающую дальнодействующим частям потенциалов, т. е. решили задачу, которая упоминалась в § 5 главы IV в связи с исследованием особенностей ядер уравнений (3.29) при положительных энергиях. Поэтому нам остается исследовать гладкую часть этого оператора с помощью интегральных уравнений типа уравнений теории возмущений. Ниже мы уточним это замечание и formalizуем соответствующий подход.

**Интегральные уравнения для компонент резольвенты.** Рассмотрим оператор  $H_a$ , определенный на стр. 243 как «невозмущенный» оператор энергии. Определим модифицированные компоненты  $\widehat{T}$ -матрицы  $\widehat{M}_{\alpha\beta}$ , отвечающие возмущениям  $\widehat{V}_\alpha$ , соотношениями

$$\widehat{M}_{\alpha\beta}(z) = \widehat{V}_\alpha \delta_{\alpha\beta} - \widehat{V}_\alpha R(z) \widehat{V}_\beta.$$

Аналогично (3.57), введем в рассмотрение следующие компоненты резольвенты:

$$\widehat{R}_{\alpha\beta}(z) = -R_a(z) \widehat{M}_{\alpha\beta}(z) R_a(z);$$

здесь через  $R_a(z)$  обозначена резольвента оператора  $H_a$ ,  $R_a(z) = (H_a - z)^{-1}$ . Очевидно, резольвента оператора  $H$  равна сумме

$$R(z) = R_a(z) + \sum_{\alpha,\beta} \widehat{R}_{\alpha\beta}(z).$$

Интегральные уравнения для ядер операторов  $M_{\alpha\beta}$  и  $R_{\alpha\beta}$  можно получить совершенно так же, как это было сделано в случае нейтральных частиц. Мы не будем повторять здесь уже знакомые рассуждения. Приведем окончатель-

ный результат. Обозначим через  $\widehat{H}_\alpha$  оператор

$$\widehat{H}_\alpha = H_a + \widehat{V}_\alpha = H_0 + V_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} V_\beta^{(0)}$$

и через  $\widehat{R}_\alpha(z)$  — резольвенту этого оператора,  $\widehat{R}_\alpha(t) = (\widehat{H}_\alpha - z)^{-1}$ . Справедливы следующие модифицированные уравнения для компонент  $\widehat{R}_{\alpha\beta}$ :

$$\widehat{R}_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}(\widehat{R}_\alpha(z) - R_a(z)) - \widehat{R}_\alpha(z) \widehat{V}_\alpha \sum_{\gamma \neq \alpha} \widehat{R}_{\gamma\beta}(z). \quad (5.154)$$

Эти уравнения наилучшим образом подходят для исследования кулоновской функции Грина.

Чтобы исследовать модифицированные интегральные уравнения, необходимо знать свойства ядер операторов  $R_a$  и  $\widehat{R}_\alpha$ . Однако, в отличие от аналогичных операторов для системы трех нейтральных частиц, явный вид этих ядер неизвестен и они должны быть изучены независимо. Данную задачу мы решим путем построения асимптотических решений неоднородных уравнений Шредингера для функций Грина и последующим переходом к интегральным уравнениям теории возмущений по отношению к этим решениям. Другими словами, мы правильно опишем сингулярную кулоновскую часть функций Грина уже в нулевом приближении, так что оставшееся возмущение будет иметь короткодействующий характер.

**Оператор  $R_a(z)$ .** Начнем с построения приближенной функции Грина. Будем называть функцию  $G_{as}(X, X', z)$  асимптотической функцией Грина для оператора  $H_s$ , если она удовлетворяет следующим условиям:

1) Функция  $G_{as}(X, X', z)$  является гладкой и ограниченной при  $X \neq X'$  и всех  $z$  из комплексной плоскости с разрезом  $\Pi_0$ . Справедлива оценка  $|G_{as}(X, X', z)| \leq C(1 + |X - X'|)^{-5/2}$ . При совпадающих значениях переменных  $X$  и  $X'$   $G_{as}$  имеет полярную особенность

$$G_{as}(X, X', z) \sim (4\pi^3)^{-1} |X - X'|^{-4}.$$

2) Ядро  $G_{as}(X, X', z)$  является симметричной функцией  $G_{as}(X, X', z) = G_{as}(X', X, \bar{z})$  и подчиняется неоднородному уравнению Шредингера с  $\delta$ -образной особенностью с точностью до быстро убывающих при  $|X| \rightarrow \infty$

( $|X'| \rightarrow \infty$ ) членов. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} & (-\Delta_{X'} + V^{(0)}(X') - z) G_{as}(X, X', z) = \\ & = \delta(X - X') - G_{as}(X, X', z) V_{as}(X, X', z), \end{aligned} \quad (5.155)$$

где медленно осциллирующая функция  $V_{as}(X, X', z)$  убывает быстрее степени  $|X'|^{-3-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , равномерно относительно переменной  $X$ .

3) При  $|X| \rightarrow \infty$  и  $|X'| < (1 + |X|)^v$ ,  $v < 1/2$ , асимптотика  $G_{as}(X, X', z)$  задается эйкональным приближением (5.50) отвечающим сферическому эйконалу

$$G_{as}(X, X', z) \sim C_z |X|^{-5/2} \exp\{i\sqrt{z}|X| + iW_{as}(X, z)\} \tilde{f}(X', \hat{X}). \quad (5.155')$$

Если известна функция  $G_{as}(X, X', z)$ , обладающая перечисленными свойствами, то для ядер резольвенты  $R_a(X, X', z)$  можно получить уравнение теории возмущений, к которому применима альтернатива Фредгольма. Действительно, равенство (5.155) для функции  $G_{as}$  можно переписать в операторном виде:

$$G_{as}(z)(H_a - z) = I - G_{as}V_{as},$$

где через  $G_{as}$  и  $G_{as}V_{as}$  обозначены операторы, задаваемые ядрами  $G_{as}(X, X', z)$  и  $G_{as}(X, X', z) \cdot V_{as}(X, X', z)$ . Домножая это соотношение справа на резольвенту оператора  $H_a$ , получим искомое уравнение теории возмущений:

$$R_a(z) = G_{as}(z) - G_{as}V_{as}R_a(z). \quad (5.156)$$

Это уравнение можно толковать как модифицированное уравнение (2.9), где ядро  $V_{as}(X, X', z)$  играет роль короткодействующего «потенциала».

Доказательство фредгольмовости данного уравнения основано на том факте, что ядро  $(G_{as}V_{as})(X, X', z)$  достаточно быстро убывает по второй переменной. Отсюда следует, что свойства интеграла

$$f(X) = \int G_{as}(X, X', z) V_{as}(X, X', z) g(X') dX',$$

который определяет действие оператора  $G_{as}V_{as}$ , зависят только от свойств ядра  $G_{as}(X, X', z)$  как функции  $X$ . В частности, если  $g(X)$  непрерывна и убывает, как  $(1 + |X|)^{-5/2+v}$ ,  $v > 0$ , то функция  $f(X)$  является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной и убывает, как  $|X|^{-5/2}$ . Таким образом, множество функций

$g(X)$  можно подобрать так, чтобы оператор  $G_{as}V_{as}$  улучшал их свойства. Следовательно, этот оператор является вполне непрерывным.

Заметим, что оператор  $G_{as}V_{as}$  может быть сделан сколь угодно малым по норме за счет выбора постоянной обрезания  $a$  в (5.104'). Эту постоянную можно подобрать так, чтобы соответствующее однородное уравнение  $f = G_{as}V_{as}f$  не имело бы нетривиальных решений при  $z$ , лежащих за пределами сколь угодно малой окрестности нуля. Поэтому, если мы рассматриваем фиксированную точку  $z$ , мы можем считать, что однородное уравнение (5.156) не имеет нетривиальных решений.

Следует отметить, что требование об убывании функции  $V_{as}(X, X', z)$  из (5.155) можно несколько ослабить. Можно считать, в частности, что при близких значениях аргументов,  $X \sim X'$ , эта функция имеет порядок  $O(|X|^{-1})$ . Это не меняет существа дела — оператор  $G_{as}V_{as}$  остается вполне непрерывным. Ниже мы построим асимптотическую функцию Грина  $G_{as}(X, X', z)$ , для которой выполняется именно это ослабленное условие.

Таким образом, наша основная задача состоит в построении асимптотической функции Грина  $G_{as}(X, X', z)$ . Приступим к ее решению.

Как мы показали в § 2, асимптотика решения уравнения Шредингера для функции  $\Psi_{as}(X, P)$ , отвечающей оператору  $H_a$ , определяется прямолинейными траекториями свободных частиц, которые задаются плоским эйконалом  $(X, \hat{P})$ . Поэтому в качестве решения неоднородного уравнения Шредингера (5.155), как и в случае нейтральных частиц, естественно взять эйкональное приближение, соответствующее эйконалу  $|X - X'|$ , который описывает прямолинейное распространение сферической волны из точки  $X'$  в точку  $X$ . В результате при  $|X - X'| \rightarrow \infty$  мы получим асимптотическое решение этого уравнения в виде произведения свободной функции Грина на кулоновский фазовый множитель:

$$G_{as}(X, X', z) = C_z \frac{\exp\{i\sqrt{z}|X - X'|\}}{|X - X'|^{5/2}} \tilde{G}_{as}(X, X', z). \quad (5.157)$$

Последний задается равенством

$$\tilde{G}_{as}(X, X', z) = \exp\{iW_{as}(X, X', z) + i\delta W_N(X, X', z)\},$$

где функция  $W_{as}$  определяется интегралом по прямоли-

нейной траектории, соединяющей точки  $X$  и  $X'$ :

$$W_{as}(X, X', z) = \int_{(x', \hat{P}_{xx'})}^{(x, \hat{P}_{xx'})} V^{(0)}(t\hat{P}_{xx'} + M_{xx'}) dt,$$

$$P_{xx'} = X - X', \quad M_{xx'} = X - \hat{P}_{xx'}(X, \hat{P}_{xx'}),$$

а добавочная фаза  $\delta W_N$  — рекуррентными соотношениями (5.49'), где следует взять конечное число  $N$  членов. Отметим, что если точки  $X$  и  $X'$  расположены в области  $\Omega_0$ , так что потенциал  $V^{(0)}(X)$  равен сумме кулоновских, то функция  $W_{as}$  сводится к сумме двухчастичных фаз (5.14'), где энергетический множитель  $z$  следует заменить величинами  $z^{-1/2} |X - X'| |x_\alpha - x'_\alpha|^{-1}$ :

$$W_{as}(X, X', z) =$$

$$= \frac{|X - X'|}{2\sqrt{z}} \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{|x_{\alpha} - x'_{\alpha}|} \ln \left| \frac{x_{\alpha} - x'_{\alpha}}{|x_{\alpha} - x'_{\alpha}|} \right| \frac{|x_{\alpha}| + (x_{\alpha} - x'_{\alpha}, x_{\alpha})}{|x_{\alpha} - x'_{\alpha}| + (x_{\alpha} - x'_{\alpha}, x'_{\alpha})}.$$

Как и в случае волновых функций, эйкональные формулы теряют смысл в ряде особых направлений. Последние могут быть охарактеризованы на основе проведенной в § 3 классификации асимптотических режимов функции  $\Psi_0(X, P)$ , если сопоставить энергетическим переменным  $k_{\alpha}$  выражения  $q_{\alpha} = \sqrt{z} \frac{|x_{\alpha} - x'_{\alpha}|}{|X - X'|}$ , а параболическим переменным  $\xi^{(\alpha)} = |x_{\alpha}| - (x_{\alpha}, \hat{k}_{\alpha})$  — аналогичные координаты, построенные по вектору  $-\hat{x}_{\alpha}$ :

$$\xi_{x'_{\alpha}}(x_{\alpha}) = |x_{\alpha}| + (x_{\alpha}, \hat{x}'_{\alpha}).$$

В частности, область действия эйкональных формул ограничивается условием на «координатные» переменные

$$\xi_{x'_{\alpha}}(x_{\alpha}) \geq (|x_{\alpha}| + |x'_{\alpha}|)^{\nu}, \quad \nu > 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (5.158)$$

т. е. точки  $x_{\alpha}$  и  $x'_{\alpha}$  не должны располагаться на прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от него, и с условием на «энергетические» переменные

$$|q_{\alpha}| > (\xi_{x_{\alpha}}(x'_{\alpha}) + \xi_{x'_{\alpha}}(x_{\alpha}))^{\mu'}, \quad \mu' > -1/2. \quad (5.159)$$

Если эти условия выполнены, то функция  $V_{as}(X, X', z)$

убывает, как произвольная степень  $|X - X'|^{-n}$  при  $|X - X'| \rightarrow \infty$ . Отметим, что условия такого типа уже встречались, когда мы описывали границы применимости эйкональных формул (5.14) и (5.42) для функций Грина  $r_c(x, x', z)$  и  $R_N(X, X', z)$ .

Для построения асимптотической резольвенты в особых областях следовало бы применить метод эталонного уравнения. Однако, чтобы не повторять уже знакомые рассуждения, мы воспользуемся тем фактом, что нам известны асимптотические волновые функции  $\Psi_{as}(X, P)$ , и зададим асимптотическую функцию Грина с помощью приближенного спектрального интеграла, аналогичного представлению (5.39):

$$G_{as}(X, X', z) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int dP' \chi_c(P', z) \frac{\Psi_{as}(X, P') \Psi_{as}^*(X', P')}{P'^2 - z}. \quad (5.160)$$

Здесь через  $\chi_c(P', z)$  обозначена гладкая срезающая функция, равная единице в окрестности точки  $P'^2 = \text{Re } z$  и гладко исчезающая на некотором расстоянии от этой точки. Асимптотика этого интеграла может быть вычислена по схеме, использованной при доказательстве формул (4.119). Сначала нужно проинтегрировать по угловым переменным и применить метод стационарной фазы, а затем вычислить оставшийся интеграл по радиальной переменной с помощью теоремы о вычетах. Так, при  $z = E + i0$  можно получить представление (5.157), в котором ядро  $G_{as}$  задается интегралом

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{as}(X, X', E + i0) = & \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{5/2} \exp \left\{ -i \sqrt{E} \xi_{XX'} - \right. \\ & - \sum_{\alpha} i \frac{|X - X'|}{|x_{\alpha} - x'_{\alpha}|} \sqrt{E} n_{\alpha} \ln \frac{\xi_{XX'}}{2} \left. \right\} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int dq \exp \{ -\epsilon |q| - \right. \\ & \left. - 2i \sqrt{E} q^2 - 2iE^{1/4} \xi_{XX'}^{1/2} (q, \hat{M}_{XX'}) \} \widetilde{\Phi}_F(\xi, M), \quad (5.161) \end{aligned}$$

где

$$q = \sqrt{\xi} \hat{M}, \quad q \in \mathbf{R}^5,$$

$$\hat{M}_{XX'} = \hat{X}(X, X - X') + \hat{X}'(\hat{X}', X' - X),$$

$$\xi_{XX'} = |X| + |X'| - |X - X'|, \quad \xi_{XX'} = |X| + |X'| + |X - X'|.$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда разность  $|X - X'|$  может оставаться ограниченной. Мы предположим, что выполняется неравенство  $|X - X'| \leq (|X| + |X'|)^v$ ,  $v < 1/6$ .

Пусть точки  $X$  и  $X'$  расположены в области  $\Omega_0$ . Разложим потенциал взаимодействия  $\sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{|x_{\alpha}|}$  в ряд по малому параметру  $\frac{X - X'}{|X| + |X'|}$ . Старший член этого разложения представляет собой кулоновский потенциал в  $R^6$   $q_0 |X|^{-1}$ , где эффективный заряд задается равенством

$$q_0 = (|X| + |X'|) \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{|x_{\alpha}| + |x'_{\alpha}|}.$$

В соответствии с этим мы положим  $G_{as}(X, X', z)$  равным модельной функции Грина (5.40) для такого потенциала:

$$G_{as}(X, X', z) = R_s(X, X', z).$$

Если точки  $X$  и  $X'$  расположены в  $\Omega_{\alpha}$ , то старшие асимптотические члены потенциала определяются равенством (5.125). Поэтому для  $X, X'$  из  $\Omega_{\alpha}$  мы возьмем в качестве модельной функции Грина ядро  $R_{as}^{(\alpha)}(X, X', z)$  резольвенты оператора  $H_{as}^{(\alpha)}$ , определенного равенством (5.125).

Итак, мы описали функцию  $G_{as}$  во всей области определения. По построению это ядро удовлетворяет условиям, которые мы перечислили выше, и, следовательно, может быть взято в качестве асимптотической функции Грина для оператора  $R_a(z)$ . Отметим, что, также по построению, справедлива асимптотическая формула, аналогичная (4.79):

$$\begin{aligned} G_{as}(X, X', E + i0) \underset{|X'| \rightarrow \infty}{\sim} & C_E \Psi_{as}(X, P') \times \\ & \times \frac{\exp \{i \sqrt{E} |X| + iW_{as}(X)\}}{|X|^{5/2}}, \end{aligned} \quad (5.162)$$

где  $P' = -\sqrt{E} \hat{X}'$  и  $\Psi_{as}(X, P')$  — приближенная волновая функция, описанная в § 3.

**Функция Грина оператора  $\hat{H}_{\alpha}$ .** Аналогичный метод, основанный на уравнении теории возмущений с приближенной функцией Грина, может быть использован для исследования резольвенты  $\hat{R}_{\alpha}(z)$ . Прежде чем приступить к построению приближенной функции Грина, рассмотрим

ряд функций, которые затем будем использовать для ее описания. Пусть  $G_{\alpha}^{(1)}(X, X', z)$  — функция, задаваемая интегралом

$$G_{\alpha}^{(1)}(X, X', z) = \int dy''_{\alpha} R_{\alpha}(X, X'', z) R_{\alpha}(X'', X', z), \quad (5.163)$$

где полагается  $x''_{\alpha} = 0$ . По определению эта функция подчиняется уравнению Шредингера (5.45), если переменные  $X$  и  $X'$  лежат в области  $\Omega_0$ . Рассмотрим асимптотику этой функции при  $|X| \rightarrow \infty$  или  $|X'| \rightarrow \infty$ . Согласно (5.157) старший член асимптотики порождается критической точкой экспоненты  $\exp\{i\sqrt{z}(|X - X''| + |X'' - X'|)\}$  при дополнительном условии  $x''_{\alpha} = 0$ . В базисе, отвечающем паре  $\alpha$ , эта точка дается равенством  $X^{(0)} = \left\{ 0, \frac{|x'_{\alpha}| y_{\alpha} - |x_{\alpha}| y'_{\alpha}}{|x_{\alpha}| + |x'_{\alpha}|} \right\}$ .

Показатель экспоненты равен в этой точке однократному эйконалу  $Z_{\alpha}(X, X')$ . В результате приходим к выводу, что функция  $G_{\alpha}^{(1)}(X, X', z)$  тесно связана с эйкональным приближением, отвечающим эйконалу  $Z_{\alpha}(X, X')$ :

$$G_{\alpha}^{(1)}(X, X', z) \sim C_z \exp\{i\sqrt{z} Z_{\alpha}(X, X')\} \tilde{G}_{\alpha}^{(1)}(X, X', z), \quad (5.164)$$

где, как и выше, мы обозначаем через  $C_z$  величину  $C_z = -\frac{1}{2} e^{i\pi/4} (2\pi)^{-5/2} z^{3/4}$ . Это обозначение мы будем использовать и далее.

Если точки  $X$ ,  $X^{(0)}$  и  $X'$  не лежат в особых областях, которые определяются условиями (5.158), (5.159), то функция  $\tilde{G}_{\alpha}^{(1)}(X, X', z)$  задается эйкональными формулами

$$\tilde{G}_{\alpha}^{(1)}(X, X', z) = \frac{|x_{\alpha}| + |x'_{\alpha}|}{|x_{\alpha}| |x'_{\alpha}|} \frac{\exp\{iW_{\alpha\alpha}(X, X', z)\}}{Z_{\alpha}^{5/2}(X, X')}. \quad (5.165)$$

Фаза  $W_{\alpha\alpha}$  равна сумме эйкональных фаз, которые входят в асимптотику функций  $G_{\text{as}}$ :

$$W_{\alpha\alpha}(X, X', z) = W_{\text{as}}(X, X^{(0)}, z) + W_{\text{as}}(X^{(0)}, X', z).$$

Отметим, что, аналогично представлению (5.86'), в этой формуле можно отделить фазу  $W_{\alpha\alpha}$ , зависящую от эйкональной переменной  $Z_{\alpha}$ , и слагаемое  $\delta W_{\alpha\alpha}$ , которое является функцией лишь точки  $M_{\alpha\alpha}$  на трансверсальной

поверхности  $Z_\alpha = \text{const}$ :

$$M_{\alpha\alpha} = X - (X, \hat{K}_\alpha) \hat{K}_\alpha, \quad K_\alpha = \nabla_X Z_\alpha(X, X').$$

Если  $X \in \Omega_0$ , то фаза  $\tilde{W}_{\alpha\alpha}$  может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\alpha\alpha} = - \sum_{\beta} \left( \frac{n_\beta}{2 \sqrt{z} |k_{\beta\alpha}|} \ln (|k_{\beta\alpha}| |x_\beta| - (k_{\beta\alpha}, x_\beta)) + \right. \\ \left. + \frac{n_\beta}{2 \sqrt{z} |k'_{\beta\alpha}|} \ln (|k_{\beta\alpha}| |x'_\beta| - (k'_{\beta\alpha}, x_\beta)) \right). \end{aligned}$$

Здесь «импульсные» переменные  $k_{\beta\alpha}$  и  $k'_{\beta\alpha}$  даются равенствами

$$k_{\beta\alpha} = \nabla_{x_\beta} Z_\alpha(X, X'), \quad k'_{\beta\alpha} = -\nabla_{x'_\beta} Z_\alpha(X, X'),$$

а фаза  $\delta W_{\alpha\alpha}$ , зависящая от трансверсальной координаты  $M_{\alpha\alpha}$ , равна сумме

$$\delta W_{\alpha\alpha}(X, X', z) = \delta W_{\alpha\alpha}^{(1)}(X, X', z) + \delta W_{\alpha\alpha}^{(2)}(X, X', z),$$

где

$$\delta W_{\alpha\alpha}^{(1)} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{n_\beta}{2 \sqrt{z} |k_{\beta\alpha}|} \ln (|k_{\beta\alpha}| |x_\beta^{(0)}| - (k_{\beta\alpha}, x_\beta^{(0)}))$$

и

$$\delta W_{\alpha\alpha}^{(2)} = - \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{n_\beta}{2 \sqrt{z} |k'_{\beta\alpha}|} \ln (|k'_{\beta\alpha}| |x_\beta^{(0)}| - (k'_{\beta\alpha}, x_\beta^{(0)})).$$

Через  $x_{\beta\alpha}^{(0)}$  обозначена координата точки  $X^{(0)}$  в базисе, отвечающем паре  $\beta$ :  $X^{(0)} = \{x_\beta^{(0)}, y_\beta^{(0)}\}$ .

Эйкональные формулы (5.164), (5.165) теряют смысл в указанных выше особых направлениях. Здесь фаза  $W_{\alpha\alpha}$  обращается в бесконечность. В частности, это происходит при  $|M_{\alpha\alpha}| = 0$ . В этом случае функция  $G_\alpha^{(1)}$  задается цосредством интегральных представлений (5.163). Последние можно привести к виду (5.161), если в интеграле (5.163) сделать замену переменной  $\tilde{y} = Z_\alpha^{-1} y''_\alpha$  и ограничить область интегрирования по  $\tilde{y}$  окрестностью критической точки  $y^{(0)}$ . Мы не будем, однако, описывать здесь громоздкие формулы, которые получаются в результате этой процедуры.

Итак, мы видим, что функция  $G_\alpha^{(1)}$  удовлетворяет требованиям, которые мы предъявляем к приближенному решению уравнения Шредингера,— эта функция асимптотически имеет эйкональный вид в неособых направлениях и удовлетворяет условиям сплавления в особых областях. Построим теперь с помощью этой функции асимптотическую функцию Грина для оператора  $\hat{H}_\alpha$ .

Предположим сначала, что точки  $X$  и  $X'$  расположены в области  $\Omega_0$ . Определим тогда функцию  $G_\alpha(X, X', z)$  следующим равенством:

$$G_\alpha(X, X', z) = R_a(X, X', z) + \hat{G}_\alpha(X, X', z).$$

Здесь  $R_a$  — функция Грина асимптотического гамильтониана  $H_a$ , а  $\hat{G}_\alpha$  — гладкая функция, которая порождается возмущением  $\hat{V}_\alpha$ . Зададим эту функцию равенством

$$\begin{aligned} \hat{G}_\alpha(X, X', z) &= f_\alpha^{(\pm)}(\hat{x}_\alpha, k_\alpha) \cdot G_\alpha^{(1)}(X, X', z), \\ k_\alpha &= -\hat{x}'_\alpha \frac{|\hat{x}_\alpha| + |\hat{x}'_\alpha|}{Z_\alpha(X, X')} \operatorname{Re} \sqrt{z}, \end{aligned} \quad (5.166)$$

где функция  $G_\alpha^{(1)}$  была определена выше, а функция  $f_\alpha^{(\pm)}$  описывает эффект возмущения  $\hat{V}_\alpha(X)$ . Эта функция выражается через двухчастичную амплитуду рассеяния. Именно, предположим, что

$$(\hat{x}_\alpha, \hat{x}'_\alpha) \neq -1.$$

Тогда  $f_\alpha^{(\pm)}$  совпадает с амплитудой рассеяния для оператора энергии  $h_\alpha$  (5.22), причем знак (+) соответствует положительным значениям  $\operatorname{Re} \sqrt{z}$ , а (-) — отрицательным. Если  $(\hat{x}_\alpha, \hat{x}'_\alpha) = -1$ , то кулоновская часть амплитуды рассеяния  $f_c$  обращается в бесконечность и в окрестности этих направлений  $x_\alpha$  и  $x'_\alpha$  ее следует заменить короткодействующей частью амплитуды рассеяния для модельного оператора  $h_{as}^{(\alpha)}$ , определенного в предыдущем параграфе, т. е. функция  $f_\alpha = f_c + f_{cs}$  заменяется тогда функцией  $f_{cs} = f_\alpha^{(a)} - f_c$ , определенной согласно (5.127).

Заметим, что почти во всех направлениях конфигурационного пространства ядро  $G_\alpha^{(1)}$  описывается эйкональными формулами (5.164), (5.165). Поэтому старшие асимптотические члены можно дополнить эйкональными поправками и добиться, чтобы уравнение Шредингера

(5.45) для  $\widehat{G}_\alpha$  выполнялось с точностью до произвольной степени  $Z_\alpha^{-N}$ ,  $N \gg 1$ . Мы будем считать далее, что эта процедура выполнена. Таким образом, в неособых направлениях мы зададим функции  $\widehat{G}_\alpha$  из (5.166) суммой (5.48) с конечным числом членов  $N$ ,  $N \gg 1$ .

Совершенно такими же соотношениями можно задать функцию  $\widehat{G}_\alpha(X, X', z)$  в случае, когда точки  $X$  и  $X'$  расположены в областях  $\Omega_\beta(a, v)$  при  $\beta \neq \alpha$ . Пусть, наконец, эти точки переходят в область  $\Omega_\alpha$ , где короткодействующее возмущение  $\widehat{V}_\alpha$  отлично от нуля. Для тех направлений векторов  $X$  и  $X'$ , которые не попадают в особую область, определенную соотношениями (5.158) и (5.159), мы положим

$$\widehat{G}_\alpha(X, X', z) = R_\alpha^{(c)}(X, X', z), \quad (5.167)$$

где модельная функция Грина  $R_\alpha^{(c)}$  определена выше равенством (5.71'). При этом уравнение Шредингера будет выполнятся с точностью до членов порядка  $|x_\alpha||y_\alpha|^{-2}$ . Если же точки  $X$  и  $X'$  попадают в особые области, мы добавим в правой части (5.167) члены, которые, аналогично (5.114), обеспечивают спшивание решения в особой области с эйкональными формулами. Это можно сделать, например, если задать  $\widehat{G}_\alpha$  с помощью приближенного спектрального интеграла (5.160), где в качестве асимптотических волновых функций нужно взять решения  $\Psi_{as}(X, P)$ , которые мы построили в § 3.

Если, наконец, одна из точек, например  $x'_\alpha$ , выходит за пределы области  $\Omega_\alpha$ , то ядро  $\widehat{G}_\alpha$  снова можно определить эйкональными формулами (5.164), (5.165), где, однако, следует заменить отношение  $f_\alpha|x_\alpha|^{-1}$  волновой функцией оператора  $h_\alpha$ . При этом аргумент  $x_\alpha$  функции  $G_\alpha^{(1)}$  следует положить равным нулю:

$$\widehat{G}_\alpha(X, X', z) = C_z \psi_\alpha^{(\pm)}(x_\alpha; k_\alpha) \left[ \frac{\exp\{iW_{\alpha\alpha}(X, X', z)\}}{Z_\alpha^{5/2}(X, X')} \right]_{x_\alpha=0}.$$

Отметим, что модельная функция Грина  $R_\alpha^c(X, X', z)$  и, следовательно, асимптотическая функция Грина  $\widehat{G}_\alpha(X, X', z)$  содержат нетривиальную часть, которая отвечает дискретному спектру оператора  $h_\alpha$ . При этом

ядро оператора  $P_A R_\alpha^c$  имеет вид

$$(P_A R_\alpha^c)(X, X', z) = \psi_A(x_A) \psi_A^*(x'_A) \cdot r_\alpha^c(y_\alpha, y'_\alpha, z - \kappa_A^2), \quad (5.168)$$

где через  $r_\alpha^c$  обозначена функция Грина для оператора  $h_\alpha^c$ . Напомним, что последний описывает рассеяние пары  $\alpha$  на кулоновском центре.

Итак, мы описали асимптотическую функцию Грина во всей области определения. По построению эта функция, как и ядро  $G_{as}(X, X', z)$ , обладает свойствами, перечисленными выше в условиях 1), 2). Посмотрим, какой вид приобретает равенство (5.155). Рассмотрим выражение

$$\left( -\Delta + v_\alpha(x_\alpha) + \sum_{\beta \neq \alpha} v_\beta^{(0)}(X) - z \right) \hat{G}_\alpha(X, X', z) = \\ = \delta(X - X') + \hat{A}_\alpha(X, X', z), \quad (5.169)$$

которое можно считать определением ядра  $\hat{A}_\alpha(X, X', z)$ . Как и в случае ядра  $G_{as}(X, X', z)$ , функция  $\hat{A}_\alpha(X, X', z)$  быстро убывает по второй переменной. Однако наряду с членами, которые отражены в представлении (5.155'), в данном случае в области  $\Omega_\alpha$  появляются новые слагаемые, которые обязаны своим происхождением кластерным функциям Грина (5.168). Таким образом, мы имеем представление

$$\hat{A}_\alpha(X, X', z) = \\ = G_{as}(X, X', z) \hat{V}_{as}(X, X', z) + \sum_A G_A(X, X', z) \hat{v}_A(y_A, y'_A, z), \quad (5.170)$$

где через  $G_A$  обозначено ядро (5.168). Функции  $\hat{V}_{as}$  и  $\hat{v}_A$  быстро убывают по переменным  $X'$  и  $y'_\alpha$  равномерно относительно  $X$  и  $y_\alpha$  соответственно.

Как и в случае оператора  $R_a(z)$ , мы можем взять асимптотическую функцию Грина  $\hat{G}_\alpha$  в качестве нулевого приближения для ядра резольвенты  $\hat{R}_\alpha(X, X', z)$ . Получим тогда следующее уравнение теории возмущений:

$$\hat{R}_\alpha(z) = -\hat{A}_\alpha(z) \hat{R}_\alpha(z) + \hat{G}_\alpha(z), \quad (5.171)$$

где через  $\hat{A}_\alpha(z)$  обозначен оператор, задаваемый ядром

$\widehat{A}_\alpha(X, X', z)$ . Это уравнение может быть исследовано по такой же схеме, как и аналогичное уравнение (5.156). Единственное отличие состоит в том, что асимптотика решений наряду с членами, убывающими, как  $(1 + |X|)^{-5/2}$ , содержит также члены с асимптотикой кластерного типа, отвечающие слагаемым (5.168). Можно убедиться, что уравнение (5.171) является компактным. Мы не будем детализировать рассуждения в доказательство этого утверждения — они подробно рассматривались на примере уравнений (4.12) и (4.70). Опишем только несколько следствий из уравнения (5.171).

Заметим, что постоянная  $a$  из (5.104') определяет величину возмущений  $\widehat{V}_{ab}$  и  $\widehat{v}_A$ , которые могут быть сделаны сколь угодно малыми по величине. В результате для любого фиксированного  $z$ , не совпадающего с пороговыми значениями  $z \neq 0, -\kappa_A^2 (A = \{\alpha, i\}, i = 1, 2, \dots, N_\alpha)$ , постоянная  $a$  может быть выбрана так, чтобы однородное уравнение (5.171) не имело бы нетривиальных решений.

Ниже нам понадобится асимптотическая форма функции  $\widehat{R}_\alpha(X, X', z)$  при  $z$ , лежащих на разрезе  $[-\kappa_A^2, \infty)$  и  $|X'| \rightarrow \infty$ . Согласно формулам (5.166), (5.162) и (5.168) справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \widehat{R}_\alpha(X, X', E \pm i0) \sim \\ & \sim C_E \widehat{F}_{0\alpha}(X, P') \frac{\exp\{\pm i\sqrt{E}|X| \pm iW_0(X)\}}{|X|^{5/2}} + \frac{1}{4\pi} \sum_j \Psi_A(x'_A) \times \\ & \quad \times F_A(X, p'_\alpha) \frac{\exp\{\pm i\sqrt{E + \kappa_A^2}|y_\alpha| + iW_A(y_\alpha)\}}{|y_\alpha|}. \end{aligned} \quad (5.172)$$

Здесь суммирование ведется по всем собственным числам оператора  $h_\alpha$ , через  $F_{0\alpha}$  и  $F_{A\alpha}$  обозначены ограниченные амплитуды сферических волн, которые являются функциями  $X$ , и  $P' = \mp\sqrt{E}\widehat{X}'$  и  $p_\alpha = \mp\sqrt{E}|X'|^{-1}y'_\alpha$  соответственно.

Мы увидим ниже, что эти амплитуды тесно связаны с волновыми функциями для оператора  $\widehat{H}_\alpha$ .

Итак, мы полностью разобрались со строением функций Грина  $R_\alpha(X, X', z)$  и  $\widehat{R}_\alpha(X, X', z)$ , входящих в уравнения (5.154), и теперь можем приступить к исследова-

нию свойств модифицированных компонент резольвенты  $\widehat{R}_{\alpha\beta}$  и самой резольвенты.

**Функция Грина  $R(X, X', z)$ .** Мы будем действовать по схеме, которая применялась в случае нейтральных частиц. Начнем с построения функционального пространства, в котором следует рассматривать интегральное уравнение (5.154). Для этого мы рассмотрим поведение ядер итераций  $\widehat{R}_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ . Последние равны сумме (4.70'), где операторы  $\widehat{R}_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_n\beta}^{(n)}$  определяются равенствами, аналогичными (4.71'):

$$\widehat{R}_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_n\beta}^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} \widehat{R}_\alpha \widehat{V}_\alpha \dots \widehat{R}_{\alpha_n} \widehat{V}_{\alpha_n} (\widehat{R}_\beta - \widehat{R}_\alpha).$$

Заметим, что свойства ядер  $\widehat{R}_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_n\beta}^{(n)}$  могут быть изучены с помощью такой же техники, как и в случае нейтральных частиц. Главное значение с точки зрения применимости этой техники имеет то обстоятельство, что функции  $\widehat{V}_\alpha(X)$ , подобно короткодействующим парным потенциалам  $v_\alpha(x_\alpha)$ , сосредоточены в областях  $\Omega_\alpha$ , где слабо разделены частицы пары  $\alpha$ . Поэтому и асимптотику ядер  $R_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_n\beta}^{(n)}$ , которые задаются интегралами типа (4.71), определяют те же факторы, что и таковые рассмотренные в § 4 предыдущей главы. Кулоновская специфика проявляется лишь в том, что в показателях быстро осциллирующих экспонент возникают дополнительные фазы, логарифмически зависящие от координат. Эти фазы, однако, не являются препятствием для использования метода стационарной фазы, так как отвечающие им множители представляют собой медленно осциллирующие функции в смысле определения (4.117).

Из представления (5.172) вытекает, что ядра  $\widehat{R}_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_n\beta}^{(n)}$  являются ядрами типа  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$  (4.72). Компоненты этих ядер обладают свойствами типа тех, которые мы перечислили в § 4 предыдущей главы. Можно убедиться, например, что асимптотика компонент  $F(X, X', z)$  имеет вид эйкональных приближений, отвечающих рассмотренным выше эйконалам  $|X|$ ,  $Z_\alpha(X, X')$ ,  $Z_{\alpha\beta}(X, X')$  и т. д. При этом в силу тех же причин, что и в случае нейтральных частиц, ядро  $\widehat{R}_{\alpha\beta}^{(0)}(X, X', z)$  имеет разную асимптотическую форму в зависимости от положения точек  $X$  и  $X'$  в конфигурационном пространстве. Оно равно эйкональному приближению, построенному по эйконалу  $Z_{\alpha\beta}(X, X')$ ,

если точки  $X$  и  $X'$  можно соединить прямой с двумя точками излома на многообразиях  $x_\alpha = 0$  и  $x_\beta = 0$ , и сводится к произведению искаженных сферических волн в противном случае.

Можно показать в результате, что, начиная с достаточно большого номера  $n$ , свойства компонент ядер  $\hat{R}_{\alpha\beta}^{(n)}$  стабилизируются и они попадают в класс  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ , который был определен в связи с исследованием уравнения (4.70).

Используя разложение единицы (4.23'), интегральные уравнения (5.154) можно свести к интегральным уравнениям второго рода в этом классе, аналогичным уравнениям (4.77). Ясно, что и доказательство компактности этих уравнений может быть проведено так же, как и в случае уравнений (4.77). Отметим, что особые точки уравнений (5.154) совпадают с точками дискретного спектра оператора  $H$ , если только они не равны пороговым значениям,

$$E_i \neq 0, -\kappa_A^2, \quad A = \{\alpha, i\}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, \dots, N_\alpha,$$

и отделены от особых точек уравнений (5.156) и (5.171).

Мы не будем продолжать обсуждение технических вопросов — они и так достаточно подробно были рассмотрены выше. Опишем некоторые следствия, которые вытекают из уравнений (5.154).

Свойства функции Грина  $R(X, X', z)$  можно описать с помощью предложения, сформулированного в конце § 4 предыдущей главы. Единственное отличие состоит в том, что вместо (4.78) здесь справедливо представление

$$\begin{aligned} R(z) = R_a(z) + \sum_{\alpha} (\hat{R}_{\alpha}(z) - R_a(z)) + \\ + \sum_{k=1}^4 \sum_{\alpha, \beta} \hat{R}_{\alpha\beta}^{(k)}(z) + \sum_{\alpha, \beta} \tilde{R}_{\alpha\beta}(z), \end{aligned} \quad (5.173)$$

где ядра  $\hat{R}_{\alpha\beta}$  припадлежат классу  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ ; свойства ядер  $\hat{R}_\alpha$ ,  $R_a$ ,  $\hat{R}_{\alpha\beta}^{(k)}$ ,  $k \leq 4$ , были описаны выше.

Охарактеризуем более подробно асимптотику функции Грина  $R(X, X', z)$  при вещественных  $z$ . С этой целью введем в рассмотрение новые классы функций.

Пусть  $Q_B^{(\pm)}(y_B, E)$  — искаженные сферические волны в  $\mathbf{R}^3$ :

$$Q_B^{(\pm)}(y_B, E) = |y_B|^{-1} \exp \left\{ \pm i \sqrt{E + \kappa_B^2} |y_B| \mp i \frac{n_{\beta\beta}}{2 \sqrt{E + \kappa_B^2}} \ln 2 \sqrt{E + \kappa_B^2} |y_B| \right\},$$

и  $Q_0^{(\pm)}(X, E)$  — искаженные сферические волны в  $\mathbf{R}^6$ :

$$Q_0^{(\pm)}(X, E) = |X|^{-5/2} \exp \left\{ \pm i \sqrt{E} |X| \mp i \frac{|X|}{2 \sqrt{E}} \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{|x_{\alpha}|} \ln 2 \sqrt{E} |X| \right\}.$$

Обозначим через  $S_{E,c}^{(\pm)}$ ,  $B_{E,c}^{(\pm)}$  и  $\Phi_{E,c}^{(\pm)}$  классы функций, которые определяются формулами (4.27)–(4.29) из § 2 главы IV, где вместо сферических волн в  $\mathbf{R}^3$  и  $\mathbf{R}^6$  следует использовать искаженные сферические волны  $Q_B^{(\pm)}$  и  $Q_0^{(\pm)}$ .

Из результатов этого параграфа вытекает следующее утверждение.

*Пусть  $E$  не совпадает с особыми точками уравнения (5.154) и  $|X - X'| \geq \delta > 0$ . Тогда существуют пределы ядер  $R(X, X', z)$  при  $\varepsilon \downarrow 0$ , причем эти пределы являются функциями класса  $S_{E,c}^{(\pm)}$  как функции  $X'$ . Таким образом, при  $|X'| \rightarrow \infty$  справедливо представление*

$$R(X, X', E + i0) \underset{|X'| \rightarrow \infty}{\sim} C_E F_0^{(\pm)}(X, P) Q_0^{(\pm)}(X', E) + \\ + \frac{1}{4\pi} \sum_A F_A(X, p_{\alpha}) \psi_A(x'_A) Q_A^{(\pm)}(y'_A, E),$$

где  $P = \mp \sqrt{E} \hat{X}'$  и  $p_{\alpha} = \mp \sqrt{E} |X'|^{-1} y'_{\alpha}$ . В силу симметрии ядра  $R(X, X', z)$  аналогичное представление имеет место и при  $|X| \rightarrow \infty$ .

Если переменные  $X$  и  $X'$  стремятся к бесконечности независимо одна от другой, то асимптотика функции Грина выглядит сложнее. В этом случае следует по отдельности рассматривать итерации уравнений (5.154). Напомним, что первые слагаемые (5.173) описываются эйкональными формулами, которые мы рассматривали выше. Что касается последнего члена..(5.173), равного сумме ядер класса  $\tilde{\mathcal{D}}_{\alpha\beta}$ , то он представляет собой функцию класса  $S_{E,c}^{(\pm)}$  по каждой переменной  $X$  или  $X'$ .

Отметим, что представление (5.176) имеет тесную связь с аналогичным представлением (2.46) для ядра резольвенты в импульсном пространстве. Именно, после преобразования Фурье сингулярные знаменатели (2.46) порождают искаженные сферические волны

$$(p_A^2 - \kappa_A^2 - E \mp i0)^{-1+i\eta_A} \rightarrow Q_A^{(\pm)}(y_A, E),$$

$$(P^2 - E \mp i0)^{-1+i\eta_0} \rightarrow Q_0^{(\pm)}(X, E).$$

Таким образом, мы оправдали представление (2.46), полученное выше из эвристических рассуждений. При этом мы можем детально исследовать также и строение функций  $\hat{R}_{AB}$  (2.46), которые входят в определение сингулярных множителей. Ясно, что медленно убывающие эйкональные члены асимптотики  $\hat{R}_{\alpha\beta}^{(n)}$ , подобно случаю нейтральных частиц, порождают второстепенные особенности этих функций, аналогичные (3.31). Мы не будем конкретизировать это замечание в общем случае. Если это необходимо, указанные особенности можно найти, изучив поведение преобразования Фурье, которое задает переход в импульсное представление. Ниже мы опишем такие особенности в случае, когда переменные  $p_A$ ,  $p_B'$  и  $z$  лежат на энергетической поверхности  $E_A(p_A) = E_B(p_B') = z$ .

## § 6. Границные задачи для волновых функций

В этом параграфе мы формализуем определение волновых функций  $\Psi_0(X, P)$  и  $\Psi_A(X, p_A)$  и опишем граничные задачи для них на основе уравнения Шредингера и дифференциальных уравнений для компонент.

**Определение волновых функций.** В §§ 1—4 этой главы мы занимались исследованием асимптотической формы волновых функций, понимая их как формальные решения уравнения Шредингера. После того, как мы изучили свойства ядра резольвенты, мы можем дать более точное определение волновых функций, которое удобно использовать для обоснования задачи рассеяния. Мы воспользуемся рецептом, сформулированным в конце главы IV. Именно, рассмотрим асимптотику функций Грина  $R(X, X', z)$  при  $|X'| \rightarrow \infty$  (5.176). Амплитуды искаженных кластерных и сферических волн, очевидно, подчиня-

ются уравнению Шредингера по переменной  $X$ :

$$\left( -\Delta_X + \sum_{\alpha} v_{\alpha}(x_{\alpha}) - E \right) F_A(X, p_A) = 0. \quad (5.177)$$

Поэтому, как и в случае нейтральных частиц, мы можем взять представление (5.176) за определение волновых функций. В соответствии с выбранной ранее нормированной мы положим

$$\Psi_0^{(\pm)}(X, P) = F_0^{(\pm)}(X, P), \quad (5.178)$$

$$\Psi_A^{(\pm)}(X, p_A) = F_A^{(\pm)}(X, p_A), \quad A \neq 0. \quad (5.179)$$

Как и следовало ожидать, асимптотические формулы, построенные в §§ 1—4, правильно описывают поведение волновой функции на бесконечности. Это вытекает непосредственно из определения формальных решений и их связи с асимптотическими функциями Грина.

Аналогично можно определить волновые функции операторов  $H_a$  и  $\hat{H}_a$ . Согласно (5.162) волновые функции оператора  $H_a$  определяются как амплитуда искаженной сферической волны. Мы обозначим эту функцию тем же символом, что и асимптотическое решение (5.51):  $L_c(X, P)$ . Асимптотические функции Грина для оператора  $\hat{H}_a$  (5.72) содержат как шестимерные сферические волны, так и кластерные сферические волны, которые порождаются собственными значениями оператора  $h_a$ . Мы обозначим через  $L_{ac}(X, P)$  волновые функции, которые определяются соотношением (5.178), и через  $L_{ac}(X, p_A)$  — волновые функции типа (5.179).

Определим далее компоненты волновых функций с помощью асимптотических представлений для компоненты ядра резольвенты

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\alpha\beta}(X, X', E \pm i0) &\sim C_E F_{\alpha\beta}^{(\pm)}(X, P) Q_0^{(\pm)}(X, E) + \\ &+ \sum_j \frac{1}{4\pi} F_{\alpha B}^{(\pm)}(X, p_B) \psi_B(x'_B) Q_B^{(\pm)}(y'_B, E). \end{aligned} \quad (5.180)$$

Аналогично (5.178) и (5.179) положим

$$\Phi_{\alpha 0}^{(\pm)}(X, P) = \sum_{\beta} F_{\alpha\beta}^{(\pm)}(X, P), \quad \Phi_{\alpha B}^{(\pm)}(X, p_B) = F_{\alpha B}^{(\pm)}(X, p_B).$$

Тогда волновые функции даются суммой

$$\begin{aligned}\Psi_0^{(\pm)}(X, P) &= \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha 0}^{(\pm)}(X, P) + L_c(X, P); \\ \Psi_B^{(\pm)}(X, p_B) &= \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha B}^{(\pm)}(X, p_B).\end{aligned}\quad (5.180')$$

Представления (5.180) удобно использовать для вывода компактных уравнений, которым подчиняются компоненты (5.180'). Эти уравнения получаются из интегральных уравнений (5.154) с помощью уже знакомой процедуры. Нужно перейти в уравнениях (5.154) для ядер  $\hat{R}_{\alpha\beta}(X, X', E \pm i0)$  к пределу  $X' \rightarrow \infty$ , приравняв соответствующие асимптотические члены в левой и правой частях и затем отбросить искаженные сферические или кластерные волны. Таким образом, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha 0} &= L_{ac} - L_c - \hat{R}_{\alpha}(E + i0) \hat{V}_{\alpha} \sum_{\gamma \neq \alpha} \Phi_{\gamma 0}, \\ \Phi_{\alpha B} &= \delta_{\alpha\beta} L_{Bc} - \hat{R}_{\alpha}(E_B + i0) \hat{V}_{\alpha} \sum_{\gamma \neq \alpha} \Phi_{\gamma B}.\end{aligned}\quad (5.181)$$

Если точка  $E$  не является особой, то эти уравнения однозначно определяют компоненты волновых функций.

Интегральные уравнения для ядер  $L_c$ ,  $L_{ac}$  и  $L_{Bc}$  могут быть получены совершенно аналогично из интегральных уравнений (5.156) и (5.171). Они совпадают по форме с последними и различаются лишь свободными членами. Ясно, что в качестве таковых нужно брать асимптотические решения, построенные в §§ 1—3.

Альтернативно волновые функции можно определить на основе дифференциального формализма как решение уравнения Шредингера в классе гладких функций с фиксированной асимптотической формой. Опишем такой подход на примере функции  $\Psi_A$ .

Обозначим через  $S_A$  множество функций, имеющих вид суммы

$$f_A(X) = \psi_A(x_{\alpha}) \psi_A^{(c)}(y_{\alpha}, p_{\alpha}) + \tilde{f}_A(X), \quad (5.182)$$

где функция  $\psi_A^{(c)}$  отвечает потенциалу (5.100), а функция  $\tilde{f}_A$  принадлежит классу  $S_E$ , при  $E = p_{\alpha}^2 - \kappa_A^2$ . Справедливо следующее утверждение.

Уравнение Шредингера (5.177) однозначно разрешимо в классе функций  $S_A$ . Его решение совпадает с волновой функцией  $\Psi_A(X, p_A)$ .

Мы не будем приводить здесь рассуждения в оправдание дифференциальной формулировки — они почти словно совпадают с рассуждениями, которые мы провели в главе IV.

Отметим, что первое слагаемое в сумме (5.182), фиксированное для всех функций класса  $\tilde{S}_A$ , можно задавать с разной точностью. Например, его можно заменить функцией  $\Psi_A(x_A) \psi_c^{(\alpha)}(y_\alpha, p_\alpha)$ , определяемой равенством<sup>4</sup> (5.93). При этом упоминавшиеся в § 1 особенности, отвечающие мультипольным моментам эффективного потенциала  $v_A^{(c)}(y_\alpha)$ , ранее сосредоточенные в первом слагаемом (5.182), будет иметь амплитуда искаженной сферической волны для второго, варьируемого, слагаемого.

Волновые функции можно определить и с помощью дифференциальных уравнений для компонент. Чтобы получить последние, применим к однородным уравнениям (5.181) оператор  $\hat{H}_\alpha - E$ .

Получим соотношения

$$\left( -\Delta_x + v_\alpha(x) + \sum_{\gamma \neq \alpha} v_\gamma^{(0)}(X) - E \right) \Phi_{\alpha B}(X, p_B) = \\ = -\hat{v}_\alpha(X) \sum_{\gamma \neq \alpha} \Phi_{\gamma B}(X). \quad (5.183)$$

Складывая их, придем к выводу, что сумма  $\sum_\gamma \Phi_{\gamma B}$  удовлетворяет уравнению Шредингера (5.177).

Обозначим через  $\tilde{B}_\alpha$  множество вектор-функций  $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ , компоненты которых представляются в виде суммы

$$f_\gamma(X) = \delta_{\alpha\gamma} \psi_A(x_\alpha) \psi_A^{(c)}(y_\alpha, p_\alpha) + \tilde{f}_\gamma(X), \quad (5.183')$$

где функции  $\tilde{f}_\gamma$  являются компонентами вектор-функций класса  $B_{E, c}$ .

Так же, как и в случае нейтральных частиц, можно показать, что система уравнений (5.183), рассматриваемая в классе  $\tilde{B}_A$ , имеет единственное решение, которое совпадает соответственно с компонентами функций  $\Psi_A(X, p_A)$ . Последние же равны сумме этих компонент (5.180').

Если отделить простейшие слагаемые  $\psi_A \cdot \psi_A^{(c)}$ , то для компонент волновых функций получим неоднородные уравнения типа (4.45).

Аналогично можно определить волновые функции  $\Psi_0(X, P)$ . В данном случае, однако, больше приходится заниматься анализом медленно убывающих членов асимптотики. Наряду с искаженными плоскими волнами мы должны также выделять и другие слагаемые, описывающие перерассеяние частиц. Мы привели детальные формулы для таких слагаемых в §§ 1—4. Определенную осторожность нужно соблюдать при постановке граничных задач в случае, когда в системе имеются разноименно заряженные частицы. При этом, в силу (5.103'), волновые функции обращаются в бесконечность, когда относительный импульс  $k_\alpha$  таких частиц равен нулю. Поэтому при постановке граничных задач для  $\Psi_0(X, P)$  нужно накладывать ограничения  $k_\alpha \neq 0$ . Мы не будем продолжать обсуждение и описывать конкретные формулы. Все необходимые для дифференциальной формулировки результаты мы уже привели выше в §§ 1—4.

Перечень граничных задач для волновых функций будет неполным, если мы не упомянем здесь дифференциальный аналог уравнений (3.116), в которых кулоновский потенциал полностью включен в «невозмущенный» гамильтониан:

$$\left( -\Delta_X + \sum_{\gamma} \frac{n_{\gamma}}{|x_{\gamma}|} + v_{\alpha}(x_{\alpha}) - E \right) \Phi_{\alpha}(X) = \\ = -v_{\alpha}(x_{\alpha}) \sum_{\beta \neq \alpha} \Phi_{\beta}(X). \quad (5.184)$$

Пользуясь полученными выше результатами, можно показать, что если все частицы в системе заряжены одновременно,  $n_{\alpha} > 0$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), то эти уравнения имеют единственное решение в классе  $\tilde{B}_E$ . При этом волновые функции  $\Psi_{\alpha}(X, p_{\alpha})$  совпадают с суммами компонент по всем  $\alpha$ . Аналогично можно определить и волновые функции  $\Psi_0(X, P)$ .

Если же в системе имеются разноименно заряженные частицы, то асимптотика компонент  $\Phi_{\alpha}$  становится даже сложнее, чем асимптотика волновой функции, и система уравнений (5.184) уже не имеет тех достоинств, на которые мы указывали выше.

В конце этого параграфа мы коротко опишем граничные задачи для системы  $N$  заряженных частиц.

**$N$  заряженных частиц.** Предположим, что парные потенциалы взаимодействия  $v_{\alpha_{N-1}}(x_{\alpha_{N-1}})$  можно представить

в виде суммы кулоновской и короткодействующей частей:

$$v_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}}) = n_{a_{N-1}} |x_{a_{N-1}}|^{-1} + v_{a_{N-1}}^{(s)}(x_{a_{N-1}}).$$

Пусть  $\Omega_{a_{N-1}}(a, v)$  — область конфигурационного пространства, где выполнено условие  $|x_{a_{N-1}}| \leq a(1 + |y_{a_{N-1}}|)^v$ ,  $0 < v < 1/2$ . Введем в рассмотрение гладкую фундитную функцию  $\chi_{a_{N-1}}(X)$ , равную единице в  $\Omega_{a_{N-1}}(a, v)$  и нулю вне  $\Omega_{a_{N-1}}(a, v')$ ,  $v < v' < 1/2$ .

Чтобы получить компактные уравнения, разобьем, аналогично (5.104), парные потенциалы на сумму короткодействующей и дальнодействующей частей с помощью функции  $\chi_{a_{N-1}}$

$$v_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}}) = \hat{v}_{a_{N-1}}(X) + v_{a_{N-1}}^{(0)}(X),$$

где

$$\hat{v}_{a_{N-1}}(X) = \frac{n_{a_{N-1}}}{|x_{a_{N-1}}|} \chi_{a_{N-1}}(X) + v_{a_{N-1}}^{(s)}(x_{a_{N-1}});$$

$$v_{a_{N-1}}^{(0)}(X) = \frac{n_{a_{N-1}}}{|x_{a_{N-1}}|} (1 - \chi_{a_{N-1}}(X)).$$

Согласно этому разбиению представим оператор энергии  $N$  заряженных частиц в виде

$$H = H_a + \sum_{a_{N-1}} \hat{V}_{a_{N-1}},$$

где «асимптотический» гамильтониан  $H_a$  определяется равенством

$$H_a = H_0 + \sum_{a_{N-1}} V_{a_{N-1}}^{(0)}.$$

Пусть, далее,  $R(z)$  — резольвента оператора энергии  $H$ . Можно показать, что для  $R(z)$  справедливо представление

$$R(z) = R_a(z) + \sum_{A_2, B_2} \hat{R}_{A_2 B_2}(z),$$

где  $R_a(z) = (H_a - z)^{-1}$ , а компоненты  $\hat{R}_{A_2 B_2}(z)$  определяются соотношениями (4.87) и (4.88), в которых  $R_0(z)$  следует заменить на  $R_a(z)$ , а  $V_{a_{N-1}}$  — на  $\hat{V}_{a_{N-1}}$ . Аналогично случаю нейтральных частиц, можно показать, что компоненты резольвенты  $\hat{R}_{A_2 B_2}$  подчиняются модифици-

рованным компактным уравнениям в дифференциальной форме, которые получаются из (4.97) заменой оператора кинетической энергии  $H_0$  на  $H_a$  и  $V_{a_{N-1}}$  на  $\hat{V}_{a_{N-1}}$ . Модифицированные интегральные уравнения для  $\hat{R}_{A_2B_2}$  получаются из (3.103) при  $k=2$  заменой  $R_0(z)$  на  $R_a(z)$  и  $M_{A_3C_3}^{(a_2)}$  на модифицированные компоненты  $\hat{M}_{A_3C_3}^{(a_2)}$ . При этом последние определяются формулами (3.97) и (3.98), в которых  $V_{a_{N-1}}$  нужно заменить на  $\hat{V}_{a_{N-1}}$ , а  $R_0(z)$  — на  $R_a(z)$ .

Коротко опишем асимптотические граничные условия в случае систем заряженных частиц. Компоненты волновых функций, отвечающих двухкластерным каналам, можно представить в виде суммы (4.105), в которой плоские и сферические волны искажаются кулоновскими множителями. Последние могут быть найдены с помощью приближения эйконалов. В результате плоская волна в (4.105) приобретает множитель

$$\exp \left\{ i \sum_{\substack{\omega, \omega', \\ \omega \neq \omega'}} \frac{\sqrt{2\mu_{\omega\omega'}} q_\omega q_{\omega'}}{2|p_{\omega\omega'}|} \ln (|p_{\omega\omega'}| |y_{\omega\omega'}| - (p_{\omega\omega'}, y_{\omega\omega'})) \right\}, \quad (5.185)$$

где  $q_\omega$  — суммарный заряд частиц подсистемы  $\omega$ , входящей в разбиение  $a_j$ ,  $y_{\omega\omega'}$  — приведенная относительная координата подсистем  $\omega$  и  $\omega'$ ,  $p_{\omega\omega'}$  — сопряженный ей импульс, а  $\mu_{\omega\omega'}$  — приведенная масса подсистем  $\omega$ ,  $\omega'$ . Сферические волны искажаются множителем

$$\exp \left\{ -i \sum_{\substack{\omega, \omega', \\ \omega \neq \omega'}} \frac{\sqrt{2\mu_{\omega\omega'}} q_\omega q_{\omega'}}{2\sqrt{E + \kappa_A^2}} \cdot \frac{|y_A|}{|y_{\omega\omega'}|} \ln 2\sqrt{E + \kappa_A^2} |y_A| \right\}.$$

Мы оставляем в стороне вопросы, связанные с задачей об описаниях асимптотики в особых областях, где фазы (5.185) обращаются в бесконечность. В общем случае эта задача до сих пор не решена. Отметим лишь, что если ограничиваться только двухкластерными столкновениями, то такие асимптотики легко найти. Они имеют вид произведения собственных функций кластеров на кулоновские волновые функции (5.1), которые отвечают эффективному кулоновскому взаимодействию между кластерами. Мы подробно описали такие асимптотики на примере трех частиц.

## ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБОСНОВАНИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Эта глава посвящена обоснованию гипотезы о полноте волновых операторов. Мы проведем рассуждения на примере систем двух и трех частиц. Опишем сначала методы, применяемые для исследования непрерывного спектра оператора энергии в стационарном формализме. В этой части результаты данной главы пересекаются с результатами главы II, где мы действовали в рамках нестационарного подхода. Наряду с этими вопросами продолжим здесь исследование кулоновской задачи — вычислим ядра оператора рассеяния для заряженных частиц и опишем их свойства. В конце главы мы проверим, что ядра волновых операторов, полученные на основе стационарного формализма, совпадают с ядрами нестационарных волновых операторов (1.22) или (1.25) в зависимости от характера парных взаимодействий.

### § 1. Система двух частиц

Мы начнем с исследования системы двух частиц. На этом примере мы проиллюстрируем основные методы решения задач, указанных выше, и затем обобщим эти методы на систему трех частиц.

**Нейтральные частицы.** Опишем стационарный подход к доказательству предложения U из главы I о строении непрерывного спектра оператора энергии системы двух частиц. Сформулируем сначала это предложение применительно к рассматриваемому примеру.

Разложим оператор энергии  $h$  в сумму

$$h = h_d + h_c,$$

где  $h_d$  — конечномерный оператор:

$$h_d f(x) = \sum_i -\kappa_i^2(f, \psi_i) \psi_i(x),$$

представляющий собой инвариантную часть  $h$  в подпространстве дискретного спектра. Точное утверждение отно-

сительно непрерывного спектра дается следующим предложением:

**Предложение 6.1.** *Оператор  $h$ , рассматриваемый в подпространстве  $\mathfrak{H}_c$ , ортогональном подпространству дискретного спектра, унитарно эквивалентен оператору кинетической энергии  $h_0$ , т. е. существует изометрический оператор  $u$  такой, что выполняются соотношения*

$$u^*u = I, \quad uu^* = I - P_d, \quad hu = uh_0, \quad (6.1)$$

где  $P_d$  — проектор на подпространство дискретного спектра. В качестве оператора  $u$  можно взять волновые операторы, определенные равенством (3.22).

Мы докажем это утверждение с помощью явного представления для ядер операторов  $u^{(\pm)}$  (3.22). Проверим сначала, что операторы  $u^{(\pm)}$  изометричны. Запишем ядро произведения  $u^*u$  в виде суммы

$$(u^*u)(k, k') = \delta(k - k') + \delta T(k, k'),$$

где ядро  $\delta T(k, k')$  является полиномом второй степени относительно парных  $T$ -матриц:

$$\begin{aligned} \delta T(k, k') &= \\ &= \frac{t(k, k', k^2 + i0)}{k^2 - k^2 + i0} - \frac{t(k, k', k'^2 + i0)}{k^2 - k'^2 - i0} - \\ &\quad - \int dq \frac{t(k, q; k^2 - i0) t(q, k', k'^2 + i0)}{(q^2 - k^2 + i0)(q^2 - k'^2 - i0)}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что это ядро равно нулю в силу тождества Гильберта для  $T$ -матрицы (3.20), где следует положить  $z_1 = k^2 - i0$ ,  $z_2 = k'^2 + i0$ . Отсюда немедленно следует равенство  $u^*u = I$ .

Чтобы доказать сплетающее свойство, достаточно проверить равенство  $r(z)u = ur_0(z)$  и воспользоваться затем соотношением (2.6). Покажем, что это равенство вытекает из тождества Гильберта. Действительно, ядро произведения  $r(z)u$  можно выразить через  $T$ -матрицы с помощью равенств (2.22) и (3.22). Если затем квадратичное по  $T$ -матрице слагаемое преобразовать к сумме линейных слагаемых

$$\begin{aligned} (k^2 - z)^{-1} \int dq \frac{t(k, q, z) t(q, k', k'^2 + i0)}{(q^2 - z)(q^2 - k'^2 - i0)} &= \\ &= (k^2 - z)^{-1} \left( \frac{t(k, k', z)}{k'^2 - z} - \frac{t(k, k', k'^2 + i0)}{k'^2 - z} \right), \end{aligned}$$

то после приведения подобных членов получим ядро оператора  $u^{(+)}r_0(z)$ :  $\frac{t(k, k', k'^2 + i0)}{k^2 - k'^2 - i0} (k'^2 - z)^{-1}$ . Аналогично может быть рассмотрен и случай оператора  $u^{(-)}$ .

Для доказательства полноты волновых операторов воспользуемся соотношением между скачком резольвенты на непрерывном спектре и производной спектральной функции:

$$\frac{dE_\lambda}{d\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \downarrow 0} (r(\lambda + i\epsilon) - r(\lambda - i\epsilon)). \quad (6.2)$$

Правая часть этого равенства может быть преобразована с помощью тождества Гильберта:

$$r(\lambda + i\epsilon) - r(\lambda - i\epsilon) = 2i\epsilon r(\lambda + i\epsilon)r(\lambda - i\epsilon),$$

или, в терминах  $T$ -матриц,

$$2i\epsilon r(\lambda + i\epsilon)r(\lambda - i\epsilon) = (I - r_0(\lambda + i\epsilon)t(\lambda + i\epsilon)) \times \\ \times 2i\epsilon r_0(\lambda + i\epsilon)r_0(\lambda - i\epsilon)(I - t(\lambda - i\epsilon)r_0(\lambda - i\epsilon)). \quad (6.3)$$

Заметим, далее, что при  $\epsilon \downarrow 0$  произведение свободных резольвент дает  $\delta$ -функцию:

$$2i\epsilon((k^2 - \lambda)^2 + \epsilon^2) \rightarrow 2i\pi\delta(k^2 - \lambda). \quad (6.4)$$

При этом первый множитель в правой части (6.3) переходит в волновой оператор  $u^{(+)}$ , а последний — в сопряженный ему  $u^{(+)*}$ . В результате получим равенство

$$\frac{dE_\lambda}{d\lambda}(k, k') = \int dq \delta(q^2 - \lambda) u^{(+)}(k, q) u^{(+)*}(q, k'). \quad (6.5)$$

Интегрируя это соотношение и учитывая равенство

$$\int_0^\infty dE_\lambda = I - P_d,$$

придем к соотношению полноты  $uu^* = I - P_d$ .

Из предложения 6.1, в частности, следует, что любой элемент гильбертова пространства  $f$  может быть единственным образом представлен в виде  $f = \sum_i c_i \psi_i + u^{(\pm)} f^{(\pm)}$ , причем для любой ограниченной функции  $\varphi$

$$\varphi(h)f = \sum_i \varphi(-\kappa_i^2) c_i \psi_i + u^{(\pm)} \varphi(h_0) f^{(\pm)};$$

коэффициенты  $c_i$  и функции  $f^{(\pm)}$  определяются по формулам

$$c_i = (f, \psi_i), \quad f^{(\pm)} = u^{(\pm)*} f$$

и

$$\|f\|^2 = \sum_i c_i^2 + \|f^{(\pm)}\|^2. \quad (6.6)$$

Приведенные формулы представляют собой простую и точную запись теоремы разложения по собственным функциям оператора  $h$ , а формула (6.6) дает равенство Парсеваля.

Отметим, что всякий оператор вида  $u = u^{(\pm)*} m$ , где  $m$  — унитарный оператор, коммутирующий с  $h_0$ , также обладает свойствами, сформулированными выше.

В заключение приведем альтернативный способ вычисления ядра оператора рассеяния  $s = u^{(-)*} u^{(+)}$ . Положим в тождестве Гильберта  $z_1 = k^2 + 2ie$ ,  $z_2 = k'^2 + ie$ , так что  $z_2 - z_1 = k'^2 - k^2 - ie$ . Перейдем к пределу  $e \downarrow 0$ , учитывая равенство (6.5). Немедленно приедем к представлению (3.22'), которое мы получили в главе III с помощью нестационарного определения (1.39).

**Заряженные частицы.** Обозначим через  $u^{(\pm)}$  интегральные операторы, задаваемые ядрами

$$u^{(\pm)}(x, k) = (2\pi)^{-3/2} \psi^{(\pm)}(x, k), \quad (6.7)$$

где  $\psi^{(\pm)}(x, k)$  — волновые функции, определенные соотношением (5.20). Покажем, что для систем заряженных частиц справедливо предложение 6.1, где в качестве операторов  $u^{(\pm)}$  можно взять кулоновские волновые операторы (6.7). При этом мы будем действовать в конфигурационном пространстве. Конечно, этот подход годится и для нейтральных частиц.

Заметим прежде всего, что сплетающее свойство представляет собой компактную запись уравнения Шредингера (5.24') в операторной форме. Чтобы проверить изометричность волновых операторов, рассмотрим совместно уравнение Шредингера для функций  $\psi(x, k)$  и  $\psi^*(x, k')$ . Умножим каждое из этих уравнений на дополнительный множитель  $\psi^*(x, k')$  или  $\psi(x, k)$  и проинтегрируем по шару  $V_R$  большого радиуса  $R$ . Вычитая затем одно уравнение из другого и применяя формулу Грина (4.8),

придем к равенству

$$\int_{V_R} \psi(x, k) \psi^*(x, k') dx = \\ = (k^2 - k'^2 - i0)^{-1} \int_{\partial V_R}^t \psi(x, k) \frac{\overset{\leftrightarrow}{\partial}}{\partial R} \psi^*(x, k') dS_R. \quad (6.8)$$

Здесь символ  $u \frac{\overset{\leftrightarrow}{\partial}}{\partial n} v$  обозначает разность

$$u \frac{\overset{\leftrightarrow}{\partial}}{\partial n} v = u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Чтобы найти предел правой части (6.8) при  $R \rightarrow \infty$ , умножим это соотношение на гладкие финитные функции  $f(k)$  и  $\overline{g(k')}$  и проинтегрируем по  $k$  и  $k'$ . Вычислим далее асимптотику получившихся интегралов с помощью следующего утверждения.

Рассмотрим интеграл

$$I^{(\pm)}(x, E) = \int dk \psi^{(\pm)}(x, k) f(k), \quad E = k^2,$$

где  $f(k)$  — гладкая функция.

Предложение 6.2. При  $|x| \rightarrow \infty$  асимптотика интеграла  $I^{(\pm)}(x, E)$  имеет вид суммы сходящихся и расходящихся искаженных сферических волн:

$$I^{(\pm)}(x, E) \sim -\frac{2\pi i}{\sqrt{E}} \frac{\exp\{-i\sqrt{E}|x| - iw_0(x)\}}{|x|} f(-\sqrt{E}\hat{x}) + \\ + \frac{2\pi i}{\sqrt{E}} F^{(\pm)}(\hat{x}, E) \frac{\exp\{\pm i\sqrt{E}|x| \pm iw_0(x)\}}{|x|}, \quad (6.9)$$

где амплитуда  $F^{(\pm)}$  является гладкой функцией.

Мы отложим доказательство этой формулы и дадим его в конце § 2 на примере интегралов более общего вида.

Согласно формуле (6.8) задача исследования асимптотики полученных выше интегралов сводится к вычислению суммы выражений вида

$$\int du dv \frac{\exp\{\pm iuR \mp ivR \pm iw_0(R) \mp iw_0(R)\}}{u - v - i0} \Phi(u, v),$$

$$u = k^2, \quad v = k'^2,$$

где  $\phi$  — гладкие медленно осциллирующие функции. После замены переменной  $u - v = t$  эти интегралы в свою очередь могут быть вычислены с помощью соотношений (2.35). В результате найдем, что все слагаемые, кроме интеграла с экспонентой  $\exp\{i(k'^2 - k^2)R\}$ , которая отвечает первому члену в (6.9), обращаются в пределе  $R \rightarrow \infty$  в нуль. Указанный же интеграл переходит в скалярное произведение  $(f, g)$ . Отсюда следует равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int dk dk' f(k) \overline{g(k')} \cdot \int_{V_R} \psi(x, k) \psi^*(x, k') dx = (f, g),$$

которое эквивалентно соотношению  $(u^{(+)}f, u^{(+)}g) = (f, g)$ . Аналогично можно рассмотреть случай операторов  $u^{(-)}$ .

Теперь нам осталось проверить полноту волновых функций. Для этого мы снова воспользуемся представлением (6.2) и преобразуем разность функций Грина с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (r(x, x', \lambda + i\varepsilon) - r(x, x', \lambda - i\varepsilon)) &= \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial V_R} r(x, y, \lambda - i0) \frac{\overset{\leftrightarrow}{\partial}}{\partial R} r(y, x', \lambda + i0) dS_R, \end{aligned}$$

которое может быть получено таким же путем, как и аналогичное равенство (6.8) для волновых функций. Вычисляя поверхностный интеграл на основании асимптотических представлений (5.15), получим формулу

$$\frac{dE_\lambda(x, x')}{d\lambda} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \psi(x, k) \psi^*(x', k) \delta(k^2 - \lambda),$$

аналогичную (6.5). Отсюда немедленно вытекает соотношение полноты  $u\psi^* = I - P_d$ .

**Оператор рассеяния.** Формула (6.9), которую мы использовали для вычисления оператора  $u^*u$ , оказывается удобной также и для вычисления ядра оператора рассеяния. Напомним, что аналогичное выражение (4.21) встречалось нам в главе IV, где мы дали с его помощью альтернативное определение оператора рассеяния. В случае заряженных частиц мы можем поступить точно таким же образом. Определим оператор рассеяния  $s$  как интегральный оператор, который задает амплитуду  $F^{(\pm)}$

в (6.9) формулой

$$F^{(\pm)}(\hat{k}, E) = \int dk' s(k, k') f(k'). \quad (6.10)$$

Чтобы описать это ядро, введем в рассмотрение новую обобщенную функцию. Рассмотрим интеграл

$$I(z) = \int_0^1 t^{-z} f(t) dt. \quad (6.11)$$

Обозначим через  $t^{-1-i\eta}$  обобщенную функцию, которая определяется с помощью аналитического продолжения этого интеграла из полуплоскости  $\operatorname{Re} z < 1$  в точку  $z = -1 + i\eta$ . Отметим, что при  $z = -1 + i\eta$  интеграл (6.11) допускает следующую регуляризацию:

$$\int_0^1 t^{-1-i\eta} f(t) dt = \frac{i}{\eta} f(0) + \int_0^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{1+i\eta}} dt. \quad (6.12)$$

Через  $|\hat{p} - \hat{p}'|^{-2-2i\eta}$  обозначим функцию на двумерной сфере  $S^{(2)}$ , которая в сферических координатах  $\cos \theta = (\hat{p}, \hat{p}')$ ,  $\varphi$  действует как обобщенная функция  $t^{-1-i\eta}$ ,  $t = 1 - \cos \theta$ :

$$\begin{aligned} \int d\hat{p}' \frac{f(\hat{p}')}{|\hat{p} - \hat{p}'|^{2+2i\eta}} &= \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{f(\theta, \varphi)}{(1 - \cos \theta)^{1+i\eta}} + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dt \frac{f(t, \varphi)}{t^{1+i\eta}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

В этих обозначениях справедливо следующее утверждение.

**Предложение 6.3.** Ядро  $s(k, k')$ , входящее в представление (6.10), имеет вид

$$s(k, k') = \frac{i}{\pi} \left( -\frac{2^{1+2i\eta} \eta \cdot e^{2i \arg \Gamma(1+i\eta)}}{|k| |\hat{k} - \hat{k}'|^{2+2i\eta}} + f_{cs}(\hat{k}, k') \right) \delta(k^2 - k'^2), \quad (6.14)$$

где через  $f_{cs}$  обозначена короткодействующая часть амплитуды рассеяния (5.22).

Таким образом, ядро оператора рассеяния с точностью до множителя совпадает с амплитудой рассеяния:

$$s(k, k') = i\pi^{-1} \delta(k^2 - k'^2) f(\hat{k}, k'), \quad (6.15)$$

При этом кулоновскую часть амплитуды  $f_c$  следует понимать как обобщенную функцию, которая была определена выше.

Отметим, что формулу (6.9) можно переписать в обозначениях, аналогичных (4.5), т. е.

$$\begin{aligned} \psi(x, k) \sim & \frac{2\pi i}{\sqrt{E}} \left( \delta(-\hat{x}, k) \frac{\exp \{-i\sqrt{E}|x| - iw_0(x)\}}{|x|} + \right. \\ & \left. + s(|k|\hat{x}, k) \frac{\exp \{i\sqrt{E}|x| + iw_0(x)\}}{|x|} \right). \quad (6.16) \end{aligned}$$

В такой форме ясно видна роль оператора рассеяния как амплитуды при уходящей сферической волне.

Мы докажем представление (6.14) вместе с формулой (6.9) в конце § 2.

Формулу (6.14) для ядра оператора рассеяния можно также получить непосредственным вычислением выражения  $u^{(-)*}u^{(+)}$ . Это можно сделать с помощью формулы Грина по та<sup>к</sup>ой же схеме, как было вычислено произведение  $u^*u$ . Нужно преобразовать это выражение к поверхностному интегралу по сфере радиуса  $R$ , а затем вычислить его предел при  $R \rightarrow \infty$  на основе формулы (6.9). Мы не будем реализовать здесь эту альтернативную возможность. Все необходимые для такого вычисления технические детали мы уже описали выше.

Итак, мы видим, что ядро оператора рассеяния, в отличие от случая нейтральных частиц, не содержит единичного слагаемого, а с точностью до множителя совпадает с амплитудой рассеяния. Тем самым мы получили доказательство результата, который был установлен с помощью эвристических рассуждений в главе III. Следует подчеркнуть, однако, что роль  $\delta$ -функционной особенности, согласно регуляризованной формуле (6.12), выполняет сингулярность чисто кулоновской амплитуды рассеяния.

## § 2. Непрерывный спектр оператора энергии системы трех тел

В этом параграфе мы приведем обоснование гипотезы о полноте волновых операторов для системы трех частиц. Мы будем рассматривать здесь как нейтральные, так и заряженные частицы.

Напомним ряд понятий, которые мы ввели в главе II, применительно к задаче трех тел. Пространство каналов  $\hat{\mathfrak{H}}$  в данном случае равно ортогональной сумме

$$\hat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}_0 \oplus \sum_{A \neq 0} \oplus \mathfrak{H}_A,$$

где трехчастичный канал совпадает с гильбертовым пространством  $L_2(\mathbb{R}^6)$ , а двухчастичные каналы  $\mathfrak{H}_A$ ,  $A \neq 0$ , — с гильбертовыми пространствами  $L_2(\mathbb{R}^3)$ .

Гамильтониан каналов  $\hat{H}$  является приводимым в  $\mathfrak{H}$  оператором

$$\hat{H} = \tilde{H}_0 \oplus \sum_{A \neq 0} \oplus \tilde{H}_A,$$

где действие операторов энергии в каналах задается формулами

$$\tilde{H}_0 f_0(P) = P^2 f_0(P),$$

$$\tilde{H}_A f_A(p_\alpha) = E_A(p_\alpha) f_A(p_\alpha), \quad E_A(p_\alpha) = p_\alpha^2 - \kappa_A^2,$$

$$A = \{\alpha, i\}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, \dots, N_\alpha.$$

Пусть  $P_d$  — проектор в  $\mathfrak{H}$  на собственное подпространство и  $\mathfrak{H}_c$  — ортогональное дополнение в  $\mathfrak{H}$  к  $\mathfrak{H}_d$ ,  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_c \oplus \mathfrak{H}_d$ . Обозначим через  $H_c$  инвариантную часть  $H$  в  $\mathfrak{H}_c$ .

В настоящем параграфе мы докажем следующее утверждение.

*Предложение 6.4. Операторы  $H_c$  и  $\hat{H}$  унитарно эквивалентны, так что существует изометрический оператор  $U$  из  $\hat{\mathfrak{H}}$  в  $\mathfrak{H}$  такой, что выполняются соотношения*

$$U^* U = I, \quad U U^* = I - P_d, \quad H U = U \hat{H}. \quad (6.47)$$

**Система трех нейтральных частиц.** Начнем доказательство этого утверждения с более простого случая нейтральных частиц. Мы покажем, что в качестве оператора  $U$  в предложении 6.4 можно взять оператор  $\hat{U}^{(\pm)}$ , действие которого описывается в терминах волновых операторов  $U_A^{(\pm)}$  равенством

$$\hat{U} \hat{f} = \sum_A U_A f_A, \quad \hat{f} = \{f_A\}, \quad (6.18)$$

$$A = 0, \{\alpha, i\}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, \dots, N_\alpha,$$

где суммирование ведется по всем каналам  $A$  и  $f_A$  — элементы  $\mathfrak{H}_A$ .

Доказательство изометричности и сплетающего свойства мы проведем с помощью тождества Гильберта аналогично тому, как это было сделано в системе двух тел. При этом наряду с тождеством Гильберта для  $T$ -матрицы  $T(z_1) - T(z_2) = (z_2 - z_1)T(z_1)R_0(z_1)R_0(z_2)T(z_2)$  нам понадобится также тождество Гильберта для компонент  $M_{\alpha\beta}(z)$ :

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}(z_1) - M_{\alpha\beta}(z_2) &= \\ &= (z_2 - z_1) \sum_{\gamma, \gamma'} M_{\alpha\gamma}(z_1) R_0(z_1) R_0(z_2) M_{\gamma'\beta}(z_2). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Вычисление выражений  $U_A^* U_B$  при  $A = B = 0$  может быть проведено с помощью тождества Гильберта для  $T$ -матрицы. Соответствующие формулы отличаются от двухчастичных лишь размерностью переменных интегрирования. Поэтому мы опустим рассуждения, дословно совпадающие с проведенными выше. При этом следует подчеркнуть, что существование многочисленных трехчастичных особенностей не отражается на конечном результате:  $U_0^* U_0 = I$ ,  $HU_0 = U_0 H_0$ . Это объясняется тем обстоятельством, что последние определены как обобщенные функции, непрерывно зависящие от параметра  $z = E + ie$  при изменении  $z$  вплоть до вещественной оси.

Проверим далее аналогичные равенства для операторов  $U_A^{(\pm)}$ ,  $A \neq 0$ :

$$U_A^* U_B = \delta_{AB} I_A.$$

С этой целью заметим сначала, что операторы  $T_{\gamma A}(z)$ , определенные равенствами (3.65), подчиняются тождествам

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\gamma, \gamma'} T_{\gamma A}^*(z_1) R_0(z_1) R_0(z_2) T_{\gamma' B}(z_2) &= \\ &= (z_2 - z_1)^{-1} \left( \sum_{\beta} T_{\beta A}^*(z_1) R_0(z_2) L_B(\tilde{H}_B - z_2) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\alpha} (\tilde{H}_A - z_1) L_A^* R_0(z_1) T_{\alpha B}(z_2) \right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Действительно, мы немедленно приедем к этому соотношению, если умножим тождество Гильберта (6.19) для компонент  $M_{\alpha\beta}$  слева на оператор  $L_A^* R_0(z_1)$ , а справа — на оператор  $R_0(z_2) L_B$  и воспользуемся равенствами (3.65).

Полагая  $z_1 = p_{\alpha}^2 - \varkappa_A^2 - ie_1$  и  $z_2 = p_{\beta}^2 - \varkappa_B^2 + ie_2$  и переходя к пределу  $e_1 \downarrow 0$ ,  $e_2 \downarrow 0$ , получим в левой части

ядро оператора  $U_A^* U_B$ , действующего из канала  $\mathfrak{H}_B$  в канал  $\mathfrak{H}_A$ , и нам теперь надо заняться правой частью. При  $A = B$  в правой части содержится слагаемое, которое до предельного перехода имеет вид

$$\frac{\delta(p_\alpha - p'_\alpha)}{i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left( i\varepsilon_2 \int \frac{\varphi_A^*(k_\alpha) \psi_A(k_\alpha) dk_\alpha}{k_\alpha^2 + \kappa_A^2 - i\varepsilon_2} + \right. \\ \left. + i\varepsilon_1 \int \frac{\psi_A^*(k_\alpha) \varphi_A(k_\alpha) dk_\alpha}{k_\alpha^2 + \kappa_A^2 + i\varepsilon_1} \right).$$

Встречающийся в этом соотношении интеграл

$$I(\varepsilon) = \int dk \frac{\varphi_A^*(k) \psi_A(k)}{k^2 + \kappa_A^2 + i\varepsilon}$$

при  $\varepsilon \downarrow 0$  превращается в нормировочный интеграл для собственной функции  $\psi_A(k)$ , так что  $I(0) = 1$ . Поэтому все выражение дает в пределе единичный оператор  $I_A$  с ядром  $\delta(p_\alpha - p'_\alpha)$ . Остальные слагаемые в правой части имеют вид произведений сингулярных знаменателей  $(p_\beta^2 - \kappa_B^2 - p_\alpha'^2 + \kappa_A^2 - i\varepsilon)^{-1}$  на стремящиеся к нулю множители  $i\varepsilon_{1,2}$ . Эти слагаемые обращаются в нуль в пределе  $\varepsilon_{1,2} \downarrow 0$ . Отсюда вытекает равенство  $U_A^* U_B = \delta_{AB} I_A$ .

Нам осталось убедиться в справедливости соотношений

$$U_0^* U_A = 0, \quad U_A^* U_0 = 0, \quad (6.21)$$

которые означают ортогональность областей значений операторов  $U_0$  и  $U_A$ ,  $A \neq 0$ . Для этого опять используем тождество Гильберта, которое умножим на оператор  $R_0(z_2)L_B$  справа:

$$\sum_{\gamma', \beta} T(z_1) R_0(z_1) R_0(z_2) T_{\gamma' B} = (z_2 - z_1)^{-1} (T(z_1) R_0(z_2) \times \\ \times L_B (\tilde{H}_B - z_2) - \sum_{\alpha} (\tilde{H}_A - z_1) L_A^* R_0(z_1) T_{\alpha B}(z_2)). \quad (6.22)$$

Положим здесь  $z_1 = P^2 - i\varepsilon$ ,  $z_2 = p_\beta'^2 - \kappa_B^2 + i\varepsilon$ , так что  $z_2 - z_1 = P^2 - p_\beta'^2 - \kappa_B^2 - 2i\varepsilon$ , и перейдем к пределу  $\varepsilon \downarrow 0$ . В левой части получим выражение  $U_0^* U_B$ , а в правой — сумму ядер с сингулярностями  $(P^2 - p_\beta'^2 - \kappa_B^2 - 2i\varepsilon)^{-1}$ , умноженными на стремящийся к нулю параметр  $\varepsilon$ . Из

леммы о сингулярных интегралах вытекает, что обобщенная функция в правой части стремится к нулю при  $\varepsilon \downarrow 0$ , откуда получаем равенства (6.21).

Наконец, докажем сплетающее свойство

$$R(z)U_A = U_A\tilde{R}_A(z),$$

где через  $\tilde{R}_A(z)$  обозначена резольвента оператора энергии канала  $\tilde{H}_A$ . Положим в операторном равенстве (6.22), записанном в терминах ядер,  $z_1 = z$ ,  $z_2 = -\kappa_B^2 + p_\beta'^2 + i\varepsilon$  так что  $z_2 - z_1 = p_\beta'^2 - \kappa_B^2 - z + i\varepsilon$ , и представим знаменатель  $(z_2 - z_1)^{-1}$  в виде

$$\begin{aligned} & - (P^2 - p_\beta'^2 + \kappa_B^2 - i\varepsilon)^{-1} + \\ & + (P^2 - z) \cdot (P^2 - p_\beta'^2 + \kappa_B^2 - i\varepsilon)^{-1} (p_\beta'^2 - \kappa_B^2 - z + i\varepsilon)^{-1}. \end{aligned}$$

Умножая получившееся равенство на  $R_0(z)$  и переходя к пределу  $\varepsilon \downarrow 0$ , получим в левой части выражение

$$R(z)U_B = U_B\tilde{R}_B(z).$$

В правой части при  $\varepsilon \neq 0$  имеем несингулярное выражение, которое умножается на  $\varepsilon$ . Поэтому в пределе  $\varepsilon \downarrow 0$  правая часть обращается в нуль.

Следующая наша задача — доказательство полноты волновых операторов  $U_0$  и  $U_A$ . Чтобы решить ее, используем соотношение между спектральной функцией и резольвентой

$$\frac{dE_\lambda}{d\lambda} = \frac{1}{2\pi i} (R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)). \quad (6.2')$$

С помощью тождества Гильберта представим разность резольвент в виде произведения

$$\begin{aligned} & R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon) = \\ & = \left( I - R_0(\lambda + i\varepsilon) \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}(\lambda + i\varepsilon) \right) 2i\varepsilon R_0(\lambda + i\varepsilon) R_0(\lambda - i\varepsilon) \times \\ & \times \left( I - \sum_{\alpha', \beta'} M_{\alpha'\beta'}(\lambda - i\varepsilon) R_0(\lambda - i\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Выражение в правой части представляет собой сумму сингулярных ядер двух типов. К первому относятся ядра, которые содержат произведение комплексно сопряженных знаменателей  $\frac{2i\varepsilon}{(P^2 - \lambda^2)^2 + \varepsilon^2}$  или  $\frac{2i\varepsilon}{(p_\alpha^2 - \kappa_A^2 - \lambda)^2 + \varepsilon^2}$ .

В пределе  $\varepsilon \downarrow 0$  они дают  $\delta$ -функции  $\delta(P^2 - \lambda)$  или  $\delta(E_A(p_A) - \lambda)$ . Коэффициенты при этих  $\delta$ -функциях выражаются через произведения операторов  $U_0 U_0^*$  и  $U_A U_A^*$ . Ко второму типу относятся произведения всех остальных сингулярных знаменателей, которые определены при  $\varepsilon \downarrow 0$  в смысле сингулярных интегралов типа (3.7). Поскольку такие интегралы умножаются на стремящийся к нулю множитель  $\varepsilon$ , они дают в пределе нуль. В результате мы получаем равенство

$$\frac{dE_\lambda(P, P')}{d\lambda} = \int dP'' U_0(P, P'') \overline{U_0(P', P'')} \delta(P''^2 - \lambda) + \\ + \sum_{A \neq 0} \int dp''_A U_A(P, p''_A) \overline{U_A(P', p''_A)} \delta(E_A(p''_A) - \lambda),$$

которое справедливо для  $\lambda$ , не совпадающих с особыми точками  $E_i$ . Отсюда, так же как в случае системы двух частиц, следует равенство

$$\sum_A U_A U_A^* = I - P_d.$$

Из полученных выше результатов вытекает следующее утверждение.

*Предложение 6.5. Существуют операторы  $U_0$  и  $U_A$ ,  $A \neq 0$ ,  $A = \{\alpha, i\}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $i = 1, 2, \dots, N_\alpha$ , действующие из  $\mathfrak{H}_0$  и  $\mathfrak{H}_A$  в  $\mathfrak{H}$  соответственно и обладающие следующими свойствами:*

*1. Всякая функция из гильбергова пространства  $\mathfrak{H}$  однозначно представляется в виде*

$$f = f_d + \sum_A U_A f_A,$$

*где  $f_d \in \mathfrak{H}_d$  и  $f_A \in \mathfrak{H}_A$ ,  $A = 0, \{\alpha, i\}$ .*

*2. Для любой  $\varphi(t)$ , ограниченной на всей вещественной оси, справедливо соотношение*

$$\varphi(H)f = \varphi(P_d H)f_d + \sum_A U_A \varphi(\tilde{H}_A) f_A.$$

*3. Функции  $f_A$  определяются равенствами*

$$f_A = U_A^* f.$$

*4. Имеют место соотношения*

$$\|f\|^2 = \|f_d\|^2 + \sum_A \|f_A\|^2.$$

Предложение 6.4 следует из этого утверждения, если определить оператор  $\widehat{U}$  равенством (6.18).

Рассмотрим, наконец, оператор рассеяния  $\widehat{S} = \widehat{U}^{(-)*} \widehat{U}^{(+)}$ . Из предложения 6.2 вытекает, что оператор  $\widehat{S}$  унитарен и коммутирует с любой ограниченной функцией гамильтониана каналов  $\widehat{H}$ . Для ядер этих операторов можно получить явные выражения в терминах ядер  $M_{\alpha\beta}$ , действуя по схеме, изложенной на примере системы двух тел. Соответствующие формулы были приведены в § 4 главы III. Отметим, наконец, следующие соотношения для матричных ядер оператора рассеяния, которые вытекают из «самосопряженности» резольвенты  $R(z) = R^*(\bar{z})$  и аналогичного равенства для ядер оператора  $M_{\alpha\beta}(z)$ :

$$M_{\alpha\beta}(P, P', z) = \overline{M_{\beta\alpha}(P', P, \bar{z})}.$$

Ядра  $G_{\alpha B}(P, p'_\beta, z)$  и  $J_{B\alpha}(p'_\beta, P, z)$  связаны равенством

$$G_{\alpha B}(P, p'_\beta, z) = \overline{J_{B\alpha}(p'_\beta, P, \bar{z})}.$$

Аналогичное соотношение справедливо для ядер  $H_{AB}(p_\alpha, p'_\beta, z)$ :

$$H_{AB}(p_\alpha, p'_\beta, z) = \overline{H_{BA}(p'_\beta, p_\alpha, \bar{z})}.$$

Итак, мы полностью охарактеризовали непрерывный спектр оператора  $H$  и обосновали гипотезу о полноте.

Подчеркнем, что изложенный в этом параграфе способ доказательства предложений 6.1 и 6.2 и формул (3.71) базируется лишь на стационарной формулировке теории рассеяния и поэтому независим от эвристических построений, проведенных при выводе упомянутых формул для системы  $N$  тел.

**Заряженные частицы.** Проверим теперь соотношения (6.17) в случае системы трех заряженных частиц. Мы опять будем использовать альтернативные рассуждения в конфигурационном пространстве. Мы покажем, что в качестве операторов  $U_A$ , определяющих преобразование  $\widehat{U}$ , можно взять операторы, которые задаются ядрами

$$U_0^{(\pm)}(X, P) = (2\pi)^{-3} \Psi_0^{(\pm)}(X, P),$$

$$U_A^{(\pm)}(X, p_A) = (2\pi)^{-3/2} \Psi_A(X, p_A), \quad A \neq 0.$$

Заметим сначала, что, как и в системе двух заряженных

частиц, сплетающие свойства  $HU_A = U_A \tilde{H}_A$  сводятся к уравнениям Шредингера для волновых функций  $\Psi_A(X, p_A)$  и, следовательно, не нуждаются в дополнительном обосновании.

Центральное место в доказательстве изометричности операторов занимает следующее утверждение об асимптотике быстро осциллирующих интегралов вида

$$I_A^{(\pm)}(X, E_A) = \int dp_A \Psi_A^{(\pm)}(X, p_A) f_A(p_A),$$

где  $f_A(p_A)$  — гладкие функции.

При  $|X| \rightarrow \infty$  имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} I_0^{(\pm)}(X, E) \sim & \frac{-e^{-i\pi/4} (2\pi)^{5/2}}{E^{5/4}} Q_0^{(-)}(X, E) f_0(-\sqrt{E} \hat{X}) + \\ & + \tilde{I}_0^{(\pm)}(X, E), \quad (6.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_A^{(\pm)}(X, E_A) \sim & \frac{2\pi i}{\sqrt{E_A}} \Psi_A(x_A) Q_A^{(-)}(y_A, E_A) \times \\ & \times f_A(-|p_A| \hat{y}_A) + \tilde{I}_A^{(\pm)}(X, E), \quad A \neq 0, \quad (6.24) \end{aligned}$$

где функции  $\tilde{I}_0^{(\pm)}$  и  $\tilde{I}_A^{(\pm)}$  принадлежат классу  $S_{E, \epsilon}$  при  $E = P^2$  и  $E = E_A(p_A)$  соответственно.

Слагаемые  $\tilde{I}_0$  и  $\tilde{I}_A$  мы опишем более подробно в конце параграфа и там же мы докажем эти формулы.

С помощью приведенных формул можно доказать, что операторы  $U_0^{(\pm)}$  и  $U_A^{(\pm)}$  являются изометрическими, а их области значений ортогональны, так что справедливы равенства

$$U_A^* U_B = \delta_{AB} I_A, \quad A, B = 0, \{x, i\}. \quad (6.25)$$

Действительно, рассмотрим билинейную форму  $I_{AB} = (U_A f_A, U_B g_B)$ , где  $f_A, g_B$  — гладкие финитные функции. Как и в системе двух тел, это выражение можно записать в виде предела:

$$\begin{aligned} I_{AB} = & \lim_{R \rightarrow \infty} \int dp_A dp'_B f(p_A) \overline{g(p'_B)} \int_{V_R} U_A(X, p_A) \times \\ & \times \overline{U_B(X, p'_B)} dX, \end{aligned}$$

где интегрирование ведется по шару  $|X| \leq R$ . С помощью формулы Грина преобразуем внутренний интеграл в

интеграл по сфере

$$\left(p_A^2 - p_B'^2 - i0\right)^{-1} \int_{\partial V_R} U_A(X, p_A) \frac{\overset{\leftrightarrow}{\partial}}{\partial R} \overline{U_B(X, p'_B)} dS_R.$$

Проинтегрируем затем по угловым переменным  $\hat{p}_A$  и  $\hat{p}'_B$  и воспользуемся формулами (6.23), (6.24). Интегрируя, наконец, по переменной  $|p_A|$  и учитывая асимптотические формулы (2.35), придем к соотношениям  $I_{AB} = \delta_{AB}(f_A, g_B)$ , из которых вытекает (6.25).

Покажем теперь, что волновые функции  $\Psi_0$  и  $\Psi_A$  образуют полную систему функций в подпространстве, отвечающем непрерывному спектру Н. Для обоснования полноты достаточно проверить справедливость следующего утверждения.

Пусть  $\lambda$  не является особой точкой уравнения (5.154). Тогда спектральная функция  $E_\lambda$  дифференцируема по  $\lambda$  и ядро ее производной может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \frac{dE_\lambda(X, X')}{d\lambda} &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \Psi_0(X, P) \Psi_0^*(X, P) \delta(P^2 - \lambda) dP + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{A \neq 0} \Psi_A(X, p_A) \Psi_A^*(X', p_A) \delta(E_A(p_A) - \lambda) dp_A. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Доказательство этой формулы может быть проведено по схеме, использованной в случае двух заряженных частиц.

Воспользуемся выражением спектральной функции через резольвенту (6.2'). Разность ядер  $R(X, X', \lambda \pm i0)$  преобразуем с помощью формулы Грина. Получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{dE_\lambda(X, X')}{d\lambda} &= \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial V_R} R(X, Y, \lambda + i0) \frac{\overset{\leftrightarrow}{\partial}}{\partial R} R(Y, X', \lambda - i0) dS_R. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Рассмотрим затем билинейную форму  $\left(\frac{dE_\lambda}{d\lambda} f, g\right)$ , где  $f$  и  $g$  — финитные гладкие функции. На основе формулы (5.176) мы можем записать асимптотику интеграла в правой части (6.27) в виде суммы слагаемых, которые порождаются произведением всевозможных искаженных

сферических волн  $Q_0^{(\pm)}$  и  $Q_A^{(\mp)}$ . С помощью соотношений (2.35) можно показать далее, что все слагаемые, которые порождаются произведениями сферических волн  $Q_A^{(\pm)}Q_B^{(\mp)}$  с различными значениями  $A \neq B$ , равны в пределе  $R \rightarrow \infty$  нулю, а конечный вклад дают лишь члены, содержащие произведения однотипных сферических волн  $Q_A^{(\pm)}Q_A^{(\mp)}$ . Амплитуды же этих волн выражаются через волновые функции соотношениями (5.178), (5.179). Отсюда немедленно получим представление (6.26).

Как и в системе нейтральных частиц, описанные результаты можно объединить в предложение 6.4.

**Оператор рассеяния.** Вычислим далее ядра оператора рассеяния для системы трех заряженных частиц. Мы выразим эти ядра через амплитуды рассеяния, которые будем рассматривать как обобщенные функции. Поэтому нам удобно сначала определить эти функции и перечислить основные свойства амплитуд рассеяния.

Рассмотрим сначала амплитуды, отвечающие волновым функциям  $\Psi_A(X, p_A)$ ,  $A \neq 0$ . Амплитуды  $F_{BA}(\hat{y}_B, p_A)$  искаженных сферических волн  $Q_B$ , описывающие неупругие процессы,  $B \neq A$ , являются гладкими ограниченными функциями. Если все частицы заряжены одноименно, то гладкими являются также амплитуды  $F_{\alpha A}(\hat{X}, p_A)$  искаженных сферических волн в  $\mathbf{R}^6$ . Если же в системе имеются частицы с зарядами разных знаков, эти амплитуды обладают квадратично интегрируемыми на единичной сфере  $|X| = 1$  особенностями вида  $|x_\alpha|^{-1/2}|X|^{1/2}$ . Амплитуда  $F_{AA}(\hat{y}_\alpha, p_\alpha)$ , соответствующая абсолютно упругим процессам, имеет неинтегрируемые сингулярности при  $(y_\alpha, p_\alpha) = 1$ . Эти сингулярности могут быть явно выделены в виде

$$F_{AA}(\hat{p}', p) = \tilde{F}_{AA}(\hat{p}', p) + \frac{\tilde{f}_A(\hat{p}', p)}{|\hat{p} - \hat{p}'|^{2+2i\eta_A}}, \quad (6.28)$$

$$\eta_A = \frac{n_{\alpha\alpha}}{2|p_A|},$$

где  $\tilde{f}_A$  и  $\tilde{F}_{AA}$  — ограниченные гладкие функции. Второе слагаемое в этой формуле совпадает с двухчастичной амплитудой рассеяния для оператора  $\tilde{h}_A^c$ , старшая особенность которой является чисто кулоновской (5.5).

Ниже мы будем сопоставлять амплитуде  $F_{AA}$  обобщенную функцию на сфере  $S^{(2)}$ , которую будем обозна-

чать тем же символом  $F_{AA}$ . В локальных координатах сингулярная часть (6.28) действует как обобщенная функция  $t^{-1-i\eta A}$ , определяемая с помощью аналитического продолжения интеграла (6.11), и совпадает с двухчастичной кулоновской амплитудой (5.5).

Рассмотрим далее волновые функции  $\Psi_0(X, P)$ .

Амплитуды трехмерных сферических волн  $Q_B$ , описывающих асимптотику этих волновых функций, являются гладкими ограниченными функциями. Если частицы заряжены разноименно, эти амплитуды имеют квадратично интегрируемые на единичной сфере  $S^{(5)}$  сингулярности вида  $|k_\alpha|^{-1/2}$ . Амплитуда же шестимерной сферической волны  $F_{00}(\hat{X}, P)$  имеет неинтегрируемые особенности, которые отражает представление

$$F_{00} = F_c + \sum_{\alpha} F_{\alpha} + \sum_{\alpha \neq \beta} F_{\alpha\beta} + \tilde{F}_0. \quad (6.29)$$

Здесь  $\tilde{F}_0$  — гладкая, ограниченная при  $|k_\alpha| > 0$  функция. Если в паре  $\alpha$  действует кулоновское притяжение, то при  $|k_\alpha| = 0$  эта функция имеет квадратично интегрируемые на единичной сфере  $|P| = 1$  особенности.

Сингулярным слагаемым (6.29) будем сопоставлять обобщенные функции, действие которых будет описано ниже. Эти обобщенные функции и соответствующие им ядра мы будем обозначать теми же буквами, что и амплитуды.

Особенность слагаемого  $F_c$  имеет вид

$$F_c(\hat{P}, P') = \frac{A_c(\hat{P}, P')}{|\hat{P} - \hat{P}'|^{5+2i\eta_0}}, \quad \eta_0 = \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{2|k_{\alpha}|} |P|, \quad (6.30)$$

где ограниченная функция  $A_c$  дается формулами (5.121), (5.122). Обобщенная функция  $|\hat{P} - \hat{P}'|^{-5-2i\eta_0}$  в сферических координатах действует как  $t^{-1-i\eta_0}$  (6.12)

Через  $F_{\alpha}$  обозначена обобщенная функция, которая задается равенством

$$F_{\alpha}(\hat{P}, P') = f_{\alpha}^{(s)}(\hat{k}_{\alpha}, k'_{\alpha}) \frac{A_{\alpha}(\hat{M}_{\alpha}, P')}{|\hat{p}_{\alpha} - \hat{p}'_{\alpha}|^{3+i\alpha}}. \quad (6.31)$$

Здесь  $A_{\alpha}$  — ограниченная функция, и действие обобщенной функции  $|p - p'|^{-3-i\alpha}$  в сферических координатах  $u = |p - p'|$ ,  $p \rightarrow p'$ , определено формулой (6.12).

Обобщенная функция  $f_\alpha^{(s)}$  определяется равенством

$$f_\alpha^{(s)}(\hat{k}_\alpha, k'_\alpha) = f_\alpha(\hat{k}_\alpha, k'_\alpha) - \\ - i \exp \left\{ 2i \arg \Gamma \left( 1 + i \frac{n_\alpha}{2|k_\alpha|} \right) \right\} \delta(k_\alpha, k'_\alpha). \quad (6.32)$$

Здесь  $f_\alpha$  — сингулярная амплитуда для пары частиц  $\alpha$ , особенность которой описывается формулой (5.5). Амплитуда  $f_\alpha$  действует как обобщенная функция  $t^{-1-i\tau}$ , определенная выше. Через  $\delta(\hat{k}_\alpha, \hat{k}'_\alpha)$  обозначена  $\delta$ -функция на сфере  $S^{(2)}$ . Отметим, что обобщенные функции  $f_\alpha^{(s)}$  и  $p_\alpha - p'_\alpha|^{-3-ia_\alpha}$  зависят от разных кинематических переменных. Вне особых направлений  $F_\alpha$  является обычной функцией, которая совпадает с амплитудой (5.134).

Обобщенная функция  $F_{\alpha\beta}$  задается соотношением

$$F_{\alpha\beta}(\hat{P}, P') = f_\alpha^{(s)}(\hat{k}_\alpha, k_\alpha(p_\alpha, p'_\beta)) f_\beta^{(s)}(k_\beta(p_\alpha, p'_\beta), k'_\beta) \times \\ \times \tilde{A}_{\alpha\beta}(\hat{P}, P') (k_\beta^2(p_\alpha, p'_\beta) - k'^2_\beta - i0)^{-1-ia_{\alpha\beta}}, \quad (6.33)$$

где обобщенные функции  $f_\alpha^{(s)}$ ,  $f_\beta^{(s)}$  определены выше. Гладкая функция  $\tilde{A}_{\alpha\beta}$  описывается равенством (5.142), а обобщенная функция  $(k^2 - k'^2 - i0)^{-1-i\eta}$  определяется посредством аналитического продолжения интеграла  $\int\limits_{-1}^1 dt \varphi(t) (t - ie)^{-1-i\eta}$  при  $e \downarrow 0$ .

Введем в рассмотрение интегральные операторы, задаваемые следующими ядрами:

$$S_{AB}(p_A, p'_B) = \frac{i}{\pi} \delta(E_A(p_A) - E_B(p'_B)) F_{AB}(\hat{p}_A, p'_B), \\ S_{0B}(P, p'_B) = -i(2\pi)^{5/2} C_0^{-1} \delta(E - E_B(p'_B)) F_{0B}(\hat{P}, p'_B), \\ S_{A0}(p_A, P') = (2\pi)^{-5/2} i \delta(E_A(p_A) - E) F_{A0}(\hat{p}_A, P'), P'^2 = E, \\ S_{00}(P, P') = 2\pi i C_0^{-1} \delta(P^2 - P'^2) F_{00}(\hat{P}, P'). \quad (6.34)$$

Как и выше, здесь использовано обозначение  $C_0 = -e^{i\pi/4} (2\pi)^{5/2} \pi E^{3/4}$ . По определению сингулярные ядра  $F_{AA}$  и  $F_{00}$  понимаются как обобщенные функции, определенные выше.

Рассмотрим матричные ядра оператора рассеяния  $\widehat{S}$ , задаваемые равенствами

$$S_{AB} = U_A^{(-)*} U_B^{(+)}. \quad (6.35)$$

Справедливо следующее утверждение.

*Оператор  $\widehat{S}$  унитарен и коммутирует с произвольной ограниченной функцией оператора  $\widehat{H}$ . Его матричные ядра  $S_{AB}$  задаются равенствами (6.34).*

Первая часть этого утверждения легко доказывается на основе предложения 6.4 путем таких же рассуждений, как и в случае нейтральных частиц. Представления (6.34) для матричных ядер  $S_{AB}$  могут быть доказаны с помощью следующего утверждения об асимптотике интегралов (6.23), (6.24), которое мы докажем ниже.

*Амплитуды сферических волн слагаемых  $\tilde{\Gamma}_0$  и  $\tilde{\Gamma}_A$  класса  $S_{E,c}$  в формулах (6.23) и (6.24) выражаются через функции  $f_A$  и операторы  $S_{BA}$  соотношениями*

$$f_{BA}(\hat{p}_B, E_B) = C_{BA} \int S_{BA}(p_B, p'_A) f_A(p'_A) dp'_A, \quad (6.36)$$

где через  $C_{BA}$  обозначены нормировочные коэффициенты

$$C_{BA} = -2i\pi(E_B + \kappa_A^2)^{-1/2}, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0;$$

$$C_{0A} = \frac{iC_0(E)}{\pi|p_A|^2(2\pi)^{3/2}}, \quad A \neq 0,$$

$$C_{A0} = -i(2\pi)^{5/2} E^{-2}, \quad A \neq 0;$$

$$C_{00} = i(\pi E^2)^{-1} C_0(E).$$

Формулы (6.23), (6.24) и (6.36) можно объединить в следующее асимптотическое представление, аналогичное (6.16):

$$\begin{aligned} \Psi_B(X, p_B) &\sim C_{BB}\psi_B(x_B) Q_B^{(-)}(y_B, E_B) \delta(-y_B, p_B) + \\ &+ \sum_A C_{AB}\psi_A(x_A) Q_A^{(+)}(y_A, E_A) S_{AB}(|p_A| \hat{y}_A, p_B). \end{aligned} \quad (6.36')$$

Чтобы убедиться в справедливости (6.36'), следует с помощью формулы Грипа представить интеграл от произведения волновых функций  $\Psi_A^{(-)*}\Psi_B^{(+)}$  в виде предела интегралов по сферам  $S_R$  большого радиуса  $R$ . Устремляя  $R \rightarrow \infty$  и пользуясь соотношениями (6.36), получим результаты, сформулированные выше.

Как видно из формул (6.34), диагональные элементы оператора рассеяния, в отличие от случая нейтральных частиц, не содержат единичных слагаемых. Все матричные ядра выражаются только через амплитуды искаженных сферических волн. При этом, однако, амплитуда рассеяния имеет сильные особенности. Последние не уступают по силе  $\delta$ -функциональным и расположены в тех же точках, что и особенности ядер оператора рассеяния для нейтральных частиц. В частности, в случае оператора  $S_{00}$  вместо  $\delta$ -функции  $\delta(P - P')$  появляется особенность (6.30) вида  $|P - P'|^{-5-2iq_0}$ , вместо трехмерных  $\delta$ -функций  $\delta(p_\alpha - p'_\alpha)$  — особенности  $|p_\alpha - p'_\alpha|^{-3-i\alpha_\alpha}$  и вместо полюса  $(k_\alpha - k'_\alpha - i0)^{-1}$  — кулоновский искаженный полюс  $(k_\alpha - k'_\alpha - i0)^{-1-i\alpha_\alpha}$ .

Из определения обобщенных функций  $t^{-1-i\eta}$ , которые задают особенности ядер оператора рассеяния, следует, что интегралы с ними могут быть представлены в регуляризованном виде (6.12). Эта формула может быть символически записана в виде

$$t^{-1-i\eta} = \frac{i}{\eta} \delta(t) + P(t^{-1-i\eta}), \quad (6.37)$$

где «главное значение»  $P(t^{-1-i\eta})$  отвечает второму слагаемому (6.12). Сравнивая определение обобщенной функции  $f_\alpha^{(s)}$  с (6.37), видим, что она соответствует «главному значению» кулоновской амплитуды:

$$f_\alpha^{(s)} = P(f_\alpha(\hat{k}_\alpha, k'_\alpha)).$$

Мы можем столкнуться с этой функцией как «истинную» кулоновскую амплитуду рассеяния, которая остается после выделения из  $f_\alpha(\hat{k}_\alpha, k'_\alpha)$  локализованной при  $(\hat{k}_\alpha, \hat{k}'_\alpha) = 1$   $\delta$ -функции, искаженной множителем  $i \exp\{2i \arg \Gamma(1 + i\eta_\alpha)\}$ .

Физическая интерпретация матричных элементов остается в случае заряженных частиц без изменения. Эффективные сечения процессов рассеяния ( $B \rightarrow A$ ) пропорциональны величинам  $|F_{AB}|^2$ . При этом наличие особенностей в ядрах матричных элементов  $F_{AB}$  отражает тот факт, что полные сечения реакций с заряженными частицами являются бесконечными.

**Кулоновские быстро осциллирующие интегралы.** В конце этого параграфа мы докажем сделанные выше

утверждения об асимптотике интегралов вида  $I_A$  и  $I_0$ .

Сначала мы изучим асимптотическое поведение эталонных интегралов вида

$$I_l = \int d\hat{p} e^{iV\bar{E}(\hat{p}, \hat{x})} \Phi \left( iv + \frac{\mu}{2}, r_l + \mu, i\sqrt{\bar{E}} |x| u \right) \times \\ \times u^{\mu/2} g(\hat{p}), \quad (6.38)$$

где  $p$  и  $x$  —  $l$ -мерные векторы,  $u = 1 - (\hat{p}, \hat{x})$ ,  $r_l = (l-1)/2$  и интегрирование ведется по единичной сфере  $S^{(l-1)}$  в  $l$ -мерном пространстве. Параметры  $v$  и  $\mu$  — вещественные, функция  $g(\hat{p})$  предполагается гладкой и равной нулю при  $u \geq 1$ :

$$g(\hat{p}) = 0, \text{ если } (\hat{x}, \hat{p}) \leq 0.$$

Предложение С. При  $\sqrt{\bar{E}}|x| \rightarrow \infty$  справедлива следующая асимптотическая формула:

$$I_l \sim \tilde{C}_l A(\hat{x}, p) (\sqrt{\bar{E}} |x|)^{\mu/2} \frac{\exp \{i\sqrt{\bar{E}} |x| + iv \ln 2\sqrt{\bar{E}} |x|\}}{(\sqrt{\bar{E}} |x|)^{r_l}}, \quad (6.39)$$

где

$$\tilde{C}_l = \frac{\Gamma(r_l + \mu)}{\Gamma(iv + \mu/2)} e^{-\pi v - i\pi(r_l/2 + \mu/4)}.$$

Амплитуда  $A(\hat{x}, p)$  дается интегралом

$$A(\hat{x}, p) = \int d\hat{p} S_0(\hat{x}, p) g(\hat{p}), \quad p = \sqrt{\bar{E}} \hat{p}, \quad (6.40)$$

где сингулярное ядро  $S_0$ , определяемое равенством

$$S_0(\hat{p}', p) = (1 - (\hat{p}', \hat{p}))^{-r_l + iv},$$

действует в локальных координатах  $u = 1 - (\hat{p}, \hat{p}')$  на сфере  $S^{(l-1)}$  как обобщенная функция  $t^{-1+iv}$ .

Докажем эту асимптотическую формулу. Введем на поверхности  $S^{(l-1)}$  сферические координаты по отношению к оси  $\hat{x}$ :

$$\hat{p} = \{\cos \theta, \hat{M} \sin \theta\}, \quad \cos \theta = (\hat{x}, p), \quad \hat{M} \in S^{(l-2)}.$$

Элемент площади  $d\hat{p}$  равен при этом

$$d\hat{p} = \sin^{l-2} \theta d\theta \wedge d\hat{M} = (2u)^{r_l-1} du \wedge d\hat{M},$$

где  $d\hat{M}$  — элемент площади на сфере  $S^{(l-2)}$ . Представим далее подынтегральную функцию в виде суммы  $g(\hat{p}) = g(\hat{x}) + (g(\hat{p}) - g(\hat{x}))$  и рассмотрим сначала интеграл  $\Delta I$ , отвечающий разности  $\Delta g(p) = g(\hat{p}) - g(\hat{x})$ . Область интегрирования  $S^{(l-1)}$  разобьем на две части  $\Omega_{\hat{x}}$  и  $\tilde{\Omega}_{\hat{x}}$ , где  $\Omega_{\hat{x}}$  — окрестность точки  $\hat{p} = \hat{x}$ , определяемой соотношением

$$1 - \cos \theta \leq |x|^{-1/2+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \quad (6.41)$$

Соответствующие интегралы обозначим через  $\Delta I_{\hat{x}}$  и  $\tilde{\Delta I}_{\hat{x}}$ . Так как в области  $\Omega_{\hat{x}}$  разность  $\Delta g$  подчиняется оценке  $|\Delta g(\hat{p})| \leq cu$ , а мера этой области имеет порядок  $O(|x|^{-r_n+\varepsilon'})$ ,  $1 > \varepsilon' > 0$ , интеграл  $\Delta I_{\hat{x}}$  можно представить в виде произведения множителя  $|x|^{-r_l} \exp\{i\sqrt{E}|x|\}$  на стремящуюся к нулю функцию порядка  $|x|^{-\varepsilon_0}$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ . Следовательно, этот интеграл не дает вклада в старшие члены асимптотики.

В интеграле  $\tilde{\Delta I}_{\hat{x}}$  функцию  $\Phi(a, c, t)$  можно заменить старшими асимптотическими членами (5.3). При этом второе слагаемое в (5.3) порождает искаженную сферическую волну (6.39), амплитуда которой  $\tilde{A}_{\hat{x}}$  дается формулой (6.40), где следует взять функцию  $\Delta g(p)$  вместо  $g(\hat{p})$ . Интеграл  $\int S_0(\hat{x}, p) \Delta g(\hat{p}) d\hat{p}$  существует в этом случае как несобственный. Асимптотическая форма интеграла, порожденного первым слагаемым (5.3), может быть найдена с помощью интегрирования по частям относительно переменной  $u$ . Нетривиальный вклад дает только точка  $u = 1$ , где  $\Delta g = -g(\hat{x})$ . Мы обозначим этот вклад через  $\delta I_1$ , но не будем приводить явных формул для него, так как в окончательной формуле сумма всех вкладов от точки  $u = 1$  аннулируется.

Рассмотрим далее интеграл  $I_{\hat{x}}$ , отвечающий функции  $g(\hat{x})$ . В сферических координатах он принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} I_{\hat{x}} = & g(\hat{x}) e^{i\sqrt{E}|x|} \Omega_{l-2} \int_0^1 du u^{r_l-1+\frac{\mu}{2}} (2-u)^{r_l-1} \times \\ & \times \exp\{-i\sqrt{E}u|x|\} \Phi(iv + \mu/2, r_l + \mu, i\sqrt{E}|x|u). \end{aligned}$$

Здесь через  $\Omega_{l-2}$  обозначена площадь поверхности ( $l-2$ )-мерной сферы:

$$\Omega_{l-2} = 2\pi^{\frac{l-1}{2}} \left( \Gamma\left(\frac{l-1}{2}\right) \right)^{-1}.$$

Прежде чем вычислить асимптотику этого интеграла, рассмотрим новый вспомогательный интеграл:

$$I_0 = g(\hat{x}) \Omega_{l-2} \cdot 2^{r_l + iv} \int_0^2 du u^{r_l - 1 + \mu/2} (2-u)^{-1-iv} \times \\ \times e^{i\sqrt{E}|x|(1-u)} \Phi(iv + \mu/2, r_l + \mu, i\sqrt{E}|x|u).$$

Здесь выражение  $(2-u)^{-1-iv}$  понимается как обобщенная функция  $t^{-1-iv}$ , где  $t = 1-u$ . Видно, что особенность подынтегральной функции  $I_0$  при  $u=0$  совпадает с особенностью исходного подынтегрального выражения  $I_{\hat{x}}$ . Однако, в отличие от  $I_{\hat{x}}$ , интеграл  $I_0$  может быть вычислен явно:

$$I_0 = g(\hat{x}) \Omega_{l-2} 2^{\frac{3r_l}{2} - iv - 1} e^{-i\sqrt{E}|x|} \times \\ \times \frac{\Gamma(-iv) \Gamma\left(r_l + \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma(-iv + r_l + \mu/2)} \Phi(\mu/2, r_l + \mu, 2i\sqrt{E}|x|).$$

С другой стороны, этот интеграл можно представить как сумму двух интегралов:  $I_0 = I_{01} + I_{12}$ , взятых по промежуткам  $[0, 1]$  и  $[1, 2]$ . При этом интеграл  $I_{01}$  является интегралом типа (6.38) — его асимптотика нам неизвестна. Во втором интеграле мы можем заменить вырожденную гипергеометрическую функцию  $\Phi(iv + \mu/2, r_l + \mu, i\sqrt{E}|x|u)$  асимптотикой (5.3). В результате этот интеграл принимает вид суммы обычных быстро осциллирующих интегралов типа (4.126). Его асимптотика легко вычисляется. Таким образом, мы получаем для интеграла  $I_{01}$ , который имеет те же особенности, что и исходный (6.38), явное асимптотическое представление  $I_{01} \sim I_0 + I_{12}$ . После приведения подобных членов получим сумму двух слагаемых. Одно имеет вид (4.39), где амплитуда  $A(\hat{x}, p)$  дается формулой (6.40). В качестве функции  $g(\hat{p})$  в данном случае берется  $(1-u/2)^{-iv-r_l}$ . Второе слагаемое описывает вклад точки  $u=1$ . Мы не выписываем его.

Наконец, на основе этого результата получим асимптотику  $I_{\hat{x}}$ . С этой целью запишем  $I_{\hat{x}}$  в виде суммы  $I_{\hat{x}} = = (I_{\hat{x}} - I_{01}) + I_{01}$ . Подынтегральное выражение первого слагаемого удовлетворяет оценке (6.41), и поэтому его асимптотика может быть исследована таким же образом, как и в случае интеграла  $\Delta I_{\hat{u}}$ . Получим сумму двух членов. Первый — искаженная сферическая волна (6.39), амплитуда которой имеет вид (6.40), где функцию  $g(\hat{p})$  следует заменить выражением  $g(\hat{x})((1 - u/2)^{-iv - r_l} - 1)$ . Второй порождается точкой  $u = 1$ . Такой же вид имеет асимптотика интеграла  $I_{01}$ . При этом можно убедиться, что сумма указанных слагаемых, отвечающих точке  $u = 1$ , и подобных слагаемых, которые возникали ранее, равна нулю.

Таким образом, мы рассмотрели все слагаемые, на которые мы разбили исходный интеграл  $I_l$ . Собирая полученные представления и приводя подобные члены, придем к формуле (6.39).

Перейдем теперь к обоснованию формул (6.14) и (6.36).

Заметим, что формула (6.14) непосредственно следует из предложения С при  $l = 3$ . Что касается первого члена в соотношении (6.9), то он описывает вклад точки  $u = 2$ , возникающий при интегрировании относительно  $u$  по частям. Аналогичное слагаемое имеется и в случае нейтральных частиц (см. (4.6)).

Докажем, наконец, формулы (6.23) и (6.36). Мы ограничимся более трудным случаем интеграла  $I_0$ . Интегралы  $I_A$ ,  $A \neq 0$ , могут быть рассмотрены так же, как и двухчастичные выражения (6.9).

Очевидно, вклад асимптотических слагаемых  $\tilde{\Phi}_0$ , отвечающих гладким частям амплитуды рассеяния, может быть представлен в виде (6.36), так что нам достаточно рассмотреть только интегралы с функциями  $L_c$ ,  $\Psi_\alpha$  и  $\Psi_{\alpha\beta}$ . Асимптотика таких интегралов может быть найдена методом стационарной фазы. При этом плоский эйконал имеет две критические точки  $\hat{p} = \pm \hat{X}$ , где  $(\hat{P}, X) = \pm |X|$ , а однократный  $Z_\alpha$  и двукратный  $Z_{\alpha\beta}$  эйконалы имеют по одной критической точке, где  $Z_\alpha = |X|$ ,  $Z_{\alpha\beta} = |X|$ .

Критическая точка плоского эйконала  $\hat{P} = -\hat{X}$  порождает первое слагаемое в асимптотическом представлении (6.23). Остальные критические точки лежат в особых направлениях, где функции  $L_c$ ,  $\Psi_\alpha$  и  $\Psi_{\alpha\beta}$  описываются

в терминах вырожденных гипергеометрических функций. Мы можем, следовательно, применить предложение С, чтобы найти асимптотику интегралов по окрестностям направлений  $\Omega_F$ ,  $\Omega_\alpha^{(0)}$  и  $\Omega_{\alpha\beta}^{(0)}$ .

В особых направлениях  $\Omega_F$  и  $\Omega_\alpha^{(0)}$  асимптотика функций  $L_c$  и  $\Psi_\alpha$  явно выражается через функции  $\Phi(a, b, t)$  формулами (5.145') и (5.128). Применяя соотношение (6.39), получим слагаемые в асимптотической формуле (6.23), отвечающие амплитудам  $F_s$  и  $F_\alpha$ .

Чтобы найти асимптотику интеграла, содержащего функцию  $\Psi_{\alpha\beta}$ , мы можем применить метод, развитый при доказательстве предложения С. При этом, чтобы воспользоваться формулой (6.41), функцию  $\Psi(a, c, x)$  в (5.139) следует выразить через функцию  $\Phi(a, c, x)$  при помощи формулы

$$\begin{aligned}\Psi(a, b, x) = & \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} \Phi(a, b, x) + \\ & + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} x^{1-b} \Phi(a-b+1, 2-b, x).\end{aligned}$$

В результате мы, как и в случае интеграла (6.38), придем к асимптотической формуле (6.39), где амплитуда сферической волны выражается через обобщенную функцию  $(t-i0)^{-1-i\mu}$  равенством (6.40).

Следует отметить, что при интегрировании амплитуд  $F_\alpha$  и  $F_{\alpha\beta}$  по угловым переменным мы должны положить равными нулю двухчастичные амплитуды  $f_\alpha$  в направлениях рассеяния вперед ( $\hat{k}_\alpha, \hat{x}_\alpha = 1$  для пары  $\alpha$ ). Это обусловлено тем, что в асимптотических формулах (5.128) и (5.137) данные амплитуды умножаются на срезающие функции, равные нулю при ( $\hat{k}_\alpha, \hat{x}_\alpha = 1$ ).

Этим утверждением мы заканчиваем исследование стационарной задачи рассеяния и переходим к исследованию соотношения между стационарным и нестационарным определениями волновых операторов.

### § 3. Обоснование нестационарной постановки задачи рассеяния

В этом параграфе мы покажем, что стационарные волновые операторы совпадают с нестационарными, которые определяются как пределы операторов эволюции. Тем самым мы дадим здесь обоснование постановки задачи рассеяния.

**Система двух тел.** Покажем, что оператор  $u(t) = \exp\{iht\} \exp\{-ih_0t\}$  сильно сходится и при этом

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} u(t) = u^{(\pm)}, \quad (6.42)$$

где операторы  $u^{(\pm)}$  задаются равенствами (3.22).

Для доказательства этого утверждения достаточно установить, что справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} (e^{-iht} u^{(\pm)} f, e^{-ih_0 t} g) = (f, g), \quad (6.43)$$

где  $f$  и  $g$  — гладкие финитные функции. Действительно, из (6.1) следует равенство

$$\begin{aligned} \| (e^{iht} e^{-ih_0 t} - u^{(\pm)}) f \|^2 &= \\ &= 2(f, f) - 2 \operatorname{Re}(u^{(\pm)} f, e^{iht} e^{-ih_0 t} f) \end{aligned}$$

и правая часть исчезает в пределе  $t \rightarrow \pm\infty$ , если соотношение (6.43) выполняется.

Докажем теперь (6.43). Используя (6.1), преобразуем скалярное произведение в левой части (6.43):

$$(e^{-iht} u^{(\pm)} f, e^{-ih_0 t} g) = (u^{(\pm)} e^{-ih_0 t} f, e^{-ih_0 t} g).$$

Используя выражение ядра  $u^{(\pm)}$  через  $T$ -матрицу (3.22), найдем, что это скалярное произведение равно сумме скалярного произведения  $(f, g)$  и слагаемого

$$\int dk dk' \frac{t(k, k', k'^2 \pm i0)}{k^2 - k'^2 \mp i0} e^{i(k^2 - k'^2)t} f(k') \overline{g(k)}.$$

После интегрирования по угловым переменным и замены переменных  $k^2 = u$ ,  $k'^2 = v$  интеграл принимает вид

$$\int du dv \Phi(u, v) \frac{\exp\{i(u - v)t\}}{u - v \mp i0}$$

и в силу (2.44) равен в пределе  $t \rightarrow \pm\infty$  нулю. Таким образом, соотношение (6.43) доказано.

Рассмотрим теперь систему заряженных частиц. Покажем, что оператор

$$u(t) = \exp\{iht\} L_0 \exp\{-ip^2 t - iw_t\}$$

сильно сходится, причем

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t) = u^{(\mp)},$$

где волновые операторы  $u^{(\mp)}$  определены равенствами (6.7) и  $w_t = \eta(p) \operatorname{sign} t \ln 4p^2 t$ .

Как и выше, достаточно доказать соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} (e^{-iht} u^{(\pm)} f, L_0 e^{-ipt - iw_t g}) = (f, g).$$

Мы будем использовать координатное представление. Для определенности рассмотрим случай  $t \rightarrow -\infty$ .

Пользуясь сплетающим свойством, изменим порядок операторов  $e^{-iht}$  и  $u^{(+)}$  и запишем скалярное произведение в виде предела при  $\epsilon \downarrow 0$  интеграла

$$I(t, \epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx e^{-\epsilon|x|} \int dp dp' \psi(x, p) \times \\ \times \exp \{-i(p', x) + it(p'^2 - p^2) + iw_t(p)\} f(p') \overline{g(p)}.$$

Заметим, что интеграл по шару  $V_R$  радиуса  $R = o(t^\nu)$  при  $\nu < 1/3$  равен в пределе  $|t| \rightarrow \infty$  нулю. Действительно, в этом случае параметр  $t$  является старшим по отношению к  $|x|$ . Поэтому, проводя первое интегрирование по  $x$ , соответствующий интеграл можно записать в виде (1.28). Асимптотика такого интеграла может быть вычислена при помощи метода стационарной фазы. Получим в пределе  $|t| \rightarrow \infty$  нуль.

Итак, мы можем ограничиться интегрированием по внешности шара большого радиуса  $R_t = o(|t|^\nu)$ . Проведем первое интегрирование по угловым переменным  $p$  и  $p'$ . Так как  $|x|$  велико, мы можем воспользоваться формулой (6.9), чтобы вычислить асимптотику интеграла относительно  $p$ . Асимптотика интеграла по  $p'$  может быть вычислена при помощи аналогичного соотношения (4.6). В результате получим следующее асимптотическое равенство:

$$I(t, \epsilon) \sim \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty ds \cdot s \int_0^\infty ds' \cdot s' \int_{|x| > R_t} dx e^{-\epsilon|x|} \times \\ \times \exp \{it(s'^2 - s^2) - iw_t(s)\} \times \\ \times \left( \overline{g(s' \hat{x})} \frac{e^{-is'|x|}}{|x|} - \overline{g(-s' \hat{x})} \frac{e^{is|x|}}{|x|} \right) \times \\ \times \left( \frac{e^{-is|x|-iw_0(s)}}{|x|} f(-s \hat{x}) + F(\hat{x}) \frac{e^{is|x|+iw_0(s)}}{|x|} \right). \quad (6.44')$$

Таким образом, мы можем записать  $I(t, \varepsilon)$  в виде суммы четырех быстро осциллирующих интегралов, в которые входят экспоненты вида  $\exp\{\mp i|x|s' \pm i|x|s\}$ . Проинтегрируем далее по радиальной переменной  $|x|$ . При этом промежуток интегрирования  $[R_t, \infty)$  дополним до полуоси  $[0, \infty)$  — так мы добавляем слагаемые, которые равны в пределе  $|t| \rightarrow \infty$  нулю. Возникающие интегралы могут быть вычислены явно. В результате появляются следующие функции, которые определяют нетривиальные сингулярные и быстро осциллирующие части подынтегрального выражения:

$$\frac{\exp\{it(s'^2 - s^2) - iw_t(s)\}}{(\pm s' \mp s + i0)^{1+i\eta}} e^{-\frac{\pi\eta}{2}} \Gamma(1 + i\eta). \quad (6.44'')$$

Проинтегрируем, наконец, по  $s$  и применим асимптотические формулы (2.44) из главы II. Отличный от нуля предел будет иметь лишь слагаемое, которое отвечает знаменателю  $(s' - s + i0)^{-1}$ . Этот предел равен скалярному произведению  $(f, g)$ , что и требовалось установить.

Итак, мы полностью разобрались с системой двух частиц и можем перейти к исследованию трехчастичных нестационарных волновых операторов.

**Система трех тел.** Основным результатом, который мы докажем в случае системы трех нейтральных частиц, является следующее утверждение.

### Операторы

$$U_A(t) = e^{iHt} L_A e^{-i\widetilde{H}_A t}, \quad A = 0, \{\alpha, i\}, \quad (6.45)$$

сильно сходятся при  $t \rightarrow \mp\infty$ , причем

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} U_A(t) = U_A^{(\pm)}, \quad A = 0, \{\alpha, i\}, \quad (6.46)$$

где операторы  $U_A^{(\pm)}$  определяются равенствами (3.63) — (3.63'').

Эти соотношения аналогичны равенствам (6.42) для системы двух тел. Однако видно существенное отличие результатов, относящихся к операторам эволюции  $e^{iHt}$  и  $e^{i\widetilde{H}_A t}$ . Сравнивая (6.42) и (6.46), мы видим, что по своему построению операторы  $u(t)$  и  $U_0(t)$  аналогичны. Важным свойством асимптотики оператора  $u(t)$ , т. е. операторов  $u^{(+)}_0$  и  $u^{(-)}_0$ , является совпадение областей значений этих операторов. Операторы  $U_0^{(\pm)}$  не обладают этим свойством. Как следует из предложения 6.4, совпадают только орто-

гональные суммы областей значений операторов  $U_0^{(\pm)}$  и  $U_A^{(\pm)}$ ,  $A \neq 0$ .

Это отличие, конечно, тесно связано с отмеченным выше отличием системы двух тел от системы трех частиц. В терминах теории рассеяния первая является одноканальной, а вторая — многоканальной. Результаты, которые мы доказываем в этой главе, позволяют придать точный математический смысл данным в главе II понятиям канала, волновых операторов и оператора рассеяния для многоканальной системы на примере системы трех частиц.

Так же как и в системе двух частиц, основу доказательства равенств (6.46) составляют следующие утверждения.

1. Пусть  $f(P)$  и  $g(P)$  — финитные гладкие функции, равные нулю в окрестности особых поверхностей  $P^2 = E_i$ . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} (e^{-iHt} U_0 f, L_0 e^{-i\tilde{H}_0 t} g) = (f, g). \quad (6.47)$$

2. Пусть  $f_A$  и  $g_A$  — финитные гладкие функции, причем  $E_A(p_A) = E_i$  в окрестности особых поверхностей. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} (e^{-iHt} U_A f_A, L_A e^{-i\tilde{H}_A t} g_A) = (f_A, g_A). \quad (6.48)$$

Из этих утверждений немедленно вытекают соотношения (6.46), поскольку

$$\begin{aligned} \| (U_0(t) - U_0^{(\pm)}) f \|^2 &= \\ &= 2 (\| f \|^2 - \operatorname{Re} (e^{-iHt} U_0^{(\pm)} f, L_0 e^{-i\tilde{H}_0 t} f)), \\ \| (U_A(t) - U_A^{(\pm)}) f_A \|^2 &= \\ &= 2 (\| f_A \|^2 - \operatorname{Re} (e^{-iHt} U_A^{(\pm)} f_A, L_A e^{-i\tilde{H}_A t} f_A)), \end{aligned}$$

а правые части здесь исчезают в пределе  $t \rightarrow \mp\infty$  в силу (6.47) и (6.48).

Доказательство равенств (6.47) и (6.48) может быть получено по такой же схеме, как и в случае системы двух частиц. Достаточно проверить, что выражения

$$I_A(t) = ((U_A^{(\pm)} - L_A) e^{-i\tilde{H}_A t} f_A, e^{i\tilde{H}_A t} g_A), \quad A = 0, \{\alpha, i\},$$

равны нулю в пределе  $t \rightarrow \mp\infty$ . С этой целью нужно подставить выражение для ядер волновых операторов в терминах компонент  $T$ -матрицы и перейти к сферическим

переменным интегрирования. Вычисляя асимптотику получившихся интегралов по радиальным переменным с помощью соотношений (2.44), получим искомые равенства

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} I_A(t) = 0.$$

**Заряженные частицы.** Предположим далее, что частицы имеют заряды. В этом случае обобщенные волновые операторы определяются в нестационарном подходе с помощью соотношений

$$U_A^{(\pm)} = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} L_A e^{-i\tilde{H}_A t - iW_t^{(A)}}, \quad (6.49)$$

где кулоновские фазовые операторы даются формулами

$$\begin{aligned} W_t^{(0)} &= \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{2|k_{\alpha}|} \operatorname{sign} t \ln 4P^2 |t|, \quad A = 0, \\ W_t^{(A)} &= \frac{n_{\alpha\alpha} \operatorname{sign} t}{2|p_{\alpha}|} \ln 4|p_{\alpha}|^2 |t|, \quad A \neq 0. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Мы покажем, что, как и в системе нейтральных частиц, сильные пределы (6.49) совпадают со стационарными волновыми операторами.

Это утверждение может быть доказано по такой же схеме как и аналогичное предложение в случае нейтральных частиц. Достаточно проверить справедливость следующих предложений.

Пусть  $f_0, g_0$  — гладкие финитные функции, равные нулю в окрестности особых поверхностей  $P^2 = E_i$ . Тогда имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} (e^{-iHt} U_0^{(\pm)} f_0, L_0 e^{-i\tilde{H}_0 t - iW_t^{(0)}} g_0) = (f_0, g_0). \quad (6.51)$$

Пусть, далее,  $f_A, g_A$  — финитные гладкие функции, равные нулю в окрестности особых поверхностей  $E_A(p_A) = E_i$ . Тогда выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} (e^{-iHt} U_A^{(\pm)} f_A, L_A e^{-i\tilde{H}_A t - iW_t^{(0)}} g_A) = (f_A, g_A), \quad A \neq 0. \quad (6.52)$$

Эти соотношения можно проверить совершенно так же, как это было сделано в случае системы двух частиц. Наметим схему их обоснования на примере (6.51).

При помощи соотношения

$$\exp \{iHt\} U_0^{(\pm)} = U_0^{(\pm)} \exp \{i\tilde{H}_0 t\}$$

которое вытекает из предложения 6.4, скалярное произведение в левой части (6.51) можно представить в виде

$$(U_0^{(\pm)} \exp \{-i\tilde{H}_0 t\} f, \exp \{-i\tilde{H}_0 t - iW_t^{(0)}\} g). \quad (6.53)$$

Введем в рассмотрение интеграл, аналогичный (6.44):

$$I_0(t, \varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int dP dP' \int dX e^{-\varepsilon|X|} f(P') \overline{g(P)} \Psi_0(X, P) \times \\ \times \exp \{-i(P', X) + it(P'^2 - P^2) + iW_t^{(0)}(P)\}. \quad (6.54)$$

Дальнейшие рассуждения дословно повторяют рассуждения, которые мы провели в системе двух тел. Во-первых, мы можем ограничить область интегрирования в (6.54) внешностью шара  $|X| \geq R_t$ . Затем следует проинтегрировать по угловым переменным  $\hat{P}$  и  $\hat{P}'$  и вычислить асимптотику этих интегралов при помощи формулы (6.23) и аналогичного соотношения для плоских волн  $\exp \{i(X, P')\}$ . Получим формулу вида (6.44'), но с одним отличием: вместо функции  $|x|^{-1} F(\hat{x}) \exp \{is|x| + iw_t(s)\}$  в данном случае возникает сумма по всем каналам  $\sum_A F_{A0}(\hat{y}_A) \psi_A(x_A) Q_A^{(+)}(y_A, E_A)$ ,  $E_A = s^2 - \kappa_A^2$ . Однако в пределе  $t \rightarrow -\infty$  остаются только слагаемые, содержащие произведения шестимерных сферических волн. При этом сингулярные и быстро осциллирующие функции, которые появляются после интегрирования по  $|X|$ , снова даются формулой (6.44''), где следует взять новый кулоновский параметр

$$\eta_0 = \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{2s \cos \omega_{\alpha}}, \quad \cos \omega_{\alpha} = \frac{|x_{\alpha}|}{|X|}.$$

Предел при  $t \rightarrow -\infty$  получившегося выражения может быть найден с помощью формулы (2.44). Получим искомое соотношение  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_0(t, \varepsilon) = (f, g)$ .

Итак, мы завершили исследование задач, которые представляют основной интерес с точки зрения обоснования теории рассеяния. Другой круг содержательных задач связан с применением развитых методов для вычисления физически интересных величин — амплитуд различных процессов рассеяния для трехчастичных реакций. Мы обсудим подходы к решению этих задач в главе VII.

---

## НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В настоящей главе мы опишем методы расчета волновых функций, основанные на стационарных формулировках задачи рассеяния, развитых в этой книге. Мы не ставим перед собой цель дать всесторонний обзор имеющихся подходов к решению уравнения Шредингера и компактных уравнений. Выбор материала в основном определяется нашей точкой зрения на эффективность различных методов и нашими собственными исследованиями этих вопросов.

Будем считать дальше, что потенциал взаимодействия является сферически симметричным:  $v(x) = v(r)$ ,  $r = |x|$ . К этому простому случаю могут быть сведены практически все физические задачи теории столкновений при низких энергиях. Численное решение задач рассеяния для системы нескольких частиц с такими потенциалами основано на разложении волновых функций по угловым базисам. Последние выбираются из весьма различных соображений. Однако, по существу, все базисы имеют много общего с обычным базисом сферических функций, который применяется для решения двухчастичного уравнения Шредингера. Поэтому ради полноты изложения мы напомним спачала традиционные и хорошо известные результаты о парциальном разложении двухчастичных уравнений, а затем обобщим их на трехчастичные задачи.

### § 1. Парциальные волны в системе двух тел

В этом параграфе мы отделим угловые переменные в уравнении Шредингера для волновых функций и в интегральных уравнениях для  $T$ -матрицы. Тем самым мы сведем задачу вычисления амплитуд рассеяния к решению обыкновенных дифференциальных уравнений или одномерных интегральных уравнений.

**Уравнение Шредингера.** Решение уравнения Шредингера со сферически симметричным потенциалом может

быть разложено в ряд по полиномам Лежандра:

$$\psi(x, k) = \frac{1}{4\pi qr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \psi_l(r, q). \quad (7.1)$$

Здесь через  $\theta$  обозначен угол между векторами  $k$  и  $x$  и через  $\psi_l$  — решение дифференциального уравнения ( $q = |k|$ )

$$\left( -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + v(r) \right) \psi_l(r) = q^2 \psi_l(r), \quad (7.2)$$

называемого *парциальным (радиальным) уравнением Шредингера*. Волновым функциям отвечают решения, асимптотически равные сумме уходящих и приходящих волн:

$$\begin{aligned} \psi_l \sim & \frac{1}{2} \left( \exp \left\{ -iqr + i \frac{\pi}{2}(l+1) \right\} - \right. \\ & \left. - \exp \left\{ -i \frac{\pi}{2}(l+1) + 2i\delta_l \right\} \exp \{iqr\} \right). \end{aligned} \quad (7.3)$$

При  $r = 0$  функции  $\psi_l$  должны обращаться в нуль:

$$\psi_l(0) = 0.$$

Величина  $\delta_l$  называется *парциальной фазой рассеяния*, а функция  $s_l = e^{2i\delta_l}$  — *парциальной S-матрицей*. Плоская волна  $e^{i(k_x x)}$  также может быть представлена в виде аналогичного ряда:

$$e^{i(x, k)} = \frac{1}{4\pi qr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) j_l(rk),$$

где  $j_l(rq)$  — сферические функции Бесселя:

$$j_l(rq) = \sqrt{\frac{\pi qr}{2}} J_{l+1/2}(qr),$$

асимптотически равные полусумме уходящих и приходящих волн:

$$\begin{aligned} j_l(rq) \sim & \frac{1}{2} \left( \exp \left\{ -iqr + i \frac{\pi}{2}(l+1) \right\} - \right. \\ & \left. - \exp \left\{ iqr - i \frac{\pi}{2}(l+1) \right\} \right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Сравнивая асимптотические формулы (7.3) и (7.4) с асимптотикой волновой функции (4.4), получим следую-

щее выражение для амплитуды рассеяния в терминах парциальных фаз:

$$f(\hat{x}, k) = \frac{1}{2i|k|} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta). \quad (7.5)$$

Наконец, раскладывая обе части равенства (4.18) по сферическим гармоникам, получим интегральное представление для парциальных  $S$ -матриц:

$$s_l = 1 - \frac{2l}{q} \int_0^{\infty} dr j_l(qr) v(r) \psi_l(r, q). \quad (7.6)$$

Важной характеристикой рассеяния является значение амплитуды  $f(\hat{x}, k)$  при нулевой энергии, называемое длиной рассеяния. Происхождение этого термина обязано тому факту, что амплитуда  $f(\hat{x}, 0)$  в случае рассеяния на твердой сфере равна ее радиусу. Заметим, что при  $q \rightarrow 0$  и фиксированных  $r$  сферические функции Бесселя  $j_l(qr)$  стремятся к нулю, как  $q^{l+1/2}$ . Ясно, что в пределе  $q \rightarrow 0$  такой же вид имеют и решения  $\psi_l(r, q)$ . Из интегрального представления (7.6) следует тогда, что парциальная  $S$ -матрица обращается при  $q \rightarrow 0$  в единицу:

$$s_l \sim 1 + c_l q^{2l+1}. \quad (7.7)$$

Таким образом, длина рассеяния на короткодействующем потенциале  $c_0$  равна значению парциальной амплитуды для  $l = 0$  при нулевой энергии:

$$f(\hat{x}, 0) = \lim_{q \rightarrow 0} (e^{2i\delta_0(q)} - 1) q^{-1} = c_0.$$

**Заряженные частицы.** Рассмотрим далее рассеяние кулоновских частиц. В этом случае парциальное уравнение Шредингера (7.2) допускает решение в терминах специальных функций. Регулярное решение, равное нулю в начале координат, представляется в виде

$$\psi_{l,c}(r, q) = \frac{(2qr)^{l+1}}{2} e^{iqr} f_{l,c}(r, q), \quad (7.8')$$

где функция  $f_{l,c}$ , удовлетворяющая вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$rf_{l,c}'' + 2(l+1+iqr)f_{l,c}' + 2q(i(l+1)-\eta)f_{l,c} = 0, \\ \eta = n/(2q), \quad (7.8)$$

выбирается в следующей нормировке:

$$f_{l,c}(r, q) = e^{-\frac{\pi \eta}{2}} \frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{2l+1} \Phi(i\eta + l + 1, 2l + 2, -2iqr).$$

При  $qr \rightarrow \infty$  парциальная волновая функция  $\psi_l$  асимптотически равна сумме искаженных уходящих и приходящих волн:

$$\begin{aligned} \psi_{l,c}(r, q) \sim & \exp \left\{ -iqr + i \frac{\pi}{2} (l+1) + i\eta \ln 2qr \right\} - \\ & - s_{l,c} \exp \left\{ iqr - i \frac{\pi}{2} (l+1) - i\eta \ln 2qr \right\}, \end{aligned}$$

где через  $s_{l,c}$  обозначена парциальная кулоновская матрица рассеяния

$$s_{l,c} = e^{2i\delta_{l,c}},$$

а кулоновские фазы даются равенством

$$\delta_{l,c} = \arg \Gamma(1+l+i\eta).$$

Кулоновская амплитуда рассеяния выражается через фазы с помощью представления

$$f_c(\hat{x}, k) = \frac{1}{2iq} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{2i\delta_{l,c}} P_l(\cos \theta). \quad (7.9)$$

Этот ряд сходится условно при  $\theta \neq 0$ , а в направлении рассеяния вперед он расходится, и его сумму следует понимать в смысле обобщенных функций, как это оговаривалось в § 6 главы V.

В случае, когда потенциал взаимодействия наряду с кулоновской частью содержит короткодействующие члены:  $v(r) = \frac{n}{r} + v_s(r)$ , парциальное уравнение имеет решение вида

$$\psi_l(r, q) \sim \psi_{l,c}(r, q) + \varphi_l(r, q),$$

где асимптотика функции  $\varphi_l$  содержит только уходящие волны

$$\varphi_l(r, k) \sim s_{l,cs} \exp \left\{ iqr - i \frac{\pi(l+1)}{2} - i\eta \ln 2qr \right\}.$$

Сумма амплитуд уходящих волн для кулоновской  $s_{l,c}$  и

короткодействующей  $s_{l, \text{cs}}$  частей называется *парциальной S-матрицей*:

$$s_l = s_{l, c} + s_{l, \text{cs}}.$$

Эту функцию удобно записать в виде экспоненты:

$$s_l = \exp \{2i(\delta_{l,c} + \delta_l^{\text{cs}})\},$$

где  $\delta_{l,c}$  — кулоновская фаза, а сдвиг фазы  $\delta_l^{\text{cs}}$  отвечает короткодействующей части взаимодействия. При этом полная амплитуда  $f$  равна сумме кулоновской и короткодействующей частей (5.22), где последняя задается рядом

$$f_{\text{cs}}(\hat{x}, k) = \frac{1}{2i|k|} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{2i\delta_{l,c}} (e^{2i\delta_l^{\text{cs}}} - 1) P_l(\cos \theta), \quad (7.10)$$

который, в отличие от (7.9), сходится абсолютно. Следует отметить, что величина  $e^{2i\delta_l^{\text{cs}}}$  не совпадает с парциальной амплитудой на короткодействующем потенциале  $v_s(r)$  в отсутствие кулоновского взаимодействия. Поэтому термин «короткодействующая» часть амплитуды понимается здесь условно.

**Поведение кулоновских амплитуд при низких энергиях.** При малых энергиях парциальные S-матрицы для заряженных частиц не стремятся к определенному пределу. Это обстоятельство, в частности, является причиной медленной сходимости ряда (7.9). Действительно, поведение кулоновских парциальных S-матриц при  $q \rightarrow 0$  определяется асимптотикой Г-функции при больших значениях аргумента и дается формулой

$$s_{l,c} \sim \exp \left\{ i\omega(q) - i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}\epsilon(\eta) \right\},$$

где  $\omega(q) = 2\eta(\ln|\eta| - 1)$  и  $\epsilon(\eta)$  — функция единичного скачка,  $\epsilon(\eta) = 1$  при  $\eta > 0$  и  $\epsilon(\eta) = 0$  при  $\eta < 0$ . Поведение функций  $s_{l, \text{cs}}$  может быть изучено с помощью интегральных уравнений теории возмущений (5.20). Эти функции имеют аналогичное поведение:

$$s_{l, \text{cs}} \sim \chi_c(q) \tilde{s}_l^{\text{cs}},$$

где функция  $\tilde{s}_l^{\text{cs}}$  стремится к конечному пределу при  $q \rightarrow 0$ , а сингулярный множитель  $\chi_c$  дается равенством

$$\chi_c = \exp \{i\omega(q) - 2\pi\eta\epsilon(\eta)\}.$$

При этом предел функции  $\tilde{s}_l^{\text{cs}}$  при  $q \rightarrow 0$ , вообще говоря, отличен от нуля.

Если короткодействующие потенциалы быстро убывают, то аналогично ведут себя и короткодействующие части амплитуды рассеяния, которые задаются быстро сходящимся рядом (7.9):

$$f_{\text{cs}}(\hat{x}, k) \sim \frac{1}{|k|} \chi_c \cdot \tilde{f}_s(\hat{x}, k). \quad (7.11)$$

Функцию  $\tilde{f}_s$ , имеющую конечный предел при  $|k| \rightarrow 0$ , естественно называть *кулоновской длиной рассеяния*. Она совпадает с длиной рассеяния, определяемой равенством (7.7), в отсутствие кулоновского потенциала.

Если же короткодействующая часть потенциала содержит мультипольные члены (5.25), то низкоэнергетическое поведение амплитуды  $f_{\text{cs}}(\hat{x}, k)$  уже не может быть описано простой формулой (7.11), так как ряд (7.10) сходится тогда неабсолютно и поведение его общего члена не отражает, вообще говоря, поведения суммы. В частности, можно показать, что если потенциал  $v_s(x)$  при  $|x| \rightarrow \infty$  убывает, как  $|x|^{-2}$ , т. е.  $v_s(x) \sim \frac{\mu(\hat{x})}{|x|^2} + O(e^{-\epsilon|x|})$ , то короткодействующая часть амплитуды рассеяния  $f_{\text{cs}}$  представляется в виде суммы

$$f_{\text{cs}}(\hat{x}, k) = f_d(\hat{x}, k) + \chi_c \tilde{f}_s(\hat{x}, k) |k|^{-1},$$

где, кроме сингулярного слагаемого  $\chi_c \tilde{f}_s$ , обусловленного действием потенциала на малых расстояниях, имеется дополнительная особенность  $f_d$ , отвечающая дипольному потенциалу. При этом функция  $\tilde{f}_s$  имеет конечный предел при  $|k| \rightarrow 0$  и старшему члену в ее разложении по степеням энергии можно придать смысл длины рассеяния на потенциале  $v_s(x)$ .

Приведем без вывода формулы, описывающие низкоэнергетическое поведение функции  $f_d$ .

Пусть  $\cos \theta = (\hat{k}, \hat{k}')$ , а  $\mathcal{D}_\epsilon$  — область на сфере  $|k'| = 1$ , в которой  $\cos \frac{\theta}{2} \geq \epsilon > 0$ . В этой области для функции  $f_d$  справедливо представление

$$f_d(\hat{k}', k) = (\sin \theta)^{-1} \sigma_d(|k|, \theta) b_\pm(\hat{k}', \hat{k})(1 + O(|k|)), \quad (7.12)$$

в котором сингулярный при  $|k| \rightarrow 0$  множитель  $\sigma_d$  определяется равенством

$$\sigma_d(|k|, \theta) = \frac{-\exp\{i \arg \chi_c\}}{2|k|} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{-2i\eta},$$

а функции  $b_{\pm}$  выражаются через угловую часть дипольного потенциала:

$$b_{\pm}(\hat{k}', \hat{k}) = \int_{l_{\pm}} d\hat{x} \mu(\hat{x}) \mp \theta \frac{\mu(\mp \hat{k}) + \mu(\pm \hat{k}')}{2}.$$

Здесь знак плюс (минус) соответствует случаю кулоновского отталкивания (притяжения), а  $l_+(l_-)$  — единичная полуокружность в плоскости векторов  $k'$  и  $k$ , на которой  $\langle \hat{k} - \hat{k}', \hat{x} \rangle \leqslant 0$  ( $\langle \hat{k} - \hat{k}', \hat{x} \rangle > 0$ ).

При  $\hat{k}' = -\hat{k}$ , т. е. в направлении рассеяния назад, функция  $f_d$  имеет более сильную особенность при нулевой энергии по сравнению с рассеянием на другие углы:

$$f_d(-\hat{k}, k) = e^{\pm i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi |\eta|} \sigma_d(|k|, \pi) \hat{b}_{\pm}(\hat{k}); \quad (7.13)$$

здесь функция  $\hat{b}_{\pm}$  представляется в виде

$$\hat{b}_{\pm}(\hat{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_{\pm}} d\hat{x} \mu(\hat{x}) (1 - (\hat{k}, \hat{x})^2)^{-1/2} \mp \frac{\pi \mu(\mp \hat{k})}{2},$$

где  $S_+(S_-)$  — единичная полусфера, на которой  $(\hat{x}, \hat{k}) > 0$  ( $(\hat{x}, \hat{k}) < 0$ ).

Переходный режим асимптотики функции  $f_d$  в окрестности направления рассеяния назад описывается представлением

$$f_d(\hat{k}', k) = \\ = (\sin \theta)^{-1} \sigma_d(|k|, \theta) C_{\pm}(\hat{k}', \hat{k}) \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{4}} \Phi_{\mp} \left( \frac{\pi^2}{4} \eta \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (7.14)$$

в котором  $C_{\pm}(\hat{k}', k) = b_{\pm}(\hat{k}', \hat{k})$  при  $\hat{k}' \neq -\hat{k}$ ,  $C_{\pm}(-\hat{k}, \hat{k}) = 2\hat{b}_{\pm}(\hat{k})$ ,  $\Phi_+$  — интеграл Френеля  $2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2} dt$  и  $\Phi_-(t) = \Phi^*(t)$ . Между угловыми особенностями, которые мы описали в § 1 главы V, и низкоэнергетическими особенностями имеется тесная связь. Именно: асимптотика при

$|k| \rightarrow 0$  угловой особенности (5.26), за вычетом чисто кулоновской ее части  $f_c$ , в старшем порядке совпадает с угловой сингулярностью энергетической особенности  $f_a$ :

$$f_a(\hat{k}', k) |_{\hat{k}' \rightarrow \hat{k}} \sim (f(\hat{k}', k) - f_c(\hat{k}', k)) |_{k^2 \rightarrow 0}.$$

При этом дипольная часть волновой функции  $\psi(x, k)$ , определенная равенством (5.25), учитывает как все угловые особенности амплитуды рассеяния, так и старший член энергетической особенности, порожденной дипольным взаимодействием.

Коротко обсудим некоторые вопросы, возникающие при вычислении амплитуды рассеяния на основе парциальных разложений волновых функций. При каждом заданном значении момента  $l$  численное решение парциальных уравнений получить нетрудно. Например, можно использовать конечно-разностную аппроксимацию дифференциальных операторов. В результате задача сводится к обращению разреженной матрицы, в которой отличными от нуля будут лишь матричные элементы на главной диагонали и на примыкающих к ней диагоналях.

Однако метод парциальных разложений является эффективным лишь в том случае, если парциальный ряд сходится достаточно быстро. Если потенциалы быстро убывают, фазы рассеяния, согласно (7.7), стремятся к нулю при  $q \rightarrow 0$ :

$$\delta_l(q) \sim q^{2l+1}, \quad (7.15)$$

и поэтому при низких энергиях достаточно учитывать лишь несколько парциальных волн, чтобы получить амплитуду рассеяния с высокой точностью.

В отличие от нейтральных частиц, парциальные ряды в случае заряженных частиц сходятся медленно. Поэтому амплитуду рассеяния следует определять в виде суммы

$$f = f_c + f_{cs}^{(N)}, \quad (7.16)$$

где кулоновская амплитуда известна в явном виде, а слагаемое  $f_{cs}^{(N)}$  задается разложением (7.10) с конечным числом  $N$  членов. В свою очередь парциальные амплитуды  $s_{l, cs}$  вычисляются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений (7.8). Можно показать, что эти амплитуды быстро стремятся к нулю при больших  $l$ , так что для достижения высокой точности достаточно брать небольшое число членов  $N$ , несмотря на то что при  $q \rightarrow$

$\rightarrow 0$  парциальные амплитуды не имеют дополнительных убывающих множителей типа (7.15). Отметим, что если потенциал содержит дипольные слагаемые, то в формуле (7.16) целесообразно явно выделять также и сингулярные члены  $f_d$ , обусловленные дипольным взаимодействием.

**Парциальные  $T$ -матрицы.** Рассмотрим далее методы вычисления амплитуд на основе интегральных уравнений в импульсном пространстве. В отличие от дифференциальных уравнений, интегральные уравнения (3.4) плохо приспособлены для вычислений с локальными потенциалами. Они имеют сингулярные ядра, а отвечающие им матрицы, которые получаются после перехода к конечно-разностной аппроксимации, не являются разреженными. Поэтому локальный потенциал обычно аппроксимируют сепарабельными потенциалами, которые представляют собой интегральные операторы с ядрами

$$v(k, k') = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j(k) \overline{\varphi_j(k')} \quad (7.17)$$

При этом уравнение теории возмущений (3.4) становится уравнением с вырожденным ядром, и его решение сводится к обращению матрицы  $N \times N$ . В частности, в случае сепарабельного потенциала первого ранга ядро  $T$ -матрицы имеет простой вид:

$$t(k, k', z) = \frac{\varphi(k) \overline{\varphi(k')}}{\Delta(z)}, \quad (7.18)$$

где

$$\Delta(z) = \lambda^{-1} + \int dk \frac{|\varphi(k)|^2}{k^2 - z}. \quad (7.18')$$

Заметим, что функция  $\Delta(k^2 + i0)$  монотонна. Поэтому она не может иметь больше одного корня, и, следовательно, оператор энергии с сепарабельным потенциалом ранга 1 может обладать не более чем одним связанным состоянием. При этом соответствующий форм-фактор равен функции  $\varphi(k)$ , а нормированная собственная функция  $\psi(k)$  дается равенством

$$\psi(k) = \frac{\varphi(k)}{k^2 + \chi^2},$$

где  $-\chi^2$  — энергия связи.

В общем случае потенциала (7.18)  $T$ -матрица имеет вид суммы

$$t(k, k', z) = \sum_{i,j} \lambda_j \varphi_i(k) \overline{\varphi_j(k')} (\Delta^{-1})_{ij}, \quad (7.19)$$

где через  $\Delta_{ij}$  обозначена матрица  $N \times N$ , задаваемая равенством

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{\lambda_i} \delta_{ij} + \int dk \frac{\overline{\varphi_i(k)} \varphi_j(k)}{k^2 - z}.$$

Ядро  $T$ -матрицы, как и волновая функция, может быть разложено в ряд по полиномам Лежандра:

$$t(k, k', z) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) t_l(q, q', z) P_l(\cos \theta), \quad (7.20)$$

$$\cos \theta = (\hat{k}, \hat{k}'), \quad q = |k|, \quad q' = |k'|,$$

причем парциальные  $T$ -матрицы на энергетической поверхности совпадают с парциальными  $S$ -матрицами:

$$t_l(q, q, q^2 + i0) = (2iq)^{-1} (e^{2i\delta_l} - 1);$$

$t_l(q, q', z)$  удовлетворяют интегральным уравнениям

$$t_l(q, q', z) = v_l(q, q') - \int_0^{\infty} \frac{v_l(q, q'')}{q''^2 - z} t_l(q'', q', z) dq'', \quad (7.21)$$

которые могут быть решены явно, если заменить потенциалы  $v_l$  сепарабельными приближениями (7.17). Например, в случае сферически симметричных сепарабельных потенциалов ранга 1

$$v_l(q, q') = \lambda \varphi(q) \varphi^*(q')$$

ядро  $T$ -матрицы задается равенством (7.18), где интеграл по  $k$  следует заменить одномерным интегралом относительно  $q$  по промежутку  $[0, \infty)$ .

Если частицы заряжены, то  $T$ -матрицу для потенциалов, равных сумме кулоновского и сепарабельного, можно представить в виде суммы

$$t(z) = t_c(z) + t_{cs}(z), \quad (7.22)$$

где кулоновская  $T$ -матрица известна в явном виде (3.121), а дополнительное слагаемое  $t_{cs}$ , обусловленное сепарабельным взаимодействием, задается интегральным пред-

ставлением. Если ранг сепарабельного потенциала равен единице, то справедливо равенство

$$t_{cs}(k, k', z) = \frac{g_{cs}(k) \overline{g_{cs}(k')}}{\Delta_{cs}(z)}, \quad (7.22')$$

где величина  $\Delta_{cs}$  определяется аналогично (7.18'):

$$\Delta_{cs}(z) = \lambda^{-1} + \int dk dk' r_c(k, k', z) \varphi(k') \varphi^*(k),$$

а  $g_{cs}$  — модифицированный кулоновский форм-фактор:

$$g_{cs}(k) = \varphi(k) + \int \frac{t_c(k, q, z) \varphi(q)}{q^2 - z} dq. \quad (7.22'')$$

В общем случае ядро  $t_{cs}$  задается равенством типа (7.19), где функции  $\varphi_i$  следует заменить кулоновскими модифицированными форм-факторами  $g_{cs}^{(i)}$ , которые выражаются через  $\varphi_i$  формулами (7.22'').

В ряде случаев, например, когда функции  $\varphi_i(k)$  являются рациональными, встречающиеся здесь интегралы можно вычислить явно. Мы, однако, не будем проводить здесь дальнейшие преобразования формул (7.22'').

Таким образом, вычисление амплитуды рассеяния для локальных потенциалов в этом подходе может быть сведено к решению совокупности независимых систем алгебраических уравнений конечного ранга. Мы не будем обсуждать способы аппроксимации локальных потенциалов сепарабельными. Отметим лишь, что эффективность метода определяется как числом членов в разложении потенциала

$$v(k - k') \sim \sum_i \lambda_i \varphi_i(k) \overline{\varphi_i(k')},$$

которое передает его поведение с хорошей точностью, так и числом парциальных волн, которое необходимо удерживать в разложении (7.20). Например, в задачах ядерной физики сходимость этих разложений оказывается достаточно быстрой.

## § 2. Парциальные уравнения для компонент

В этом параграфе мы рассмотрим систему трех тел. Мы отделим угловые переменные в уравнениях для компонент волновых функций и опишем методы решения парциальных уравнений. Имея в виду приложения этих

методов в ядерной физике, мы рассмотрим системы тождественных частиц. При этом, чтобы не перегружать формулы индексами, мы положим спин частиц равным нулю. Это означает, что волновые функции должны быть симметричными по отношению к перестановкам частиц. Все построения, однако, могут быть по стандартным схемам перенесены на случай частиц с произвольным спином и изоспином.

Отметим, что уравнения для компонент в дифференциальной форме более удобны, чем уравнения Шредингера, с точки зрения численного решения задачи рассеяния. Это связано с тем, что, как мы отмечали в § 5 главы IV, асимптотические граничные условия для компонент  $\Phi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$  задаются в терминах фиксированной пары якобиевых координат  $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ , тогда как для описания асимптотики волновой функции  $\Psi(X)$  в областях  $\Omega_\alpha$  и  $\Omega_\beta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , необходимо использовать все пары якобиевых координат. Последнее обстоятельство делает практически невозможным корректное задание асимптотических условий при численных решении задачи рассеяния.

**Бисферический базис.** Напомним, что компоненты волновых функций подчиняются системе дифференциальных уравнений

$$(-\Delta + v_\alpha(x_\alpha) - E)\Phi_\alpha(X) = -v_\alpha(x_\alpha) \sum_{\beta \neq \alpha} \Phi_\beta(X), \quad (7.23)$$

а волновая функция равна их сумме

$$\Psi(X) = \sum_\alpha \Phi_\alpha(X).$$

Мы будем рассматривать только процессы рассеяния частицы на связанный паре  $(2 \rightarrow 2)$ ,  $(2 \rightarrow 3)$ . Этому случаю отвечает решение системы (7.23) в классе функций  $B_{E_A}(\hat{p}_A)$ , описанных в § 3 главы IV.

Тождественность частиц приводит к простой связи между компонентами  $\Phi_\alpha$ . Обозначим через  $P^\pm$  операторы циклической перестановки частиц, действие которых задается соотношениями

$$P^+(123) = (312), \quad P^-(123) = (231).$$

Тогда  $\Phi_2 = P^+ \Phi_1$ ,  $\Phi_3 = P^- \Phi_1$ , и, следовательно, разложение волновой функции на компоненты принимает вид

$$\Psi(X) = (I + P^+ + P^-)\Phi(X), \quad (7.24)$$

где  $\Phi \equiv \Phi_1$ . Отметим, что это представление обеспечивает симметричность волновой функции относительно перестановки любых двух частиц.

Отделяя начальное состояние  $\chi_A$ ,  $\Phi = \chi_A + \tilde{\Phi}$ , сведем систему уравнений (7.23) к одному неоднородному уравнению для функции  $\tilde{\Phi}$ :

$$(-\Delta + v(x) - E)\tilde{\Phi}(X) = -v(x)(P^+ + P^-)(\chi_A + \tilde{\Phi}). \quad (7.25)$$

Следующим этапом является угловой анализ этого уравнения.

Пусть  $\vec{l}$  и  $\vec{\lambda}$  — операторы орбитального момента пары частиц (23) и орбитального момента частицы 1 относительно центра масс пары (23) соответственно:

$$\vec{l} = -i[x_1, \nabla_{x_1}], \quad \vec{\lambda} = -i[y_1, \nabla_{y_1}].$$

Собственными функциями этих операторов являются сферические функции  $Y_l^{m_l}(\hat{x})$  и  $Y_\lambda^{m_\lambda}(\hat{y})$ .

Переход в представление полного орбитального момента  $\vec{L} = \vec{l} + \vec{\lambda}$  осуществляется по правилу сложения моментов

$$Y_{\lambda l L}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{m_\lambda + m_l = M} \langle lm_l \lambda m_\lambda | LM \rangle Y_l^{m_l}(\hat{x}) Y_\lambda^{m_\lambda}(\hat{y}), \quad (7.26)$$

где через  $\langle lm_l \lambda m_\lambda | LM \rangle$  обозначены коэффициенты Клебша — Гордана. Функции  $Y_{aL}$ , где через  $a$  обозначен мультииндекс,  $a = \{l, \lambda\}$ , образуют базис в гильбертовом пространстве функций на четырехмерном торе  $S^{(2)} \times S^{(2)}$ , называемый *бисферическим*.

Пусть начальное состояние пары частиц описывается собственной функцией  $\psi_l(r)$  с орбитальным моментом  $l$ . Тогда кластерная плоская волна может быть представлена в виде

$$\chi(X) = \frac{4\pi}{|p|} \sum'_{\lambda, L} i^\lambda Y_\lambda^{m_\lambda}(\hat{p}) \mathcal{Y}_{aL}(\hat{x}, \hat{y}) \chi_{aL}, \quad (7.27)$$

где суммирование ведется по  $\lambda$  и  $L$  при фиксированном  $l$  и через  $\chi_{aL}$  обозначена парциальная кластерная волна:

$$\chi_{aL} = j_\lambda(|p| |y|) \psi_l(|x|). \quad (7.27')$$

Соответственно компонента  $\Phi(x, y)$  может быть разложена в ряд:

$$\Phi(x, y) = \sum_{a,L} \frac{\Phi_{aL}(|x|, |y|)}{|x| |y|} \mathcal{Y}_{aL}(\hat{x}, \hat{y}). \quad (7.28)$$

Чтобы провести угловой анализ уравнений (7.25), вычислим матричные элементы операторов  $P^\pm$  в базисе  $\{\mathcal{Y}_{aL}\}$ . Операторы  $P^\pm$  при действии на функцию координат изменяют значения аргументов:

$$P^+ \frac{\Phi_{aL}(|x|, |y|)}{|x| |y|} \mathcal{Y}_{aL}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\Phi_{aL}(|x'|, |y'|)}{|x'| |y'|} \mathcal{Y}_{aL}(\hat{x}', \hat{y}'),$$

где переменные  $x'$ ,  $y'$  связаны с исходными значениями  $x$ ,  $y$  равенствами

$$x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \quad (7.29)$$

в которых множители  $-1/2$  и  $\sqrt{3}/2$  представляют собой коэффициенты  $c_{\alpha\beta}$  и  $s_{\alpha\beta}$  для случая равных масс.

Разлагая правую часть приведенного выше соотношения для  $P^+$  по угловым функциям  $\mathcal{Y}_{aL}(\hat{x}, \hat{y})$ , получим представление

$$\begin{aligned} P^+ \frac{\Phi_{aL}(|x|, |y|)}{|x| |y|} \mathcal{Y}_{aL}(\hat{x}, \hat{y}) &= \\ &= \sum_{a'} \frac{1}{2} \frac{\mathcal{Y}_{a'L}(\hat{x}, \hat{y})}{|x| |y|} \int_{-1}^1 du h_{a'a}^L(u) \Phi_{aL}(|x'|, |y'|), \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$u = (\hat{x}, \hat{y}),$$

и теперь задача заключается в вычислении весовых функций  $h_{a'a}^L$ .

Согласно (7.29) радиальная часть  $\Phi_{aL}(|x'|, |y'|)$  зависит от направлений векторов  $x$  и  $y$  лишь через скалярное произведение  $(x, y)$ , и, следовательно, разлагая по полиномам Лежандра, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{aL}(|x'|, |y'|)}{|x'|^{l+1} |y'|^{\lambda+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 4\pi \sqrt{2k+1} \mathcal{Y}_{hk0}(\hat{x}, \hat{y}) \times \\ &\times \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du P_k(u) \frac{\Phi_{aL}(|x'|, |y'|)}{|x'|^{l+1} |y'|^{\lambda+1}}. \end{aligned}$$

С помощью легко проверяемого соотношения

$$\begin{aligned} |\alpha x + \beta y|^l Y_l(\alpha x + \beta y) = \\ = \sum_{l_1+l_2=l} (\alpha|x|)^{l_1} (\beta|y|)^{l_2} \left( \frac{4\pi (2l+1)!}{(2l_1+1)! (2l_2+1)!} \right)^{1/2} \mathcal{Y}_{l_1 l_2 l}(\hat{x}, \hat{y}) \end{aligned}$$

получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} & \mathcal{Y}_{aL}(\hat{x}', \hat{y}') |x'|^l |y'|^\lambda = \\ & = \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2=\lambda, \\ l_1+l_2=l}} D_{\lambda_1 \lambda_2} \widetilde{D}_{l_1 l_2} \sum_{\lambda' l'} [(2\lambda+1)(2l+1)(2\lambda'+1)(2l'+1)]^{1/2} \times \\ & \times \begin{Bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \\ l_1 & l_2 & l \\ \lambda' & l' & L \end{Bmatrix} |y|^{\lambda_1+l_1} |x|^{\lambda_2+l_2} [\mathcal{Y}_{\lambda_1 l_1 \lambda'}(\hat{y}, \hat{y}) \otimes \mathcal{Y}_{\lambda_2 l_2 l'}(\hat{x}, x)]_L, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $D_{\lambda_1 \lambda_2} \widetilde{D}_{l_1 l_2}$  имеют вид

$$\begin{aligned} D_{\lambda_1 \lambda_2} \widetilde{D}_{l_1 l_2} = 4\pi \left[ \frac{(2\lambda+1)! (2l+1)!}{(2\lambda_1+1)! (2\lambda_2+1)! (2l_1+1)! (2l_2+1)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{(-1)^{\lambda+l_2} (\sqrt{3})^{\lambda_2+l_1}}{2^{\lambda+l}}. \quad (7.31) \end{aligned}$$

Наконец, объединяя найденную угловую функцию и функцию  $\mathcal{Y}_{hko}(\hat{x}, \hat{y})$  в угловую функцию  $\mathcal{Y}_{\lambda'' l'' L}(\hat{x}, \hat{y})$ , получим следующее представление для оператора  $P^+$ :

$$\begin{aligned} P^+ \frac{\Phi_{aL}(|x|, |y|)}{|x||y|} \mathcal{Y}_{aL}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{(-1)^{l+\lambda+L}}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sqrt{2k+1} \times \\ \times \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_k(u) \frac{\Phi_{aL}(|x'|, |y'|)}{|x'|^{l+1} |y'|^{\lambda+1}} du \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2=\lambda, \\ l_1+l_2=l}} D_{\lambda_1 \lambda_2} \widetilde{D}_{l_1 l_2} \times \\ \times \sum_{\lambda' l'} [(2\lambda+1)(2l+1)(2\lambda_1+1)(2l_1+1)(2\lambda_2+1) \times \\ \times (2l_2+1)]^{1/2} |y|^{\lambda_1+l_1} |x|^{\lambda_2+l_2} \begin{Bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \\ l_1 & l_2 & l \\ \lambda' & l' & L \end{Bmatrix} \langle \lambda_1 0 l_1 0 | \lambda' 0 \rangle \times \\ \times \langle \lambda_2 0 l_2 0 | l' 0 \rangle \sum_{\lambda'' l''} \sqrt{(2\lambda'+1)(2l'+1)(2k+1)} \times \\ \times \langle k 0 \lambda' 0 | \lambda'' 0 \rangle \langle k 0 l' 0 | l'' 0 \rangle \begin{Bmatrix} l'' & \lambda'' & L \\ \lambda' & l' & k \end{Bmatrix} \mathcal{Y}_{\lambda'' l'' L}(\hat{x}, \hat{y}). \end{aligned}$$

Сравнивая с соотношением (7.30), определяющим ядро  $h_{a'a}^L(|x|, |y|, u)$ , находим

$$\begin{aligned}
 h_{a''a}^L &= \frac{|x| |y|}{|x'| |y'|} (-1)^{l+L} \frac{(2\lambda + 1)(2l + 1)}{2^{\lambda+l}} \times \\
 &\quad \times [(2\lambda)! (2l)! (2\lambda'' + 1) (2l'' + 1)]^{1/2} \times \\
 &\quad \times \sum_{k=0}^{k_{\max}} (-1)^k (2k + 1) P_k(u) \sum_{\substack{\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda, \\ l_1 + l_2 = l}} \frac{|y|^{\lambda_1 + l_1} |x|^{\lambda_2 + l_2}}{|y'|^\lambda |x'|^l} \times \\
 &\quad \times (-1)^{l_2} (\sqrt{3})^{\lambda_2 + l_1} [(2\lambda_1)! (2\lambda_2)! (2l_1)! (2l_2)!]^{-1/2} \times \\
 &\quad \times \sum_{\lambda' l'} (2\lambda' + 1) (2l' + 1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & l_1 & \lambda' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & l_2 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} k & \lambda' & \lambda'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} l'' & \lambda'' & L \\ \lambda' & l' & k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \\ l_1 & l_2 & l \\ \lambda' & l' & L \end{matrix} \right\}, \quad (7.32) \\
 k_{\max} &= \frac{1}{2} (\lambda'' + l'' + \lambda + l).
 \end{aligned}$$

Действие оператора  $P^-$  определяется формулой (7.30), в которой ядро  $h_{a'a}^L$  должно быть заменено на  $(-1)^{\lambda+\lambda'} h_{a'a}^L$ .

Далее заметим, что потенциал  $v(x)$  диагонален в базисе  $\{\mathcal{Y}_{aL}\}$ :

$$\langle a'L' | v | aL \rangle = \delta_{L'L} \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{l'l} v_l(r).$$

Введем следующее обозначение для центробежного потенциала:

$$v_{aL}^{(\text{orb})} = \frac{l(l+1)}{|x|^2} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{|y|^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных элементах, получим для радиальных компонент волновых функций бесконечную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 &\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + v_{aL}^{(\text{orb})} - E \right) \widetilde{\Phi}_{aL}(|x|, |y|) = \\
 &= -v_l(|x|) \left( \widetilde{\Phi}_{aL}(|x|, |y|) + \frac{1}{2} \sum_{a''}^1 \int_{-1}^1 (1 + (-1)^{\lambda+\lambda''}) \times \right. \\
 &\quad \times h_{aa''}^L(u) (\widetilde{\Phi}_{a''L}(|x'|, |y'|) + \chi_{a''L}(|x'|, |y'|)) du \left. \right). \quad (7.33)
 \end{aligned}$$

Радиальные компоненты  $\tilde{\Phi}_{aL}$  определены в первом квадранте  $x > 0, y > 0$  на двумерной плоскости и в силу (7.28) равны нулю на осях координат:

$$\tilde{\Phi}_{aL}|_{x=0} = \tilde{\Phi}_{aL}|_{y=0} = 0.$$

Чтобы найти решение этой системы, соответствующее компонентам волновой функции, необходимо присоединить к ней асимптотические граничные условия. С этой целью разложим асимптотические представления (4.25)–(4.28) для компонент класса  $B_{EA}(\hat{p}_A)$  по бисферическому базису и учтем, что в силу пространственной изотропии амплитуды  $F_{BA}$  и  $F_{0A}$  не зависят от проекции орбитального момента. Получим асимптотические равенства

$$\tilde{\Phi}_{aL}(|x|, |y|) \sim f_{aa_0}^L \chi_{aL}^{(+)}(|x|, |y|) + A_{aa_0}^L(\theta) \frac{e^{i\sqrt{E}\rho}}{\rho^{1/2}}, \quad (7.34)$$

где  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $\theta = \arctg(|y|/|x|)$ . Через  $\chi_{aL}^{(+)}$  обозначена уходящая кластерная волна, которая определяется соотношением (7.27), где сферическая функция Бесселя  $j_\lambda(|q||y|)$  заменена сферической функцией Ханкеля

$$h_\lambda(|q||y|) = (\pi|q||y|/2)^{1/2} H_{\lambda+1/2}^{(1)}(|q||y|).$$

Коэффициенты  $f_{aa_0}^L$  называются *парциальными амплитудами*, а выражения  $S_{aa_0}^L = \delta_{aa_0} + 2if_{aa_0}^L$  — *парциальными S-матрицами*. Они описывают процессы упругого рассеяния и внутренней перестройки. Физические амплитуды  $F(\hat{y}, p_A)$ , согласно (7.34) и (7.28), выражаются через парциальные равенствами

$$F(\hat{y}, p_A) = \frac{4\pi}{|\hat{p}_A|} \sum_{a, a_0, L} f_{aa_0}^L \mathcal{Z}_{a_0 L}^*(\hat{p}_A) \mathcal{Z}_{a L}(\hat{y}), \quad (7.34')$$

где

$$\mathcal{Z}_{a L}(\hat{y}) = i^{-\lambda} \langle lm_l \lambda m_\lambda | LM \rangle Y_\lambda^{m_\lambda}(\hat{y}).$$

Функции  $A_{aL}(\theta)$ , называемые *парциальными амплитудами раз渲а*, определяют компоненту полной амплитуды

$F_1(\hat{X}, p_A)$  с помощью соотношения

$$F_1(\hat{X}, p_A) = \frac{E_A}{|p_A|} \sum_{a, a_0, L} \frac{A_{aa_0}^L(\theta)}{\sin \theta \cos \theta} \mathcal{Y}_{aL}(\hat{x}, \hat{y}) \mathcal{Z}_{a_0 L}^*(\hat{p}_A). \quad (7.35)$$

Согласно (7.24) амплитуда развала равна сумме компонент:

$$F_0(\hat{X}, P) = (1 + P^+ + P^-) F_1(\hat{X}, P). \quad (7.35')$$

Эту амплитуду можно также задать в виде ряда (7.35), если воспользоваться соотношениями (7.30). При этом вместо функций  $A_{aL}$  в правую часть (7.35) следует подставить выражение

$$\mathcal{A}_{aa_0}^L(\theta) = A_{aa_0}^L(\theta) + \int_{-1}^1 du \sum_{a'} h_{aa'}^L(\theta, u) A_{a'a_0}^L(\theta'),$$

где  $\theta' = \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'}$ .

Отметим, что амплитуды  $f_{aa_0}^L$  и  $\mathcal{A}_{aa_0}^L$  связаны между собой соотношением унитарности

$$1 = \sum_a |S_{aa_0}^L|^2 + \frac{4E_A(p_A)}{|p_A|} \int_0^{\pi/2} d\theta \sum_a \mathcal{A}_{aa_0}^{L*}(\theta) A_{aa_0}^L(\theta).$$

Таким образом, мы свели исходное дифференциальное уравнение в шестимерном пространстве (7.25) к бесконечной системе интегро-дифференциальных уравнений (7.33), где дифференциальный оператор действует по двум переменным, а интегрирование ведется по дугам окружностей с центром в начале координат. Чтобы проводить численные расчеты на основе такой системы, необходимо обрезать ее и рассматривать системы конечного ранга.

Это означает, что мы заменяем исходную задачу с потенциалом  $v(r)$  модельной задачей, в которой взаимодействие представляет собой матричный интегральный оператор по угловым переменным. При этом матричные элементы  $v_{ll'}$  обращаются в нуль, начиная с некоторого значения двухчастичного орбитального момента. Эффективность такого приближения, конечно, должна проверяться конкретными расчетами. Заметим, однако, что число парциальных волн, в которых действует потенциал, естественно брать равным числу слагаемых, дающих нетривиальный вклад в раз-

ложение (7.5) двухчастичной амплитуды рассеяния. Как мы отмечали, это число при низких энергиях является небольшим.

В результате для каждого полного момента  $L$  мы получим систему уравнений, ранг которой равен числу парциальных волн, где эффективно действует потенциал  $v_{ll}$ . Для решения такой системы можно применить хорошо разработанные численные методы. Мы опишем один из таких методов, основанный на конечно-разностной аппроксимации дифференциальных и интегральных операторов.

**Численное решение задачи рассеяния.** Ради простоты сделаем обычное в задачах ядерной физики предположение о том, что частицы взаимодействуют только в  $s$ -состоянии ( $l = 0$ ). В этом случае отличными от нуля оказываются лишь матричные элементы вида  $\langle 0\lambda L | v | 0\lambda L \rangle = v_0(x)$ . Последнее означает, что в разложении (7.28) можно ограничиться суммированием только по тем индексам  $a = \{l, \lambda\}$ , у которых  $l = 0$ :

$$\Phi(|x|, |y|) = \sum_L \frac{\Phi_L(|x|, |y|)}{|x||y|} \mathcal{Y}_{L0L}(\hat{x}, \hat{y}). \quad (7.36)$$

Мы предположим также, что двухчастичные подсистемы имеют по одному связанному состоянию  $\phi(r) = r^{-1}\varphi(r)$  с энергией  $-\kappa^2$ . В этом случае система уравнений (7.33) сводится к совокупности независимых интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - v(x) - \frac{L(L+1)}{y^2} - E \right) \Phi_L(x, y) = \\ & = v(x) \int_{-1}^1 du h^L(x, y, u) (\Phi_L(x', y') + \chi_L(x', y')); \\ & x, y > 0. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Геометрическая функция  $h^L \equiv h_{0L,0L}^L$ , вычисленная по формуле (7.32), может быть записана в виде

$$\begin{aligned} h^L &= \frac{xy}{x'y'} \frac{4}{\sqrt{3}} \left( \frac{-1}{2 \sin \theta'} \right)^L \times \\ &\times \sum_{k=0}^L \frac{L!}{k!(L-k)!} P_k(u) (\sqrt{3} \cos \theta)^k (\sin \theta)^{L-k}, \end{aligned} \quad (7.38)$$

где  $u = -(\cos 2\theta + 2 \cos 2\theta')/(\sqrt{3} \sin \theta)$ ,

$$x' = \frac{1}{2}(x^2 - 2\sqrt{3}xyu + 3y^2)^{1/2},$$

$$y' = \frac{1}{2}(3x^2 + 2\sqrt{3}xyt + y^2)^{1/2}.$$

Для неизвестных функций  $\Phi_L(x, y)$  должны выполняться граничные условия

$$\Phi_L(x, y)|_{x=0} = \Phi_L(x, y)|_{y=0} = 0 \quad (7.39)$$

и следующие асимптотические условия:

$$\begin{aligned} \Phi_L(x, y) \sim & \lambda_L \psi(x) \exp\left\{iqy + i\pi \frac{L+1}{2}\right\} + \\ & + A_L \left(\frac{x}{y}\right) \frac{\exp\{i\sqrt{E}\rho\}}{\rho^{1/2}}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Коэффициенты  $\lambda_L$  обычно записывают в виде  $\lambda_L = -\frac{1}{2i}(\eta_L e^{2i\delta_L} - 1)$ , где  $\eta_L$  называют *коэффициентом поглощения*, а  $\delta_L$  — *фазовым сдвигом*. При этом ниже порога развала,  $E < 0$ , коэффициент поглощения равен единице, а выше порога он меньше единицы. Отметим, что амплитуда упругого рассеяния в рассматриваемом случае выражается через парциальные амплитуды формулой, аналогичной (7.5):

$$F(\hat{y}, p_A) = \frac{1}{2i|p_A|} \sum_L (2L+1) \lambda_L P_L(\cos \theta), \quad (7.41)$$

$$\cos \theta = (\hat{y}, \hat{p}_A).$$

Чтобы вычислить  $\Phi_L(x, y)$ , удобно использовать конечно-разностную аппроксимацию уравнения (7.37) в полярных координатах  $\rho = (x + y^2)^{1/2}$ ,  $\theta = \arctg \frac{y}{x}$ . Этот выбор определяется прежде всего тем, что в полярных координатах наиболее естественно выглядит интеграл в правой части (7.37). Пусть сетка, которая определяет конечно-разностную аппроксимацию, имеет  $N_\theta$  узлов на дуге  $\rho = \text{const}$  и  $N_\rho + 1$  узлов на луче  $\theta = \text{const}$  (рис. 20). Обозначим через  $\chi$ ,  $\chi = \{\chi_1, \dots, \chi_{N_m}\}$ , вектор, отвечающий значениям функции  $\Phi_L$  в узлах сетки:

$$\chi \in \mathbf{R}^{N_m}, \quad N_m = (N_\rho + 1) N_\theta. \quad (7.42')$$

Уравнение (7.37) после перехода к конечным разностям можно записать в матричном виде:

$$(B - E)\chi = \tilde{\chi}_0. \quad (7.42)$$

Здесь  $B$  — линейный оператор в конечномерном векторном пространстве  $\mathbf{R}^{N_m}$ , соответствующий лапласиану и интегралу в (7.37). Через  $\chi_0$  обозначен вектор, который отвечает значениям неоднородного члена (7.37) в узлах сетки. Проблема решения (7.42) сводится к определению вектора  $\chi$  по заданному  $\tilde{\chi}_0$ .

Для описания вектора  $\chi$  удобно использовать следующую нумерацию узлов сетки  $i$ , соответственно, компонент  $\chi_i$ . Пусть  $\tilde{\chi}_j$  — вектор из пространства  $\mathbf{R}^{N_{\theta j}}$ , отвечающий значениям функции  $\Phi_L$  на  $j$ -й дуге  $\rho = \rho_j$ . Компоненты этого вектора  $\chi_k^j$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\chi_k^j &= \Phi_L(\rho_j \cos \theta_k, \rho_j \sin \theta_k), \\ j &= 1, 2, \dots, N_{\theta j}, \quad 0 \leq \theta_j \leq \pi/2.\end{aligned}$$

Нумерация компонент ведется в порядке возрастания угла  $\theta$ . Пространство  $\mathbf{R}^{N_m}$  может быть записано в виде ортогональной суммы

$$\mathbf{R}^{N_m} = \sum_{j=1}^{N_\theta} \oplus \mathbf{R}^{N_{\theta j}}, \quad \chi = \{\hat{\chi}^1, \hat{\chi}^2, \dots, \hat{\chi}^{N_\theta}\}. \quad (7.43)$$

В этом представлении уравнение в конечных разностях можно преобразовать к виду

$$L_j \hat{\chi}^{j-1} + M_j \hat{\chi}^j + R_j \hat{\chi}^{j+1} = I_j, \quad (7.44)$$

где операторы  $L_j$ ,  $M_j$  и  $R_j$  действуют из подпространств  $\mathbf{R}^{N_{\theta j-1}}$ ,  $\mathbf{R}^{N_{\theta j}}$  и  $\mathbf{R}^{N_{\theta j+1}}$  в  $\mathbf{R}^{N_{\theta j}}$  соответственно. Эти операторы реализуются как вещественные квадратные матрицы ранга  $N_{\theta j}$ . Матрицы  $L_j$  и  $R_j$  являются диагональ-

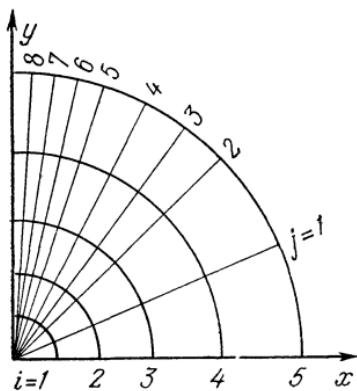


Рис. 20

ными. Они порождаются радиальной частью оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (7.45)$$

которая после перехода к конечно-разностной аппроксимации оператора дифференцирования (7.45) «зацепляет» значения функции  $\Phi_L(x, y)$  на соседних дугах. Матрица  $M_j$  ранга  $N_{\theta_j}$  соответствует вкладу угловой части опера-

тора Лапласа  $\rho^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  и интегрирования по дуге  $\rho = \rho_j$ .

Отметим, что матрица  $M_j$  не является диагональной из-за интегрального оператора в правой части (7.37). Через  $I_j$  обозначен вектор пространства  $\mathbf{R}^{N_{\theta_j}}$ , отвечающий неоднородному члену  $\tilde{\chi}_0$ :

$$\tilde{\chi}_0 = \{I_1, I_2, \dots, I_{N_\rho}\}.$$

Таким образом, матрица  $B$  из (7.42) является разреженной и имеет в представлении (7.43) ленточную структуру (рис. 21). Число неизвестных в уравнениях (7.44) равно  $(N_\rho + 1)N_\theta$ , и для их определения имеется  $N_\rho N_\theta$  соотношений. Чтобы определить единственное решение, отвечающее физической волновой функции, уравнение (7.44) необходимо дополнить граничным условием (7.40).

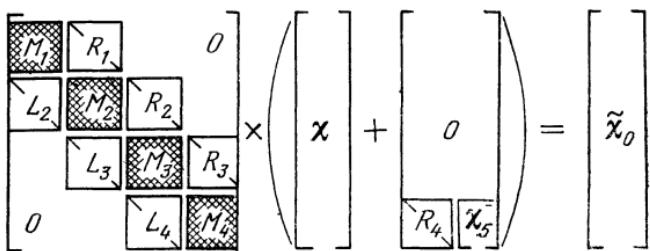


Рис. 21

Пренебрегая членами порядка  $O(\rho^{-3/2})$ , можно получить из (7.42) равенства

$$\begin{aligned} \hat{\chi}^{N_\rho} &= \lambda_L \hat{\Psi}^{N_\rho} + \frac{e^{i\sqrt{E}\rho_{N_\rho}}}{\rho_{N_\rho}^{1/2}} \hat{A}_{N_\rho}, \\ \hat{\chi}^{N_\rho+1} &= \lambda_L \hat{\Psi}^{N_\rho+1} \frac{\exp\{i\sqrt{E}\rho_{N_\rho+1}\}}{\rho_{N_\rho+1}^{1/2}} \hat{A}_{N_\rho}, \end{aligned} \quad (7.46)$$

где через  $\widehat{\Psi}^{N_p}$  и  $\widehat{A}_{N_p}$  обозначены векторы, отвечающие значениям функции  $\chi_L(x, y)$  и амплитуды  $A(x/y)$  в узлах сетки. Исключая неизвестный вектор  $\widehat{A}_{N_p}$ , получим соотношение между векторами  $\widehat{\chi}_{N_{p+1}}$  и  $\widehat{\chi}_{N_p}$ , которое дает недостающее условие для определения вектора  $\chi$ :

$$\widehat{\chi}^{N_{p+1}} = C_{N_p} \widehat{\chi}^{N_p} + \lambda_L \widehat{\Phi}_{N_p}. \quad (7.47)$$

Здесь

$$C_{N_p} = \left( \frac{\rho_{N_p}}{\rho_{N_{p+1}}} \right)^{1/2} \exp \left\{ i \sqrt{E} (\rho_{N_{p+1}} - \rho_{N_p}) \right\},$$

$$\widehat{\Phi}_{N_p} = C_{N_p} \widehat{\Psi}_{N_p} - \widehat{\Psi}_{N_{p+1}}.$$

Уравнение (7.44), дополненное граничным условием (7.47), принимает вид

$$\widehat{M}\chi = \tilde{\chi}_0 + \lambda_L \widehat{\Phi}, \quad (7.48)$$

представленный схематически на рис. 22. Здесь все векторы заданы в представлении (7.43), а вектор  $\widehat{\Phi}$  имеет

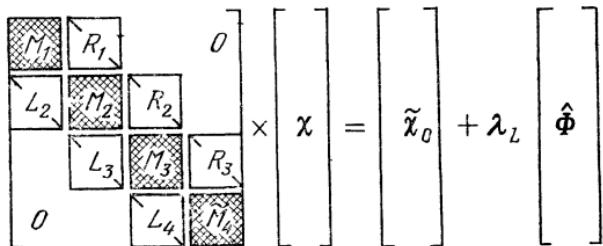


Рис. 22

отличной от нуля лишь одну компоненту  $\widehat{\Phi}_{N_p}$  из пространства  $\mathbf{R}^{N_p}$ . Через  $\widetilde{M}_{N_p}$  на рис. 22 обозначен линейный оператор в  $\mathbf{R}^{N_p}$ , равный

$$\widetilde{M}_{N_p} = M_{N_p} + C_{N_p} R_{N_p}.$$

Заметим, что в правой части (7.46) фигурирует неизвестная величина  $\lambda_L$ , представляющая собой парциальную амплитуду абсолютно упругих столкновений. В силу ли-

нейности решение (7.48) может быть записано в виде суммы

$$\chi = A + \lambda_L B, \quad (7.49)$$

где векторы  $A$  и  $B$  определяются из уравнений

$$\hat{M}A = \tilde{\chi}_0, \quad \hat{M}B = \hat{\Phi} \quad (7.50)$$

с известными неоднородными членами.

Решение уравнений (7.50) эквивалентно обращению матрицы порядка  $N_\rho N_\theta$ . В общем случае проблема обращения больших матриц является сложной. Однако, поскольку в рассматриваемой задаче матрица  $\hat{M}$  разрежена и имеет ленточную структуру, при ее обращении оказывается эффективным, например, алгоритм Гаусса. Применяя схему последовательного исключения неизвестных, можно привести матрицу к треугольному виду. С помощью обратной процедуры можно затем определить векторы  $A$  и  $B$  и записать решение  $\chi$  в виде (7.49).

Чтобы найти неизвестные величины  $\lambda_L$ , можно использовать, например, асимптотические формулы (7.40).

Сравним (7.49) и (7.46) в области  $\Omega_1$ , где  $x \ll y$ . При больших значениях  $\rho_{N_\rho}$  второе слагаемое в (7.46) много меньше первого (при энергиях ниже порога оно экспоненциально мало, при  $E > 0$  имеет порядок  $O(\rho^{-1/2})$ ). Пренебрегая вторым слагаемым, получим для определения  $\lambda_L$  соотношение

$$\lambda_L \hat{\Phi}_i^{N_\rho} = A_i^{N_\rho} + \lambda_L B_i^{N_\rho},$$

откуда следует

$$\lambda_L = A_i^{N_\rho} \left( \hat{\Phi}_i^{N_\rho} - B_i^{N_\rho} \right)^{-1}.$$

Здесь через  $\hat{\Phi}_i^{N_\rho}$  обозначены компоненты векторов  $\hat{\Phi}^{N_\rho}$ , отвечающие малым значениям углов  $\theta_i$ . Например, можно положить  $i = N_\theta - 1$ . Зная величину  $\lambda_L$ , можно найти вектор  $\tilde{\chi}^{N_\rho}$ , отвечающий значениям функции  $\Phi_L$  на внешней дуге  $\rho = \rho_{N_\rho}$ , с помощью равенства (7.49). Амплитуда раз渲ла  $A_L$  определяется тогда на основании равенства

$$\hat{A}_{N_\rho} = \left( \tilde{\chi}^{N_\rho} - \lambda_L \hat{\Phi}^{N_\rho} \right) \rho_{N_\rho}^{1/2} \exp \left\{ - i \sqrt{E} \rho^{N_\rho} \right\}.$$

Таким образом, чтобы найти физически интересные величины  $\lambda_L$  и  $A_L$ , не нужно вычислять функцию  $\Phi_L$  во «внутренних» точках. Эти величины определяются по ее значениям на границе.

Следует подчеркнуть, что для увеличения точности расчетов и эффективной работы программ узлы сетки должны располагаться неравномерно. Сетка должна быть плотной в областях, примыкающих к оси  $x = 0$ , и становиться более редкой при  $x \rightarrow \infty$  (см. рис. 20). Такое расположение узлов необходимо для того, чтобы достаточно точно описать сложное поведение волновой функции в области  $\Omega_1$ . В области  $\Omega_{10}$ , где  $x \rightarrow \infty$ , волновая функция принимает асимптотический вид (7.40) и гладко зависит от угловой переменной. Здесь сетка может выбираться более редкой. Важно при этом соблюдать условие самосогласованности. Последнее состоит в том, что в окрестности границы  $\rho = \rho_{N_\rho}$  ошибка за счет введения «радиуса обрезания» должна быть меньше ошибки дискретизации. Это достигается при выполнении неравенства  $|\Delta h|^2 \gg (\rho_{N_\rho})^{-3/2}$ , где  $\Delta h$  — минимальный шаг в окрестности границы.

**Заряженные частицы.** Если частицы заряжены, то для вычисления амплитуд рассеяния можно использовать модифицированные уравнения для компонент (5.183).

Парциальный анализ этих уравнений проводится точно так же, как и в случае нейтральных частиц. В результате можно получить однородную бесконечную систему интегро-дифференциальных уравнений типа (7.33), где в левой части следует добавить матричные элементы дальнодействующих частей потенциалов для  $\beta \neq \alpha$ :

$$\int d\hat{x}_\alpha d\hat{y}_\alpha \mathcal{Y}_{aL}(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha) \mathcal{Y}_{a'L'}^*(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha) \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{n_\beta}{|x_\beta|} (1 - \chi_\beta) = \delta_{LL'} v_{aL a'L'}^{(0)}, \quad (7.51)$$

а в правой — заменить потенциал  $v_{l'l}(x)$  короткодействующей частью

$$\begin{aligned} & \hat{v}_{l'l} \delta_{l'l} \delta_{\lambda'\lambda} = \\ & = \int d\hat{x}_\alpha d\hat{y}_\alpha \mathcal{Y}_{La}^*(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha) \mathcal{Y}_{L'a'}(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha) \left( \frac{n_\alpha}{|x_\alpha|} \chi_\alpha + v^{(s)}(x_\alpha) \right). \end{aligned} \quad (7.51')$$

Отметим, что дальнодействующий потенциал (7.51), в отличие от короткодействующих частей, недиагонален в базисе  $\{\mathcal{U}_{al}\}$ .

Чтобы использовать полученные уравнения для численных расчетов, необходимо обрезать бесконечную систему уравнений и рассматривать системы конечного ранга. С этой целью, начиная с некоторого  $l = l_0$ , следует положить равными нулю матричные элементы как короткодействующих частей потенциалов, т. е.  $\hat{v}_{ll'} = 0$  при  $l, l' > l_0$ , так и дальнодействующих частей,  $v_{aL, a'L'}^{(0)} = 0$ ,  $l, l' > l_0$ .

Параметр обрезания  $l_0$ , с одной стороны, как и в случае нейтральных частиц, обусловлен количеством слагаемых, которые необходимо удерживать в парциальном разложении (7.20) для достижения требуемой точности. Правомерность обрезания матричных элементов  $v_{aL, a'L'}$  должна независимо контролироваться с помощью сравнения результатов при различных  $l_0$ . Эти результаты должны стабилизироваться и слабо зависеть от  $l_0$ . Качественное условие правомерности обрезания состоит в том, что элементы  $v_{aL, a'L'}$  должны быть малы в области, где волновая функция существенно отлична от нуля. Этого всегда можно достигнуть, выбирая параметр обрезания кулоновских потенциалов достаточно большим. Асимптотические условия, которые определяют физические решения, можно получить либо путем построения эйкональных приближений для парциальных уравнений, либо прямым разложением асимптотических формул (5.183') по базису  $\mathcal{U}_{al}$ . Мы не будем описывать эти условия в общем случае, а рассмотрим только простой пример частиц, взаимодействующих в  $s$ -состоянии.

В ряде задач, например, когда частицы заряжены одновременно и кулоновское взаимодействие значительно слабее добавочного, численные расчеты удобно проводить на основе простейшего варианта модифицированных уравнений (5.184), когда все кулоновское взаимодействие включено в «невозмущенный» гамильтониан.

Опишем постановку граничных задач на упомянутом выше примере трех тождественных частиц, взаимодействующих в  $s$ -состоянии, т. е. будем полагать равными нулю все матричные элементы потенциалов при  $l, l' > 0$ . Мы рассмотрим только простейшее из модифицированных уравнений (5.184). В этом случае имеем семейство независимых уравнений (7.37), где в левой части следует

добавить матричные элементы кулоновских потенциалов. При этом, согласно предположению о характере взаимодействия, достаточно вычислить матричные элементы  $v_L^{(0)} = (\mathcal{Y}_{L,L}, (v_2^{(c)} + v_3^{(c)})\mathcal{Y}_{L,L})$ . Так как кулоновские потенциалы зависят только от угла между векторами  $x$  и  $y$ , для этих матричных элементов справедливо представление

$$v_L^{(0)} = 2n \int_{-1}^1 du ((x^2 - 2\sqrt{3}xyu + 4y^2)^{-1/2} + \\ + (x^2 + 2\sqrt{3}xyu + 4y^2)^{-1/2}) = 2n\mu(\theta)/\rho,$$

в котором

$$\mu(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}\sin\theta}, & \theta \geqslant \pi/6, \\ \frac{2}{\cos\theta}, & \theta < \pi/6. \end{cases}$$

В результате приходим к уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{L(L+1)}{y^2} - \frac{2n\mu(\theta)}{\rho} + E \right) \Phi_L(x, y) = \\ = v_s(x) \left( \Phi_L(x, y) + \int_{-1}^1 du h^L(\theta, u) \Phi_L(x', y') \right). \quad (7.52)$$

Согласно (5.96) начальное состояние системы  $L_A$  имеет вид произведения собственной функции оператора  $h_1$  на волновую функцию гамильтониана  $h_1^c = -\Delta_y + v_1^c$  с потенциалом

$$v_1^c(y) = \\ = \int dx |\psi(x)|^2 \left( \left| -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right|^{-1} + \left| \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right|^{-1} \right),$$

описывающим рассеяние частицы на связанный паре, которая порождает эффективный дальнодействующий потенциал  $v_1^c(y)$ . При  $y \rightarrow \infty$  этот потенциал является чисто кулоновским:  $v_1^c(y) \sim \frac{2n}{\sqrt{3}y}$ . Отделив угловые переменные, получим радиальные составляющие начального состояния  $\chi_L = \psi(x)\tilde{\psi}_L(qy)$ , где функция  $\tilde{\psi}_L(qy)$  определена формулой (7.8'), в которой кулоновский параметр  $n$  следует заменить величиной эффективного заряда  $2n/\sqrt{3}$ .

Полагая  $U_L = \Phi_L - \chi_L$ , получим для функции  $U_L$  неоднородное уравнение

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - v(x) - \frac{L(L+1)}{y^2} - \frac{2n\mu(\theta)}{\rho} + E \right) U_L = \\ = \left( \frac{2n}{V^3 y} - \frac{2n}{x} \right) \chi_L e \left( \frac{\pi}{6} - \theta \right) - \\ - v(x) \int_{-1}^1 du h^L(\theta, u) (\chi_L(x', y') + U_L(x', y')), \quad (7.53) \end{aligned}$$

где  $e(t)$  — функция единичного скачка. Неизвестные функции удовлетворяют нулевым граничным условиям (7.39) на осиях координат и следующим асимптотическим условиям при  $\rho \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} U_L \sim \lambda_L \psi(x) \exp \left\{ iqy + iW_1 - \frac{i\pi(l+1)}{2} \right\} + \\ + A^L(\theta) \frac{\exp \{ i\sqrt{E}\rho + iW_0 \}}{\rho^{1/2}}. \quad (7.54) \end{aligned}$$

Кулоновские фазы  $W_1$  и  $W_0$  даются эйкональными формулами (5.50), которые в данном случае принимают вид.

$$W_1 = -\frac{n}{V^3 q} \ln 2qy, \quad W_0 = -\frac{n}{2\sqrt{E}} \mu(\theta) \ln 2\sqrt{E}\rho.$$

Коэффициенты  $\lambda_L$  и  $A^L$  определяют амплитуду упругого рассеяния и амплитуду развала соответственно. Амплитуда упругого рассеяния  $F$ , согласно (5.21) и (5.22), представляется в виде суммы гладкой и сингулярной частей:

$$F(\hat{y}_1, p_A) = f_c(\hat{y}_1, p_A) + f_{cs}(\hat{y}_1, p_A),$$

где через  $f_c$  обозначена кулоновская амплитуда рассеяния, отвечающая потенциальному  $\frac{2n}{V^3 y}$ , а гладкая часть  $f_{cs}$  выражается через парциальные амплитуды  $\lambda_L$  соотношением, аналогичным (7.10):

$$\begin{aligned} f_{cs} = \frac{1}{2iq} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) \lambda_L P_L(\cos \theta), \\ \cos \theta = (\hat{y}_1, \hat{p}_A). \quad (7.55) \end{aligned}$$

Парциальные сдвиги  $\delta_L = \delta_L^{\text{cs}} + \arg \Gamma\left(L + 1 + i \frac{n}{\sqrt{3}q}\right)$  и коэффициенты поглощения  $\eta_L$  определяются при этом равенством

$$\lambda_L = \frac{1}{2i} \left( \eta_L e^{2i\delta_L^{\text{cs}}} - 1 \right) \exp\left(2i \arg \Gamma\left(L + 1 + i \frac{n}{\sqrt{3}q}\right)\right),$$

так что  $\delta_L^{\text{cs}}$  отвечает дополнительному сдвигу фазы за счет короткодействующего потенциала  $v_s$ .

Коэффициенты  $A^L$  связаны с амплитудой развала теми же соотношениями, что и для нейтральных частиц, — (7.35), (7.35').

Итак, мы получили интегро-дифференциальные уравнения (7.53), определяющие радиальные функции, и описали граничные задачи для них. Численное решение этих задач может быть получено совершенно так же, как и в случае нейтральных частиц.

В заключение этого параграфа отметим, что однородные уравнения (7.37) или (7.53), рассматриваемые в пространстве квадратично интегрируемых функций, имеют нетривиальные решения в точках  $-E_i$ , равных собственным значениям оператора энергии. При каждом значении полного момента  $L$  мы можем искать приближенные собственные значения с помощью системы конечного ранга, отвечающей некоторому обрезанию матричных элементов потенциала. Для их определения можно, например, применить конечно-разностную аппроксимацию уравнений, положив компоненты собственной функции равными нулю на некотором достаточно большом расстоянии от начала координат. Собственные числа  $-E_i$  в этом случае отвечают нулям определителя Фредгольма системы типа (7.42), расположенным ниже границы непрерывного спектра оператора  $H$ .

Эффективность такого подхода к определению собственных чисел оператора энергии проверена на многих задачах. Одной из причин, обуславливающих успешное использование компактных уравнений для расчета дискретного спектра, является то обстоятельство, что структура компонент волновой функции обычно более проста, чем структура волновых функций. Это можно видеть на примере асимптотического поведения собственных функций, описанного в конце главы IV. Поэтому и аппроксимировать компоненты легче, чем сами волновые функции.

### § 3. Интегральные уравнения для сепарабельных потенциалов

В этом параграфе мы опишем методы численного решения компактных интегральных уравнений в импульсном пространстве. Мы будем рассматривать интегральные уравнения для ядер  $T_{ab}$ , которые, согласно равенству (3.63), определяют волновые операторы  $U_b$ .

**Компактные уравнения в бисферическом базисе.** В случае трех тождественных частиц, рассмотренных в предыдущем параграфе, система уравнений (3.28) для ядер  $T_{ab}$  сводится к одному уравнению

$$K_1 = Q_1 - T_1(E + i0) R_0(E + i0) (P^+ + P^-) K_1, \quad (7.56)$$

где через  $K_1$  обозначен оператор с ядром  $T_{1B}(P, p'_B)$ , действующий из пространства  $\mathfrak{H}_1$  в  $\mathfrak{H}$ .

Проведем сначала парциальный анализ этого уравнения. Искомое ядро, аналогично (7.28), разложим по бисферическому базису

$$K_1(P, p'_1) = \sum_{a,L} \frac{K_{aL}(|k|, |p|)}{|k||p|} \mathcal{Y}_{aL}(\hat{k}, \hat{p}). \quad (7.57)$$

Ядро  $T$ -матрицы  $T_1(E + i0)$  в том же базисе задается рядом

$$T(P, P', E + i0) = \sum_{a,L,a',L'} \delta_{ll'} \delta_{\lambda\lambda'} \mathcal{Y}_{aL}(\hat{k}, \hat{p}) \mathcal{Y}_{a'L'}(\hat{k}', \hat{p}') \times \\ \times (|k||k'||p||p'|)^{-1} t_{aL,a'L'}(|k|, |k'|, E - p^2 + i0) \delta(|p| - |p'|),$$

где через  $t_{aL,a'L'}$  обозначены парциальные  $T$ -матрицы (7.20). Соответственно для парциальных компонент  $K_{aL}$  получаем бесконечную систему двумерных интегральных уравнений

$$K_{aL}(k, p) = \\ = \varphi_l(k) \delta(p - p') \delta_{aL, a'_0 L_0} - \sum_{a', L'} \int_0^\infty dk' dp' \delta(p - p') \times \\ \times (\Omega_{aL, a'L'}^{(+)}(k, p, k', p') K_{a'L'}(k'_+, p'_+) + \\ + \Omega_{aL, a'L'}^{(-)}(k, p, k', p') K_{a'L'}(k'_-, p'_-)), \quad (7.58)$$

где  $\varphi_l(k)$  — форм-фактор, отвечающий собственной функции  $\psi_l(k)$ . Через  $\Omega^{(\pm)}(k, p, k', p')$  обозначены сингулярные ядра, которые выражаются через парциальные  $T$ -матрицы

и геометрические коэффициенты  $h_{aa'}^L$ , равенствами

$$\Omega_{aL, a'L'}^{(\pm)} = \frac{t_{aL, a'L'}(k, k', E - p'^2 + i0)}{k'^2 + p'^2 - E - i0} h_{aa'}^L(\theta), \quad \theta = \arctg \frac{p'}{k'}.$$

Здесь, в соответствии с данным в главе III определением (3.32) переменных  $k$  с аргументами, введены обозначения

$$k'_\pm = -\frac{1}{2}k' \pm \frac{\sqrt{3}}{2}p', \quad p'_\pm = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}k' - \frac{1}{2}p'.$$

Если обрезать эту систему так, как это было сделано в предыдущем параграфе, то мы получим при каждом значении полного орбитального момента  $L$  систему уравнений конечного ранга. Однако даже в простейшем случае, когда потенциал действует только в  $s$ -состоянии, численное решение этой системы, которая сводится к одному уравнению, представляет собой довольно сложную проблему. Оставляя в стороне вопрос о вычислении парных  $T$ -матриц с помощью сингулярных интегральных уравнений (7.21) и о дополнительных трудностях, обусловленных сингулярностями ядер в самом уравнении (7.58), укажем лишь на следующее обстоятельство.

Как правило, интегральные уравнения решают с помощью конечно-разностной аппроксимации интегралов. Если взять даже не очень плотную сетку  $30 \times 30$ , то решение уравнения (7.58) даже в рассматриваемом простейшем случае сводится к обращению комплексной матрицы  $900 \times 900$ , которая не является разреженной. Такая задача находится на пределе возможностей современной вычислительной техники. Чтобы обойти эту трудность, предложены различные аппроксимационные методы. Мы изложим только один из таких методов, основанный на замене потенциалов  $v(r)$  сепарабельными приближениями.

**Сепарабельные потенциалы.** Мы рассмотрим подробно только простейший случай сепарабельного потенциала первого ранга и начнем с редукции исходного шестимерного интегрального уравнения (7.56). Уравнение для парциальных компонент мы опишем позднее. Будем считать, что двухчастичный гамильтониан, отвечающий сепарабельному потенциалу, имеет связанное сферически симметричное состояние, и через  $\varphi(k)$  обозначим соответствующий форм-фактор.

Как мы видели в § 1,  $T$ -матрица в этом случае также задается вырожденным ядром (7.18), и поэтому решение

уравнения (7.56) имеет вид произведения

$$K_1(P, p'_1) = \varphi(k_1) Q(p_1, p'_1), \quad (7.59)$$

где ядро  $Q(p_1, p'_1)$  удовлетворяет трехмерному интегральному уравнению

$$Q(p, p') = \delta(p - p') + \int \frac{\Omega(p, q, E) Q(q, p') dq}{\Delta(E - q^2)}. \quad (7.60)$$

Здесь функция  $\Delta(E)$  задается равенством (7.18), а ядро  $\Omega(p, q, E)$  имеет вид

$$\Omega(p, q, E) = \frac{\varphi(k_1(p, q)) [\varphi(k_2(q, p)) + \varphi(k_3(q, p))]}{k_1^2(p, q) + p^2 - E - i0},$$

где, как и выше, переменные  $k_\alpha$  с аргументами означают якобиевы импульсы типа  $k_\alpha$ , которые линейно выражаются через импульсы  $p_\alpha$  и  $p'_\beta$  равенствами (3.32), т. е.

$$\begin{aligned} k_1(p, q) &= -\sqrt{3}p - 2q, & k_2(q, p) &= \sqrt{3}q + 2p, \\ k_3(q, p) &= -2p - \sqrt{3}q. \end{aligned}$$

Заметим, далее, что функция  $\Delta^{-1}(E - q^2)$  имеет полюс в точке  $q^2 = E - \kappa^2$ . Справедливо представление

$$\Delta^{-1}(E - q^2) = \frac{\tilde{v}(q)}{q^2 - E - \kappa^2 - i0},$$

в котором  $\tilde{v}$  — гладкая функция. Поэтому полученное уравнение можно толковать как обобщенное уравнение теории возмущений типа (3.4), где ядро  $\Omega(p, q, E)\tilde{v}(q) \equiv \tilde{\Omega}(p, q, E)$  играет роль эффективного потенциала.

Следует отметить, что при положительных энергиях, т. е. выше порога разрыва на три частицы, этот потенциал является сингулярной функцией. Однако, как мы видели в главе III, его особенности  $(k_1^2(p, q) + p^2 - E - i0)^{-1}$ , отвечающие второстепенным сингулярностям ядер компактных уравнений (3.29), стираются при итерировании.

Согласно формулам, описанным в главе III, решение уравнения (7.60) на энергетической поверхности с точностью до множителя совпадает с амплитудой упругого рассеяния

$$F(\hat{p}, p') = -2\pi^2 Q(|p'| \hat{p}, p'), \quad E = p'^2 - \kappa^2.$$

Сравнивая далее определение амплитуды развала  $F_0(\hat{P}, p')$ , как вычата в полюсе  $(P^2 - z)^{-1}$  резольвенты, с равенствами (4.32') и (7.59), придем к заключению, что компонента  $A_1$  этой амплитуды дается равенством

$$A_1(\hat{P}, p') = -e^{i\pi/4} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} E^{3/4} \varphi(k) Q(p, p') \Big|_{p^2=E+\kappa^2}.$$

Полная амплитуда равна симметризованному выражению

$$F_0 = (I + P^+ + P^-) A_1.$$

Таким образом, в случае сепарабельных потенциалов первого ранга задача вычисления амплитуд рассеяния сводится к решению трехмерных интегральных уравнений (7.60). Если потенциал имеет ранг  $N$ , то мы получим систему из  $N$  уравнений, аналогичных (7.60).

Отделим в уравнении (7.60) угловые переменные  $\hat{p}$  аналогично тому, как это было сделано в задаче двух тел. Заметим, что эффективный потенциал  $\tilde{\Omega}(p, p', E)$  не является сферически симметричным. Поэтому, в отличие от (7.21), мы получим в данном случае бесконечную систему зацепляющихся одномерных интегральных уравнений. Последняя получается из (7.58), если заменить ядра парциальных  $T$ -матриц выражениями (7.19) для сепарабельных потенциалов. Производя обрезание бесконечной системы, получим при каждом значении полного момента  $L$  систему конечного ранга. В частности, если потенциал действует только в  $s$ -состоянии, то такая система сводится к одному уравнению. Выпишем для примера уравнение при  $L = 0$ :

$$\begin{aligned} Q(p, p') = \\ = \delta(p - p') - \int \Omega_0(p, q, E) \Delta_0^{-1}(E - q^2) Q(q, \bar{p}'). \end{aligned}$$

Ядро  $\Omega_0(p, q, E)$  задается сингулярным интегралом

$$\Omega_0(|p|, |q|, E) = \int d\hat{q} \Omega(p, q, p') (k_1^2(p, q) + p^2 - E)^{-1}.$$

Отметим, что это ядро при  $E > 0$  имеет логарифмические особенности. Последние можно вычислить явно, если проинтегрировать по частям относительно  $\xi = (\hat{p}, \hat{q})$ . Они имеют вид

$$\ln((\sqrt{3}|p| \pm 2|q|)^2 + p^2 - E).$$

Функция  $Q(p, p', E)$  на энергетической поверхности совпадает с парциальной амплитудой упругого рассеяния:

$$Q(p, p', E) \Big|_{p^2 - k^2 = p'^2 - k^2 = E} = (2i\sqrt{E})^{-1}(e^{2i\delta_l} - 1),$$

$$p, p' > 0,$$

а полная амплитуда выражается через них равенством (7.41). Аналогичное (7.35) соотношение имеет место между парциальными составляющими амплитуды развала

$$A_1 = \varphi(k) Q(p, p', E) \Big|_{k^2 + p^2 = p'^2 - k^2 = E}$$

и полной амплитуды развала.

Итак, мы свели задачу вычисления амплитуд рассеяния к решению одномерных интегральных уравнений или систем таких уравнений. Этот метод широко применяется в физике. При этом существует много способов перехода от уравнений, имеющих сингулярные ядра, к уравнениям с гладкими ядрами. Мы, однако, не будем описывать их здесь. Эти вопросы решаются по стандартным схемам теории сингулярных интегральных уравнений, и им посвящена обширная литература.

**Суперпозиция кулоновского и сепарабельного потенциалов.** Если частицы заряжены и короткодействующие потенциалы сепарабельны, то система уравнений (7.56) также может быть записана в виде трехмерных интегральных уравнений (7.60). При этом ядро  $\Omega(p, q, E)$  выражается через двухчастичные  $T$ -матрицы для суммы кулоновского и сепарабельного потенциалов. Чтобы пояснить возникающие при вычислениях на базе этих уравнений вопросы, рассмотрим для примера систему, в которой заряжена только одна пара частиц (23), а сепарабельные потенциалы для всех пар одинаковы и имеют ранг 1. Будем искать решение уравнения (7.60), антисимметричное по отношению к перестановкам частиц. Это решение может быть представлено в виде произведения (7.59), где функция  $Q(p, p')$  подчиняется уравнению (7.60) с

$$\begin{aligned} \Omega(p, p', E) = & \frac{\varphi(k_1(p, p'))}{k_1^2(p, p') + p^2 - E - i0} \varphi(k_2(p', p)) - \\ & - \int dq \frac{\varphi(k_1(p, q)) \varphi(k_1(p', q))}{(k_1^2(p, q) + p^2 - E - i0)(k_1^2(p', q) + p'^2 - E - i0)} \times \\ & \times [t(k_3(q, p), k_3(q, p'), E - q^2 + i0) - \\ & - t(k_3(q, p), k_3(-q, -p'), E - q^2 + i0)]. \end{aligned}$$

Через искомое ядро выражаются полная трехчастичная  $T$ -матрица и амплитуды упругого рассеяния. При этом, однако, в отличие от чисто центральных частиц, здесь необходимо провести перенормировку ядра  $Q(p, p')$  в согласии с процедурой, описанной в главе IV.

Напомним, что наиболее сингулярный член в ядре  $\Omega(p, p', E)$  при отрицательных энергиях совпадает с чисто кулоновским потенциалом, описывающим взаимодействие свободной частицы со связанный парой. Поэтому, если сделать замену

$$t(p, p', E) \rightarrow \frac{n}{\sqrt{3} \pi^2} (|p - p'|^{-2} + \mu^2),$$

то первая  $T$ -матрица  $t(k, k', E)$  перестанет зависеть от переменной интегрирования  $q$ , в то время как во второй, обменной  $T$ -матрице  $t(k - k', E)$  такая зависимость останется, и ее особенность сгладится после интегрирования.

В результате мы видим, что при  $\mu \rightarrow 0$  ядро  $\Omega(p, p', E)$  содержит сильную кулоновскую особенность

$$\Omega_{\text{sing}}(p, p', E) = \frac{n}{\sqrt{3} \pi^2} |p - p'|^{-2} (p'^2 - E - \kappa^2 - i0)^{-1},$$

которая совпадает с ядром двухчастичного уравнения теории возмущений для кулоновской  $T$ -матрицы. После описанной в § 4 главы IV перенормировки  $Q \rightarrow e^{-i\eta \ln \mu} Q$  мы можем получить отсюда амплитуду упругого рассеяния.

Отметим, что в рамках этой модели может быть описана система из двух протонов и нейтрона. На основе перенормированных уравнений могут проводиться численные расчеты длины рассеяния и амплитуды упругого рассеяния при энергиях ниже порога разрыва на три частицы. Выше порога эти уравнения становятся некомпактными в силу причин, подробно рассмотренных в главе III.

#### § 4. Групповые интегралы

В этом параграфе мы рассмотрим задачу, которая может служить хорошим примером использования методов квантовой теории рассеяния в других областях теоретической физики. Это — задача о вычислении групповых интегралов и тесно связанных с ними вириальных коэффициентов в квантовой статистической физике.

**Постановка задачи.** Начнем с определения групповых интегралов и вироальных коэффициентов. В теории неидеальных газов систематически используются вироальные разложения — представления давления  $p$  в виде ряда по степеням плотности  $v^{-1}$ :

$$\frac{pv}{kT} = \sum_{N=0}^{\infty} A_{N+1}(T) v^{-N}. \quad (7.61)$$

Коэффициенты  $A_N(T)$ , зависящие от температуры  $T$ , называются *вироальными коэффициентами*.

*Групповые интегралы* определяются как коэффициенты  $B_N(T)$  в разложении давления по степеням активности  $\zeta$ :

$$\frac{p}{kT} = \sum_{N=1}^{\infty} B_N(T) \zeta^N.$$

При этом вироальные коэффициенты выражаются через групповые интегралы с помощью соотношений

$$A_{N+1} = -\frac{N}{N+1} \sum_a (-1)^i \frac{\sum n_i - 1 + \sum n_i}{N!} \prod_i \frac{((i+1) B_{i+1})^{n_i}}{n_i!}.$$

Здесь суммирование производится по всем разбиениям  $a$  системы  $N$  частиц. Через  $n_i$  обозначено число подсистем разбиения  $a$ , состоящих из  $i$  частиц, так что  $\sum_{i=1}^N i n_i = N$ .

Выпишем первые два соотношения:

$$A_2 = -B_2,$$

$$A_3 = -2B_3 + 4B_2^2.$$

Групповые интегралы в квантовой статистической физике выражаются непосредственно через операторы энергии системы  $N$  тел  $H^{(N)}$  и операторы энергии для разбиений  $H_{a_k}^{(N)}$ . Например, в случае статистики Больцмана имеет место формула.

$$B_N = \frac{1}{N! \lambda^3} \text{sp} \sum_a (-1)^i \sum_{n_i} \left( \sum_i n_i - 1 \right)! \times \\ \times \left( e^{-\beta H_a^{(N)}} - e^{-\beta H_0^{(N)}} \right), \quad (7.62)$$

где суммирование ведется по всем разбиениям  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N - 1$ ) системы  $N$  тел. Здесь параметр  $\beta$  пропорционален температуре,  $\beta = kT$ , и через  $\lambda$  обозначена так называемая тепловая длина волны. Аналогичные соотношения справедливы также для статистики Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака. Мы будем заниматься вычислением групповых интегралов только в статистике Больцмана. Обобщение на другие типы статистик делается по стандартным рецептам, и мы не будем обсуждать их здесь. Все необходимые для этого формулы подробно выводятся в учебниках по статистической физике.

Таким образом, в определение групповых интегралов входит след от связной части операторов  $e^{-\beta H^{(N)}}$ . Напомним, что понятие «связная часть» было введено нами в главе II, где мы классифицировали особенности резольвенты. Ясно, что групповые интегралы тесно связаны со спектральными характеристиками многочастичных гамильтонианов. Например, их можно выразить через волновые функции, если воспользоваться соотношениями (1.36). Нетривиальным является утверждение, что эти характеристики сводятся к операторам рассеяния. Обоснованию этого утверждения и будет посвящен данный параграф.

Точнее, задача состоит в том, чтобы явно выразить групповые интегралы через операторы рассеяния. Мы получим соответствующие формулы для второго и третьего групповых интегралов. Для остальных  $N$ ,  $N \geq 4$ , такие формулы неизвестны. Можно, однако, принять гипотезу, что групповые интегралы  $B_N$ ,  $N \geq 4$ , так же как и третий групповой интеграл, явно выражаются через оператор рассеяния системы  $N$  тел и операторы рассеяния для ее подсистем.

Итак, приступим к вычислению групповых интегралов. Начнем с простейших преобразований формулы (7.62): Используя соотношение между резольвентой и функцией самосопряженного оператора (2.6), мы можем записать групповой интеграл  $B_N$  в виде суммы

$$B_N = \frac{1}{\lambda^3 N!} \left( \sum_{i=1}^{n_0} e^{-\beta \varkappa_i^2} + \int_{-\infty^2}^{\infty} e^{-\beta E} \Omega_+^{(N)}(E) dE \right), \quad (7.63)$$

где первый член описывает вклад дискретного спектра оператора  $H^{(N)}$ , а второй — вклад его непрерывной ком-

поненты. Функция  $\Omega_+(E)$  представляет собой след скачка связной части резольвенты  $[R^{(N)}(z)]_c$  на непрерывном спектре. Если воспользоваться свойством «самосопряженности» резольвенты  $R^{(N)}(\bar{z}) = R^{(N)}(z)$ , эту функцию можно представить как предел:

$$\Omega_+^{(N)}(E) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \operatorname{sp} \operatorname{Im} [R^{(N)}(E + i\epsilon)]_c, \quad (7.64)$$

где введено обозначение «мнимой части» оператора  $A$ :

$$2i \operatorname{Im} A = A - A^*.$$

Следовательно, задача сводится к тому, чтобы выразить функцию  $\Omega_+^{(N)}(E)$  через операторы рассеяния для системы  $N$  тел и для ее подсистем. Соответствующие формулы в математической литературе принято называть *формулами следа*. Посмотрим сначала, как решается эта задача в случае системы двух тел.

**Второй групповой интеграл.** Второй групповой интеграл дается равенством

$$B_2 = \frac{1}{2\lambda^3} \operatorname{sp} (e^{-\beta h} - e^{-\beta h_0}), \quad (7.65)$$

где для операторов энергии в системе двух тел использованы обозначения, которые мы ввели в § 1 главы III. Соответственно формула (7.64) принимает вид

$$\omega_+(E) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \omega(E + i\epsilon),$$

где

$$2i\omega(z) = \operatorname{sp} \operatorname{Im} (r(z) - r_0(z)).$$

Получим прежде всего ряд подготовительных тождеств. Рассмотрим унитарный оператор

$$\tilde{s}(z) = \frac{h - \bar{z}}{h - z} \frac{h_0 - z}{h_0 - \bar{z}}, \quad z = E + i\epsilon. \quad (7.66)$$

Преобразуем этот оператор следующим образом. Сначала воспользуемся очевидными соотношениями

$$\frac{h - \bar{z}}{h - z} = I + 2i\epsilon r(z), \quad \frac{h_0 - z}{h_0 - \bar{z}} = I - 2i\epsilon r_0(z).$$

Затем выразим резольвенту через  $T$ -матрицу:

$$I + 2i\epsilon r(z) = I + 2i\epsilon r_0(z) - 2i\epsilon r_0(z)t(z)r_0(z),$$

и упростим получившееся выражение с помощью тождества

$$2i\epsilon r_0(z)(\bar{z}) = r_0(z) - r_0(\bar{z}). \quad (7.67)$$

После приведения подобных членов получим следующее представление:

$$\tilde{s}(z) = I - 2i\epsilon r_0(z)t(z)r_0(\bar{z}). \quad (7.68)$$

Дифференцируя выражение

$$sp \ln \frac{h - z}{h_0 - z} \frac{h_0 - z}{h - z}, \quad z = E + ie,$$

относительно  $E$ , придем к заключению, что для  $\omega(z)$  справедливо представление

$$2i\omega(z) = \frac{\partial}{\partial E} sp \ln \tilde{s}(z).$$

С другой стороны, в силу унитарности оператора  $\tilde{s}(z)$  правую часть этого равенства можно представить в виде следа:

$$2i\omega(z) = sp \tilde{s}^*(z) \frac{\partial \tilde{s}(z)}{\partial E}. \quad (7.69)$$

При этом для оператора  $\tilde{s}(z)$  можно использовать представление (7.68). Данное соотношение будем называть *основной подготовительной формулой*.

Перестроим теперь правую часть (7.69) таким образом, чтобы предел  $\omega_+(E)$  можно было бы непосредственно выразить в терминах оператора рассеяния.

Введем ряд новых обозначений. Вместо оператора рассеяния в этой задаче удобно использовать *матрицу рассеяния*, которая была определена в § 6 главы II. В случае системы двух тел это — интегральный оператор  $s(E)$ , который действует в гильбертовом пространстве функций, квадратично интегрируемых на единичной сфере  $L_2(S^{(2)})$ . Оператор  $s(E)$  является унитарным при каждом значении энергии  $E$ . Ядро матрицы рассеяния  $s(\hat{p}, \hat{p}', E)$  выражается через  $T$ -матрицу на энергетической поверхности равенством

$$s(\hat{p}, \hat{p}', E) = \delta(\hat{p}, \hat{p}') - \pi i \sqrt{E} t(\sqrt{E} \hat{p}, \sqrt{E} \hat{p}', E + i0). \quad (7.70)$$

Через  $\frac{ds(E)}{dE}$  мы будем обозначать производную  $S$ -матрицы по параметру  $E$ . Она задается ядром (7.70), про-

дифференцированным относительно  $E$  при фиксированных  $\hat{p}$  и  $\hat{p}'$ .

Обозначим через  $\nabla_0 t(z)$  оператор, задаваемый ядром

$$\bar{\nabla}_0 t(p, p', z) = |p|^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial p^2} + \frac{\partial}{\partial p'^2} + \frac{\partial}{\partial E} \right) |p| t(p, p', E + i\epsilon),$$

где дифференцирование ведется по радиальным переменным  $p^2$  и  $p'^2$  при фиксированных угловых  $\hat{p}$  и  $\hat{p}'$ . Отметим, что на энергетической поверхности  $p^2 = p'^2 = E$  ядро оператора  $\nabla_0 t(E + i0)$  совпадает с ядром оператора  $(i\pi \sqrt{E})^{-1} \frac{ds(E)}{dE}$ .

*Перестроенная подготовительная формула*, о которой мы говорили выше, имеет следующий вид:

$$2i\omega(z) = k_0(t(z)), \quad (7.71)$$

где операторная функция  $k_0(\bar{t}(z))$  определяется равенством

$$k_0(t(z)) = -2ie r_0^* \nabla_0 t - (2ie)^2 r_0 r_0^* t^* r_0 r_0^* \nabla_0 t. \quad (7.72)$$

Здесь в правой части опущена переменная  $z = E + i\epsilon$  и использовано равенство  $r_0(\bar{z}) = r_0^*(z)$ .

Отсюда немедленно вытекает искомая формула следа. Действительно, переходя в соотношении (7.71) к пределу  $\epsilon \downarrow 0$  и учитывая соотношение

$$2ie r_0(E + i\epsilon) r_0^*(E + i\epsilon) \rightarrow 2\pi i \delta(p^2 - E), \quad (7.73)$$

мы выражим  $\omega_+(E)$  через  $T$ -матрицу на энергетической поверхности:

$$\begin{aligned} 2i\omega_+(E) &= -2i\pi \int dp \delta(p^2 - E) E^{-1/2} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial E} E^{1/2} t(\sqrt{E} \hat{p}, \sqrt{E} \hat{p}, E + i0) + \\ &+ (2i\pi)^2 \int dp dp' \delta(p^2 - E) \times \\ &\times \delta(p'^2 - E) \overline{t(p, p', E + i0)} \times \\ &\times E^{-1/2} \frac{\partial}{\partial E} E^{1/2} t(\sqrt{E} \hat{p}, \sqrt{E} \hat{p}', E + i0). \end{aligned} \quad (7.74)$$

Это соотношение можно записать следующим образом в терминах  $S$ -матрицы:

$$\omega_+(E) = \frac{1}{2i} \operatorname{sp} S^*(E) \frac{ds(E)}{dE}. \quad (7.75)$$

След в данном случае понимается как след интегрального оператора в  $L_2(S^{(2)})$ , т. е.

$$\operatorname{sp} A = \int d\hat{p} A(\hat{p}, \hat{p}).$$

Итак, нам осталось проверить соотношение (7.71). Заметим прежде всего, что основную подготовительную формулу (7.69) можно переписать в виде

$$2i\omega(z) =$$

$$= -2ie \frac{\partial}{\partial E} \operatorname{sp} r_0 r_0^* t - (2ie)^2 \operatorname{sp} r_0 r_0^* t^* \frac{\partial}{\partial E} r_0 r_0^* t. \quad (7.76)$$

Действительно, это вытекает из равенств

$$\begin{aligned} \operatorname{sp} r_0 t^* r_0^* \frac{\partial}{\partial E} r_0 t r_0^* &= \operatorname{sp} r_0 r_0^* t^* \frac{\partial}{\partial E} r_0 r_0^* t = \\ &= \operatorname{sp} r_0 t^* r_0 r_0^* t r_0^{*2} - \operatorname{sp} r_0 r_0^* t^* r_0 r_0^{*2} t = 0, \end{aligned}$$

где использовано свойство перестановочности операторов  $t$  и  $t^*$ :

$$t r_0 r_0^* t^* = t^* r_0 r_0^* t. \quad (7.77)$$

Рассмотрим подробно первый член в (7.76):

$$-2ie \frac{\partial}{\partial E} \operatorname{sp} r_0 r_0^* t = \frac{\partial}{\partial E} \int dp \frac{-2ie}{(p^2 - E)^2 + \varepsilon^2} t(p, p, E + ie).$$

Введем сферические переменные интегрирования  $|p|$ ,  $\hat{p}$ , так что  $dp = p^2 d|p| \wedge d\hat{p}$ . Дифференцируя первый множитель, перейдем к дифференцированию по  $p^2$ :

$$\frac{\partial}{\partial E} \frac{1}{(p^2 - E)^2 + \varepsilon^2} = -\frac{\partial}{\partial p^2} \frac{1}{(p^2 - E)^2 + \varepsilon^2},$$

и проинтегрируем по частям относительно  $p^2$ . В результате этого преобразования немедленно придем к первому слагаемому формулы (7.74). Аналогичное преобразование во втором члене (7.76) дает

$$\begin{aligned} -(2ie)^2 \operatorname{sp} r_0 r_0^* t^* r_0 r_0^* \nabla_0 t + (2ie)^2 \operatorname{sp} r_0 r_0^* t^* r_0 r_0^* \partial_2 t - \\ -(2ie)^2 \operatorname{sp} r_0 r_0^* (\partial_2 t^*) r_0 r_0^* t. \end{aligned}$$

Символ  $\partial_2$  означает дифференцирование ядра  $t(p, p', z)$  относительно «энергетической» переменной  $p^2$  по второ-

му аргументу  $p'^2$ :

$$\begin{aligned}\partial_2 t(p, p', z) &= \frac{\partial}{\partial p'^2} t(p, p', z); \\ \partial_2 t^*(p, p', z) &= \frac{\partial}{\partial p'^2} \overline{t(p', p, z)}.\end{aligned}\quad (7.78)$$

Слагаемые, содержащие производную  $\partial_2$ , можно представить в виде

$$(2ie)^2 \operatorname{sp} r_0 r_0^* \partial_2 t^* r_0 r_0^* t - (2ie)^2 \operatorname{sp} (\partial_2 t r_0 r_0^* t^*) r_0 r_0^*,$$

и в силу (7.77) эта сумма равна нулю. В результате мы приходим к представлению (7.74).

Формула следа (7.75) представляет собой главный результат проведенных рассуждений. Подставляя (7.75) в интеграл (7.63), мы явно выразим второй групповой интеграл через матрицу рассеяния. На этом мы закончим обсуждение второго группового интеграла.

**Подготовительные формулы для  $N$ -го группового интеграла.** Рассмотрим след

$$\Omega^{(N)}(z) = \operatorname{sp} \operatorname{Im} [R^{(N)}(z)]_c.$$

Если переменная  $z$  выходит на вещественную ось, величина  $\Omega^{(N)}(z)$  имеет конечный предел (7.64), который используется в формуле (7.63).

Рассмотрим далее унитарные операторы

$$\tilde{S}(z) = \frac{H - \bar{z}}{H - z} \frac{H_0 - z}{H_0 - \bar{z}}, \quad \tilde{S}_{a_k}(z) = \frac{H_{a_k} - \bar{z}}{H_{a_k} - z} \frac{H_0 - z}{H_0 - \bar{z}}. \quad (7.79)$$

Здесь и далее мы опускаем индекс  $N$  в обозначениях операторов. Как и в системе двух частиц, легко проверяются представления

$$\begin{aligned}\tilde{S}(z) &= I - 2\pi i R_0(z) T(z) R_0^*(z), \\ \tilde{S}_{a_k}(z) &= I - 2\pi i R_0(z) T_{a_k}(z) R_0^*(z).\end{aligned}\quad (7.80)$$

Обозначим через  $[\ln \tilde{S}(z)]_c$  связную часть оператора  $\ln \tilde{S}(z)$ . Она дается равенством (7.62), где операторы  $e^{-\beta H} - e^{-\beta H_0}$  и  $e^{-\beta H_a} - e^{-\beta H_0}$  следует заменить соответственно операторами  $\ln \tilde{S}(z)$  и  $\ln \tilde{S}_{a_k}(z)$ . Беря операторы  $\tilde{S}(z)$  и  $\tilde{S}_{a_k}(z)$  в форме (7.76) и дифференцируя каждое слагаемое следа связной части  $\operatorname{sp} [\ln \tilde{S}(z)]_c$  относительно  $E$ ,

получим равенство

$$2i\Omega(z) = \frac{\partial}{\partial E} \operatorname{sp} [\ln \tilde{S}(z)]_c.$$

Учитывая, наконец, что операторы  $\tilde{S}(z)$  и  $\tilde{S}_{a_k}(z)$  унитарны, получим следующую основную подготовительную формулу:

$$2i\Omega(z) = \operatorname{sp} \left[ \tilde{S}^*(z) \frac{\partial \tilde{S}(z)}{\partial E} \right]_c, \quad (7.81)$$

где  $z = E + ie$ ,

$$\left[ \tilde{S}^* \frac{\partial S}{\partial E} \right]_c = \sum_a (-1)^i i^{n_i-1} \left( \sum_i n_i - 1 \right)! \tilde{S}_a^* \frac{\partial \tilde{S}_a}{\partial E}. \quad (7.81')$$

Прежде чем продолжить обсуждение этой формулы, сделаем предположение, что оператор энергии системы  $N$  тел  $H$ , как и операторы энергии подсистем  $H_{a_k}$ , не имеет связанных состояний. Это предположение не отражается на существе дела — все рассуждения легко обобщаются и на общий случай. Однако оно избавит нас от необходимости вводить многочисленные громоздкие обозначения.

Дальнейшее преобразование основной подготовительной формулы можно провести по такой же схеме, как и в случае двух частиц. Во всех слагаемых (7.81) следует использовать представления (7.80). При вычислении следа получившегося выражения нужно проинтегрировать по частям относительно  $P^2$ , чтобы перенести производную с ядра  $\frac{\partial}{\partial E} R_0 R_0^*$  на ядра  $T$  и  $T_{a_k}$ . В результате этих преобразований получим подготовительную формулу

$$2i\Omega(z) = \operatorname{sp} [K_o(T)]_c, \quad (7.82)$$

где через  $K_o(T)$  обозначены выражения, аналогичные (7.72):

$$K_o(T) = -2ie R_0 R_0^* \nabla_0 T - (2ie)^2 R_0 R_0^* T^* R_0 R_0^* \nabla_0 T.$$

При этом под  $\nabla_0 Q$  понимаются интегральные операторы, задаваемые ядрами

$$\begin{aligned} (\nabla Q)(P, P', z) &= \\ &= |P|^{-3N+5} \left( \frac{\partial}{\partial P^2} + \frac{\partial}{\partial P'^2} + \frac{\partial}{\partial E} \right) |P|^{3N+5} Q(P, P', E + ie). \end{aligned} \quad (7.83)$$

Следующий шаг — это предельный переход  $\epsilon \downarrow 0$  в формуле (7.82). Если действовать формально, по аналогии с системой двух тел, то мы должны заменить выражения  $i\epsilon R_0 R_0^*$  в пределе  $\epsilon \downarrow 0$   $\delta$ -функциями  $2\pi i(P^2 - E)$ , а ядра  $T$  и  $\nabla_0$  —  $T$ -матрицами рассеяния и их производными. В результате получилась бы простая формула

$$\Omega_+(E) = \frac{1}{2i} \operatorname{sp} \left( S^*(E) \frac{dS(E)}{dE} \right)_c, \quad (7.84)$$

где через  $S(E)$  обозначена матрица рассеяния для системы  $N$  тел и через  $\left( S^* \frac{dS}{dE} \right)_c$  — связная часть оператора  $S^* \frac{dS}{dE}$ , определенная согласно (7.81).

Однако такое формальное обобщение формулы (7.75) на случай многочастичных систем ошибочно. Дело в том, что соотношение (7.84) лишено непосредственного смысла. В то время как его левая сторона определяется формулой (7.64) вполне корректно, след, фигурирующий в правой части (7.84), содержит бесконечные слагаемые, которые взаимно не сокращаются. Возникновение этих бесконечностей обусловлено тем, что ядро оператора  $S(E) - I$ , которое с точностью до множителя совпадает с ядром  $T$ -матрицы на энергетической поверхности, в многочастичном случае содержит на диагонали сильные сингулярности. Мы видели в главе III, что эти сингулярности отвечают процессам многократного перерассеяния. Напомним, что в двухчастичном случае аналогичный оператор  $S(E) - I$  задается гладким ядром.

Естественно ожидать, что неопределенная величина  $\operatorname{sp} \left( S^* \frac{dS}{dE} \right)_c$  допускает какую-нибудь регуляризацию, после чего формула (7.84) приобретает смысл и становится справедливой. Однако и это предположение неверно. Дело в том, что в случае модельных операторов (3.74), рассмотренных в § 4 главы III, след  $\operatorname{sp} \left( S^* \frac{dS}{dE} \right)_c$  определен и даже равен нулю, в то время как след выражения (7.64) заведомо отличен от нуля. Мы увидим это в конце данного параграфа.

Таким образом, для вычисления  $\Omega_+(E)$  необходимо аккуратно рассмотреть все члены, которые не имеют следа, и выразить их через  $S$ -матрицы для подсистем. Мы покажем, как это можно сделать в случае задачи трех

тел. Осуществить подобную программу в общем случае системы  $N$  тел до сих пор не удалось.

**Формулы следа для системы трех частиц.** Итак, мы переходим к детальному исследованию предельного перехода  $\varepsilon \downarrow 0$  в формуле (7.82) в случае системы трех частиц. При этом удобно использовать сокращенные обозначения из главы III, которые приспособлены к этой задаче. Поэтому мы начнем с того, что выпишем соотношения, которые были получены в общем случае, на примере задачи трех тел.

Третий групповой интеграл дается формулой.

$$B_3 = \frac{1}{3! \lambda^3} \operatorname{sp} \left( e^{-\beta H} - e^{-\beta H_0} - \sum_{\alpha} (e^{-\beta H_{\alpha}} - e^{-\beta H_0}) \right).$$

Он выражается через предельные значения функции

$$\Omega(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{sp} \operatorname{Im} [R(z)]_c$$

на вещественной оси  $\Omega_+(E) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Omega(E + i\varepsilon)$  с помощью формулы (7.63). При этом связная часть резольвенты имеет вид

$$[R(z)]_c = R(z) - R_0(z) - \sum_{\alpha} (R_{\alpha}(z) - R_0(z)).$$

Интересно отметить, что, в отличие от оператора  $\operatorname{Im} [R(z)]_c$ , оператор  $[R(z)]_c$  следа не имеет из-за медленного убывания ядра. Основная подготовительная формула (7.81) в этих обозначениях выглядит следующим образом:

$$2i\Omega(z) = \operatorname{sp} \left( \tilde{S}^*(z) \frac{\partial \tilde{S}(z)}{\partial E} - \sum_{\alpha} \tilde{S}_{\alpha}^*(z) \frac{\partial \tilde{S}_{\alpha}(z)}{\partial E} \right), \quad (7.85)$$

где операторы  $\tilde{S}(z)$  и  $\tilde{S}_{\alpha}(z)$  выражаются через  $T$ -матрицы равенствами (7.80). Наконец, в подготовительной формуле (7.82) оператор  $[K_0(T)]_c$  дается равенством

$$[K_0(T)]_c = K_0(T) - \sum_{\alpha} K_0(T_{\alpha}),$$

где выражения  $K_0(T)$  и  $K_0(T_{\alpha})$  определены согласно (7.83) при  $N = 3$ .

Всюду далее мы считаем, что рассеяние является абсолютно упругим, т. е. что двухчастичные подсистемы не имеют связанных состояний. В этом случае матрица рас-

сения  $S(E)$  для системы трех тел представляет собой интегральный оператор, который действует в пространстве квадратично интегрируемых функций на единичной сфере в шестимерном пространстве  $L_2(S^{(5)})$ . Этот оператор задается сингулярным ядром

$$S(\hat{P}, \hat{P}', E) = \delta(\hat{P}, \hat{P}') - \pi i E^2 T(E^{1/2} \hat{P}, E^{1/2} \hat{P}', E + i0). \quad (7.86)$$

При этом энергия  $E$  может принимать только неотрицательные значения,  $E \geq 0$ . Видно, что это ядро включает в себя все особенности ядра  $T$ -матрицы  $T(P, P', z)$ . Аналогично, ядро матрицы рассеяния для оператора  $H_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) выражается через ядро двухчастичной  $T$ -матрицы на энергетической поверхности равенством

$$\begin{aligned} S_\alpha(\hat{P}, \hat{P}', E) &= \delta(\hat{P}, \hat{P}') - \pi i E^2 \delta(p_\alpha - p'_\alpha) \times \\ &\times t_\alpha \left( \sqrt{E - p_\alpha^2} \hat{k}_\alpha, \sqrt{E - p'_\alpha^2} \hat{k}'_\alpha, E - p_\alpha^2 + i0 \right). \end{aligned} \quad (7.86')$$

Удобно представить матрицы рассеяния  $S(E)$  и  $S_\alpha(E)$  в виде

$$S(E) = I - 2\pi i \hat{T}(E), \quad S_\alpha(E) = I - 2\pi i \hat{T}_\alpha(E), \quad (7.87)$$

где отделен единичный оператор. Выражения для ядер операторов  $\hat{T}(E)$  и  $\hat{T}_\alpha(E)$  через  $T$ -матрицы на энергетической поверхности получаются простым сопоставлением формул (7.86), (7.86') и (7.87).

Займемся теперь преобразованием подготовительной формулы (7.82). Упомянутые выше трудности предельного перехода в этой формуле связаны с тем, что ядра  $M_{\alpha\beta}$ , входящие в определение ядра  $T(P, P', z)$  (3.24), обладают трехчастичными сингулярностями (3.31). Если бы таких сингулярностей не существовало, то ядро оператора  $\left( S^* \frac{dS}{dE} \right)_c$  не имело бы особенностей на диагонали и мы могли бы использовать предельное соотношение

$$i\varepsilon R_0 R_0^* \rightarrow 2\pi i \delta(P^2 - E), \quad (7.88)$$

справедливое на гладких ограниченных функциях. В результате, как мы уже отмечали, получилась бы формула (7.84). Однако из-за особенностей ядер  $M_{\alpha\beta}$  пользоваться предельным соотношением (7.88), вообще говоря, нельзя.

Результат формального предельного перехода лишен смысла и требует регуляризации.

Посмотрим более подробно, какие особенности имеются в правой части (7.82). Наиболее сильные трехчастичные особенности ядер  $M_{\alpha\beta}$  и, соответственно, ядра  $T$ -матрицы  $T(P, P', z)$  обусловлены сингулярным вкладом ядер  $T_\alpha$  и  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$ , т. е. ядер свободных членов, и первых итераций компактных уравнений (3.28). Отделим их, полагая

$$T(z) = T_0(z) + \bar{T}(z),$$

где

$$T_0(z) = \sum_{\alpha} T_{\alpha} + \sum'_{\alpha, \beta} Q_{\alpha\beta}^{(0)}. \quad (7.89)$$

Через  $S_0(E)$  обозначим сингулярную часть матрицы рассеяния, которая получается, если подставить в (7.86) ядро  $T_0(P, P', z)$  вместо ядра  $T(P, P', z)$ . Далее мы будем детально изучать вклад этой части в формулы следа. С другой стороны, особенности ядра оставшейся части  $T$ -матрицы  $\bar{T}(z)$ , которые отвечают второй и третьей итерациям уравнений (3.28), являются слабыми, и они не отражаются на результате предельного перехода в формуле (7.82). В этом можно убедиться, используя явные формулы (3.40), (3.43) для таких особенностей. Таким образом, если предварительно отделить сингулярные члены (7.89), то в остальных слагаемых (7.82) можно осуществить непосредственный предельный переход  $\varepsilon \downarrow 0$ . В результате мы придем к следующей формуле следа:

$$\Omega_+(E) = \frac{1}{2i} \operatorname{sp} \left( S^* \frac{dS}{dE} - S_0^* \frac{dS_0}{dE} \right) + \frac{1}{2i} \Delta(E), \quad (7.90)$$

где

$$\Delta(E) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{sp} \left( K_0(T_0) - \sum_{\alpha} K_0(T_{\alpha}) \right). \quad (7.91)$$

Эта формула, однако, не вполне удовлетворительна, так как, хотя  $S_0^* \frac{dS_0}{dE}$  и  $\Delta(E)$  выражаются через характеристики рассеяния, эти характеристики не сводятся к матрицам рассеяния. Точнее говоря, они содержат двухчастичные  $T$ -матрицы до четырехлинейных членов. К числу недостатков этой формулы следует отнести также то обстоятельство, что в операторе  $S_0^* \frac{dS_0}{dE}$  кроме истинно

сингулярных членов содержатся и регулярные члены, которые имеют след.

Заметим, далее, что регуляризацию следа оператора  $\left(S^* \frac{dS}{dE}\right)_c$  можно провести с помощью двухчастичных матриц рассеяния. Действительно, как мы показали в § 3 главы III, полюсные особенности ядра  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}(P, P', z)$  на энергетической поверхности содержатся в ядре  $T_{\alpha\beta}(P, P')$  (3.79). Поэтому вместо оператора  $S_0(E)$  в (7.90) можно использовать явно выраженный через двухчастичные матрицы рассеяния оператор  $\tilde{S}_0(E)$ . Последний определяется формулами (7.89) и (7.86), где следует взять ядро  $T_{\alpha\beta}(P, P')$  вместо  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}(P, P', z)$ . Регуляризованная таким образом формула будет иметь вид

$$\Omega_+(E) = \frac{1}{2i} \operatorname{sp} \left( S^* \frac{dS}{dE} - \tilde{S}_0 \frac{d\tilde{S}_0}{dE} \right) + \frac{1}{2i} \operatorname{sp} \tilde{A}_0(E), \quad (7.92)$$

где оператор  $\tilde{A}_0(E)$  определяется соотношением

$$\operatorname{sp} \tilde{A}_0(E) = \operatorname{sp} \left( \tilde{S}_0^* \frac{d\tilde{S}_0}{dE} - S_0^* \frac{dS_0}{dE} \right) + \Delta(E). \quad (7.93)$$

Априори неочевидно, что оператор  $\tilde{A}_0(E)$  можно выразить через двухчастичные матрицы рассеяния. Однако это верно, и настоящее утверждение является основным результатом данного параграфа. Ниже, хотя и в несколько модифицированном виде, дано явное выражение для этого оператора.

Произведение  $\tilde{S}_0^* \frac{d\tilde{S}_0}{dE}$  сингулярных операторов содержит и регулярные члены, имеющие след. Упомянутая модификация состоит в том, что в операторе  $\tilde{S}_0^* \frac{d\tilde{S}_0}{dE}$  сохраняются лишь «истинно» сингулярные члены, а остальные, для которых имеет смысл взять след, объединяются с величиной  $\operatorname{sp} \tilde{A}_0(E)$ . В конечном счете мы получим формулу следа

$$\Omega_+(E) = \frac{1}{2i} \operatorname{sp} \left( \left( S^* \frac{dS}{dE} \right)_c - A(E) \right) + \frac{1}{2i} \operatorname{sp} \tilde{A}(E), \quad (7.94)$$

в которой операторы  $A(E)$  и  $\tilde{A}(E)$  явно выражены через двухчастичные матрицы рассеяния. Эта формула — главный результат данного параграфа. Она дает возможность

выразить третий групповой интеграл через матрицы рас-  
сения.

Прежде чем перейти к выводу этой формулы, мы  
опишем операторы  $A(E)$  и  $\bar{A}(E)$ . Начнем с оператора  
 $A(E)$ , регуляризующего след (7.94). При этом удобно ис-  
пользовать новый оператор  $\hat{T}_{\alpha\beta}$ , который включает осо-  
бенности ядра  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}(P, P', z)$ , но, в отличие от  $T_{\alpha\beta}$ , со-  
держит симметричную комбинацию аргументов ядер  $t_\alpha$   
и  $t_\beta$  на энергетической поверхности. Именно, положим

$$\hat{T}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (T_{\alpha\beta}^{(+)} + T_{\alpha\beta}^{(-)}),$$

где  $T_{\alpha\beta}^{(\pm)}$  — интегральные операторы, задаваемые ядрами

$$T_{\alpha\beta}^{(+)}(\hat{P}, \hat{P}', E) = -\frac{2E^2 |s_{\alpha\beta}|^{-3}}{(E_\alpha E_{\beta\alpha})^{1/2}} \frac{\hat{t}_\alpha(\hat{k}_\alpha, \hat{k}'_{\alpha\beta}, E_\alpha) \hat{t}_\beta(\hat{k}_{\beta\alpha}, \hat{k}_\beta, E_{\beta\alpha})}{E'_{\alpha\beta} - E_\alpha - i0}, \quad (7.95)$$

$$T_{\alpha\beta}^{(-)}(\hat{P}, \hat{P}', E) = -\frac{2E^2 |s_{\alpha\beta}|^{-3}}{(E'_{\alpha\beta} E'_\beta)^{1/2}} \frac{\hat{t}_\alpha(\hat{k}_\alpha, \hat{k}'_{\alpha\beta}, E'_{\alpha\beta}) \hat{t}_\beta(\hat{k}_{\beta\alpha}, \hat{k}_\beta, E'_\beta)}{E_{\beta\alpha} - E'_\beta - i0}, \quad (7.95')$$

где  $k'_{\alpha\beta} \equiv k_\alpha(p_\alpha, p'_\beta)$ ,  $E'_{\alpha\beta} = k'^2_{\alpha\beta}$ ,  $k_{\beta\alpha} = k_\beta(p_\alpha, p'_\beta)$ ,  $E_{\beta\alpha} =$   
 $= k_{\beta\alpha}^2$  и  $k_\alpha^2 + p_\alpha^2 = k_\beta^2 + p'_\beta^2 = E$ . Через  $\hat{t}_\alpha(\hat{k}, \hat{k}', E)$  обозначено ядро оператора  $\hat{t}_\alpha$ , который связан с парной  
 $S$ -матрицей соотношением

$$s_\alpha = I - 2\pi i \hat{t}_\alpha.$$

В этих обозначениях оператор  $A(E)$  дается равен-  
ством

$$A(E) = 2\pi i B(E) + C(E), \quad (7.96)$$

где

$$B(E) = \sum_{\alpha \neq \beta} \left[ \hat{T}_{\alpha\beta}^* \frac{d}{dE} S_\alpha S_\beta - (S_\alpha^* + S_\beta^* - I) \frac{d}{dE} \hat{T}_{\alpha\beta} \right], \quad (7.96')$$

$$C(E) = \sum_{\alpha \neq \beta} (S_\alpha^* - I) \frac{dS_\beta}{dE}.$$

Описание оператора  $\tilde{A}(E)$  потребует новых обозначений. В частности, он содержит специальный символ дифференцирования  $\partial_\alpha$ . Это дифференцирование, определяемое своим действием на ядра, применяется к суммам произведений ядер  $\hat{t}_\alpha$  и комплексно сопряженных ядер и к интегралам от соответствующих произведений. На произведение операция  $\partial_\alpha$  действует как дифференцирование, причем каждый множитель вида  $\hat{t}_\alpha(\hat{k}_\alpha, \hat{k}'_\alpha, E_\alpha)$  дифференцируется по  $E_\alpha$ . На остальные множители, хотя бы зависящие от  $E_\alpha$ , это дифференцирование действует как на постоянные. В применении к интегралам операция  $\partial_\alpha$  считается действующей по тому же правилу на подынтегральное выражение. Композицию  $\partial_\alpha \frac{d}{dE}$  следует понимать как

$$\partial_\alpha \frac{d}{dE} = \frac{d}{dE} \partial_\alpha + \frac{1}{E} \partial_\alpha.$$

Через  $\partial$  обозначается сумма  $\sum_\alpha \partial_\alpha$ .

Пусть, далее, некоторый оператор  $Q$  задается сингулярным ядром  $Q_0 \varphi$ , где  $Q_0$  — гладкое ядро, а  $\varphi$  — функция одного из двух видов:

$$\varphi_1 = (E'_{\alpha\beta} - E_\alpha \mp i0)^{-1}, \quad \varphi_2 = \delta(E'_{\alpha\beta} - E_\alpha).$$

В таком случае под  $[Q]$ , понимается регуляризованный оператор, задаваемый ядром  $Q_0$ .

В этих обозначениях имеет место формула

$$\tilde{A}(E) = \frac{1}{4\pi i} \partial [C]_r + i\pi \left( \frac{1}{E} \frac{d}{dE} E - \frac{1}{2} \partial \right) B_R + i\pi \tilde{B}_R, \quad (7.97)$$

где через  $B_R$  и  $\tilde{B}_R$  обозначены операторы, которые представляют собой некоторую специальную регуляризацию оператора  $B(E)$ :

$$B_R = \sum_{\alpha \neq \beta} [\hat{T}_{\alpha\beta}]_r^* \frac{d}{dE} S_\alpha S_\beta - (S_\alpha^* + S_\beta^* - I) \left[ \frac{d}{dE} \hat{T}_{\alpha\beta} \right]_r, \quad (7.98)$$

$$\tilde{B}_R = \sum_{\alpha \neq \beta} -[\hat{T}_{\alpha\beta}]_r^* \partial \frac{d}{dE} S_\alpha S_\beta - (S_\alpha^* + S_\beta^* - I) \left[ \partial \frac{d}{dE} \hat{T}_{\alpha\beta} \right]_r, \quad (7.98')$$

Итак, мы описали все операторы в формуле следа (7.94). Наметим план вывода этой формулы. Сначала мы отделим из оператора  $S_0^* \frac{dS_0}{dE}$  в (7.90) регулярные слагаемые, имеющие след. В результате получим формулу

$$\Omega_+(E) = \frac{1}{2i} \operatorname{sp} \left( \left( S^* \frac{dS}{dE} \right)_c - A^{(1)}(E) \right) + \frac{1}{2i} \Delta^{(1)}(E). \quad (7.99)$$

При этом на первом шаге мы оставим в регуляризующем операторе  $A^{(1)}(E)$  наряду с членами, которые выражаются через парные  $S$ -матрицы, также и слагаемые, в которых участвуют ядра  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}(P, P', E)$ , которые не сводятся к последним. На следующем этапе мы вычислим величину  $\Delta^{(1)}(E)$ , которая определяется согласно формуле

$$\Delta^{(1)}(E) = \Delta(E) - \operatorname{sp} \left( S_0^* \frac{dS_0}{dE} - \sum_{\alpha} S_{\alpha}^* \frac{dS_{\alpha}}{dE} - A^{(1)}(E) \right). \quad (7.100)$$

Эта величина, как и  $A^{(1)}(E)$ , требует для своего описания парных  $T$ -матриц вне энергетической поверхности. Затем мы введем оператор  $A(E)$ , явно выраженный через парные  $S$ -матрицы, и перейдем к формуле (7.94), где оператор  $\tilde{A}(E)$  определяется соотношением

$$\operatorname{sp} \tilde{A} = \operatorname{sp} (A(E) - A^{(1)}(E)) + \Delta^{(1)}(E). \quad (7.101)$$

Наконец, мы покажем, что след  $\operatorname{sp} (A(E) - A^{(1)}(E))$  с точностью до слагаемого  $-\Delta^{(1)}(E)$  выражается в терминах двухчастичных матриц рассеяния.

Действуя в рамках этой программы, мы будем приводить лишь примеры наиболее типичных преобразований. Вычисления, которые сводятся к повторению отработанных на таких примерах приемов, мы будем опускать.

**Вычисление  $\Delta^{(1)}(E)$ .** Рассмотрим оператор  $S_0^* \frac{dS_0}{dE}$ , регуляризующий след в формуле (7.90). Этот оператор равен линейной комбинации произведений парных  $T$ -матриц  $T_{\alpha}$  и сопряженных к ним до четырехлинейных членов. Будем называть такие  $m$ -линейные произведения однородными  $T$ -полиномами, а их линейные комбинации при  $m \leq n - T$ -полиномами  $n$ -й степени.

Введем в рассмотрение оператор  $A^{(1)}(E)$ , который содержит «истинно» сингулярные члены оператора  $S_0^* \frac{dS_0}{dE}$ .

В этот оператор входят все однородные  $T$ -полиномы первой и второй степеней, а среди однородных  $T$ -полиномов третьей и четвертой степеней нужно взять лишь те, в которых не встречается трех различных индексов  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ . Таким образом,  $A^{(1)}(E)$  имеет вид суммы, аналогичной (7.96):

$$A^{(1)}(E) = 2\pi i B^{(1)}(E) + C(E),$$

где

$$B^{(1)}(E) = \sum_{\alpha \neq \beta} \left( \widehat{Q}_{\alpha\beta}^* \frac{d}{dE} S_\alpha S_\beta - (S_\alpha^* + S_\beta^* - I) \frac{d}{dE} \widehat{Q}_{\alpha\beta} \right).$$

Здесь через  $\widehat{Q}_{\alpha\beta}$  обозначен вклад ядра  $Q_{\alpha\beta}^{(0)}(P, P', z)$  в  $S$ -матрицу, определяемый формулой (7.86).

Отметим, что слагаемые  $A^{(1)}(E)$  четвертой степени взяты в виде  $\widehat{Q}_{\alpha\beta}^* \frac{d}{dE} \widehat{T}_\alpha \widehat{T}_\beta$ , где оператор  $\widehat{T}_\alpha \widehat{T}_\beta$ , который стоит на месте оператора  $\widehat{Q}_{\alpha\beta}$  из (7.92), уже явно выражен через парные  $S$ -матрицы. При этом разность  $Q_{\alpha\beta}^* \frac{d}{dE} Q_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta}^* \frac{d}{dE} \widehat{T}_\alpha \widehat{T}_\beta$ , которая имеет след, включена в первое слагаемое (7.99).

Ядро оператора  $A^{(1)}(E)$  на диагонали сингулярно, так что этот оператор следа не имеет. При этом различные слагаемые имеют особенности следующих типов. Ядра слагаемых второй степени  $\widehat{T}_\alpha^* \frac{d}{dE} \widehat{T}_\beta$  обращаются в бесконечность, как  $(\delta(x))^2$ . Все остальные слагаемые — как  $(x \pm i0)^{-1}\delta(x)$ . Взаимных же сокращений этих бесконечных членов, вообще говоря, не происходит. (Исключение составляет упомянутая выше модель, где переменные делятся и все операторы коммутируют между собой.)

Вернемся теперь к подготовительной формуле (7.82), где еще не выполнен предельный переход  $\varepsilon \downarrow 0$ . Обозначим через  $\Delta_1(E + i\varepsilon)$  слагаемые  $sp[K_0(T)]_c$ , которые в пределе  $\varepsilon \downarrow 0$  порождают величину  $\Delta^{(1)}(E)$  из (7.99). Эта величина имеет вид следа  $T$ -полинома четвертой степени

$$\Delta_1 = \sum_{i=2}^4 \Delta^{(i)} + \sum_{i=2}^3 \widetilde{\Delta}^{(i)}, \quad (7.102)$$

где  $\Delta^{(4)}$  — след однородных  $T$ -полиномов четвертой степени:

$$\Delta^{(4)} = (2i\varepsilon)^3 \sum_{\alpha \neq \beta} sp R_0 R_0^* Q_{\alpha\beta}^* R_0 R_0^* \nabla_0 (T_\alpha R_0 R_0 T_\beta), \quad (7.103)$$

$\Delta^{(3)}$  и  $\tilde{\Delta}^{(3)}$  — следы двух типов  $T$ -полиномов третьей степени:

$$\begin{aligned}\Delta^{(3)} = & - (2ie)^2 \sum_{\alpha \neq \beta} \operatorname{sp} R_0 R_0^* (T_\alpha^* R_0 R_0^* V_0 Q_{\alpha\beta} + \\ & + T_\beta^* R_0 R_0^* V_0 Q_{\alpha\beta}), \\ \tilde{\Delta}^{(3)} = & - (2ie)^2 \sum_{\alpha \neq \beta} \operatorname{sp} R_0 R_0^* (Q_{\alpha\beta}^* R_0 R_0^* V_0 T_\alpha + \\ & + Q_{\alpha\beta}^* R_0 R_0^* V_0 T_\beta),\end{aligned}$$

и  $\Delta^{(2)}$  и  $\tilde{\Delta}^{(2)}$  — следы двух типов слагаемых второй степени:

$$\begin{aligned}\Delta^{(2)} = & - 2ie \sum_{\alpha \neq \beta} \operatorname{sp} R_0 R_0^* V_0 Q_{\alpha\beta}, \\ \tilde{\Delta}^{(2)} = & - (2ie)^2 \sum_{\alpha \neq \beta} R_0 R_0^* T_\alpha^* R_0 R_0^* V_0 T_\beta.\end{aligned}$$

Если бы мы могли сделать формальный переход  $\varepsilon \downarrow 0$ , то величина  $\Delta_1(E + ie)$  перешла бы в след оператора  $A^{(1)}(E)$ . Мы, однако, не можем выполнить такой переход, поскольку в каждом слагаемом (7.102) имеются выражения, которые в подходящих переменных принимают вид

$$\frac{\varepsilon^2}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} \text{ и } \frac{\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)(x \pm ie)}. \quad (7.104)$$

При формальном предельном переходе они порождают указанные выше расходимости типа  $(\delta(x))^2$  и  $\delta(x)(x \pm ie)^{-1}$  оператора  $A^{(1)}(E)$ . С другой стороны, как мы отмечали, функция  $\Delta_1(E + ie)$  все же имеет конечный предел при  $\varepsilon \downarrow 0$ . Чтобы вычислить этот предел, необходимо избавиться от сингулярных членов (7.104). Мы сделаем это следующим образом.

К каждому слагаемому применим тождество

$$2ie(x^2 + \varepsilon^2)^{-1} = (x - ie)^{-1} - (x + ie)^{-1}$$

и рассмотрим по отдельности выражения, содержащие знаменатели  $(x + ie)^{-1}(x - ie)^{-1}$  и  $(x \pm ie)^{-2}$ . Выражения второго типа при  $\varepsilon \downarrow 0$  содержат хорошо определенные обобщенные функции  $(x \pm ie)^{-2}$  и, очевидно, имеют конечные пределы. Все же не имеющие предела слагаемые принадлежат к первому типу. Используя циклическую перестановочность операторов под знаком следа и применяя подходящим образом тождество Гильберта, можно

убедиться, что все слагаемые, содержащие функции  $(x^2 + \varepsilon^2)^{-1}$ , взаимно уничтожаются при  $\varepsilon \neq 0$ . Важно, что эти сокращения происходят как среди однородных  $T$ -полиномов одинаковой степени, так и среди  $T$ -полиномов различных степеней. При этом понижение степени  $T$ -полинома производится с помощью тождества Гильберта. Подчеркнем, что такой механизм сокращений не работает в случае оператора  $A^{(1)}(E)$ , когда уже выполнен предельный переход  $\varepsilon \downarrow 0$ . В этом случае мы не можем интегрировать ядра по диагонали — все они обращаются в бесконечность. Поэтому не удается циклически представить эти операторы и расположить их так, чтобы применить тождество Гильберта. При  $\varepsilon \neq 0$ , однако, такие операции законны.

В результате вычислений по указанной схеме мы получим представление для  $\Delta_1(E)$ , в котором каждое слагаемое выдерживает предельный переход  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Это представление имеет следующий вид:

$$\Delta_1(\tilde{E}) = \tilde{\Delta}_1^{(3)} + \tilde{\Delta}_2^{(3)} + \tilde{\Delta}_1^{(2)} + \tilde{\Delta}_2^{(2)}. \quad (7.105)$$

Здесь через  $\tilde{\Delta}_i^{(3)}$  ( $i = 1, 2$ ) обозначены следы однородных  $T$ -полиномов третьей степени, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1^{(3)} &= 2\pi i \sum_{\alpha \neq \beta} \operatorname{sp} T_\alpha^{(-)} \varphi_0 [\nabla_0 (T_\alpha^{(+)} R_+ T_\beta^{(+)}) R_+ - \\ &\quad - \nabla_0 (T_\alpha^{(+)} R_- T_\beta^{(+)}) R_-], \\ \tilde{\Delta}_2^{(3)} &= 2\pi i \sum_{\alpha \neq \beta} \operatorname{sp} \varphi_0 T_\beta^{(-)} [R_+ \nabla_0 (T_\alpha^{(+)} R_+ T_\beta^{(+)}) - \\ &\quad - R_- \nabla_0 (T_\alpha^{(+)} R_- T_\beta^{(+)})], \end{aligned}$$

и через  $\tilde{\Delta}_i^{(2)}$  ( $i = 1, 2$ ) — следы однородных  $T$ -полиномов второй степени:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1^{(2)} &= \sum_{\alpha \neq \beta} \operatorname{sp} [R_+ \nabla_0 (T_\alpha^{(+)} R_+ T_\beta^{(+)}) - R_- \nabla_0 (T_\alpha^{(+)} R_- T_\beta^{(+)})], \\ \tilde{\Delta}_2^{(2)} &= \sum_{\alpha \neq \beta} \operatorname{sp} (R_- T_\beta^{(-)} R_- \nabla_0 T_\alpha^{(+)} - R_+ T_\beta^{(-)} R_+ \nabla_0 T_\alpha^{(+)}) . \end{aligned}$$

В этих формулах через  $T_\alpha^{(\pm)}$  и  $R_\pm$  обозначены пределы операторов  $T_\alpha(E \pm i\varepsilon)$  и  $R_0(E \pm i\varepsilon)$  при  $\varepsilon = 0$ . Через  $\varphi_0$  обозначена операция умножения на  $\delta$ -функцию  $\delta(p^2 - E)$ :

$$(\varphi_0 f)(p) = \delta(p^2 - E)f(p).$$

Перейдем к обоснованию представления (7.105). Покажем сначала, как преобразуются однородные  $T$ -полиномы четвертой степени. Почленно продифференцируем последний множитель под знаком следа (7.93):

$$\begin{aligned} \nabla_0(T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta) = & \left( D_1 T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta + \frac{\partial}{\partial E} (T_\alpha R_0 R_0^*) T_\beta \right) + \\ & + \left( D_2 (T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta) + T_\alpha R_0 R_0^* \frac{\partial}{\partial E} T_\beta \right). \end{aligned} \quad (7.106)$$

Здесь, аналогично (7.78), через  $D_k Q$  обозначен оператор, задаваемый ядром  $Q(P, P', z)$ , продифференцированным по  $k$ -му энергетическому аргументу  $P^2$  или  $P'^2$ , например:

$$D_2 Q(P, P', z) \equiv \frac{\partial}{\partial P'^2} Q(P, P', z).$$

Соответственно этому равенству разобьем  $\Delta^{(4)}$  на две группы слагаемых. В слагаемых, которые порождаются первым членом (7.106), можно применить тождество Гильберта для оператора  $T_\beta$

$$2ie T_\beta R_0 R_0^* T_\beta^* = T_\beta^* - T_\beta,$$

расставив предварительно подходящим образом операторы под знаком следа. Эта группа слагаемых редуцируется тогда к следу однородного  $T$ -полинома третьей степени

$$-(2ie)^2 \sum_{\alpha \neq \beta} \operatorname{sp} R_0^* T_\alpha^* \left[ \left( D_1 + \frac{\partial}{\partial E} \right) T_\alpha R_0 R_0^* \right] (T_\beta^* - T_\beta).$$

В слагаемых второй группы можно применить тождество Гильберта для оператора  $T_\alpha$  и представить его в виде

$$-(2ie)^2 \sum_{\alpha \neq \beta} \operatorname{sp} T_\beta^* R_0^* (T_\alpha^* - T_\alpha) R_0 R_0^* \left( D_2 + \frac{\partial}{\partial E} \right) T_\beta.$$

Запишем далее производные операторов так, чтобы снова образовались выражения типа  $\nabla_0 Q$ :

$$\begin{aligned} \left( D_1 + \frac{\partial}{\partial E} \right) T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta = \\ = \nabla_0 (T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta) - T_\alpha R_0 R_0^* \left( D_2 + \frac{\partial}{\partial E} \right) T_\beta, \end{aligned}$$

$$\left( D_2 + \frac{\partial}{\partial E} \right) T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta = \\ = \nabla_0 (T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta) - \left( \left( D_1 + \frac{\partial}{\partial E} \right) T_\alpha R_0 R_0^* \right) T_\beta.$$

При этом в слагаемых, которые порождаются вторыми членами в правой части этих равенств, можно еще раз применить тождество Гильберта соответственно для операторов  $T_\alpha$  и  $T_\beta$ . В результате эти слагаемые редуцируются уже к следам  $T$ -полиномов второй степени.

Совершенно аналогичную процедуру следует применить для преобразования следа  $\tilde{\Delta}^{(3)}$ .

Можно убедиться, далее, что сумма  $\Delta^{(4)} + \tilde{\Delta}^{(3)}$  совпадает с суммой оставшихся слагаемых (7.102)  $\Delta^{(3)}$ ,  $\Delta^{(2)}$  и  $\tilde{\Delta}^{(2)}$  с точностью до перестановки операторов  $R_0$  и  $R_0 R_0^*$ . Исключение составляют выражения  $\varepsilon \nabla_0 (T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta)$  — они одинаковы в обоих случаях. Ясно поэтому, что если применить элементарное тождество  $2i\varepsilon R_0 R_0^* = R_0 - R_0^*$ , то все слагаемые, которые содержат смешанные комбинации  $R_0$  и  $R_0^*$ , взаимно уничтожаются. Это именно те слагаемые, которые порождают расходимости (7.104) в пределе  $\varepsilon \downarrow 0$ . Останутся только слагаемые, в которых имеется по два разделенных  $T$ -матрицами оператора  $R_0$  или  $R_0^*$ . В пределе  $\varepsilon \downarrow 0$  эти слагаемые можно объединить в искомое представление (7.105).

Займемся дальнейшим преобразованием этого представления. Заметим, что ядра операторов, которые стоят под знаком следа, в подходящих переменных имеют вид разности  $\frac{f(x)}{(x - i0)^n} - \frac{f(x)}{(x + i0)^n}$ ,  $n = 2, 3$ . Поэтому с помощью равенств

$$(x - i0)^{-n} - (x + i0)^{-n} = (-1)^{n-1} 2\pi i \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \delta(x)$$

аргументы этих ядер можно локализовать в окрестности энергетической поверхности. В этом плане мы преобразуем правую часть (7.105) на втором этапе.

Прежде чем описать результат такого преобразования, введем несколько новых обозначений. Рассмотрим ядро  $\frac{\partial}{\partial E} S_\alpha(\hat{P}, \hat{P}', E)$  оператора  $\frac{d}{dE} S_\alpha(E)$ . Справедливо следую-

щее представление:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial E} S_\alpha(\hat{P}, \hat{P}', E) = \\ = \delta(p_\alpha - p'_\alpha) \frac{k_\alpha^2}{E} \nabla_E t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, E - p_\alpha^2 + i0), \end{aligned}$$

где аргументы ядра  $t_\alpha$  лежат на энергетической поверхности  $k_\alpha^2 = k'^2_\alpha = E - p_\alpha^2$ . Через  $\nabla_E$  обозначен символ дифференцирования, который действует согласно правилу

$$\begin{aligned} \nabla_E t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, E - p_\alpha^2 + i0) = & \left( \frac{1}{2E} + \frac{k_\alpha^2}{E} \frac{\partial}{\partial k_\alpha^2} + \right. \\ & \left. + \frac{k'^2_\alpha}{E} \frac{\partial}{\partial k'^2_\alpha} + \left( 1 - \frac{p_\alpha^2}{E} \right) \frac{\partial}{\partial E} \right) t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, E - p_\alpha^2 + i0). \end{aligned}$$

При этом на энергетической поверхности  $P^2 = P'^2 = E$  ядра  $\nabla_E t_\alpha$  и  $\nabla_0 t_\alpha$  связаны соотношением

$$\begin{aligned} \nabla_E t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, E - p_\alpha^2 + i0) = \\ = \left( -\frac{3}{2E} + \nabla_0 \right) t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, E - p_\alpha^2), \quad k_\alpha^2 = k'^2_\alpha = E - p_\alpha^2. \end{aligned}$$

Символ  $\nabla_E$  удобен тем, что с его помощью можно естественно продолжить оператор  $\frac{d}{dE} S_\alpha(E)$  с энергетической поверхности. Именно, этому оператору мы будем сопоставлять оператор  $\nabla_E T_\alpha^{(+)}$ , действующий в гильбертовом пространстве  $L_2(\mathbf{R}^6)$  как интегральный оператор с ядром

$$\nabla_E T_\alpha^{(+)}(P, P', E) = \delta(p_\alpha - p'_\alpha) \nabla_E t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, E - p_\alpha^2 + i0).$$

При этом с помощью символов  $T_\alpha^{(\pm)}$ ,  $\nabla_E T_\alpha^{(\pm)}$  и  $\varphi_0$  можно описывать любые комбинации операторов  $S_\alpha(E)$  и  $\frac{d}{dE} S_\alpha(E)$ . Например, ядро произведения  $\hat{T}_\beta \frac{d}{dE} S_\alpha$  можно записать в виде

$$\hat{T}_\beta \frac{\partial}{\partial E} S_\alpha(\hat{P}, \hat{P}', E) = -i\pi E^2 T_\beta^{(+)} \varphi_0 \nabla_E T_\alpha^{(+)}(P, P', E),$$

где аргументы в правой части должны быть взяты на энергетической поверхности  $P^2 = P'^2 = E$ . Далее мы обозначаем  $T_\alpha^{(+)} \equiv T_\alpha$ ,  $T_\alpha^{(-)} \equiv T_\alpha^*$ . Это не вызывает недо-

разумений, так как операторы  $T_\alpha(E \pm ie)$  при  $e \neq 0$  ниже не фигурируют.

В этих обозначениях справедлива следующая формула:

$$\Delta_1 = \delta\Delta^{(3)} + \delta\Delta^{(2)}, \quad (7.107)$$

где  $\delta\Delta^{(3)}$  — след однородного  $T$ -полинома третьей степени

$$\delta\Delta^{(3)} =$$

$$= (2\pi i) \sum_{\alpha \neq \beta} \text{sp} \left( T_\alpha^* \varphi_0 \nabla_E T_\alpha \frac{d\varphi_0}{dE} T_\beta + \varphi_0 T_\beta^* \frac{d\varphi_0}{dE} T_\alpha \nabla_E T_\beta \right) \quad (7.108)$$

и  $\delta\Delta^{(2)}$  — след однородного  $T$ -полинома второй степени

$$\delta\Delta^{(2)} = 2\pi i \sum_{\alpha \neq \beta} \text{sp} T_\beta^* \frac{d\varphi_0}{dE} \nabla_E T_\alpha. \quad (7.109)$$

Подчеркнем, что величина  $\Delta_1(E)$  не выражается в терминах парных  $S$ -матриц, хотя аргументы ядер  $T$ -матриц и их производных и локализованы в окрестности энергетической поверхности. Дело в том, что под знаком следа стоят производные  $\delta$ -функции  $\delta(p^2 - E)$ . Это приводит к появлению производных парных  $T$ -матриц по третьему аргументу  $\frac{\partial}{\partial E} t(k, k', E + i0)$ , что требует задания  $T$ -матрицы и вне энергетической поверхности.

Чтобы получить представление (7.107), нужно действовать таким же образом, как и при выводе формулы (7.105). Отличие состоит лишь в том, что здесь параметр  $e$  уже взят равным нулю. Однако все операторы имеют след, так что мы можем расставлять сомножители под знаком следа подходящим способом и пользоваться тождеством Гильберта. При этом каждый член (7.95) следует сначала разбить на сумму слагаемых, в которых имеется производная только одного из ядер  $t_\alpha$  или  $R_0(R_0^*)$ . Затем из производных ядер  $t_\alpha$  следует образовать выражения  $\nabla_E T_\alpha$ . Степень же возникающих при этом в остатке  $T$ -полиномов понижается с помощью тождества Гильберта. В результате формируются величины  $\delta\Delta^{(3)}$  и  $\delta\Delta^{(2)}$ , а в остатке получается след однородных  $T$ -полиномов второй степени. Сумма слагаемых этого остатка, однако, равна нулю. Мы не будем приводить здесь кропотливые, хотя по существу и простые вычисления в доказательство формулы (7.107). Все приемы, необходимые для этого, мы уже описали выше.

Итак, мы описали все слагаемые в промежуточной формуле (7.99). Теперь, чтобы перейти к заключительному представлению (7.94), необходимо вычислить оператор  $\tilde{A}(E)$ , определяемый согласно (7.101). Конечно, это равенство не дает возможности определить  $\tilde{A}(E)$  однозначно. Выражение, которое фигурирует в (7.47), выбрано таким образом, чтобы форма оператора  $\tilde{A}(E)$  была бы возможно более близка форме оператора  $A(E)$ .

Вычислим след  $\text{sp}(A(E) - A^{(1)}(E))$ . Раскрывая неопределенность в ядре  $(A - A^{(1)})(\hat{P}, \hat{P}, E)$ , запишем след

$$\text{sp}(A(E) - A^{(1)}(E)) = \int d\hat{P} (A - A^{(1)})(\hat{P}, \hat{P}, E)$$

в виде суммы  $\pi i \text{sp } A^{(+)} + \pi i \text{sp } A^{(-)}$ , где знаки  $\pm$  соответствуют знакам оператора  $T_{\alpha\beta}^{(\pm)} - \bar{Q}_{\alpha\beta}$ , который входит в разность  $A - A^{(1)}$ . Справедливо следующее представление:

$$A^{(\pm)} = \sum_{\alpha \neq \beta} \text{sp} \left( \left[ \partial_{\alpha\beta}^{(\pm)} T_{\alpha\beta}^{(\pm)} \right]_r^* \frac{d}{dE} S_\alpha S_\beta - \right. \\ \left. - (S_\alpha^* + S_\beta^* - I) \left[ \partial_{\alpha\beta}^{(\pm)} \frac{d}{dE} T_{\alpha\beta}^{(\pm)} \right]_r \right). \quad (7.110)$$

Символ дифференцирования  $\partial_{\alpha\beta}^{(\pm)}$  определяется согласно  $\partial_{\alpha\beta}^{(+)} = -\partial_{\alpha 2} + \partial_{\beta 2} + \partial_{\beta 3}$ ,  $\partial_{\alpha\beta}^{(-)} = \partial_{\alpha 1} + \partial_{\alpha 2} - \partial_{\beta 1}$ .

Здесь значок  $\alpha$  ( $\beta$ ) показывает, что дифференцирование относится только к ядру  $t_\alpha(t_\beta)$ , а второй значок 1, 2, 3 указывает номер аргумента ядра  $t(k, k', z)$ , по которому ведется дифференцирование относительно  $k^2$ ,  $k'^2$  или  $E$ . Наметим план вычисления следа  $\text{sp}(A - A^{(1)})$ . Слагаемые  $\text{sp } A^{(+)}$  и  $\text{sp } A^{(-)}$  удобно исследовать по отдельности. В каждом выражении  $\text{sp } A^{(\pm)}$  необходимо последовательно рассматривать следы однородных  $T$ -полиномов в порядке убывания их степени. В таких слагаемых легко выделить члены, которые содержат полные производные  $\partial$  или  $\partial \frac{d}{dE}$ . Ясно, что данные члены выражаются через  $S$ -матрицы — они-то и дают вклад в ответ (7.97). В остатке образуются не « $S$ -матричные» слагаемые двух типов. В одних слагаемых можно применить тождество Гильберта и понизить степень  $T$ -полиномов. Они сокращаются с аналогичными слагаемыми, которые имеются

среди членов низших степеней. В слагаемых второго типа тождество Гильберта применить нельзя — в них участвуют производные  $T$ -матриц по переменным интегрирования. Такие слагаемые сокращаются между собой и с аналогичными слагаемыми, которые входят в определение величины  $\Delta_1(E)$ . В результате остаются только члены, которые описываются в терминах парных  $S$ -матриц. Их можно записать в компактном виде (7.97). При этом, чтобы убедиться в справедливости (7.97), удобно действовать в обратном порядке. Именно, спачала расписать правую часть (7.97) и упростить получившееся выражение с помощью условия унитарности для парных  $S$ -матриц. Затем следует сравнить это выражение с результатом преобразований по описанной выше схеме.

Посмотрим, как реализуется этот план, на примере первого слагаемого (7.110). Мы рассмотрим только след  $\text{sp } A^{(+)}$ . След  $\text{sp } A^{(-)}$  может быть вычислен совершенно аналогично.

Преобразуем сперва след слагаемого, которое порождается символом  $\partial_{\alpha 2}$ :

$$F_2 = - \sum_{\alpha \neq \beta} \text{sp} [\partial_{\alpha 2} T_{\alpha \beta}]_r^* \frac{d}{dE} S_\alpha S_\beta.$$

Перепишем это слагаемое в виде

$$F_2 = - \sum_{\alpha \neq \beta} \text{sp} [\hat{T}_\beta^* \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha^*]_r \left( S_\alpha \frac{d}{dE} S_\beta + \frac{dS_\alpha}{dE} S_\beta \right). \quad (7.111)$$

Здесь мы использовали определение символа  $\partial_{\alpha 2}$  и про-дифференцировали почленно произведение  $S_\alpha S_\beta$ . В обоих слагаемых (7.111) можно понизить степень  $T$ -полиномов. В первом слагаемом, отвечающем оператору  $S_\alpha \frac{d}{dE} S_\beta$ , применим тождество Гильберта для оператора  $T_\alpha$ . Получим

$$[\hat{T}_\beta^* \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha^*]_r S_\alpha = [\hat{T}_\beta^* \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha^* S_\alpha]_r = [\hat{T}_\beta^* \partial_{\alpha 1} \hat{T}_\alpha]_r.$$

Аналогично, во втором слагаемом понижаем степень  $T$ -полинома следующим образом:

$$S_\beta [\hat{T}_\beta^* \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha^*]_r = [S_\beta \hat{T}_\beta^* \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha^*]_r = [\hat{T}_\beta \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha^*]_r.$$

В результате для  $F_2$  получаем представление в виде следа

однородного  $T$ -полинома третьей степени:

$$F_2 = -2\pi i \sum_{\alpha \neq \beta} \text{sp} \left[ \partial_{\alpha 2} \hat{T}_2^* \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} \hat{T}_\beta + \partial_{\alpha 1} \hat{T}_\alpha \frac{dT_\beta}{dE} \hat{T}_\beta^* \right]_r. \quad (7.112)$$

Рассмотрим оставшиеся слагаемые первого члена (7.110):

$$F_3 = - \sum_{\alpha \neq \beta} \text{sp} \left[ (\partial_{\beta 2} + \partial_{\beta 3}) \hat{T}_\beta^* \hat{T}_\alpha^* \right]_r \left( \frac{dS_\alpha}{dE} S_\beta + S_\alpha \frac{dS_\beta}{dE} \right).$$

Степень  $T$ -полинома во второй группе, которая отвечает операторам  $S^\alpha \frac{d}{dE} S_\beta$ , можно снова понизить. Обозначим эту группу через  $\delta A_3$ . Имеем

$$\delta A_3 = 2\pi i \sum_{\alpha \neq \beta} \text{sp} \left[ \hat{T}_\alpha \frac{d\hat{T}_\beta}{dE} (\partial_{\beta 2} + \partial_{\beta 3}) \hat{T}_\beta^* \right]_r.$$

Первая группа слагаемых уже не сводится к слагаемым третьей степени. Здесь мы будем действовать иначе: выделим следы однородных  $T$ -полиномов четвертой степени, которые выражаются в терминах матрицы рассеяния, а остаток сведем к  $T$ -полиному третьей степени. Для этого можно воспользоваться соотношением

$$S_\beta (\partial_{\beta 2} + \partial_{\beta 3}) \hat{T}_\beta^* = 2\pi i \partial \hat{T}_\beta \hat{T}_\beta^* + (\partial_{\beta 1} + \partial_{\beta 3}) T_\beta. \quad (7.113)$$

Покажем, что оно справедливо. Мы будем проверять эквивалентную формулу

$$\begin{aligned} T_\beta \Phi_0 \left( \partial_{\beta 2} + \frac{d}{dE} \right) T_\beta^* &= 2\pi i \left( \partial_{\beta 1} + \partial_{\beta 2} + \partial_{\beta 3} + \frac{1}{2} h_\beta^{-2} \right) \times \\ &\quad \times T_\beta \Phi_0 T_\beta^* - \left( \partial_{\beta 1} + \frac{d}{dE} \right) T_\beta - \left( \partial_{\beta 2} + \frac{d}{dE} \right) T_\beta^*, \end{aligned}$$

где  $\partial_{\beta 2} T_2^* \equiv (\partial_{\beta 2} T_\beta)^*$  и  $h_\beta^{-2}$  — оператор умножения на функцию  $k_\beta^2$ .

Представим сначала оператор  $T_\beta \Phi_0 \frac{d}{dE} T_\beta^*$  в виде суммы

$$T_\beta \Phi_0 \frac{d}{dE} T_\beta^* = \frac{d}{dE} (T_\beta \Phi_0 T_\beta^*) - \frac{dT_\beta}{dE} \Phi_0 T_\beta^* - T_\beta \frac{d\Phi_0}{dE} T_\beta^*. \quad (7.114)$$

Первое слагаемое в правой части упростим с помощью тождества Гильберта:

$$2\pi i \frac{d}{dE} (T_\beta \Phi_0 T_\beta^*) = \frac{d}{dE} (T_\beta - T_\beta^*).$$

Рассмотрим далее ядро оператора  $T_\beta \frac{d}{dE} \Phi_0 T_\beta^*$ , которое имеет следующий вид:

$$\delta(p_\beta - p'_\beta) \int dk''_\beta t_\beta(k_\beta, k''_\beta, E - p_\beta^2 + i0) \times \\ \times \overline{t_\beta(k'_\beta, k''_\beta, E - p_\beta^2 + i0)} \frac{d}{dE} \delta(k''_\beta^2 + p_\beta^2 - E).$$

Перейдем под интегралом к дифференцированию  $\delta$ -функции по  $k''_\beta^2$  и проинтегрируем относительно  $k''_\beta^2$  по частям. Получим, что

$$T_\beta \frac{d\Phi_0}{dE} T_\beta^* = (\partial_{\beta 2} T_\beta) \Phi_0 T_\beta^* + T_\beta \Phi_0 \partial_{\beta 2} T_\beta^* + \frac{1}{2} T_\beta h_\beta^{-2} \Phi_0 T_\beta^*.$$

Подставим это равенство в (7.114) и добавим и вычтем в правой части оператор

$$\partial_{\beta 1} T_\beta \Phi_0 T_\beta^* = (2\pi i)^{-1} (\partial_{\beta 2} T_\beta^* - \partial_{\beta 1} T_\beta).$$

Производя очевидные сокращения, приедем к (7.113).

Итак, действуя по намеченной схеме, мы закончили преобразование следа однородных  $T$ -полиномов четвертой степени. Мы представили их в виде суммы членов двух типов. Первый — это след

$$-(2\pi i)^2 \sum_{\alpha \neq \beta} \text{sp} [T_{\alpha\beta}]^*_r \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} \partial \hat{T}_\beta,$$

который выражается в терминах  $S$ -матриц. Все остальные относятся по второму типу — они представляют собой следы  $T$ -полиномов третьей степени, и для их описания нужно задавать  $T$ -матрицы вне энергетической поверхности.

Совершенно аналогично можно преобразовать и все остальные слагаемые (7.110). Как мы уже отмечали, все члены, которые содержат  $T$ -матрицы вне энергетической поверхности и происходят от различных слагаемых (7.110), взаимно уничтожаются. Оставшиеся слагаемые, которые выражаются в терминах парных  $S$ -матриц, можно записать в компактной форме (7.97).

На этом мы закончим обоснование формулы следа (7.94).

**Простая модель.** В заключение этого параграфа мы опишем формулу следа в модельной задаче трех тел: две частицы взаимодействуют с бесконечно тяжелым центром. Мы детально рассматривали рассеяния в этой системе в § 4 главы III.

Переменные в этой задаче разделяются, и исследование функции  $\Omega_+(E)$  сводится к рассмотрению двухчастичных задач. При этом резольвента  $R(z)$  выражается через двухчастичные резольвенты с помощью контурного интеграла (2.12). Используя здесь формулы следа (7.75), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \Omega_+(E) &= \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^E dE' \operatorname{sp} s_1^*(E') \frac{ds_1}{dE} \cdot \operatorname{sp} s_2^*(E-E') \frac{ds_2(E-E')}{dE}. \end{aligned} \quad (7.115)$$

Ниже мы получим это соотношение непосредственно из общей формулы следа (7.94) с помощью предельного перехода  $m_3 \rightarrow \infty$ . Следует отметить, что рассматриваемая модель, по-видимому, является единственным примером трехчастичной системы, для которой существует след оператора  $\left( S^* \frac{dS}{dE} \right)_c$ .

Так как в модели  $S$ -матрица факторизуется,  $S = S_1 S_2$ , то след  $\operatorname{sp} \left( S^* \frac{dS}{dE} \right)_c$  равен нулю. Покажем, что оператор  $A(E)$  из (7.94), содержащий «истинно» сингулярные члены, здесь также равен нулю.

Проверим сначала, что в модели справедлива формула

$$T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} = (2\pi)^{-2} (S_\alpha - I) (S_\beta - I), \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (7.116)$$

Как мы уже отмечали, в рассматриваемой задаче переменные разделяются, поэтому операторы  $S_\alpha$  и  $S_\beta$  перестановочны. Заметим, далее, что при  $m_3 \rightarrow \infty$  справедливы равенства

$$k'_{\alpha\beta} = k'_\alpha, \quad k_{\beta\alpha} = k_\beta, \quad P^2 = k_\alpha^2 + k_\beta^2, \quad P'^2 = k'_\alpha^2 + k'_\beta^2.$$

Следовательно, для ядер операторов  $T_{\alpha\beta}^{(\pm)}$  имеем пред-

ставления

$$T_{\alpha\beta}^{(+)}(\hat{P}, \hat{P}', E) = -\frac{2E^2}{(E_\alpha E_\beta)^{1/2}} \frac{\hat{t}_\alpha(\hat{k}_\alpha, \hat{k}'_\alpha, E_\alpha) \hat{t}_\beta(\hat{k}_\beta, \hat{k}'_\beta, E_\beta)}{E'_\alpha - E_\alpha - i0},$$

$$T_{\alpha\beta}^{(-)}(\hat{P}, \hat{P}', E) = -\frac{2E^2}{(E'_\alpha E'_\beta)^{1/2}} \frac{\hat{t}_\alpha(\hat{k}_\alpha, \hat{k}'_\alpha, E'_\alpha) \hat{t}_\beta(\hat{k}_\beta, \hat{k}'_\beta, E'_\beta)}{E'_\alpha - E_\alpha - i0},$$

причем в силу  $P^2 = P'^2$  знаменатели можно также записать в виде  $E_\beta - E'_\beta - i0$ . Используя в сумме  $T_{\alpha\beta}^{(\pm)} + T_{\beta\alpha}^{(\pm)}$  формулу

$$(E'_\alpha - E_\alpha - i0)^{-1} - (E'_\alpha - E_\alpha + i0)^{-1} = \\ = 2\pi i \delta(E'_\alpha - E_\alpha),$$

получим искомое соотношение

$$T_{\alpha\beta}^{(\pm)} + T_{\beta\alpha}^{(\pm)} = -\hat{T}_\alpha \hat{T}_\beta.$$

Запишем теперь оператор  $A(E)$  в виде

$$A(E) = \\ = \frac{1}{2} \left[ (T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha})^* \frac{d}{dE} S_\alpha S_\beta - (S_\alpha + S_\beta - I)^* \frac{d}{dE} (T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}) \right]$$

и воспользуемся формулой (7.416). Почленно дифференцируя произведение  $S_\alpha S_\beta$  и  $(S_\alpha - I)(S_\beta - I)$  и упрощая получившееся выражение с помощью условия унитарности, придем к выводу, что  $A(E) \equiv 0$ .

Рассмотрим далее оператор  $\tilde{A}(E)$ . Покажем сначала, что в этой модели справедлива формула

$$\operatorname{sp} \left( \frac{1}{E} \frac{d}{dE} E - \frac{1}{2} \partial \right) B_R = 0. \quad (7.417)$$

Для этого замечаем, что производные парных  $T$ -матриц относительно  $E$  имеют вид

$$\frac{d}{dE} \hat{t}_\alpha(E_\alpha) = \frac{E_\alpha}{E} \frac{d}{dE_\alpha} \hat{t}_\alpha(E_\alpha).$$

Поэтому

$$\frac{d}{dE} E_\alpha \frac{d}{dE_\alpha} \hat{t}_\alpha(E_\alpha) = \frac{E_\alpha}{E} \frac{d}{dE_\alpha} \hat{t}_\alpha + \frac{E_\alpha^2}{E} \frac{d^2}{dE_\alpha^2} \hat{t}_\alpha(E_\alpha),$$

или, в силу определения символа  $\partial \frac{d}{dE}$ , правая часть

может быть переписана как

$$E_\alpha \partial \frac{d}{dE} \hat{t}_\alpha.$$

Дифференцируя относительно  $E$  под знаком следа и пользуясь этими соотношениями для ядер  $\hat{t}_\alpha$  и  $\hat{t}_\beta$ , получим искомое равенство (7.117).

Преобразуем теперь след  $\text{sp } \tilde{B}_R$ . Заметим, что из определения символа  $\partial$  вытекает формула

$$\left[ \partial \hat{T}_\alpha \frac{d}{dE} \hat{T}_\beta + \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} \partial \hat{T}_\beta \right]_r = E^2 F_\alpha(E_\alpha) F_\beta(E_\beta),$$

где

$$F_\alpha(E_\alpha) = \left( \frac{E_\alpha}{E} \frac{d}{dE_\alpha} + \frac{1}{2E} \right) E_\alpha^{-1/2} \hat{t}_\alpha(E_\alpha). \quad (7.118)$$

Почленно дифференцируя операторы в (7.98') и упрощая получившееся выражение с помощью условия-unitарности операторов  $S_\alpha$  и  $S_\beta$ , придем к соотношению

$$\text{sp } \tilde{B}_R = \Omega_M + 2\pi i \text{sp } B_R^{(2)},$$

где

$$B_R^{(2)} = \sum_{\alpha \neq \beta} \left[ \hat{T}_\beta^* \partial \frac{d}{dE} \hat{T}_\alpha \right]_r \quad (7.119)$$

и

$$\begin{aligned} \Omega_M = -\pi \int_0^E dE_\alpha \text{sp} (s_\alpha^*(E_\alpha) E_\alpha^{1/2} F_\alpha(E_\alpha)) \times \\ \times \text{sp} (s_\beta^*(E_\beta) E_\beta^{1/2} F_\beta(E_\beta)), \quad E_\beta = E - E_\alpha. \end{aligned}$$

Легко проверяется соотношение

$$\frac{E_\alpha}{E} \frac{d}{dE_\alpha} E_\alpha^{-1/2} \hat{t}_\alpha(E_\alpha) = E_\alpha^{-1/2} \frac{d}{dE_\alpha} s_\alpha(E_\alpha) - (2E_\alpha)^{-1} \hat{t}_\alpha(E_\alpha).$$

Отсюда следует, что величина  $\Omega_M$  совпадает с интегралом (7.115).

Таким образом, нам осталось показать, что

$$2\pi i \text{sp } B_R^{(2)} + \frac{1}{4\pi i} \text{sp } \partial [C]_r = 0. \quad (7.120)$$

Запишем след  $\text{sp } B_R^{(2)}$  в виде

$$\begin{aligned} \text{sp } B_R^{(2)} = \sum_{\alpha \neq \beta} -\frac{1}{E} \int_0^E dE_\beta \int d\hat{k}_\beta \hat{t}_\beta^*(\hat{k}_\beta, \hat{k}_\beta, E_\beta) \times \\ \times \int d\hat{k}_\alpha \frac{\partial}{\partial E_\beta} (E - E_\beta) \frac{\partial}{\partial E} \hat{t}_\alpha(\hat{k}_\alpha, \hat{k}_\alpha, E - E_\beta). \end{aligned}$$

Интегрируя относительно  $E_\beta$  по частям и учитывая граничные условия

$$\hat{t}_\beta|_{E_\beta=0} = \hat{t}_\alpha|_{E_\alpha=0} = 0,$$

получаем равенство

$$\text{sp } \tilde{B}_R^{(2)} = \sum_{\alpha \neq \beta} \text{sp} \left[ \partial \hat{T}_\beta^* \frac{d \hat{T}_\alpha}{d E} \right]_r,$$

т. е.

$$2\pi i \text{sp } \tilde{B}_R^{(2)} = \pi i \sum_{\alpha \neq \beta} \left( \text{sp} \left[ \partial \hat{T}_\beta^* \frac{d \hat{T}_\alpha}{d E} \right]_r + \text{sp} \left[ \hat{T}_\beta^* \partial \frac{d}{d E} \hat{T}_\alpha \right]_r \right).$$

Правая часть совпадает с величиной  $-(4\pi i)^{-1} \text{sp } [C]_r$ , которая входит в соотношение (7.97). Отсюда следует (7.120).

Итак, мы видим, что в рассмотренной модели оператор  $\left(S^* \frac{dS}{dE}\right)_c$  и регуляризующий оператор  $A(E)$  равны нулю. Нетривиальный вклад в формулу следа дает лишь слагаемое  $\text{sp } \tilde{B}_R$  из (7.97). В этом смысле можно сказать, что выбор регуляризующего оператора  $A(E)$  в формуле (7.94) является оптимальным.

## ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Литература по теории рассеяния очень обширна, и поэтому мы приведем лишь непосредственные источники нашей книги. Из многочисленных монографий по квантовой теории рассеяния наиболее близки нам книги следующих авторов: Р. Ньютона [1] и Э. Шмидта и Х. Цигельмана [2], которые содержат изложение многочастичной теории рассеяния с точки зрения физиков; М. Рида и Б. Саймона [3] и В. Амрейна, Ю. Яуха и К. Синка [4], которые носят более математический характер. Математическая работа одного из авторов [5] особенно сильно повлияла на выбор материала и методов в данной книге, хотя изложение здесь значительно менее формально.

### *Г л а в а I*

Формулировка теории рассеяния в терминах волновых операторов была впервые введена С. Мёллером [6] (см. также К. О. Фридрихс [7]). Эти авторы рассматривали только простейшую задачу рассеяния с одним каналом. В начале 50-х гг. в физической литературе в связи с развитием квантовой теории поля появился целый ряд работ по так называемой «формальной теории рассеяния», см., например, статью Б. А. Липпмана и Ю. Швингера [8], М. Геллмана и М. Гольдбергера [9]. Многоканальный формализм теории рассеяния впервые разработан Х. Екштейном [10]. Последнее развитие нестационарной теории рассеяния связано с именем В. Энса [11].

Начиная с 60-х гг. теория рассеяния приобрела большую популярность в математической физике, и мы не ставим себе цель дать полный обзор соответствующей литературы. Ограничимся упоминанием имен нескольких ученых, которые наиболее близки нам по духу. Это — А. Я. Повзнер, Т. Като, М. Ш. Бирман, С. Куцода, Т. Икебе, В. С. Буслаев. Их работы отражены в указанных выше монографиях.

Перенесение основных понятий общей теории рассеяния на случай кулоновского взаимодействия было сделано Дж. Доллардом [12].

Кинематические понятия в системе  $N$  частиц: разбиение, цепочки разбиений и т. д. отработаны в статье О. А. Якубовского [13]. В этой книге мы ввели обозначения кинематических переменных, которые удобно применять для описания сингулярностей и асимптотик резольвенты и волновых функций.

Определение  $S$ -матрицы и многочастичных задачах, использованное здесь, впервые сформулировано Ф. А. Березиным, Р. А. Минлосом и Л. Д. Фаддеевым [14].

### *Г л а в а II*

Переход к стационарной формулировке является стандартным приемом формальной теории рассеяния (см., например, статьи [9, 10]). Структура полюсов многочастичной резольвенты и связь соответствующих вычетов с амплитудой рассеяния даны в [5] на примере системы трех частиц; см. также статью К. Хеппа [15]. Перенос этих формул на случай кулоновского взаимодействия выполнен А. М. Веселовой [16].

### *Г л а в а III*

Компактные интегральные уравнения были использованы для обоснования задачи рассеяния впервые в работе А. Я. Повзнера [17]; см. также работу Т. Икебэ [18]. Наше изложение следует § 4 из [5]; см. также [19].

Общие факты о компактных интегральных уравнениях можно найти, например, в книге С. Г. Михлина [20]. Лемма о сингулярных интегралах содержится в монографии Н. И. Мусхелишвили [21]; она приведена также в [5].

Идея использовать интегральные уравнения в задаче трех частиц впервые появилась в работе Г. В. Скорнякова и К. А. Тер-Мартиросяна [22]. В этой работе взаимодействие предполагалось точечным и вывод уравнений существенно опирался на это предположение. Компактные интегральные уравнения для задачи трех тел в общем виде выведены в работе [23]. Полное исследование этих уравнений дано в [5].

В работе О. Я. Якубовского [13] изложена кинематическая часть исследования интегральных уравнений для  $N$  частиц; см. также работу К. Хеппа [15].

Нетривиальная структура трехчастичного дискретного спектра, описанная в § 4, была обнаружена В. Ефимовым [24]. Изложение в § 4 следует лекциям [25]. Строгое исследование однородных интегральных уравнений см. в работе Д. Р. Яфаева [26].

Модификация интегральных уравнений для случая кулоновского взаимодействия обсуждается в работах Дж. Нобла [27] и А. М. Веселовой [28].

*Г л а в а IV*

В упомянутой выше работе А. Я. Повзнера [17] интегральные уравнения для системы двух частиц рассматриваются в конфигурационном пространстве. Схема исследования многочастичных уравнений следует работе [29]. Альтернативное исследование в конфигурационном пространстве в рамках техники гильбертова пространства содержится в работах Ж. Жинибра и М. Мулэн [30] и Д. Р. Яфаева [31].

Асимптотика волновых функций задачи трех тел исследовалась Дж. Натталлом [32] и более детально — в работе [33]. Формулировка  $N$ -частичных дифференциальных уравнений для компонент дана в работах С. П. Меркульева и С. Л. Яковлева [34]; см. также статью П. Бенуа и М. Л'Уайер [35].

Детальное описание многомерного метода стационарной фазы содержится в книге М. В. Федорюка [36]. Асимптотику сингулярных интегралов можно найти, например, в обзоре Д. Джонса [37].

*Г л а в а V*

Кулоновские волновые функции для задачи двух частиц были известны на заре квантовой механики — в 20-х гг. Функция Грина оператора Шредингера с кулоновским потенциалом была вычислена много позже; см. работы Л. Хостлера [38], В. А. Братцева и Е. Д. Трифонова [39] и Ю. Швингера [40]. В [39] используется известный метод четырехмерных гармоник В. А. Фока.

Хорошим источником формул по гипергеометрическим функциям является книга Г. Бейтмана и А. Эрдейи [41].

$N$ -мерные кулоновские волновые функции последовательно использовались Р. К. Петеркопом [42].

Эйкональные асимптотические формулы были даны в работах [43], [44]. Использованный метод эталонного уравнения был впервые сформулирован В. А. Фоком [45].

*Г л а в а VI*

Асимптотическая полнота для трех частиц впервые доказана в [5] и мы следуем этой работе. Удовлетворительного во всех отношениях доказательства асимптотической полноты для любого  $N$  до сих пор нет. Асимптотическая полнота в кулоновском случае для трех частиц доказана в [29, 44]. Исследование строения кулоновской  $S$ -матрицы как интегрального оператора дано для двух частиц, например, в работе И. Херbst [46], а в случае задачи трех частиц — в работе [44].

Детальное описание используемых здесь обобщенных функций можно найти в книге И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилова [47].

*Гла ва VII*

Литература по сепарабельному приближению в многочастичных задачах весьма обширна и мы не можем дать ее обзор. Пионерские работы в этой области сделаны А. Митрой [48], Р. Амадо [49], А. Г. Ситенко и В. Ф. Харченко [50]; результаты дальнейшего развития см. в подробной статье С. Ловеласа [51], в обзоре А. Г. Ситенко и В. Ф. Харченко [52] и в работе группы Е. Альт, П. Грасбергер, В. Зандхас [53]. Модификация последнего подхода в случае кулоновского взаимодействия дана в [54], [55]. Альтернативный метод расчета в рамках модифицированных интегральных уравнений [27] развивается в работах группы В. Ф. Харченко (см., например, [56]).

Альтернативный способ отделения угловых переменных в компактных интегральных уравнениях обсуждается в статье Р. Омнеса [57].

Модификация сепарабельного взаимодействия в присутствии кулоновского потенциала обсуждается в многочисленных работах Х. ван Херингена, Р. ван Вагенингена и Л. Кока, см., например, [58, 59]. В этих работах также содержится самое подробное исследование свойств двухчастичной кулоновской  $T$ -матрицы.

Дифференциальные уравнения для парциальных компонент в системе трех тел даны Х. П. Нойесом [60]. Их применение для расчета связанных состояний впервые проведено в работе К. Жиню и А. Лаверна [61], а в канале рассеяния — в работе [62]. Обобщение на случай кулоновского взаимодействия дано в работе Ю. А. Куперина, А. А. Квицинского и С. П. Меркульева [63]. Обширная серия работ в этом направлении проведена группой Дж. Пейн, Ж. Фриар, Б. Гибсон и др. (см. [64, 65] и указанную там литературу).

Особенности амплитуды рассеяния для дальнодействующих потенциалов исследованы в [66].

Общие свойства вироильных разложений описываются, например, в [67]. Задача о вычислении второго вироильного коэффициента была решена в работе Е. Бете и Х. Уленбека [68] в 30 г.г. (см. также [67]). Проблема вычисления последующих вироильных коэффициентов обсуждалась много позднее, см., например, работы Ф. А. Березина [69], Р. Дашена и др. [70]. Мы следуем работе В. С. Буслаева и С. П. Меркульева [71].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Ньютона Р. Теория рассеяния волн и частиц.— М.: Мир, 1969.
- 2 Шмидт Э., Цигельман Х. Проблема трех тел в квантовой механике — М.: Наука, 1979.
- 3 Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 3, Теория рассеяния.— М.: Мир, 1982.
- 4 Amrein W. O., Jauch J. M., Singg K. B. Scattering Theory in Quantum Mechanics.— New York: Benjamin, 1977.
- 5 Фаддеев Л. Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 69, 1963.
- 6 Möller C.— Kgl. Danske Videnskab Selskab mat.-fis. medd., 23, № 1, 1945.
- 7 Friedrichs K. O.— Comm. Pure Appl. Math. 1, № 4, 361, 1948.
- 8 Lippmann B. A., Schwinger J.— Phys. Rev. 79, 469, 1950.
- 9 Gellmann M. and Goldberger M. L.— Phys. Rev. 91, 398, 1953.
- 10 Ekstein H.— Phys. Rev., 101, 880, 1956.
- 11 Enss V.— Commun. Math. Phys. 61, 285, 1978; Ibid 65, 151, 1979; Acta Physica Austr. Suppl. XXIII, 29, 1981.
- 12 Dollard J.— J. Math. Phys. 5, 729, 1964.
- 13 Якубовский О. А.— Ядерная физика, 5, 1312, 1967.
- 14 Березин Ф. А., Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д. Труды IV Всесоюзн. мат. съезда.— М.: Наука, 2, 532, 1964.
- 15 Нерр К.— Helv. Phys. Acta 42, 425, 1969.
- 16 Веселова А. М.— ТМФ, 13, 369, 1972.
- 17 Повзнер А. Я.— Мат. сб., 32, 109, 1953.
- 18 Ikebe T.— Archive for Rat. Mech. Anal. 5, 1, 1960.
- 19 Фаддеев Л. Д.— Тр. МИАН СССР, 73, 292, 1964.
- 20 Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям.— М.: Физматгиз, 1959.
- 21 Мусхелишивили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1962.
- 22 Скорняков Г. В., Тер-Мартirosyan К. А.— ЖЭТФ, 31, 775, 1956.

23. Фаддеев Л. Д.— ЖЭТФ, **39**, 1459, 1960.
24. Ефимов Г. В.— Ядерная физика, **12**, 1080, 1970.
25. Фаддеев Л. Д. Метод интегральных уравнений в теории ядерных реакций.— М.: изд-во МИФИ, 1971.
26. Яфаев Д. Р.— Мат. сб., **106**, 622, 1978.
27. Noble J. V.— Phys. Rev. **161**, 945, 1967.
28. Веселова А. М.— ТМФ, **3**, 326, 1970; ТМФ, **35**, 180, 1978.
29. Меркуров С. П.— Записки научн. сем. ЛОМИ, **77**, 148, 1978.
30. Ginibre J., Moulin M.— Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A, **21**, 97, 1974.
31. Яфаев Д. Р.— ТМФ, **37**, 48, 1978.
32. Nuttall J.— J. Math. Phys., **12**, 1896, 1971.
33. Меркуров С. П.— ТМФ, **8**, 235, 1971.
34. Меркуров С. П., Яковлев С. А.— ДАН СССР, **262**, 591, 1982; ТМФ, **56**, 60, 1983.
35. Benoist-Guetal P., L'Huillier M.— J. Math. Phys., **23**, 1982.
36. Федорюк М. В. Метод перевала.— М.: Наука, 1977.
37. Jones D. S.— SIAM Rev., **14**, 286, 1972.
38. Hostler L.— J. Math. Phys., **8**, 642, 1967; **11**, 2966, 1970.
39. Братцев В. Ф., Трифонов Е. Д.— Вестник ЛГУ, **16**, 36, 1962.
40. Schwinger J.— J. Math. Phys., **5**, 1606, 1964.
41. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1, 2.— М.: Наука, 1973.
42. Петеркоп Р. К. Теория ионизации атомов электронным ударом.— Рига: Зинатне, 1975.
43. Меркуров С. П.— ТМФ, **32**, 187, 1977.
44. Megkurić S. P.— Ann. Phys., **130**, 395, 1980.
45. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.— М.: Советское радио, 1970.
46. Herbst I.— Commun. Math. Phys., **35**, 181, 1974.
47. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними.— М.: Физматгиз, 1959.
48. Mitra A. N.— Advances in Nucl. Phys., **3**, 1, 1969.
49. Amado R. D.— Phys. Rev., **132**, 485, 1963.
50. Sitenko A. G., Kharichenko V. F.— Nucl. Phys., **49**, 15, 1963.
51. Lovelace C.— Phys. Rev., **B135**, 1225, 1964.
52. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф.— УФН, **103**, 469, 1971.
53. Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W.— Phys. Rev., **C1**, 85, 1970.
54. Alt E. O., Sandhas W.— Phys. Rev., **C21**, 1733, 1980.

55. Alt E. O., Sandhas W., Ziegelmann H.—Phys. Rev. C17, 1981, 1978.
56. Харченко В. Ф., Шадчин С. А.—Укр. физ. ж., 23, 1651, 1978.
57. Omnes R. L.—Phys. Rev., B134, 1358, 1964.
58. van Haeringen H., van Wageningen R.—J. Math. Phys., 16, 1441, 1975.
59. Kok L. P., van Haeringen H.—Phys. Rev., C21, 512, 1980.
60. Noyes H. P.—In: «Three-Body Problem», North-Holland, Amsterdam, 1970.
61. Laverne A., Gignoux C.—Nucl. Phys., A203, 597, 1973.
62. Merkuriev S. P., Gignoux C., Laverne A.—Ann. Phys., 99, 30, 1976.
63. Куперин Ю. А., Квицинский А. А., Меркуриев С. П.—ЯФ, 37, 1440, 1983.
64. Payne G. L. et al.—Phys. Rev., C22, 823, 1980.
65. Friar J. L., Gibson B. F., Payne G. L.—Phys. Rev., C28, 983, 1983.
66. Квицинский А. А., Комаров И., Меркуриев С. П.—ЯФ 38, 101, 1983.
67. Хуанг К. Статистическая механика.—М.: Мир, 1966.
68. Bethe E., Uhlenbeck G. E.—Physica, 4, 915, 1937.
69. Березин Ф. А.—ДАН СССР, 157, 1069, 1964.
70. Dashen R., S.-keng Ma, Bernstein H.—Phys. Rev., 187, 345, 1969.
71. Буслаев В. С., Меркуриев С. П.—ТМФ, 5, 372, 1970.

*Станислав Петрович Меркульев  
Людвиг Дмитриевич Фаддеев*

**КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ  
ДЛЯ СИСТЕМ НЕСКОЛЬКИХ ЧАСТИЦ**

Редактор В. В. Абгарян  
Художественный редактор Т. Н. Колыченко  
Технический редактор Е. В. Морозова  
Корректор Н. Д. Дорохова

ИБ № 12571

Сдано в набор 02.11.84. Подписано к печати  
14.08.85. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага тип № 2.  
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. пч л 21. Уч.-изд. л 21,37.  
Тираж 4700 экз. Заказ № 466. Цена 3 р 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени  
издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»  
630077 г. Новосибирск-77, Станиславского, 25.