

УДК 517.9:530.1

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ. II

Л. Д. Фаддеев

### В В Е Д Е Н И Е

Настоящий обзор подводит итог сравнительно спокойному развитию проблемы, называемой обратной задачей квантовой теории рассеяния, в течение последних пятнадцати лет. Предыдущему десятилетию, во время которого эта проблема сформировалась, а затем бурно развивалась, посвящен мой обзор [25]. Вся ее двадцатипятилетняя история показывает, что эта задача является одним из наиболее интересных и поучительных разделов математической физики, обнаруживающей в своем развитии новые неожиданные аспекты и далеко не является исчерпанной.

Существует несколько самосогласованных методов изложения формализма обратной задачи. Элементарный подход основан на исследовании свойств решений характерных для нее дифференциальных и интегральных уравнений методами классического анализа. Примером такого изложения является монография З. С. Аграновича и В. А. Марченко [1]. В настоящем обзоре так же, как и в [25], мы следуем другому пути и используем всюду, где это возможно, теоретико-операторный подход. Начало такому методу описания обратной задачи положили работы Кея и Мозеса [38], [39]. При этом подходе обратная задача теории рассеяния не выглядит изолированной проблемой и находит свое естественное место в рамках общей теории рассеяния.

Напомним общие положения теории рассеяния для оператора Шредингера, с которым мы и будем иметь дело в дальнейшем. Речь идет о сравнении спектральных свойств двух операторов  $H$  и  $H_0$ , которые заданы в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^n)$  формальными дифференциальными выражениями

$$H = -\Delta + v(x); \quad H_0 = -\Delta.$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

и  $v(x)$  — вещественная функция, достаточно гладкая и быстро убывающая при  $|x| \rightarrow \infty$ . Операторы  $H$  и  $H_0$ , заданные в  $\mathfrak{H}$  на плотной области  $\mathfrak{D} = W_2^2(\mathbb{R}^n)$ , определяют самосопряженные операторы, которые мы будем обозначать теми же буквами. Оператор  $H_0$  имеет абсолютно непрерывный спектр. Диагональное его представление реализуется при помощи преобразования Фурье

$$\psi(x) \rightarrow T_0 \psi = \varphi(k), \quad H_0 \psi(x) \rightarrow k^2 \varphi(k).$$

Здесь

$$\varphi(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int e^{i(k,x)} \psi(x) dx.$$

Основным результатом теории рассеяния является утверждение о том, что оператор  $H$  имеет такой же абсолютно непрерывный спектр, что и оператор  $H_0$ . Более точно, существует инвариантное относительно  $H$  разложение пространства  $\mathfrak{H}$  в прямую ортогональную сумму

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_d + \mathfrak{H}_{a.c.}$$

собственных подпространств, соответствующих дискретному и абсолютно непрерывному спектру этого оператора. При этом ограничение  $H$  на  $\mathfrak{H}_{a.c.}$  унитарно эквивалентно оператору  $H_0$ .

Среди изометрических в  $\mathfrak{H}$  операторов, реализующих эту эквивалентность, существуют два оператора  $U^{(\pm)}$ , выделенные своим физическим происхождением. Они называются волновыми операторами и определяются следующим образом

$$U^{(\pm)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t},$$

где предел понимается в смысле сильной операторной топологии. Имеется обширная литература, посвященная условиям на функцию  $v(x)$ , при которых такие пределы существуют. В нашу задачу не входит изложение этой «прямой» задачи теории рассеяния, хотя некоторые результаты относительно существования операторов  $U^{(\pm)}$  и будут упомянуты в основном тексте. Подробности по этому поводу можно найти, например, в монографии Като [36]. Заметим, что в общих рассуждениях теории рассеяния нигде не играет роли

тот факт, что оператор  $V=H-H_0$  является оператором умножения на функцию.

Операторы  $U^{(\pm)}$  изометричны

$$U^{(\pm)*}U^{(\pm)}=I; \quad U^{(\pm)}U^{(\pm)*}=I-P.$$

Здесь  $P$  — проектор на подпространство  $\mathfrak{H}_d$ , которое как правило, конечномерно. Второе соотношение называют условием полноты. Унитарная эквивалентность, о которой говорилось выше, реализуется посредством соотношения

$$HU^{(\pm)}=U^{(\pm)}H_0.$$

Физический смысл волновых операторов основан на следующих соображениях. В квантовой механике оператор

$$U(t)=e^{-iHt}$$

описывает эволюцию системы, которая в нашем случае состоит из частицы в поле потенциального центра. В течение большого времени частица с положительной энергией уходит далеко от центра, перестает чувствовать его влияние, и в результате ее развитие со временем при  $|t| \rightarrow \infty$  фактически описывается оператором

$$U_0(t)=e^{-iH^0 t},$$

соответствующим свободному движению.

Более точно, всякому однопараметрическому семейству векторов  $\psi_-(t)$ , описывающему свободное движение (волновому пакету),

$$\psi_-(t)=e^{-iH_0 t}\psi_-$$

можно сопоставить решение уравнения Шредингера

$$\psi(t)=e^{-iHt}\psi$$

такое, что

$$\|\psi(t)-\psi_-(t)\| \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow -\infty$ . Точная формула, определяющая такое решение и следующая из существования волновых операторов, имеет вид

$$\psi=U^{(-)}\psi_-.$$

Всякое решение уравнения Шредингера  $\psi(t)$  из рассматриваемого класса при  $t \rightarrow \infty$  снова сводится к волновому пакету, вообще говоря, отличному от  $\psi_-(t)$ ,

$$\|\psi(t)-\psi_+(t)\| \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow \infty$ , где

$$\psi_+(t)=e^{-iH_0 t}\psi_+; \quad \psi_+=U^{(+)*}\psi.$$

Последняя формула корректна, так как операторы  $U^{(+)}$  и  $U^{(-)}$  имеют общую область значений.

Переход от волнового пакета  $\psi_-(t)$ , задающего начальное состояние частицы, к волновому пакету  $\psi_+(t)$ , описывающему ее конечное состояние, и представляет собой процесс рассеяния частицы центром. Вся информация об этом процессе содержится в операторе  $S$ , который связывает оба волновых пакета по формуле

$$\psi_+ = S\psi_-.$$

Сравнивая формулы, выражающие  $\psi$  через  $\psi_-$  и  $\psi_+$  через  $\psi$ , мы видим, что

$$S = U^{(+)*}U^{(-)},$$

причем из свойств  $U^{(+)}$  и  $U^{(-)}$  следует, что оператор  $S$  унитарен и коммутирует с оператором  $H_0$

$$S^*S = SS^* = I; \quad [S, H_0] = 0.$$

Эти соотношения отражают сохранение потока частиц и энергии в процессе рассеяния.

Оператор  $S$  называется оператором рассеяния. Его представление

$$\hat{S} = T_0 S T_0^*$$

в диагональной реализации оператора  $H_0$  задается формулой

$$\hat{S}\varphi(k) = \varphi(k) - 2\pi i \int f(k, l) \delta(k^2 - l^2) \varphi(l) dl,$$

где  $\delta$  — функция под знаком интеграла явно учитывает тот факт, что  $S$  и  $H_0$  коммутируют. Функция  $f(k, l)$ , определенная при  $|k| = |l|$ , носит название амплитуды рассеяния.

Существует альтернативный подход к теории рассеяния, называемый стационарным и основанный на исследовании асимптотики собственных функций оператора  $H$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Амплитуда рассеяния  $f(k, l)$  при этом явно участвует в описании этой асимптотики. Такой подход и его связь с описанным нестационарным подходом будут иллюстрированы в основном тексте.

Обратной задачей теории рассеяния называется проблема восстановления потенциала  $v(x)$  по амплитуде рассеяния  $f(k, l)$ . Эта задача недоопределена в случае, если возмущение  $V = H - H_0$  является произвольным оператором, так как нетрудно по произвольному унитарному оператору вида  $\hat{S}$  подобрать целый набор операторов  $V$  таких, что соответствующий оператор  $S$  будет оператором рассеяния для пары  $H_0$  и  $H_0 + V$ . Она становится осмысленной только благодаря дополнительному условию, согласно которому  $V$  является оператором умножения на функцию. В дальнейшем это условие мы будем называть локальностью потенциала.

В течение 50-ых гг. обратная задача была решена для наиболее интересного для физических приложений случая сферически симметричного потенциала, когда  $n=3$  и

$$v(x) = v(|x|) = v(r), \quad 0 < r < \infty.$$

В этом случае амплитуда рассеяния  $f(k, l)$  зависит только от длин векторов  $k$  и  $l$ , которые по условию равны, и от угла между ними, так что она фактически является функцией  $f(|k|, \cos \theta)$  от двух переменных. Парциальные амплитуды рассеяния  $f_l(|k|)$  появляются при разложении  $f(|k|, \cos \theta)$  по полиномам Лежандра

$$f(|k|, \cos \theta) = -\frac{1}{2\pi^2 |k|} \sum (2l+1) f_l(|k|) P_l(\cos \theta)$$

столь характерном для сферически симметричных задач. Условие унитарности оператора  $S$  можно явно принять во внимание, положив

$$f_l(|k|) = \exp \{i\eta_l(|k|)\} \sin \eta_l(|k|),$$

где  $\eta_l(|k|)$  — вещественная функция, которую принято называть асимптотической фазой в связи с ее ролью в стационарной постановке задачи рассеяния.

Основной результат, полученный в работах В. А. Марченко [16] и М. Г. Крейна [12], состоит в том, что потенциал  $v(x)$  восстанавливается по одной из асимптотических фаз  $\eta_l(|k|)$ , в качестве которой можно брать произвольную вещественную функцию, удовлетворяющую условию целочисленности

$$\eta_l(\infty) - \eta_l(0) = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

При этом для однозначного определения потенциала, помимо фазы  $\eta_l$ , следует задавать  $m$  положительных чисел, которые связаны с характеристиками дискретного спектра радиального оператора Шредингера

$$H_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + v(r),$$

о восстановлении которого фактически идет речь.

Именно этому результату и был посвящен обзор [25]. Дальнейшее развитие обратной задачи, о котором пойдет речь в настоящей статье, связано с оператором Шредингера в общем случае, без предположений типа сферической симметрии. Здесь различаются два случая, принципиально отличающиеся по техническим трудностям:  $n=1$  и  $n \geq 2$ . В первом случае оказывается применимой, после соответствующих изменений, техника, отработанная на примере радиального оператора Шредингера при  $l=0$ . Основную роль играет существование фундаментальной системы решений у соответствующего одномерного дифференциального уравнения. В многомерном случае, когда вместо обыкновенных уравнений при-

ходится иметь дело с уравнением в частных производных, понятие фундаментальной системы исчезает. Возможно, что именно это обстоятельство явилось тем тормозом, который растянул исследование многомерной обратной задачи на столь длительный срок.

Несмотря на указанное обстоятельство, которое представляет собой техническое различие, оказалось, что в определенной степени одномерная и многомерная обратные задачи во многом аналогичны. Эта аналогия особенно хорошо прослеживается на теоретико-операторном языке, который мы выбрали для нашего изложения как раз по этой причине. Интересно, что все эти утверждения об аналогии относятся к одномерному, но не радиальному, оператору Шредингера. В этом смысле одномерный случай играет удачную роль промежуточного звена от радиального оператора Шредингера к многомерному оператору, будучи технически близким к первому и идейно предвосхищая основные черты второго.

Укажем теперь на принципиальное отличие рассматриваемой в этом обзоре обратной задачи от случая радиального оператора Шредингера. Оно состоит в переопределенности этой задачи. В радиальном случае речь шла о построении убывающей на бесконечности функции  $v(r)$  переменной  $r$ , меняющейся на полуоси, по функции  $\eta_l(|k|)$  переменной  $|k|$  тоже на полуоси и также удовлетворяющей асимптотическому условию при  $|k| \rightarrow \infty$ . Не удивительно поэтому, что функцию  $\eta_l(|k|)$  оказалось возможным выбирать произвольным образом. Аналогичный простой счет параметров показывает, что для более сложных задач амплитуду рассеяния произвольным образом выбирать нельзя.

Рассмотрим сначала оператор Шредингера при  $n=1$ . Произвольная унитарная амплитуда рассеяния  $f(k, l)$ ,  $k, l \in \mathbb{R}^1$ , может быть параметризована четырьмя вещественными функциями переменной  $|k|$ , пробегающей полуось. Условие симметрии, следующее из вещественности потенциала и приведенное в основном тексте, уменьшает это число до трех. В то же время потенциал  $v(x)$  может рассматриваться лишь как две вещественные функции, заданные на полуоси. Налицо переопределенность, так как трудно вообразить себе задачу физического происхождения, в которой устанавливалось бы невырожденное соответствие наборов двух и трех произвольных функций. Другими словами, эти наводящие соображения показывают, что амплитуда рассеяния  $f(k, l)$  должна удовлетворять необходимому условию, которое позволит выразить ее через две вещественные функции на полуоси. Такое условие на самом деле возникает и выведено в основном тексте.

В случае  $n \geq 2$  отмеченная переопределенность значительно усугубляется. Амплитуда рассеяния является здесь функцией  $2n-1$  переменных, причем условие унитарности сводит-

ся к вещественности этой функции. В то же время потенциал является вещественной функцией  $n$  переменных. В связи с такой переопределенностью возникает и приобретает важное значение проблема определения необходимых условий на амплитуду рассеяния, которые следуют из условия локальности потенциала. Заранее не ясно, что такие условия вообще могут быть выражены через амплитуду рассеяния в достаточно явной форме. Тем не менее, как это выясняется в основном тексте, такие условия удается описать.

Сформулируем теперь основные положения формализма обратной задачи. Будем для определенности считать, что оператор  $H$  имеет одно простое собственное значение, так что проектор  $P$  в условии изометричности является проектором на одномерное подпространство, натянутое на соответствующий собственный вектор  $u$ . В основе описываемого подхода лежит выбор оператора преобразования  $U$ , т. е. решения уравнения

$$HU = UH_0,$$

отличного от волновых операторов. Всякий оператор преобразования получается из волновых операторов  $U^{(\pm)}$  при умножении справа на операторный нормирующий множитель  $N^{(\pm)}$ , коммутирующий с  $H_0$ ,

$$U = U^{(\pm)} N^{(\pm)}, \quad [N^{(\pm)}, H_0] = 0.$$

В частности, оператор рассеяния  $S$  является нормирующим множителем для  $U^{(-)}$  относительно  $U^{(+)}$

$$U^{(-)} = U^{(+)} S.$$

Сравнивая эти две формулы, мы видим, что всякому выбору оператора преобразования  $U$  соответствует факторизация оператора рассеяния

$$S = N^{(+)} N^{(-)-1}. \quad (1)$$

Предположим теперь, что оператор  $U$  обратим в следующем смысле: существует вектор  $\chi$ , не принадлежащий пространству  $\mathfrak{H}$ , такой, что

$$u = U\chi.$$

Тогда условие полноты, выраженное через оператор  $U$ , будет выглядеть следующим образом

$$UWU^* = I, \quad (2)$$

где

$$W = N^{(\pm)-1} N^{(\pm)*-1} + \chi \otimes \chi.$$

Оператор  $W$  может быть назван весовым оператором.

Соотношения (1) и (2) составляют основу для решения обратной задачи. Мы должны найти такое удачное определение оператора  $U$ , чтобы уравнение (2) однозначно определяло его по весовому оператору  $W$  и чтобы соответствующие множители  $N^{(\pm)}$  однозначно определялись ус-

ловием факторизации (1) по заданному оператору  $S$ . Оказывается, что подобные операторы преобразования существуют и выделяются условием вольтерровости.

Поясним подробнее, что мы понимаем под вольтерровостью. В одномерном случае это понятие формулируется самым классическим образом. Ядро  $A(x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^1$ , называется треугольным, если  $A(x, y) = 0$  при  $x < y$  или  $A(x, y) = 0$  при  $x > y$ . Интегральный оператор с треугольным ядром называется треугольным оператором. Наконец, вольтерровым оператором называется оператор вида «единица + треугольный». Мы имеем две возможности для вольтеррова оператора в одномерном случае

$$U_1\psi(x) = \psi(x) + \int_x^\infty A_1(x, y) \psi(y) dy;$$

$$U_2\psi(x) = \psi(x) + \int_{-\infty}^x A_2(x, y) \psi(y) dy.$$

Обе формулы можно записать единообразно если ввести направление  $\gamma$ , т. е. фактически переменную, принимающую два значения  $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$ .

$$U_\gamma\psi(x) = \psi(x) + \int_{(y-x)\gamma > 0} A_\gamma(x, y) \psi(y) dy.$$

В такой форме определение вольтеррова оператора естественно переносится на случай  $n \geq 2$ . Переменная  $\gamma$  в этом случае является единичным вектором и пробегает, в отличие от одномерного случая, связное множество — сферу  $S^{n-1}$ . Вольтерровым оператором с направлением вольтерровости  $\gamma$  называется оператор вида

$$U_\gamma\psi(x) = \psi(x) + \int_{(y-x, \gamma) > 0} A_\gamma(x, y) \psi(y) dy.$$

Покажем теперь, как условие вольтерровости оператора преобразования  $U_\gamma$  позволяет свести соотношение полноты (2) к линейному интегральному уравнению для ядра  $A_\gamma(x, y)$ , участвующего в его определении. Пусть  $\gamma$  — некоторое направление и  $U_\gamma$  — вольтерров оператор преобразования с направлением вольтерровости  $\gamma$ . Рассмотрим оператор

$$U_\gamma^{*-1} = I + \tilde{A}_\gamma.$$

Этот оператор имеет противоположное направление вольтерровости по сравнению с оператором  $\gamma$ , так что

$$A_\gamma(x, y) = 0, (x - y, \gamma) > 0; \quad \tilde{A}_\gamma(x, y) = 0, (x - y, \gamma) < 0.$$

Пусть  $W_\gamma$  — весовой оператор для  $U_\gamma$ , положим

$$W_\gamma = I + \Omega_\gamma.$$

Соотношение (2) с учетом введенных обозначений можно переписать в виде

$$A_\gamma + \Omega_\gamma + A_\gamma \Omega_\gamma = \tilde{A}_\gamma$$

или, более подробно, через ядра  $A_\gamma(x, y)$ ,  $\Omega_\gamma(x, y)$  и  $\tilde{A}_\gamma(x, y)$  в виде

$$A_\gamma(x, y) + \Omega_\gamma(x, y) + \int_{(z-x, \gamma) > 0} A_\gamma(x, z) \Omega_\gamma(z, y) dz = \tilde{A}_\gamma(x, y).$$

Правая часть здесь исчезает при  $(y - x, \gamma) > 0$ . Считая это условие выполненным, мы получаем линейное интегральное уравнение

$$A_\gamma(x, y) + \Omega_\gamma(x, y) + \int_{(z-x, \gamma) > 0} A_\gamma(x, z) \Omega_\gamma(z, y) dz = 0,$$

$$(y - x, \gamma) > 0,$$

которое можно использовать для нахождения ядра  $A_\gamma(x, y)$  по известному ядру  $\Omega_\gamma(x, y)$ . Это уравнение представляет собой общую формулировку уравнения Гельфанд — Левитана, введенного в [8] на конкретном примере оператора Штурма — Лиувилля на полуоси.

Таким образом, мы видим, как можно восстановить вольтерров оператор преобразования  $U_\gamma$ , если известен соответствующий весовой оператор  $W_\gamma$ . Для построения оператора  $W_\gamma$  по заданному оператору  $S$  следует решить еще одну задачу на факторизацию (1) для определения нормирующих множителей оператора  $U_\gamma$ . Не понятое еще до конца обстоятельство состоит в том, что для вольтерровых  $U_\gamma$  эта задача также сводится к линейному уравнению и даже решается явно в одномерном случае. Оказывается, что нормирующие множители для вольтерровых операторов преобразования сами оказываются в некотором смысле вольтерровыми. Мы не будем пояснять это более подробно здесь и отсылаем за точными формулировками к основному тексту.

Итак, процедура решения обратной задачи состоит в следующем: по заданной амплитуде рассеяния решается набор задач о факторизации (1) для определения нормирующих множителей  $N_\gamma^{(\pm)}$ . По этим данным и характеристикам дискретного спектра, если такой есть, строится весовой оператор  $W_\gamma$  и затем при помощи уравнения Гельфанд — Левитана восстанавливаются операторы преобразования  $U_\gamma$ . Все эти этапы, вообще говоря, осмыслены для произвольного исходного оператора  $S$ . Более того, если оператор  $S$  унитарен, то каждый из операторов

$$H_\gamma = U_\gamma H_0 U_\gamma^{-1}$$

будет самосопряженным. Дополнительные необходимые условия, о которых речь шла выше, начинают играть роль на следующем этапе, когда выясняется, что операторы  $H_\gamma$  на самом деле не зависят от  $\gamma$ . Это важное место одновременно служит и для исследования свойств восстановленного оператора  $H$  и для доказательства того факта, что исходный оператор  $S$  действительно является оператором рассеяния для пары  $H$  и  $H_0$ . Техника доказательства независимости  $H_\gamma$  от  $\gamma$  различна при  $n=1$  и при  $n \geq 2$ , что связано с различием самой области значений переменной  $\gamma$ . В случае  $n \geq 2$ , когда это множество связно, мы можем использовать дифференцирование по параметру  $\gamma$ . В одномерном случае приходится использовать более искусственные приемы.

Мы закончим на этом словесное описание техники решения обратной задачи, так как дальнейшая детализация требует более формального изложения, которое и приведено в основном тексте. Отметим только, что, по нашему мнению, абстрактная теория рассеяния должна быть дополнительно развита для того, чтобы в ее рамках нашли естественное место вольтерровы операторы преобразования и существование выделенных факторизаций вида (1) оператора рассеяния. По-видимому, наиболее удачным исходным пунктом для такого обобщения является формулировка теории рассеяния по Лаксу и Филлипсу [45], а подходящим языком будет разумным образом сформулированное условие причинности.

Остановимся теперь на построении обзора. Различия в технике и разработанности случаев  $n=1$  и  $n \geq 2$  побудили нас рассматривать их отдельно. При этом, конечно, мы подчеркиваем аналогии между соответствующими рассуждениями и формулами всюду, где это только возможно.

Одномерному случаю посвящается глава I. Значительное техническое упрощение для исследования одномерного оператора Шредингера состоит в существовании выделенных фундаментальных систем решений соответствующего дифференциального уравнения. Все операторные формулы удобно ввести и обосновать, отправляясь от известных свойств этих решений. Описанию этих свойств посвящен § 1, играющий вспомогательную роль. В § 2 сформулированы и доказаны основные положения теории рассеяния на рассматриваемом конкретном примере. Вольтерровы операторы преобразования введены в § 3, а соответствующие им нормирующие множители получены в § 4. Там же сформулированы уравнения типа Гельфанд—Левитана. Исследованию разрешимости этих уравнений посвящен следующий § 5. Там же прослежена связь между операторами преобразования при  $\gamma=1$  и  $\gamma=-1$ . Общее исследование обратной задачи на этом заканчивается. Последний § 6 содержит описание явного решения уравнения Гельфанд—Левитана в частном

случае, когда амплитуда рассеяния является рациональной функцией параметра  $k$ .

Глава II также посвящена одномерным задачам. Здесь на элементарном уровне прослеживается обобщение формализма, развитого в главе I, на случай потенциалов  $v(x)$ , имеющих ненулевую асимптотику при  $x \rightarrow \infty$  (§ 1), или на случай оператора вида

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

который является непосредственным обобщением оператора Шредингера (§ 2). В следующем параграфе мы описываем так называемые тождества следов, в которых связываются некоторые функционалы от потенциала и амплитуды рассеяния. Не являясь средством непосредственного решения обратной задачи, эти тождества позволяют косвенным путем получать сведения о потенциале по известным свойствам амплитуды рассеяния, и наоборот. Последний § 4 посвящен описанию приложения обратной задачи теории рассеяния к решению одномерных нелинейных эволюционных уравнений. Начало такому приложению было положено в важной работе Краскала и др. [42]. Затем в работах П. Лакса [44], В. Е. Захарова и А. Б. Шабата [11], В. Е. Захарова и автора [10] и др. эта тематика получила дальнейшее развитие. В настоящее время метод обратной задачи теории рассеяния для решения нелинейных уравнений привлекает все большее внимание и быстро развивается. Область его применимости еще далеко не выяснена, и в настоящем обзоре мы рассмотрим только два характерных примера.

В главе III мы возвращаемся к нашей основной теме и рассматриваем обратную задачу для многомерного оператора Шредингера. Для определенности мы будем иметь дело с интересным для физики случаем  $n=3$ , хотя все рассуждения тривиально переносятся на произвольное  $n \geq 2$ . В многомерном случае отсутствует фундаментальная система решений и техника доказательств в связи с этим гораздо более громоздка. Рамки настоящего обзора не позволяют нам проводить все мало поучительные оценки, необходимые для того, чтобы сделать строгими все построения в главе III. Поэтому мы ограничиваемся изложением лишь формальной схемы этих построений. Читателю предоставляется свобода заполнить алгебраический остов изложенной схемы подходящими аналитическими рассуждениями.

В § 1 мы излагаем основы теории рассеяния для трехмерного оператора Шредингера. В § 2 описаны общие соображения, помогающие при поисках вольтерровых операторов преобразования  $U_\gamma$ . Построению нормирующих множителей и весового оператора  $W_\gamma$  посвящены §§ 3 и 4. Описа-

ние уравнения Гельфанда—Левитана и схема исследования обратной задачи приведены в § 5, которым глава III и заканчивается.

Для чтения этого обзора не требуется никаких специальных знаний. В частности, его можно читать независимо от предыдущего обзора [25], так как все необходимые сведения об операторе Шредингера перечислены здесь заново. Мы надеемся, что для некоторых читателей—математиков этот обзор сможет послужить введением в теорию рассеяния—отрасль функционального анализа и математической физики, которая неуклонно расширяет область своих приложений.

В заключение этого введения отметим направления, связанные с обратной задачей теории рассеяния, не отраженные в этом обзоре. Сюда относятся: 1. Работы Б. М. Левитана и М. Г. Гасымова, М. Г. Крейна и его учеников по поводу канонических систем и систем типа Дирака на полуоси. По постановке задачи и методам эти работы примыкают к тематике, связанной с радиальным уравнением Шредингера. Мы отсылаем к оригинальным работам [7] и [13] за ссылками на имеющуюся тут литературу.

2. Работы по обратной задаче по данным рассеяния при фиксированной энергии. Под этой задачей понимается восстановление потенциала  $v(r)$  по заданному набору асимптотических фаз  $\eta_l(|k|)$  при всех  $l=0,1,2,\dots$  и фиксированном значении  $|k|$ . Теоретико-операторная формулировка этой задачи не столь прозрачна, и полученные результаты по красоте и полноте еще не поднялись до уровня, достигнутого в спектральной постановке обратной задачи. Наиболее подробное изложение известных фактов по этой задаче можно найти в работе Лёффеля [47].

3. Работы В. А. Марченко и его учеников по проблеме устойчивости обратной задачи, главным образом на примере радиального уравнения Шредингера. О них можно прочесть в недавней монографии В. А. Марченко [17].

Мы не используем никаких экзотических обозначений. Константы, появляющиеся в оценках, обозначаются через  $C$ . Явная зависимость этих констант от параметров указывается, только если это существенно. В нумерациях формул первая цифра означает номер параграфа, а вторая — номер формул. Параграфы нумеруются заново внутри каждой главы. При ссылках на формулы чужой главы используется номер из трех цифр типа (II.3.14), смысл которого очевиден.

# Глава I

## ОДНОМЕРНЫЙ ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА

В этой главе мы будем рассматривать оператор Шредингера

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x),$$

где потенциал  $v(x)$  предполагается вещественной измеримой функцией, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |v(x)| dx < \infty. \quad (\text{P})$$

При этом оператор  $H$ , определенный на плотном множестве  $\mathfrak{D} = W_2^2(\mathbf{R})$  в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H} = L_2(\mathbf{R})$ , является самосопряженным оператором. Мы введем и охарактеризуем данные рассеяния, соответствующие этому оператору и опишем процедуру решения обратной задачи о восстановлении потенциала  $v(x)$  по этим данным.

### § 1. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Этот параграф имеет вспомогательное значение. Мы опишем в нем две фундаментальные системы решений уравнения Шредингера

$$H\psi = -\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + v(x)\psi(x) = k^2\psi(x). \quad (1.1)$$

В дальнейшем  $k$ , как правило, — вещественное число, но иногда мы будем считать его комплексным, специально это оговаривая.

Условие (P) означает, что  $v(x)$  эффективно исчезает при  $|x| \rightarrow \infty$ , так что естественно считать, что на бесконечности всякое решение уравнения (1.1) совпадает с каким-нибудь решением уравнения

$$H_0\psi = -\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = k^2\psi(x),$$

т. е. линейной комбинацией экспонент

$$f_0(x, k) = e^{ikx}; f_0(x, -k) = e^{-ikx}.$$

Более строго, можно доказать, что существуют решения  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  уравнения (1.1), которые имеют асимптотики

$$f_1(x, k) = f_0(x, k) + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

$$f_2(x, k) = f_0(x, -k) + o(1), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (1.3)$$

Доказательство основано на том, что дифференциальное уравнение (1.1) вместе с граничными условиями (1.2) и (1.3) эквивалентно уравнениям

$$f_1(x, k) = e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x-y, k) v(y) f_1(y, k) dy; \quad (1.4)$$

$$f_2(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} G_2(x-y, k) v(y) f_2(y, k) dy; \quad (1.5)$$

где

$$G_1(x, k) = -\theta(-x) \frac{\sin kx}{k}; \quad G_2(x, k) = \theta(x) \frac{\sin kx}{k}$$

и  $\theta(x)$  — функция Хевисайда,

$$\theta(x) = 1, \quad x > 0; \quad \theta(x) = 0, \quad x < 0.$$

Эти уравнения являются интегральными уравнениями типа Вольтерра, так что метод последовательных приближений для них всегда сходится. При этом параметр  $k$  может иметь комплексные значения из верхней полуплоскости. В результате анализа последовательных приближений можно доказать, что решения  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  существуют и при фиксированном  $x$  являются аналитическими функциями параметра  $k$  при  $\operatorname{Im} k > 0$ , непрерывными при  $\operatorname{Im} k = 0$ . При этом для них справедливы оценки

$$|f_1(x, k) - e^{ikx}| \leq C \frac{e^{-\operatorname{Im} k x}}{1+|k|} \int_x^{\infty} (1+|y|) |v(y)| dy; \quad (1.6)$$

$$|f_2(x, k) - e^{-ikx}| \leq C \frac{e^{\operatorname{Im} k x}}{1+|k|} \int_{-\infty}^x (1+|y|) |v(y)| dy. \quad (1.7)$$

Впервые подобные утверждения были получены в работе Левинсона [46].

Из оценки (1.6) на основании леммы Жордана следует, что для решения  $f_1(x, k)$  справедливо интегральное представление

$$f_1(x, k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} A_1(x, y) e^{iky} dy, \quad (1.8)$$

где ядро  $A_1(x, y)$  квадратично интегрируемо по  $y$  при любом фиксированном  $x$ . Аналогично  $f_2(x, k)$  может быть представлено в виде

$$f_2(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x A_2(x, y) e^{-iky} dy, \quad (1.9)$$

где ядро  $A_2(x, y)$  также квадратично интегрируемо по  $y$ . Такие интегральные представления для решений уравнения Шредингера ввел Б. Я. Левин [15].

Детальные свойства ядер  $A_t(x, y)$  можно получить на основании изучения интегральных уравнений, которые эквивалентны соответствующим уравнениям (1.4) и (1.5) для решений  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$

$$A_1(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} v(z) dz - \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} dt \int_0^{\frac{y-x}{2}} dz v(t-z) A_1(t-z, t+z); \quad (1.10)$$

$$A_2(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\frac{x+y}{2}} v(z) dz - \int_{-\infty}^{\frac{x+y}{2}} dt \int_{\frac{y-x}{2}}^0 dz v(t-z) A_2(t-z, t+z). \quad (1.11)$$

Впервые такие уравнения были выведены З. С. Аграновичем и В. А. Марченко [1]. Ими была доказана сходимость метода последовательных приближений для этих уравнений и получены оценки для решений. Для записи оценок удобно ввести в рассмотрение монотонные функции

$$\xi_1(x) = \int_x^{\infty} |v(y)| dy; \quad \xi_2(x) = \int_{-\infty}^x |v(y)| dy.$$

Оценки для ядер  $A_1(x, y)$  и  $A_2(x, y)$  имеют вид

$$|A_1(x, y)| \leq C \xi_1\left(\frac{x+y}{2}\right); \quad |A_2(x, y)| \leq C \xi_2\left(\frac{x+y}{2}\right). \quad (1.12)$$

Далее, с помощью этих уравнений можно доказать существование первых производных ядер  $A_1(x, y)$  и  $A_2(x, y)$  и получить для них оценки. Так, например,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} A_1(x, y) + \frac{1}{4} v\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leq C \xi_1(x) \xi_1\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} A_2(x, y) - \frac{1}{4} v\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leq C \xi_2(x) \xi_2\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

и аналогичные оценки справедливы для  $\frac{\partial}{\partial y} A_1(x, y)$  и  $\frac{\partial}{\partial y} A_2(x, y)$ .

Наконец, из уравнений видно, что

$$A_1(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} v(y) dy; \quad A_2(x, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x v(y) dy,$$

так что

$$-2 \frac{d}{dx} A_1(x, x) = v(x) = 2 \frac{d}{dx} A_2(x, x).$$

При вещественных  $k \neq 0$  пары  $f_1(x, k), f_1(x, -k) = \overline{f_1(x, k)}$  и  $f_2(x, k), f_2(x, -k) = \overline{f_2(x, k)}$  являются фундаментальными системами решений основного уравнения (1.1). Действительно, так как вронскиан  $\{f_1, \bar{f}_1\} = f'_1 \bar{f}_1 - f_1 \bar{f}'_1$  не зависит от  $x$ , то он совпадает со своим значением при  $x \rightarrow \infty$ , которое можно вычислить с помощью асимптотик для решения  $f_1(x, k)$  и его производной. Можно показать, что при  $x \rightarrow \infty$

$$f'_1(x, k) = ike^{ikx} + o(1),$$

так что

$$\begin{aligned} \{f_1(x, k), f_1(x, -k)\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{f_1(x, k), f_1(x, -k)\} = \\ &= ike^{ikx} e^{-ikx} - e^{ikx} (-ik) e^{-ikx} = 2ik. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Мы видим, что при  $k \neq 0$  вронскиан отличен от нуля и решения  $f_1(x, k)$  и  $f_1(x, -k)$  линейно независимы. Аналогично

$$\{f_2(x, k), f_2(x, -k)\} = -2ik, \quad (1.14)$$

так что  $f_2(x, k)$  и  $f_2(x, -k)$  также линейно независимы при  $k \neq 0$ .

Любое решение уравнения (1.1) может быть представлено в виде линейной комбинации решений  $f_1(x, k)$  и  $f_1(x, -k)$  или  $f_2(x, k)$  и  $f_2(x, -k)$ . В частности, мы имеем:

$$f_2(x, k) = f_1(x, k) c_{11}(k) + f_1(x, -k) c_{12}(k), \quad (1.15)$$

$$f_1(x, k) = f_2(x, k) c_{22}(k) + f_2(x, -k) c_{21}(k). \quad (1.16)$$

Подставляя выражение (1.15) для  $f_2(x, k)$  в (1.16) и производя аналогичную операцию с  $f_1(x, k)$ , мы получим, что для совместности соотношений (1.15) и (1.16) необходимо выполнение следующих равенств:

$$c_{11}(k) c_{22}(k) + c_{12}(-k) c_{21}(k) = c_{22}(k) c_{11}(k) + c_{21}(-k) c_{12}(k) = 1, \quad (1.17)$$

$$c_{12}(k) c_{22}(k) + c_{11}(-k) c_{21}(k) = c_{21}(k) c_{11}(k) + c_{22}(-k) c_{12}(k) = 0.$$

Можно выразить коэффициенты  $c_{ij}(k)$ ,  $i, j = 1, 2$ , через вронскианы решений  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$ . Учитывая (1.13) и (1.14), а также очевидные равенства

$$\{f_1(x, k), f_1(x, -k)\} = \{f_2(x, k), f_2(x, -k)\} = 0,$$

мы получаем

$$c_{12}(k) = c_{21}(k) = \frac{1}{2ik} \{f_1(x, k), f_2(x, k)\}; \quad (1.18)$$

$$c_{11}(k) = \frac{1}{2ik} \{f_2(x, k), f_1(x, -k)\}; \quad (1.19)$$

$$c_{22}(k) = \frac{1}{2ik} \{f_2(x, -k), f_1(x, k)\}. \quad (1.20)$$

Сравнивая (1.19) и (1.20), находим, что

$$c_{11}(k) = -c_{22}(-k),$$

что, впрочем, следует также из соотношений (1.17), если учесть, что  $c_{12}(k) = c_{21}(k)$ . Из этих соотношений вытекает также, что

$$|c_{12}(k)|^2 = 1 + |c_{11}(k)|^2 = 1 + |c_{22}(k)|^2.$$

Мы видим, что четыре коэффициента  $c_{ij}(k)$  фактически выражаются через две комплекснозначные функции

$$a(k) = c_{12}(k); \quad b(k) = c_{11}(k),$$

удовлетворяющие условию

$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2. \quad (1.21)$$

При этом

$$c_{21}(k) = a(k); \quad c_{22}(k) = -b(-k).$$

В дальнейшем мы будем называть эти функции коэффициентами перехода.

Для вывода дальнейших свойств функций  $a(k)$  и  $b(k)$  выразим их через ядро  $A_2(x, y)$ . Для этого заметим, что, как следует из уравнения (1.5), функция  $f_2(x, k)$  при  $x \rightarrow \infty$  имеет следующую асимптотику

$$\begin{aligned} f_2(x, k) &= e^{-ikx} + \frac{1}{2ik} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} v(y) f_2(y, k) dy - \\ &- \frac{1}{2ik} e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} v(y) f_2(y, k) dy + o(1). \end{aligned}$$

Сравнивая это соотношение с формулой

$$f_2(x, k) = e^{ikx} b(k) + e^{-ikx} a(k) + o(1),$$

которая следует из (1.15), если учесть определение (1.2) решений  $f_1(x, k)$ , мы получаем следующие выражения для  $a(k)$  и  $b(k)$ :

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} v(x) f_2(x, k) dx, \quad (1.22)$$

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} v(x) f_2(x, k) dx. \quad (1.23)$$

Заменим теперь здесь  $f_2(x, k)$  через ядро  $A_2(x, y)$  по формуле (1.9). Мы получим

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) dx - \frac{1}{2ik} \int_0^{\infty} \Pi_2(x) e^{2ikx} dx,$$

где

$$\Pi_2(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} v(y) A_2(y, y - 2x) dy$$

и

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_1(x) e^{-2ikx} dx,$$

где

$$\Pi_1(x) = v(x) + 2 \int_x^{\infty} v(y) A_2(y, 2x - y) dy.$$

Из оценок для ядра  $A_2(x, y)$  вытекают оценки для  $\Pi_1(x)$  и  $\Pi_2(x)$

$$|\Pi_2(x)| \leq C \left( \xi_2\left(-\frac{x}{2}\right) + \xi_1\left(\frac{x}{2}\right) \right),$$

$$|\Pi_1(x)| \leq |v(x)| + C \xi_1(x) \xi_2(x),$$

из которых следует, что функция  $\Pi_2(x)$  абсолютно интегрируема на полуоси  $0 \leq x < \infty$ , а  $\Pi_1(x)$  — на всей оси. Итак, для коэффициентов перехода  $a(k)$  и  $b(k)$  мы нашли выражение в виде преобразования Фурье от абсолютно интегрируемых функций. В частности, из полученных представлений следует, что при больших  $k$  для этих коэффициентов справедлива асимптотика

$$b(k) = o\left(\frac{1}{|k|}\right);$$

$$a(k) = 1 + \frac{q}{2ik} + o\left(\frac{1}{|k|}\right); \quad q = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) dx. \quad (1.24)$$

Более того, мы видим, что коэффициент  $a(k)$  является предельным значением на вещественной оси функции, аналитической и ограниченной в полуплоскости  $\operatorname{Im} k > 0$ , и что асимптотика (1.24) справедлива при всех  $k$  с  $\operatorname{Im} k \geq 0$ .

Рассмотрим расположение нулей функции  $a(k)$  на комплексной плоскости. Вследствие соотношения (1.21) на вещественной оси  $a(k)$  не обращается в нуль. Далее, из асимптотики (1.24) следует, что при достаточно больших  $|k|$  коэффициент  $a(k)$  также отличен от нуля. Отсюда следует, что

$a(k)$  может иметь только конечное число нулей. Из представления (1.18) для  $a(k)$  с помощью вронсиана решений  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  следует, что если  $a(k_0)=0$ , то эти решения линейно зависимы при  $k=k_0$ , т. е.

$$f_1(x, k_0) = c f_2(x, k_0). \quad (1.25)$$

Заметим, что при  $\operatorname{Im} k > 0$  решение  $f_1(x, k)$  экспоненциально убывает при  $x \rightarrow \infty$ , а решение  $f_2(x, k)$  ведет себя так же при  $x \rightarrow \infty$ . При  $k=k_0$  мы заключаем на основании (1.25), что уравнение (1.1) имеет решение, квадратично интегрируемое на всей оси. Из формальной самосопряженности уравнения следует, что это возможно только при вещественных  $k_0^2$ , т. е. при чисто мнимых  $k_0$ .

Итак, мы получили, что  $a(k)$  может иметь только конечное число чисто мнимых нулей. Покажем, что эти нули простые. Для этого получим выражение для  $\dot{a}(k_0) = \frac{d}{dk} a(k) \Big|_{k=k_0}$ . Будем исходить из уравнения (1.1) для  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  и уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \dot{\psi} + k^2 \dot{\psi} = v(x) \dot{\psi} - 2k \psi$$

для  $\dot{f}_1(x, k)$  и  $\dot{f}_2(x, k)$ . Стандартным приемом мы получаем тождества

$$\left. \begin{aligned} \{f_1(x, k), \dot{f}_2(x, k)\} \Big|_{-A}^x &= 2k \int_{-A}^x f_1(x, k) f_2(x, k) dx, \\ \{\dot{f}_1(x, k), f_2(x, k)\} \Big|_x^A &= -2k \int_x^A f_1(x, k) f_2(x, k) dx. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

С другой стороны, с помощью (1.18) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} (2ika(k)) &= 2ia(k) + 2ik\dot{a}(k) = \\ &= \{\dot{f}_1(x, k), f_2(x, k)\} + \{f_1(x, k), \dot{f}_2(x, k)\}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Пусть теперь  $k$  совпадает с одним из нулей функции  $a(k)$ , который мы опять обозначим через  $k_0$ . При  $k=k_0$  вронсианы в формулах (1.26), взятые при  $x=\pm A$ , пропадают и интегралы в правых частях этих формул сходятся в пределе при  $A \rightarrow \infty$ . Сравнивая (1.26) и (1.27) и вспоминая, что  $a(k_0)=0$ , мы получаем

$$i\dot{a}(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, k_0) f_2(x, k_0) dx. \quad (1.28)$$

При мнимых  $k$  решения  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  вещественные.

Вследствие (1.25) интеграл в правой части (1.28) не обращается в нуль, так что  $\dot{a}(k_0) \neq 0$  и, следовательно, нули  $a(k)$  простые. В дальнейшем эти нули мы будем обозначать через  $i\kappa_l$ ,  $l = 1, \dots, N$ . На этом мы заканчиваем исследование свойств коэффициентов  $a(k)$  и  $b(k)$ .

В заключение этого параграфа приведем выражение для функции Грина уравнения (1.1). Пусть  $\lambda$  — комплексный параметр и выберем ветвь для  $\sqrt{\lambda}$  так, что  $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \geq 0$ . Ядро

$$R(x, y; \lambda) = -\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}a(\sqrt{\lambda})} f_1(x, \sqrt{\lambda}) f_2(y, \sqrt{\lambda}), \quad y < x;$$

$$R(x, y; \lambda) = R(y, x; \lambda)$$

при фиксированных  $x$  и  $y$  является аналитической функцией параметра  $\lambda$  на плоскости с разрезом по положительной части вещественной оси и простыми полюсами в точках  $\lambda = -\kappa_i^2$ . Если  $\lambda$  не совпадает с этими точками и  $\lambda \neq 0$ , то для этого ядра справедливы оценки

$$|R(x, y; \lambda)| \leq Ce^{-\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} |x-y|}.$$

При этом, как следует из (1.18),  $R(x, y; \lambda)$  является решением уравнения

$$-\frac{d^2}{dx^2} R(x, y; \lambda) + v(x) R(x, y; \lambda) - \lambda R(x, y; \lambda) = \delta(x - y).$$

При помощи этих фактов можно показать, что интегральный оператор  $R(\lambda)$  с ядром  $R(x, y; \lambda)$  является резольвентой  $(H - \lambda I)^{-1}$  самосопряженного оператора  $H$ . Более того, можно использовать свойства этого ядра для самого определения оператора  $H$ , что, впрочем, мы делать не будем.

Обратим внимание на тот факт, что функция  $a(\sqrt{\lambda})$  стоит в знаменателе резольвенты  $R(x, y; \lambda)$  и имеет нули в собственных значениях оператора  $H$ . Одним этим она напоминает характеристический определитель  $\det(H - \lambda I)$ . Можно убедиться, что такая ее интерпретация действительно имеет основания. Так, например, выполняется соотношение

$$\frac{d}{d\lambda} \ln a(\sqrt{\lambda}) = -\operatorname{Tr}(R(\lambda) - R_0(\lambda)),$$

где  $R_0(\lambda)$  — резольвента оператора  $H_0$ . Вычитание  $R_0(\lambda)$  играет роль необходимой регуляризации для определения  $\det(H - \lambda I)$ .

## § 2. ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

Знание фундаментальной системы решений для уравнения Шредингера (1.1) позволит нам просто проиллюстрировать на примере оператора  $H$  общие положения теории рас-

сияния, описанные во введении. Мы покажем, как волновые операторы  $U^{(\pm)}$  для пары операторов  $H$  и  $H_0$ , заданных в  $\mathfrak{H}=L_2(\mathbf{R})$  формулами

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x); \quad H_0 = -\frac{d^2}{dx^2},$$

можно будет выразить через подходящие решения стационарного уравнения Шредингера (1.1). Все свойства волновых операторов после этого получатся как простые следствия этой связи.

Начнем с описания диагонального представления для оператора  $H_0$ . Рассмотрим пространство  $\mathfrak{H}_0$ , состоящее из пар функций

$$\varphi(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) \\ \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

квадратично интегрируемых на полуоси  $0 \leq \lambda < \infty$  и имеющих скалярное произведение

$$(\varphi, \varphi')_0 = \int_0^\infty (\varphi_1(\lambda) \overline{\varphi'_1(\lambda)} + \varphi_2(\lambda) \overline{\varphi'_2(\lambda)}) \frac{d\lambda}{2V\lambda}.$$

Диагональное представление для оператора  $H_0$  можно реализовать в  $\mathfrak{H}_0$ . Соответствующий изоморфизм  $\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_0$  дается преобразованием Фурье

$$\psi(x) \rightarrow T_0 \psi = \varphi(\lambda),$$

где

$$\varphi_1(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-i\sqrt{\lambda}x} dx; \quad \varphi_2(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{i\sqrt{\lambda}x} dx.$$

Оператор  $T_0$  унитарен

$$T_0^* T_0 = I; \quad T T_0^* = I_0.$$

При изоморфизме  $T_0$  оператор  $H_0$  переходит в оператор умножения на независимую переменную  $\lambda$

$$H_0 \psi(x) \rightarrow \lambda \varphi(\lambda).$$

Рассмотрим теперь два набора решений уравнения Шредингера

$$u_1^{(+)}(x, k) = \frac{1}{a(k)} f_2(x, k); \quad u_2^{(+)}(x, k) = \frac{1}{a(k)} f_1(x, k); \quad (2.1)$$

$$u_1^{(-)}(x, k) = \overline{u_2^{(+)}(x, k)}; \quad u_2^{(-)}(x, k) = \overline{u_1^{(+)}(x, k)}. \quad (2.2)$$

Для определенности считаем, что всюду  $k > 0$ . Таблица асимптотик этих решений при  $|x| \rightarrow \infty$  имеет вид

$$u_1^{(+)}(x, k) = s_{11}(k) e^{-ikx} + o(1) = e^{-ikx} + s_{12}(k) e^{ikx} + o(1),$$

$$u_2^{(+)}(x, k) = s_{21}(k) e^{-ikx} + e^{ikx} + o(1) = s_{22}(k) e^{ikx} + o(1)$$

$$u_1^{(-)}(x, k) = e^{-ikx} + \tilde{s}_{12}(k) e^{ikx} + o(1) = \tilde{s}_{11}(k) e^{-ikx} + o(1),$$

$$u_2^{(-)}(x, k) = \tilde{s}_{22}(k) e^{ikx} + o(1) = \tilde{s}_{21}(k) e^{-ikx} + e^{ikx} + o(1),$$

причем левый столбец здесь относится к  $x \rightarrow -\infty$ , а правый — к  $x \rightarrow \infty$ . Коэффициенты  $s_{ij}(k)$  и  $\tilde{s}_{ij}(k)$ , участвующие в этой таблице, следующим образом выражаются через коэффициенты перехода  $a(k)$  и  $b(k)$ :

$$s_{11}(k) = \frac{1}{a(k)}; \quad s_{12}(k) = \frac{b(k)}{a(k)}; \quad s_{21}(k) = -\frac{b(-k)}{a(k)}; \quad s_{22}(k) = \frac{1}{a(k)};$$

$$\tilde{s}_{11}(k) = \overline{s_{22}(k)}; \quad \tilde{s}_{12}(k) = \overline{s_{21}(k)}; \quad \tilde{s}_{21}(k) = \overline{s_{12}(k)}; \quad \tilde{s}_{22}(k) = s_{11}(k).$$

Перечисленные свойства следуют из соотношений типа (1.15) и (1.16) и асимптотик (1.2) и (1.3) решений  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$ .

Функции  $s_{11}(k)$  и  $s_{12}(k)$  имеют смысл при всех  $k \neq 0$ , так как  $a(k)$  не обращается в нуль на вещественной оси. Покажем, что если  $|a(0)| = \infty$ , то коэффициенты  $s_{11}$  и  $s_{12}$  все равно имеют смысл вплоть до  $k=0$ . В этом случае, очевидно,  $s_{11}(0)=0$  и следует рассматривать только  $s_{12}(k)$ . Как видно из (1.22),  $|a(k)| \rightarrow \infty$ , если

$$\lim_{k \rightarrow 0} 2ika(k) = \beta = - \int_{-\infty}^{\infty} v(x) f_2(x, 0) dx \neq 0.$$

При этом, как видно из (1.23),

$$\lim_{k \rightarrow 0} s_{12}(k) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{b(k)}{a(k)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2ikb(k)}{2ika(k)} = \frac{-\beta}{\beta} = -1$$

и, таким образом,  $s_{12}(k)$  по непрерывности определено вплоть до  $k=0$  и  $s_{12}(0) = -1$ . Аналогично можно показать, что в этом же случае  $s_{21}(0) = -1$  и  $s_{22}(0) = 0$ . При больших  $|k|$

$$s_{11}(k) = s_{22}(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right); \quad s_{12}(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right); \quad s_{21}(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right).$$

Мы можем естественно продолжить  $s_{ij}(k)$  на полуось  $k < 0$  соотношением

$$s_{ij}(-k) = \overline{s_{ij}(k)}.$$

Нетрудно убедиться на основании свойства (1.21), что матрицы

$$S(k) = \|s_{ij}(k)\|; \quad S^{-1}(k) = \|\tilde{s}_{ij}(k)\|$$

обратны друг другу, как на то указывает обозначение, и являются унитарными, так что, например

$$S^*(k) S(k) = S(k) S^*(k) = I,$$

или, более подробно,

$$\begin{aligned} |s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 &= 1 = |s_{22}|^2 + |s_{12}|^2, \\ s_{11}(k)s_{21}(-k) + s_{12}(k)s_{22}(-k) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Мы видим, в частности, что при всех  $k \neq 0$

$$|s_{12}(k)| < 1; |s_{21}(k)| < 1 \quad (2.4)$$

и напомним, что если  $|s_{12}(0)| = 1$ , то

$$s_{12}(0) = s_{21}(0) = -1. \quad (2.5)$$

Наконец, из сравнения асимптотик набора решений  $u_l^{(+)}(x, k)$  и  $u_l^{(-)}(x, k)$  следует линейное соотношение

$$u^{(+)}(x, k) = S(k) u^{(-)}(x, k), \quad (2.6)$$

где использованы естественные векторные обозначения.

Отметим, что выбор решений  $u_l^{(\pm)}(x, k)$  по их асимптотике естественно интерпретируется в терминах принципа излучения. Мы, однако, нигде ниже не будем этим пользоваться.

Решения  $u_l^{(\pm)}(x, k)$  представляют собой полный ортонормированный набор собственных функций непрерывного спектра оператора  $H$ . В этом можно убедиться, сосчитав скачок резольвенты  $R(x, y; \lambda)$  через разрез по положительной части вещественной оси, который соответствует непрерывному спектру оператора  $H$ . Имеем формулу

$$\begin{aligned} R(x, y; k^2 + i0) - R(x, y; k^2 - i0) = \\ = \frac{1}{2ik} (\overline{u_1^{(\pm)}(x, k)} u_1^{(\pm)}(y, k) + \overline{u_2^{(\pm)}(x, k)} u_2^{(\pm)}(y, k)), \end{aligned}$$

которую проще всего проверить непосредственной подстановкой выражений (2.1), (2.2) для решений  $u_1^{(\pm)}(x, k)$  и  $u_2^{(\pm)}(x, k)$  через  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  в правую часть. Соотношение полноты, которое отсюда следует, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (\overline{u_1^{(\pm)}(x, k)} u_1^{(\pm)}(y, k) + \overline{u_2^{(\pm)}(x, k)} u_2^{(\pm)}(y, k)) dk + \\ + \sum_{i=1}^N \overline{u_i(x)} u_i(y) = \delta(x - y). \end{aligned}$$

Здесь  $u_l(x)$ ,  $l = 1, \dots, N$ , — ортонормированные собственные функции дискретного спектра оператора  $H$ . Соотношение ортогональности

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty u_l^{(\pm)}(x, k) \overline{u_j^{(\pm)}(x, l)} dx = \delta_{lj} \delta(x - l)$$

можно вывести, используя тождество

$$f(x, k) f(x, l) = \frac{1}{l^2 - k^2} \frac{d}{dx} \{ f(x, k) f(x, l) \},$$

справедливое для произвольных решений уравнения Шредингера (1.1), асимптотику при  $|x| \rightarrow \infty$  решений  $u_i^{(\pm)}(x, k)$  и условие унитарности  $S(k)$ .

При помощи решений  $u_i^{(\pm)}(x, k)$  построим два отображения  $T_{\pm}: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_0$  по формулам

$$\psi(x) \rightarrow T_{\pm} \psi = \varphi^{(\pm)}(\lambda); \quad \varphi_i^{(\pm)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) u_i^{(\pm)}(x, \sqrt{\lambda}) dx.$$

Соотношения полноты и ортогональности записываются через эти операторы следующим образом

$$T_{\pm}^* T_{\pm} = I - P; \quad T_{\pm} T_{\pm}^* = I_0.$$

Здесь  $P$  — проектор в  $\mathfrak{H}$  на собственное подпространство оператора  $H$ , натянутое на его собственные векторы  $u_l$ ,  $l = 1, \dots, N$ .

Покажем теперь, что волновые операторы можно ввести формулами

$$U^{(\pm)} = T_{\pm}^* T_0. \quad (2.7)$$

Для доказательства достаточно показать, что для любого вектора  $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{H}_0$  из плотного множества вектор

$$\chi^{(\pm)}(t) = e^{-iHt} T_{\pm}^* \varphi - e^{-iH_0 t} T_0^* \varphi$$

исчезает по норме в  $\mathfrak{H}$  при  $t \rightarrow \pm \infty$ . Это в свою очередь нетрудно проверить. Действительно, вспоминая определение операторов  $T_{\pm}$  и  $T_0$ , мы можем записать функции  $\chi^{(\pm)}(x, t)$ , представляющие векторы  $\chi^{(\pm)}(t)$ , в виде

$$\begin{aligned} \chi^{(\pm)}(x, t) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} [\varphi_1(k^2) (\overline{u_1^{(\pm)}(x, k)} - e^{ikx}) + \\ & + \varphi_2(k^2) (\overline{u_2^{(\pm)}(x, k)} - e^{-ikx})] e^{-ik\pm t} dk. \end{aligned}$$

Функции  $\varphi_1(k^2)$  и  $\varphi_2(k^2)$  будем считать гладкими и финитными. По лемме Римана — Лебега вклад в интеграл

$$\|\chi^{(\pm)}(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\chi^{(\pm)}(x, t)|^2 dx$$

от произвольного конечного интервала  $|x| < A$  можно сделать сколь угодно малым при достаточно большом  $|t|$ . Далее вклад в интегралы по интервалам  $-\infty < x < -A$  и  $A < x < \infty$  от членов типа  $o(1)$  в асимптотике при  $|x| \rightarrow \infty$  функций  $u_i^{(\pm)}(x, k)$  можно сделать при достаточно большом  $A$  сколь угодно малым равномерно по  $t$ . Для этого достаточно ис-

пользовать оценки типа (1.6) и (1.7). Оставшиеся интегралы имеют вид

$$J_1^{(\pm)}(t) = \int_A^{\infty} \left| \int_{\alpha}^{\beta} G(k) e^{-ikst} e^{\mp i kx} dk \right|^2 dx$$

и

$$J_2^{(\pm)}(t) = \int_{-\infty}^{-A} \left| \int_{\alpha}^{\beta} G(k) e^{-ikst} e^{\pm i kx} dk \right|^2 dx,$$

где  $[\alpha, \beta]$  — конечный интервал на полуоси  $0 < k < \infty$  и  $G(k)$  — непрерывная функция, исчезающая на его концах. Утверждение, согласно которому

$$J_1^{(+)}(t), J_2^{(+)}(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty; \quad J_1^{(-)}(t), J_2^{(-)}(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow -\infty$$

и выбор доказательства которого мы предоставляем читателю, заканчивает доказательство того, что

$$\|\chi^{(\pm)}(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \pm \infty.$$

Фактически мы не только показали совпадение (2.7), но и дали независимое доказательство существования волновых операторов  $U^{(\pm)}$ . Асимптотическая полнота, т. е. соотношение

$$U^{(\pm)} U^{(\pm)*} = I - P, \quad (2.8)$$

для которого в абстрактной теории существует сложное доказательство, в нашем случае немедленно следует из условия полноты функций  $u^{(\pm)}(x, k)$ . Условие изометричности

$$U^{(\pm)*} U^{(\pm)} = I,$$

которое в абстрактной теории доказывается тривиально, эквивалентно ортогональности функций  $u^{(\pm)}(x, k)$  и может быть использовано для ее вывода.

Соотношение (2.6) мы можем теперь записать в виде

$$U^{(-)} = U^{(+)} S,$$

где оператор  $S$  задается формулой

$$S = T_0^* \hat{S} T_0,$$

а оператор  $\hat{S}$  определяется в  $\mathfrak{H}_0$  матрицей  $S(k)$

$$\hat{S} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = S(V \bar{\lambda}) \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) \\ \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что  $S$  коммутирует с  $H_0$

$$[S, H_0] = 0.$$

Итак, мы получили выражение для оператора рассеяния  $S$  в рассматриваемом случае. Определяющая его матрица  $S(k)$ ,

которая дает его представление в диагональной реализации оператора  $H_0$ , называется  $S$ -матрицей. В соответствии с интерпретацией ее матричных элементов  $s_{ij}(k)$  в духе принципа излучения, принято называть  $s_{21}(k)$  и  $s_{12}(k)$  коэффициентами отражения налево и направо, соответственно, а коэффициент  $s_{11} = s_{22}$  — коэффициентом прохождения.

Полученные свойства  $S$ -матрицы позволяют восстановить ее, если задан только один из коэффициентов отражения. Действительно, пусть, например, задан  $S_{12}(k)$ . Из условия унитарности (2.3) мы можем определить модуль коэффициента прохождения

$$|s_{11}(k)| = (1 - |s_{12}(k)|^2)^{1/2}.$$

На основании аналитичности этого коэффициента в верхней полуплоскости его аргумент (и, таким образом, весь коэффициент) восстанавливается по его модулю. Имеют место явные формулы

$$\begin{aligned} s_{11}(k) &= \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |s_{12}(l)|^2)}{l - k} dl \right\} \prod_{l=1}^N \frac{k + ix_l}{k - ix_l}, \quad \operatorname{Im} k > 0; \\ s_{11}(k) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s_{11}(k + i\epsilon), \quad \operatorname{Im} k = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Коэффициент  $s_{21}(k)$  теперь может быть построен на основании условия унитарности

$$s_{21}(k) = -\frac{s_{12}(-k) s_{22}(-k)}{s_{11}(-k)}. \quad (2.10)$$

Приведенная процедура имеет смысл для любой функции  $s_{12}(k)$ , удовлетворяющей условиям (2.4) и (2.5) и имеющей асимптотику

$$s_{12}(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right). \quad (2.11)$$

При этом для полученного  $s_{21}(k)$  условия (2.4) и (2.5) также будут выполняться, и при больших  $|k|$  справедлива асимптотика

$$s_{11}(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right); \quad s_{21}(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right). \quad (2.12)$$

Заметим, что аналитичность коэффициента прохождения и является тем дополнительным необходимым условием, о котором упоминалось во введении в связи с обсуждением переопределенности обратной задачи.

Дальнейшие свойства преобразования Фурье коэффициентов  $s_{11}(k)$ ,  $s_{21}(k)$  и  $s_{12}(k)$  будут получены в следующем параграфе.

Мы заканчиваем на этом на некоторое время описание основных объектов теории рассеяния для пары операторов

$H$  и  $H_0$  и можем перейти к обратной задаче — задаче о восстановлении оператора  $H$ , т. е. потенциала  $v(x)$ , по матрице  $S(k)$ , т. е. фактически по одному из коэффициентов отражения.

### § 3. ВОЛЬТЕРРОВЫ ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Как уже говорилось во введении, основу техники решения обратной задачи составляют операторы преобразования, т. е. решения уравнения

$$HU = UH_0,$$

которые имеют структуру операторов Вольтерра

$$U_1 \psi(x) = \psi(x) + \int_x^{\infty} A_1(x, y) \psi(y) dy; \quad (3.1)$$

$$U_2 \psi(x) = \psi(x) + \int_{-\infty}^x A_2(x, y) \psi(y) dy. \quad (3.2)$$

Эти операторы мы уже фактически ввели. Действительно, определим операторы  $V_i$ ,  $i=1,2$ , действующие из  $\mathfrak{H}$  в  $\mathfrak{H}_0$  по формулам

$$\psi \rightarrow V_1 \psi = \varphi : \varphi_1(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_1(x, -\sqrt{\lambda}) dx;$$

$$\varphi_2(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_1(x, \sqrt{\lambda}) dx;$$

$$\psi \rightarrow V_2 \psi = \varphi : \varphi_1(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_2(x, \sqrt{\lambda}) dx;$$

$$\varphi_2(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_2(x, -\sqrt{\lambda}) dx.$$

Тогда операторы

$$U_i = V_i^* T_0, \quad i = 1, 2, \quad (3.3)$$

задаются формулами (3.1), (3.2), где ядра  $A_i(x, y)$  определены в § 1 формулами (1.8) и (1.9).

Обсудим, как выглядят в терминах операторов  $U_1$  и  $U$ , условие полноты (2.8). Для этого в первую очередь сосчитаем нормирующие множители, т. е. операторы  $N_i^{(\pm)}$ ,  $i = 1, 2$ , реализующие соотношения

$$U_i = U^{(\pm)} N_i^{(\pm)}, \quad i = 1, 2. \quad (3.4)$$

Вследствие условия коммутации

$$[H_0, N_i^{(\pm)}] = 0,$$

которым должны удовлетворять эти операторы, они могут быть заданы посредством матриц  $N_i^{(\pm)}(k)$ , подобно тому, как оператор  $S$  задается матрицей  $S(k)$ . Из определения (2.1), (2.2) следует, что

$$f_1 = M_1^{(\pm)}(k) u^{(\pm)}, \quad f_2 = M_2^{(\pm)}(k) u^{(\pm)}, \quad (3.5)$$

где  $f_1, f_2, u^{(\pm)}$  — столбцы решений  $f_1(x, -k), f_1(x, k), f_2(x, k), f_2(x, -k), u_1^{(\pm)}, u_2^{(\pm)}$  соответственно, а матрицы  $M_i^{(\pm)}(k)$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} M_1^{(+)}(k) &= \begin{pmatrix} 1 & -b(k) \\ 0 & a(k) \end{pmatrix}; & M_1^{(-)}(k) &= \begin{pmatrix} a(-k) & 0 \\ -b(-k) & 1 \end{pmatrix}; \\ M_2^{(+)}(k) &= \begin{pmatrix} a(k) & 0 \\ b(-k) & 1 \end{pmatrix}; & M_2^{(-)}(k) &= \begin{pmatrix} 1 & b(k) \\ 0 & a(-k) \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Отсюда и из определений (2.7), (3.3) и (3.4) следует, что нормирующие множители  $N_i^{(\pm)}$  выражаются по формулам

$$N_i^{(\pm)} = T_0^* \hat{N}_i^{(\pm)} T_0,$$

где операторы  $\hat{N}_i^{(\pm)}$  действуют в  $\mathfrak{H}_0$  как операторы умножения на матрицы

$$N_i^{(\pm)}(k) = M_i^{(\pm)}(k)^*.$$

Сравнивая (2.6) и (3.5), мы видим также, что матрицы  $M_1^{(\pm)}(k)$  и  $M_2^{(\pm)}(k)$  факторизуют матрицу  $S(k)$

$$S(k) = M_1^{(+)-1}(k) M_1^{(-)}(k) = M_2^{(+)-1}(k) M_2^{(-)}(k). \quad (3.7)$$

Условие факторизации и треугольная структура матриц  $M_i^{(\pm)}(k)$ , видная в явных формулах (3.6), позволяют определить их однозначно по заданной матрице  $S(k)$ . Действительно, если первое соотношение (3.7) переписать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & m_{12} \\ 0 & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ m_{21} & 1 \end{pmatrix},$$

то мы получаем линейную систему уравнений для определения коэффициентов  $m_{11}, m_{12}, m_{21}$  и  $m_{22}$  матриц  $M_1^{(+)}$  и  $M_1^{(-)}$ , которая имеет единственное решение. Аналогично можно поступить и со вторым соотношением (3.7). Получающийся ответ дается формулами (3.6). Другими словами, априорные сведения о строении нормирующих множителей, соответствующих операторам преобразования  $U_1$  и  $U_2$ , позволяют нам однозначно их определить по заданному оператору рассеяния  $S$ .

Операторы  $U_i$ ,  $i = 1, 2$ , так же, как и волновые операторы  $U^{(\pm)}$ , имеют в качестве области значений собственное подпространство оператора  $H$ , соответствующее его абсолютно непрерывному спектру. Покажем, что мы можем расширить область определения операторов с выходом из пространства  $\mathfrak{H}$  так, что после этого их область значений совпадает с  $\mathfrak{H}$ . Рассуждение основано на том, что собственные функции дискретного спектра  $u_i(x)$  оператора  $H$ , образующие дефектное подпространство для операторов  $U$ , пропорциональны решениям  $f_i(x, k)$  при  $k = i\kappa_i$ . Таким образом,

$$u_i(x) = \chi_i^{(1)}(x) + \int_x^{\infty} A_1(x, y) \chi_i^{(1)}(y) dy = U_1 \chi_i^{(1)}; \quad (3.8)$$

$$u_i(x) = \chi_i^{(2)}(x) + \int_{-\infty}^x A_2(x, y) \chi_i^{(2)}(y) dy = U_2 \chi_i^{(2)}, \quad (3.9)$$

где

$$\chi_i^{(1)} = (m_i^{(1)})^{1/2} e^{-\kappa_i x}; \quad \chi_i^{(2)} = (m_i^{(2)})^{1/2} e^{\kappa_i x}$$

и  $m_i^{(i)}$  — нормирующие множители

$$m_i^{(i)} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} (f_i(x, i\kappa_i))^2 dx \right)^{-1}, \quad i = 1, 2. \quad (3.10)$$

Заметим, что, как следует из соотношения (1.28),

$$m_i^{(1)} m_i^{(2)} = \gamma_i^2; \quad \gamma_i = \frac{i}{a(i\kappa_i)} = i \operatorname{Res} s_{11}|_{k=i\kappa_i}. \quad (3.11)$$

Рассмотрим теперь пространства

$$\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{B}_i, \quad (3.12)$$

где конечномерные пространства  $\mathfrak{B}_i$  натянуты на функции  $\chi_i^{(i)}$ . Скалярное произведение в  $\mathfrak{B}_i$  индуцируется формулой

$$(e^{-\kappa_i x}, e^{-\kappa_j x})_1 = \delta_{ij}; \quad (e^{\kappa_i x}, e^{\kappa_j x})_2 = \delta_{ij}.$$

Соотношения (3.8) и (3.9) позволяют нам расширить операторы  $U_1$  и  $U_2$  на пространства  $\mathfrak{H}_1$  и  $\mathfrak{H}_2$ , соответственно, причем теперь их область значений будет совпадать с  $\mathfrak{H}$ .

Соотношение полноты (2.8) в терминах таких расширенных операторов выглядит следующим образом

$$U_i W_i U_i^* = I. \quad (3.13)$$

Здесь весовые операторы  $W_i$  действуют в пространствах  $\mathfrak{H}_i$  и разложение (3.12) их приводит. В подпространствах  $\mathfrak{B}_i$  операторы  $W_i$  задаются в базисе  $\{e^{\pm \kappa_i x}\}$  диагональными матрицами

$$W_i|_{\mathfrak{B}_l} = \{m_1^{(i)}, \dots, m_N^{(i)}\}, \quad i=1, 2.$$

В подпространстве  $\mathfrak{B}$  операторы  $W_i$  даются формулой

$$W_i = N_l^{(\pm)-1} N_l^{(\pm)*-1} = T_0^* W_i T_0.$$

Используем формулы (3.6) для того, чтобы выразить эти операторы через матричные элементы матрицы  $S(k)$ . Имеем, на основании условия унитарности,

$$W_1(k) = (M_1^{(\pm)}(k) M_1^{(\pm)*}(k))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & s_{12}(k) \\ s_{12}(-k) & 1 \end{pmatrix}$$

и аналогично

$$W_2(k) = (M_2^{(\pm)}(k) M_2^{(\pm)*}(k))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & s_{21}(-k) \\ s_{21}(k) & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицы  $W_i(k)$  выражаются только через один из коэффициентов отражения. Осуществляя преобразование Фурье, необходимое для окончательного вычисления операторов  $W_i$ , получаем, что они выражаются в виде

$$W_i = I + \Omega_i, \quad i=1, 2,$$

где  $\Omega_i$  — интегральные операторы с ядрами, зависящими от суммы аргументов

$$\Omega_i(x, y) = \Omega_i(x + y),$$

причем

$$\Omega_1(x) = \sum m_i^{(1)} e^{-\kappa_i x} + F_1(x); \quad \Omega_2(x) = \sum m_i^{(2)} e^{\kappa_i x} + F_2(x), \quad (3.14)$$

где

$$F_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_{12}(k) e^{ikx} dk, \quad F_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_{21}(k) e^{-ikx} dk. \quad (3.15)$$

Из свойства (2.11), (2.12) следует, что функции  $\Omega_1(x)$  и  $\Omega_2(x)$  квадратично интегрируемы на интервалах  $a < x < \infty$  и  $-\infty < x < b$ , соответственно, при любых конечных  $a$  и  $b$ . Более подробные сведения об этих ядрах мы получим в следующем параграфе.

#### § 4. УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА—ЛЕВИТАНА

Эвристические соображения, приведенные во введении, показывают, что условия полноты приводят к следующим линейным уравнениям для ядер  $A_1(x, y)$  и  $A_2(x, y)$  операторов преобразования  $U_1$  и  $U_2$

$$A_1(x, y) + \Omega_1(x + y) + \int_x^{\infty} A_1(x, z) \Omega_1(z + y) dz = 0; \quad x < y, \quad (4.1)$$

$$A_2(x, y) + \Omega_2(x + y) + \int_{-\infty}^x A_2(x, z) \Omega_2(z + y) dz = 0; \quad x > y. \quad (4.2)$$

Эти уравнения были впервые выведены в работе Кэя и Мозеса [40]. По внешнему виду они совпадают с уравнением В. А. Марченко [16] из теории радиального оператора Шредингера при  $l=0$ . Единственное изменение состоит в том, что областью изменения переменных теперь является вся ось. Мы будем, однако, называть их уравнениями Гельфанд—Левитана, так как их теоретико-операторное содержание аналогично таковому для уравнений, выведенных И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном в теории обратной спектральной задачи Штурма—Лиувилля. Для того, чтобы сделать вывод этих уравнений строгим, мы должны исследовать операторы  $U_i^{*-1}$ , действующие из  $\mathfrak{H}_i$  в  $\mathfrak{H}$  или заменить теоретико-операторные соображения более элементарными. Один вариант таких рассуждений, идеально близкий к [1] и проведенный явно в [23], [26], излагается ниже.

Будем использовать формулы

$$u_1(x, k) = s_{12}(k) f_1(x, k) + f_1(x, -k), \quad (4.3)$$

$$u_2(x, k) = s_{21}(k) f_2(x, k) + f_2(x, -k), \quad (4.4)$$

которые представляют собой вариант записи соотношений (1.15), (1.16). Мы опустили здесь индекс (+) на  $u_i^{(+)}(x, k)$ , так как функции  $u_i^{(-)}(x, k)$  больше использоваться не будут.

Мы знаем, что функции  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  аналитичны и ограничены в верхней полуплоскости и имеют там оценки

$$f_1(x, k) e^{-ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right); \quad f_2(x, k) e^{ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad (4.5)$$

где  $O\left(\frac{1}{|k|}\right)$ , вообще говоря, зависит от  $x$ . Функции  $u_1(x, k)$  и  $u_2(x, k)$  также аналитичны в верхней полуплоскости, за исключением точек  $k = ix_l$ ,  $l = 1, \dots, N$ , где вместе с  $1/a(k)$  они имеют простые полюса. Соответствующие вычеты просто связаны со значениями функций  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  в этих точках. Так, например:

$$\begin{aligned} \text{Res } u_1(x, k)|_{k=ix_l} &= \text{Res } s_{11}(k)|_{k=ix_l} f_2(x, ix_l) = \\ &= \frac{f_2(x, ix_l)}{-i \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, ix_l) f_2(x, ix_l) dx} = i m_l^{(1)} f_1(x, ix_l), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $m_l^{(1)}$  определено в (3.10). Аналогично

$$\text{Res } u_2(x, k)|_{k=ix_l} = i m_l^{(2)} f_2(x, ix_l).$$

При больших  $|k|$  функции  $u_i(x, k)$  имеют асимптотику

$$u_1(x, k) e^{ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right); \quad u_2(x, k) e^{-ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad (4.7)$$

где  $O\left(\frac{1}{|k|}\right)$  также может зависеть от  $x$  неравномерно.

В соотношениях (4.3) и (4.4) в каждой строке участвуют функции только с одинаковым номером и с точностью до замены  $1 \leftrightarrow 2$ ,  $e^{ikx} \leftrightarrow e^{-ikx}$  обе формулы выглядят совершенно одинаково. В каждом из них две функции  $f(x, k)$  и  $u(x, k)$ , обладающие определенными аналитическими свойствами на комплексной плоскости, связаны между собой на вещественной оси с помощью функции  $s(k)$ , заданной только при  $\operatorname{Im} k = 0$ . Оказывается, мы сможем на основании этих соотношений восстановить обе функции  $f(x, k)$  и  $u(x, k)$  по заданной  $s(k)$ .

Перейдем для этого к преобразованиям Фурье, участвующих в этих соотношениях функций. Преобразования Фурье для  $f_1(x, k)$ ,  $f_2(x, k)$ ,  $s_{12}(k)$  и  $s_{21}(k)$  уже неоднократно упомянуты выше, см. (1.8), (1.9) и (3.15). Пусть

$$u_1(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} B_1(x, y) e^{-iy} dy. \quad (4.8)$$

На основании свойств аналитичности функции  $u_1(x, k)$ , описанных выше,

$$\begin{aligned} B_1(x, y) &= i \sum_{l=1}^N \operatorname{Res} u_1(x, k) |_{k=i\kappa_l} e^{-ix} e^{iy} = \\ &= - \sum_{l=1}^N m_l^{(1)} \left( e^{-ix} + \int_x^{\infty} A_1(x, z) e^{-iz} dz \right) e^{-iy}, \quad x < y. \end{aligned} \quad (4.9)$$

По теореме о свертке соотношение (4.3) после преобразования Фурье приобретает вид

$$F_1(x+y) + \int_{-\infty}^{\infty} A_1(x, z) F_1(z+y) dz + A_1(x, y) = B_1(x, y) \quad (4.10)$$

и при  $x < y$  на основании (4.9) мы приходим к уравнению (4.1). Уравнение (4.2) выводится аналогичным образом.

Рассуждения, которые привели нас от соотношений (4.3), (4.4) вместе с описанными условиями типа аналитичности участвующих в них функций к уравнениям вида (4.1), (4.2), являются обратимыми. Более подробно, пусть  $A_1(x, y)$  — решение уравнения (4.1) такое, что аналитическая при  $\operatorname{Im} k > 0$  функция  $f_1(x, y)$ , построенная по нему по формуле (1.8), удовлетворяет условию (4.5). Рассмотрим ядро  $B_1(x, y)$ , определенное по формуле (4.10), и построим по не-

му функцию  $u_1(x, k)$  по формуле (4.8). Обращая преобразование Фурье, получим, что  $f_1(x, k)$  и  $u_1(x, k)$  связаны соотношением вида (4.3), так что, в частности,  $u_1(x, k)$  при  $\operatorname{Im} k=0$  удовлетворяет условию (4.7). Из уравнения (4.1) следует, что для  $B_1(x, y)$  при  $x < y$  справедлива формула (4.9), откуда следует, что  $u_1(x, k)$  имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} k > 0$  с полюсами в точках  $i\omega_l$ , причем для соответствующих вычетов выполняется соотношение (4.6). На этом доказательство указанной эквивалентности заканчивается. В следующем параграфе мы исследуем разрешимость уравнения Гельфанд — Левитана и более точно сформулируем соответствующее утверждение относительно существования и единственности пары функций  $u(x, k)$  и  $f(x, k)$ , удовлетворяющих описанным условиям аналитичности и связанных соотношением типа (4.3).

В заключение этого параграфа мы используем уравнение Гельфанд — Левитана для уточнения свойств коэффициентов отражения, а именно изучим подробнее поведение функций  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$ , относительно которых мы пока знаем только то, что они квадратично интегрируемы. Рассмотрим для определенности функцию  $F_1(t)$ . Перепишем равенство (4.1), положив  $x = y$

$$\Omega_1(2x) + A_1(x, x) + 2 \int_x^{\infty} A_1(x, 2y - x) \Omega_1(2y) dy = 0, \quad (4.11)$$

и рассмотрим это соотношение как уравнение для  $\Omega_1(2y)$ . Это уравнение типа Вольтерра и метод последовательных приближений для него всегда сходится. На основании оценки (1.12) для ядра  $A_1(x, y)$  мы получаем для  $\Omega_1(2x)$  оценку

$$\Omega_1(2x) \leq C(x) \xi_1(x).$$

Здесь и в дальнейшем через  $C(x)$  мы обозначаем монотонно невозрастающую функцию, ограниченную при  $x \rightarrow \infty$  и, вообще говоря, растущую при  $x \rightarrow -\infty$ . Вследствие дифференцируемости функции  $A_1(x, y)$  заключаем, что  $\Omega_1(x)$  также дифференцируема, и с помощью уравнения (4.11) находим оценку

$$\left| \frac{d}{dx} \Omega_1(2x) - \frac{1}{2} v(x) \right| \leq C(x) \xi_1^2(x).$$

Аналогично с помощью уравнения (4.2) мы можем доказать дифференцируемость функции  $\Omega_2(x)$  и получить оценки

$$|\Omega_2(2x)| \leq D(x) \xi_2(x); \quad \left| \frac{d}{dx} \Omega_2(2x) + \frac{1}{2} v(x) \right| \leq D(x) \xi_2^2(x).$$

Здесь и дальше функция  $D(x)$  — монотонно неубывающая функция, ограниченная при  $x \rightarrow -\infty$  и растущая, вообще говоря, при  $x \rightarrow \infty$ .

Из полученных оценок и свойства (P) потенциала следует, что

$$\int_a^{\infty} (1 + |x|) \left| \frac{d}{dx} \Omega_1(x) \right| dx \leq C(a), \quad (4.12)$$

$$\int_{-\infty}^b (1 + |x|) \left| \frac{d}{dx} \Omega_2(x) \right| dx \leq D(b). \quad (4.13)$$

Функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  отличаются от  $\Omega_1(x)$  и  $\Omega_2(x)$  гладким слагаемым, которое убывает при  $x \rightarrow \infty$  и  $x \rightarrow -\infty$  соответственно. Следовательно, неравенства типа (4.12) и (4.13) справедливы и для функций  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ .

Мы видим, что функции  $\frac{d}{dx} F_1(x)$ ,  $\frac{d}{dx} F_2(x)$  ведут себя аналогично  $v(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ , соответственно. Если  $v(x)$  дифференцируема, то, как можно показать при помощи уравнений (1.10), (1.11) и (4.11) эта аналогия распространяется и на последующие производные от  $\Omega_1(x)$  и  $\Omega_2(x)$ .

## § 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В предыдущих параграфах мы выяснили, что матрица рассечения  $S(k)$ , соответствующая потенциальну  $v(x)$ , удовлетворяющему свойству (P), обладает следующими свойствами:

1. Унитарность:

$$\begin{aligned} s_{11} \bar{s}_{12} + s_{21} \bar{s}_{22} &= 0; \\ |s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 &= 1 = |s_{21}|^2 + |s_{22}|^2; \\ s_{12}(0) = s_{21}(0) &= -1, \text{ если } s(0) = 0. \end{aligned}$$

2. вещественность:

$$s_{ij}(-k) = \overline{s_{ij}(k)};$$

3. Симметрия:

$$s_{11}(k) = s_{22}(k);$$

4. Асимптотическое поведение:

$$s_{12} = O\left(\frac{1}{|k|}\right); \quad s_{21} = O\left(\frac{1}{|k|}\right); \quad s_{11} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right);$$

и преобразования Фурье  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  коэффициентов  $s_{12}(k)$  и  $s_{21}(k)$  удовлетворяют условию

$$\int_a^{\infty} (1 + |x|) \left| \frac{d}{dx} F_1(x) \right| dx \leq C(a); \quad \int_b^{\infty} (1 + |x|) \left| \frac{d}{dx} F_2(x) \right| dx \leq D(b).$$

5. Аналитичность: функция  $s_{11}(k)$  является предельным зна-

чением функции, аналитической в полуплоскости  $\operatorname{Im} k > 0$ , имеющей там асимптотику  $1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right)$  и конечное число полюсов на мнимой оси.

Возможно, что некоторые перечисленные свойства являются следствиями других, но мы не будем здесь заботиться об этом. В настоящем параграфе мы покажем, что эти необходимые свойства являются и достаточными для того, чтобы такой матрице  $S(k)$  соответствовал потенциал  $v(x)$ , удовлетворяющий условию  $(P)$ . При этом для однозначной определенности  $v(x)$ , помимо  $S(k)$ , следует задавать еще  $N$  положительных чисел, где  $N$  — число полюсов функции  $s_{11}(k)$ . Этот результат был сформулирован в [23] и подробно доказан в [26].

Доказательство этого утверждения будет получено при помощи исследования уравнений типа Гельфанд — Левитана, к описанию которого мы сейчас и перейдем.

Начнем с исследования разрешимости уравнений (4.1) и (4.2). Пусть заданы:

1) функция

$$s_{12}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) e^{-ikx} dx$$

такая, что

$$s_{12}(-k) = \overline{s_{12}(k)}; \quad |s_{12}(k)| \leq 1$$

и

$$\int_a^{\infty} (1 + |x|) \left| \frac{d}{dx} F_1(x) \right| dx < C(a).$$

2) произвольные различные положительные числа  $x_l$ ,  $l = 1, \dots, N$ ,

3) такое же количество положительных чисел  $m_l^{(1)}$ ,  $l = 1, \dots, N$ . Построим по этим данным функцию  $\Omega_1(x)$  по формуле (3.14) и рассмотрим равенство

$$A_1(x, y) + \Omega_1(x + y) + \int_x^{\infty} A_1(x, z) \Omega_1(z + y) dz = 0, \quad x < y,$$

как уравнение для  $A_1(x, y)$ . Это уравнение по второму аргументу этой функции, причем  $x$  входит только как параметр. Вводя обозначения

$$a_x(y) = A_1(x, y); \quad \omega_x(y) = \Omega_1(x + y);$$

$$\Omega_x g(y) = \int_x^{\infty} g(z) \Omega_1(z + y) dz,$$

перепишем уравнение (4.1) в виде операторного уравнения

$$a_x(y) + \omega_x(y) + \Omega_x a_x(y) = 0. \quad (5.1)$$

Свободный член  $\omega_x(y)$  является абсолютно интегрируемой и ограниченной, а следовательно, и квадратично интегрируемой функцией на интервале  $x \leq y < \infty$ , т. е.  $\omega_x(y) \in L_{12}(x, \infty)$ . Будем искать решение также из  $L_{12}(x, \infty)$  и покажем, что оно существует и единствено при любом  $x$ ,  $-\infty < x < \infty$ .

Для этого убедимся сначала, что мы имеем дело с уравнением с вполне непрерывным оператором в  $L_1(x, \infty)$  и  $L_2(x, \infty)$ . Пусть

$$\eta_1(x) = \int_x^{\infty} \left| \frac{d}{dy} \Omega_1(y) \right| dy.$$

На основании (4.12) функция  $\eta_1(x)$  абсолютно интегрируема на интервале  $[a, \infty)$  при любом  $a > -\infty$  и выполняются неравенства

$$\int_a^{\infty} \eta_1(x) dx \leq C(a); \quad \int_a^{\infty} (1 + |x|) \eta_1^2(x) dx \leq C(a).$$

С помощью оценки

$$|\Omega_1(x)| \leq \int_x^{\infty} \left| \frac{d}{dx} \Omega_1(x) \right| dx \leq \eta_1(x)$$

получаем, что

$$\int_x^{\infty} dy \int_x^{\infty} dz |\Omega_1(y+z)|^2 \leq \left( \int_x^{\infty} \eta_1(x+y) dy \right)^2 < \infty,$$

т. е. оператор  $\Omega_x$  является оператором типа Гильберта — Шмидта, и его норма стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . Полная непрерывность оператора  $\Omega_x$  в  $L_1(x, \infty)$  также является хорошо известным следствием абсолютной интегрируемости функции  $\tau_1(x)$ .

Заметим теперь, что оператор  $I + \Omega_x$  является положительно определенным при любом  $x$ . Действительно, он получается ограничением на  $L_2(x, \infty)$  положительного оператора  $W$  из § 3. В частности, из этого следует, что однородное уравнение

$$h(y) + \Omega_x h(y) = 0 \quad (5.2)$$

не имеет нетривиальных решений в  $L_2(x, \infty)$ . Покажем теперь, что всякое решение уравнения (5.2) из  $L_1(x, \infty)$  принадлежит также и  $L_2(x, \infty)$ . Имеем

$$|h(y)| \leq \int_x^{\infty} |\Omega_1(y+z)| \|h(z)\| dz \leq \eta_1(x+y) \int_x^{\infty} |h(z)| dz$$

и потому  $h_1(y)$  квадратично интегрируемо на интервале  $[x, \infty)$ . Мы заключаем, что уравнение (5.2) не имеет нетривиальных решений в  $L_1(x, \infty)$  и поэтому уравнение (5.1) однозначно разрешимо в  $L_1(x, \infty)$  при любом  $x$ . Посмотрим, какие оценки для решения  $A_1(x, y)$  следуют из этого.

Оператор  $(I + \Omega_x)^{-1}$  равномерно ограничен при всех  $x$  из интервала  $[a, \infty)$ , так как норма оператора  $\Omega_x$  стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$

$$\|(I + \Omega_x)^{-1}\|_{L_1} \leq C(a),$$

и, таким образом,

$$\int_x^{\infty} |A_1(x, y)| dy \leq C(x).$$

Подставляя эту оценку в интеграл в уравнении (4.1), мы получим, что

$$|A_1(x, y)| \leq C(x) \eta_1(x + y). \quad (5.3)$$

С помощью уравнения (4.1) можно также убедиться, что решение  $A_1(x, y)$  один раз дифференцируемо, и получить оценки для производных. Оценим функцию  $\frac{\partial}{\partial x} A_1(x, y)$ . Дифференцируя уравнение (4.1) по  $x$ , приходим к следующему уравнению для  $b_x(y) = \frac{\partial}{\partial x} A_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \Omega_1(x + y)$ ,

$$b_x(y) + \mu_x(y) + \Omega_x b_x(y) = 0.$$

Здесь свободный член

$$\mu_x(y) = A(x, x) \Omega(x + y)$$

имеет оценку

$$|\mu_x(y)| \leq C(x) \eta_1(2x) \eta_1(x + y).$$

Отсюда для решения  $b_x(y)$  находим, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} A_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \Omega_1(x + y) \right| \leq C(x) \eta_1(2x) \eta_1(x + y). \quad (5.4)$$

Подобным же образом можно оценить производную  $\frac{\partial}{\partial y} A_1(x, y)$  и результат выглядит следующим образом

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} A_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \Omega_1(x + y) \right| \leq C(x) \eta_1(2x) \eta_1(x + y). \quad (5.5)$$

Интегральное уравнение (4.2) исследуется аналогично. Если

$$s_{21}(-k) = \overline{s_{21}(k)}; |s_{21}(k)| \leq 1; \int_{-\infty}^b (1 + |x|) \left| \frac{d}{dx} F_2(x) \right| dx \leq D(b),$$

то это уравнение однозначно разрешимо и для решения справедливы оценки

$$|A_2(x, y)| \leq D(x) \eta_2(x+y); \quad (5.6)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} A_2(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \Omega_2(x+y) \right| \leq D(x) \eta_2(2x) \eta_2(x+y); \quad (5.7)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} A_2(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \Omega_2(x+y) \right| \leq D(x) \eta_2(2x) \eta_2(x+y), \quad (5.8)$$

где

$$\eta_2(x) = \int_{-\infty}^x \left| \frac{d}{dy} \Omega_2(y) \right| dy.$$

Если функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  имеют более одной производной, то ядра  $A_1(x, y)$  и  $A_2(x, y)$  также несколько раз дифференцируемы. Оценки для соответствующих производных получаются аналогично тому, как это было проведено для  $b_x(y)$ .

Возвращаясь к задаче о паре аналитических функций  $u(x, k)$  и  $f(x, k)$ , мы убеждаемся, что справедливо следующее утверждение: пусть заданы функция  $s(k)$ , удовлетворяющая условиям, которые мы неоднократно формулировали относительно  $s_{12}(k)$ ; пусть также заданы  $N$  неравных положительных чисел  $\kappa_l$ ,  $l=1, \dots, N$ , и еще  $N$  положительных чисел  $m_l$ . Тогда существует единственная пара функций  $u(x, k)$  и  $f(x, k)$  таких, что

1) функции  $f(x, k)$  и  $u(x, k)$  аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} k \geq 0$ , причем  $f(x, k) e^{-ikx}$  ограничена при всех  $k$ ,  $\operatorname{Im} k \geq 0$ , а  $u(x, k)$  имеет простые полюса в заданных точках  $k = i\kappa_l$ ,  $l=1, \dots, N$ ;

2) вычеты  $u(x, k)$  связаны со значениями функции  $f(x, k)$  при  $k = i\kappa_l$  соотношением

$$\operatorname{Res} u(x, k)|_{k=i\kappa_l} = i m_l f(x, i\kappa_l);$$

3) на вещественной оси

$$f(x, k) = \overline{f(x, -k)}; \quad u(x, k) = \overline{u(x, -k)},$$

4) при больших  $|k|$

$$f(x, k) e^{-ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right); \quad u(x, k) e^{ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right);$$

5) при вещественных  $k$  имеет место соотношение

$$s(k) f(x, k) + f(x, -k) = u(x, k).$$

Построим теперь по найденным решениям уравнений Гельфанд — Левитана  $A_1(x, y)$  и  $A_2(x, y)$  операторы  $U_1$  и  $U_2$  по формулам (3.1) и (3.2) и рассмотрим операторы

$$H_i = U_i H_0 U_i^{-1}, \quad i=1, 2. \quad (5.9)$$

Мы проведем исследование этих операторов на формальном уровне, не вдаваясь слишком глубоко в обоснования. Строгое обоснование полученных при этом результатов проще всего получить, следя более элементарным, но громоздким рассуждениям монографии [1].

Покажем в первую очередь, что операторы  $H_i$  самосопряжены. Для доказательства заметим, что уравнения Гельфанд — Левитана, выведенные из соотношения полноты (3.13), на самом деле ему эквивалентны, т. е. другими словами, что полученные нами операторы  $U_1$  и  $U_2$  удовлетворяют этому соотношению. Рассмотрим для определенности случай  $i=1$ . Пусть оператор  $\tilde{A}_1$  имеет ядро  $\tilde{A}_1(x, y)$ , где

$$\tilde{A}_1(x, y) = \begin{cases} 0, & x < y; \\ \Omega_1(x+y) + \int_x^{\infty} A_1(x, z) \Omega_1(z+y) dz, & x > y. \end{cases}$$

Построим вольтерров оператор

$$\tilde{U}_1 = I + \tilde{A}_1.$$

Уравнение Гельфанд — Левитана может быть теперь записано в виде

$$U_1 W_1 = \tilde{U}_1.$$

Вследствие самосопряженности  $W_1$  оператор

$$\tilde{U}_1 U_1^* = U_1 W_1 U_1^*$$

также самосопряжен. Но он одновременно и вольтерров, так как операторы  $\tilde{U}_1$  и  $U_1^*$  — вольтерровы с одинаковым направлением вольтерровости. Эти два свойства совместны, только если

$$\tilde{U}_1 U_1^* = I,$$

откуда и вытекает, что  $U_1$  удовлетворяет соотношению полноты

$$U_1 W_1 U_1^* = I.$$

Используя эту формулу, мы можем переписать определение оператора  $H_1$  в виде

$$H_1 = U_1 H_0 W_1 U_1^*,$$

откуда и следует самосопряженность  $H_1$ , так как операторы  $H_0$  и  $W_1$  коммутируют. Случай  $i=2$  рассматривается аналогично.

Покажем теперь, что операторы  $H_i$  представляются в виде

$$H_i = H_0 + V_i,$$

тде  $V_i$  — операторы умножения на функции

$$v_1(x) = -2 \frac{d}{dx} A_1(x, x); \quad v_2(x) = 2 \frac{d}{dx} A_2(x, x). \quad (5.10)$$

Для этого, считая опять для определенности, что  $i = 1$ , перепишем соотношение (5.9) в виде

$$H_1 U_1 = U_1 H_0 \quad (5.11)$$

и учтем, что оператор  $U_1 = I + A_1$  — вольтерров, так что

$$A_1(x, y) = \theta(y - x) A_1(x, y),$$

где  $\theta(x)$  — функция Хевисайда. Соотношение (5.11) переписывается в виде

$$-\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A_1(x, y) \right] \theta(y - x) + 2\delta(x - y) \frac{d}{dx} A_1(x, x) + \\ + (V_1 U_1)(x, y) = 0,$$

где мы обозначили  $V_1 = H_1 - H_0$  и считаем  $V_1$  интегральным оператором, ядром которого может быть обобщенная функция. Полученное соотношение совместно с самосопряженностью  $V_1$  и вольтерровостью  $U_1$ , только если

$$V_1(x, y) = -2\delta(x - y) \frac{d}{dx} A_1(x, x) = \delta(x - y) v_1(x).$$

Кроме того, из него мы видим, что  $A_1(x, y)$  удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_1(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_1(x, y) - v_1(x) A_1(x, y) = 0,$$

которое, впрочем, мы использовать не будем.

Аналогично исследуется оператор  $H_2$ . Наш результат состоит в том, что  $H_i$  являются дифференциальными операторами вида

$$H_i = -\frac{d^2}{dx^2} + v_i(x), \quad i = 1, 2,$$

где функции  $v_i(x)$  даются формулами (5.10).

Из (5.11) также следует, что функции  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$ , построенные по ядрам  $A_1(x, y)$  и  $A_2(x, y)$  по формулам (1.8) и (1.9), являются решениями дифференциальных уравнений

$$f''_i(x, k) + k^2 f_i(x, k) = v_i(x) f_i(x, k), \quad i = 1, 2,$$

и имеют асимптотики (1.2), (1.3). Наконец, оценки (5.4), (5.5), (5.7) и (5.8) показывают, что  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$  удовлетворяют оценкам вида

$$\int_a^\infty (1 + |x|) |v_1(x)| dx \leq C(a); \\ \int_{-\infty}^b (1 + |x|) |v_2(x)| dx \leq D(b). \quad (5.12)$$

Более того, если функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  дифференцируемы  $n$  раз, то потенциалы  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$  имеют  $n-1$  производную. При этом  $v_1^{[m]}$  и  $v_2^{[m]}$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ , соответственно, ведут себя как  $F_1^{[m+1]}$  и  $F_2^{[m+1]}$ .

Мы закончим исследование обратной задачи тем, что покажем, что если функции  $\Omega_1(x)$  и  $\Omega_2(x)$  согласованы, т. е.  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  построены по заданной матрице  $S(k)$ , удовлетворяющей необходимым свойствам, собранным в начале параграфа, а  $m_i^{(1)}$  и  $m_i^{(2)}$  связаны по (3.11), то функции  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}s_{11}(k) f_2(x, k) &= s_{12}(k) f_1(x, k) + f_1(x, -k); \\ s_{22}(k) f_1(x, k) &= s_{21}(k) f_2(x, k) + f_2(x, -k).\end{aligned}\quad (5.13)$$

Отсюда следует, что функции  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$  совпадают, причем из оценок (5.12) при этом получается, что

$$\int (1 + |x|) v(x) dx < \infty$$

вместе с соответствующими уточнениями о дифференцируемости в случае дифференцируемости  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ .

Тем самым мы получим, что построенный оператор  $H = H_0 + V$  принадлежит исходному классу операторов Шредингера. Далее, из этих же соотношений (5.13) следует, что оператор  $H$  имеет набор собственных функций  $u_i^{(+)}(x, k)$  с асимптотикой, сформулированной в таблице в § 2, причем в качестве коэффициентов  $s_{ij}(k)$  эта асимптотика содержит матричные элементы исходной матрицы рассеяния  $S(k)$ . Этим построение оператора  $H$ , а вместе с тем и доказательство достаточности свойств матрицы рассеяния, собранных в начале этого параграфа, будет закончено.

Для доказательства соотношений (5.13) мы используем полученную выше теорему единственности для пары функций  $u(x, k)$  и  $f(x, k)$  и покажем, что для построенных при помощи уравнений Гельфанд—Левитана функций  $u_i(x, k)$  и  $f_i(x, k)$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned}u_1(x, k) &= s_{11}(k) f_2(x, k), \\ u_2(x, k) &= s_{22}(k) f_1(x, k).\end{aligned}$$

Формулы (5.13) вытекают отсюда после использования формул (4.3) и (4.4).

Итак, пусть  $u_2(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  получены при помощи соотношения

$$s_{21}(k) f_2(x, k) + f_2(x, -k) = u_2(x, k) \quad (5.14)$$

и свойств аналитичности, сформулированных выше.

Умножим равенство (5.14) на  $s_{21}(-k)$ . Мы получаем

$$|s_{21}(k)|^2 f_2(x, k) + s_{21}(-k) f_2(x, -k) = s_{21}(-k) u_2(x, k).$$

Второе слагаемое в левой части заменим снова на основании (5.14)

$$-(1 - |s_{21}(k)|^2) f_2(x, k) + u_2(x, -k) = s_{21}(-k) u_2(x, k).$$

Учитывая условие унитарности (2.3), последнее соотношение перепишем в виде

$$-s_{21}(-k) u_2(x, k) + u_2(x, -k) = |s_{11}(k)|^2 f_2(x, k). \quad (5.15)$$

Введем функции

$$u(x, k) = s_{11}(k) f_2(x, k); \quad f(x, k) = u_2(x, k)/s_{11}(k). \quad (5.16)$$

Функция  $u(x, k)$  аналитична всюду в верхней полуплоскости, за исключением точек  $k = ix_l$ , где она вместе с  $s_{11}(k)$  имеет простые полюса. Функция  $f(x, k)$  не имеет особенностей при  $k = ix_l$ , так как особенности  $u_2(x, k)$  и  $s_{11}(k)$  компенсируют друг друга. Если  $s_{11}(0) = 0$ , то функция  $f(x, k)$  тем не менее не имеет особенностей при  $k = 0$ . Действительно, если  $s_{11}(0) = 0$ , то  $s_{12}(0) = -1$ , и на основании (5.14) мы получаем, что  $u_2(x, 0) = 0$ , так что отношение  $u_2/s_{11}$  не имеет особенностей при  $k = 0$ . Очевидно, что при вещественных  $k$

$$f(x, -k) = \overline{f(x, k)}; \quad u(x, -k) = \overline{u(x, k)}.$$

Нетрудно убедиться, что вычеты  $u(x, k)$  связаны с  $f(x, k)$  формулой

$$\text{Res } u(x, k) |_{k=ix_l} = i m_l^{(1)} f(x, ix_l).$$

Достаточно использовать условие (3.11). Наконец, соотношение (5.15) в терминах функций  $f(x, k)$  и  $u(x, k)$  имеет вид

$$s_{12}(k) f(x, k) + f(x, -k) = u(x, k).$$

На основании единственности такой пары функций, сформулированной выше, мы заключаем, что

$$f(x, k) = f_1(x, k); \quad u(x, k) = u_1(x, k),$$

откуда следуют (5.13), в силу (5.16).

На этом мы заканчиваем общее исследование обратной задачи для одномерного оператора Шредингера.

## § 6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Здесь мы рассмотрим два примера, когда обратная задача имеет явное решение:

1. Отсутствие отражения, т. е. коэффициенты  $s_{12}(k)$  и  $s_{21}(k)$  тождественно исчезают и весь нетривиальный вклад в уравнение Гельфанд — Левитана дает дискретный спектр оператора  $H$ .

2. Рациональный коэффициент отражения.

Оба примера объединяются общим свойством ядра  $\Omega(x+y)$  в уравнении Гельфанда — Левитана: оно становится вырожденным и решение сводится к квадратурам. Мы рассмотрим, однако, эти примеры по отдельности. При этом для упрощения формул будем считать во втором примере, что дискретный спектр оператора  $H$  отсутствует. Сказанного будет достаточно для того, чтобы комбинируя приемы для первого и второго примеров, читатель сам разобрался, какие изменения в формулах возникают в общем случае. Приведенные примеры дают возможность решать обратную задачу для плотного множества данных рассеяния.

Итак, рассмотрим уравнение Гельфанда — Левитана (4.1) и будем считать, что  $s_{12}(k)=0$ , так что ядро  $\Omega_1(x+y)$  имеет вид

$$\Omega_1(x+y) = \sum_{l=1}^N m_l^{(1)} e^{-\kappa_l(x+y)}.$$

Решение  $A_1(x, y)$  в этом случае естественно искать в виде

$$A_1(x, y) = \sum_{l=1}^N g_l(x) e^{-\kappa_l y},$$

причем для функций  $g_l(x)$  возникает алгебраическая система уравнений, которую естественно записать в векторных обозначениях

$$g(x) + g_0(x) + W_1(x)g(x) = 0.$$

Здесь  $g(x)$  — искомый вектор-столбец с компонентами  $g_l(x)$ ,  $l=1, \dots, N$ ,  $g_0(x)$  — столбец функций  $m_l^{(1)} e^{-\kappa_l x}$ ,  $l=1, \dots, N$ , и  $W_1(x)$  — матрица с элементами

$$W_{ij}^{(1)}(x) = \frac{m_i^{(1)}}{\kappa_i + \kappa_j} e^{-(\kappa_i + \kappa_j)x}.$$

Разрешимость полученной системы гарантируется общими результатами предыдущего параграфа, и, решая ее, можно найти  $g_l(x)$  и вместе с ними ядро  $A_1(x, y)$ . В частности, нетрудно убедиться, что для  $A_1(x, y)$  получается выражение, которое в наших обозначениях может быть записано следующим образом

$$A_1(x, x) = \operatorname{tr} \left( \frac{d}{dx} W_1(x) (I + W_1(x)^{-1}) \right) = \frac{d}{dx} \ln \det(I + W_1(x)).$$

Отсюда находим выражение для искомого потенциала

$$v(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det(I + W_1(x)). \quad (6.1)$$

Мы можем аналогично рассмотреть уравнение (4.2). Для потенциала  $v(x)$  при этом получится выражение

$$v(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det(I + W_2(x)), \quad (6.2)$$

где  $W_2(x)$  — матрица с элементами

$$W_{ij}^{(2)}(x) = \frac{m_i^{(2)}}{\kappa_i + \kappa_j} e^{(\kappa_i + \kappa_j)x}.$$

Заметим, что в нашем случае коэффициент прохождения имеет вид

$$s_{11}(k) = \prod_{l=1}^N \frac{k + i\kappa_l}{k - i\kappa_l},$$

так что

$$\gamma_l = i \operatorname{Res} s_{11}(k) |_{k=i\kappa_l} = -2\kappa_l \prod_{j \neq l} \frac{\kappa_l + \kappa_j}{\kappa_l - \kappa_j},$$

и напомним, что постоянные  $m_i^{(1)}$  и  $m_i^{(2)}$  связаны соотношением

$$m_i^{(1)} m_i^{(2)} = \gamma_l^2.$$

Из общих рассмотрений § 5 следует, что при выполнении этих условий выражения (6.1) и (6.2) для  $v(x)$  совпадают. Непосредственная проверка такого тождества представляет собой нетривиальную комбинаторную задачу.

Перейдем теперь к примеру 2. Пусть  $s_{12}(k)$  — рациональная функция переменной  $k$ ,

$$s_{12}(k) = r \frac{P_m(k)}{Q_n(k)},$$

где  $P_m(k)$  и  $Q_n(k)$  — полиномы степени  $m$  и  $n$ ,  $m < n$ , имеющие единицу коэффициентом при старшей степени  $k$  и  $r$  — константа. Условие вещественности

$$s_{12}(-k) = \overline{s_{12}(k)}$$

будет выполнено, если

$$r = (i)^{m-n} r_0,$$

где  $r_0$  — вещественное число, и нули полиномов  $P_m(k)$  и  $Q_n(k)$  расположены симметрично относительно мнимой оси. Константа  $r_0$  должна быть достаточно малой для того, чтобы выполнялось условие

$$|s_{11}(k)| < 1.$$

Для этого же необходимо, чтобы все нули  $Q_n(k)$  имели неисчезающую мнимую часть. Будем для простоты считать, что все эти нули — простые. Случай кратных нулей можно рассмотреть соответствующим предельным переходом.

Описанная в § 3 процедура восстановления коэффициента прохождения  $s_{11}(k)$  по  $s_{12}(k)$  может быть проведена явно. Напомним, что мы считаем, что дискретный спектр оператора

$H$  отсутствует, так что  $s_{11}(k)$  не имеет полюсов в верхней полуплоскости. Явная формула для  $s_{11}(k)$  имеет вид

$$s_{11}(k) = \prod_{l=1}^n (k + \beta_l) \prod_{l=1}^{n_+} (k + \alpha_l^{(+)})^{-1} \prod_{l=1}^{n_-} (k - \alpha_l^{(-)})^{-1}, \quad n_+ + n_- = n,$$

где  $\alpha_l^{(+)}$  и  $\alpha_l^{(-)}$  — нули  $Q_n(k)$  в верхней и нижней полуплоскости, соответственно, а  $\beta_l$  — корни уравнения

$$1 = s_{12}(k) s_{12}(-k)$$

в верхней полуплоскости. Таких корней ровно  $n$ , так как уравнение инвариантно по отношению к замене  $k \rightarrow -k$ . Используя формулу (2.10), мы видим, что второй коэффициент отражения  $s_{21}(k)$  также является рациональной функцией и представляется в виде

$$s_{21}(k) = r' \frac{P'_{m'}(k)}{Q'_{n'}(k)}, \quad m' < n',$$

где полиномы  $P'_{m'}(k)$  и  $Q'_{n'}(k)$  и константа  $r'$  обладают свойствами, аналогичными таковым для  $P_m$ ,  $Q_n$  и  $r$ . Будем считать также, что все нули полинома  $Q'_{n'}$  — простые.

Преобразования Фурье  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  коэффициентов отражения  $s_{12}(k)$  и  $s_{21}(k)$  вычисляются при помощи леммы Жордана. В частности,

$$F_1(x) = \sum_{l=1}^{n_+} \rho_l e^{i\alpha_l^{(+)} x}, \quad x > 0;$$

$$F_2(x) = \sum_{l=1}^{n_-} \rho'_l e^{-i\alpha_l^{(+)} x}, \quad x < 0,$$

где суммы берутся по нулям полиномов  $Q_n(k)$  и  $Q'_{n'}(k)$  в верхней полуплоскости. Коэффициенты  $\rho_l$  и  $\rho'_l$  с точностью до множителя  $i$  совпадают с вычетами  $s_{12}(k)$  и  $s_{21}(k)$  в полюсах, расположенных в этих нулях.

Мы видим, что ядра  $F_1(x+y)$  и  $F_2(x+y)$  уравнений Гельфанд — Левитана (4.1) и (4.2) являются вырожденными при  $x > 0$  и  $x < 0$ , соответственно. В этих областях для их решения мы можем применить прием, уже упомянутый при исследовании примера 1. В результате мы получаем следующие выражения для искомого потенциала

$$v(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det(I + Z_1(x)), \quad x > 0; \quad (6.3)$$

$$v(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det(I + Z_2(x)), \quad x < 0, \quad (6.4)$$

где матрицы  $Z_1$  и  $Z_2$  имеют матричными элементами следующие выражения

$$Z_{ij}^{(1)} = \frac{i\rho_l}{\alpha_i^{(+)} + \alpha_j^{(+)}} e^{i(\alpha_i^{(+)} + \alpha_j^{(+)})x};$$

$$Z_{ij}^{(2)} = \frac{i\rho_l'}{\alpha_i'^{(+)} + \alpha_j'^{(+)}} e^{-i(\alpha_i'^{(+)} + \alpha_j'^{(+})x}.$$

Потенциал должен быть гладкой функцией, если  $s_{12}(k)$  достаточно быстро убывает при  $|k| \rightarrow \infty$ . В частности, при  $m \leq n - 2$  выражения (6.3) и (6.4) непрерывны и должны совпадать при  $x = 0$ . Прямое доказательство этого утверждения далеко не просто. Частный случай полученных формул, когда  $v(x) = 0$  при  $x < 0$ , был приведен в [37].

Заметим теперь, что полученные нами явные формулы для  $v(x)$  содержат логарифмическую производную определителя некоторой матрицы. Оказывается, что этот факт не случаен. Можно доказать, что потенциал  $v(x)$  выражается по формуле

$$v(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Delta_1(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Delta_2(x) \quad (6.5)$$

через определители Фредгольма  $\Delta_1(x)$  и  $\Delta_2(x)$  уравнений Гельфанд — Левитана (4.1) и (4.2). Появление конечномерных матриц  $W(x)$  и  $Z(x)$  в рассмотренных нами примерах объясняется вырожденностью соответствующих ядер в этих уравнениях. Мы приведем краткий и формальный вывод выражений (6.5). Допускающий строгое обоснование путь слишком длинен для того, чтобы его здесь приводить.

Мы покажем, что

$$A_1(x, x) = \frac{d}{dx} \ln \Delta_1(x); \quad A_2(x, x) = -\frac{d}{dx} \ln \Delta_2(x),$$

после чего формула (6.3) следует из (5.10). Итак, пусть

$$\Delta_1(x) = \det(I + \Omega_x),$$

где оператор  $I + \Omega_x$  введен в § 5 и имеет вид  $P_x W_1 P_x$ , где  $P_x$  — проектор в  $L_2(\mathbb{R})$

$$P_x \psi(y) = \theta(y - x) \psi(y).$$

Заметим теперь, что

$$\ln \Delta_1(x) = \text{Tr} \ln(I + \Omega_x) = \text{Tr} \ln(I + P_x \Omega_1),$$

где  $\text{Tr}$  слева определен в пространстве  $L_2(x, \infty)$ , а справа — в  $L_2(\mathbb{R})$ . Оператор  $P_x \Omega_1 = Q_x$  является интегральным оператором в  $L_2(\mathbb{R})$  с ядром

$$Q_x(y, z) = \theta(y - x) \Omega_1(y + z).$$

Из последней формулы получаем

$$\frac{d}{dx} \ln \Delta_1(x) = \text{Tr} \left( (I + \Gamma_x) \frac{d}{dx} P_x \Omega_1 \right).$$

Здесь мы ввели резольвенту  $\Gamma_x$  оператора  $Q_x$ , т. е. интегральный оператор, ядро которого удовлетворяет уравнению

$$\Gamma_x(y, z) + \theta(y - x) \left[ \Omega_1(y + z) + \int_x^\infty \Gamma_x(y, t) \Omega_1(t + z) dt \right] = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением Гельфанд — Левитана (4.1), мы убеждаемся, что

$$\Gamma_x(x, x) = A_1(x, x).$$

В введенных обозначениях искомый нами след выражается следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \Delta_1(x) &= - \int dy dz (\delta(y - z) + \Gamma_x(y, z)) \delta(y - x) \Omega_1(z + y) = \\ &= \Gamma_x(x, x) = A_1(x, x), \end{aligned}$$

что и доказывает первую формулу в (6.5). Второе соотношение доказывается совершенно аналогично.

## Глава II

### ПРОСТЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Описанный в первой главе технический аппарат без значительных изменений переносится на ряд одномерных задач теории рассеяния. В этой главе мы рассмотрим несколько примеров, ограничиваясь в основном лишь формулировками результатов, обобщающих или модифицирующих утверждения, полученные в главе I. Кроме того, в § 4 мы рассмотрим приложение развитых методов теории рассеяния для решения нелинейных уравнений из теории одномерных сплошных сред.

#### § 1. ПОТЕНЦИАЛЫ С РАЗЛИЧНЫМИ АСИМПТОТИКАМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Здесь мы рассмотрим два примера оператора Шредингера

$$H\psi(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + v(x)\psi(x),$$

где потенциал  $v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , имеет различное поведение при  $x \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow \infty$ :

где матрицы  $Z_1$  и  $Z_2$  имеют матричными элементами следующие выражения

$$Z_{ij}^{(1)} = \frac{i\rho_i}{\alpha_i^{(+)} + \alpha_j^{(+)}} e^{i(\alpha_i^{(+)} + \alpha_j^{(+)})x};$$

$$Z_{ij}^{(2)} = \frac{i\rho'_i}{\alpha_i'^{(+)} + \alpha_j'^{(+)}} e^{-i(\alpha_i'^{(+)} + \alpha_j'^{(+})x}.$$

Потенциал должен быть гладкой функцией, если  $s_{12}(k)$  достаточно быстро убывает при  $|k| \rightarrow \infty$ . В частности, при  $m \leq n - 2$  выражения (6.3) и (6.4) непрерывны и должны совпадать при  $x = 0$ . Прямое доказательство этого утверждения далеко не просто. Частный случай полученных формул, когда  $v(x) = 0$  при  $x < 0$ , был приведен в [37].

Заметим теперь, что полученные нами явные формулы для  $v(x)$  содержат логарифмическую производную определителя некоторой матрицы. Оказывается, что этот факт не случаен. Можно доказать, что потенциал  $v(x)$  выражается по формуле

$$v(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Delta_1(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Delta_2(x) \quad (6.5)$$

через определители Фредгольма  $\Delta_1(x)$  и  $\Delta_2(x)$  уравнений Гельфанд — Левитана (4.1) и (4.2). Появление конечномерных матриц  $W(x)$  и  $Z(x)$  в рассмотренных нами примерах объясняется вырожденностью соответствующих ядер в этих уравнениях. Мы приведем краткий и формальный вывод выражений (6.5). Допускающий строгое обоснование путь слишком длинен для того, чтобы его здесь приводить.

Мы покажем, что

$$A_1(x, x) = \frac{d}{dx} \ln \Delta_1(x); \quad A_2(x, x) = -\frac{d}{dx} \ln \Delta_2(x),$$

после чего формула (6.3) следует из (5.10). Итак, пусть

$$\Delta_1(x) = \det(I + \Omega_x),$$

где оператор  $I + \Omega_x$  введен в § 5 и имеет вид  $P_x W_1 P_x$ , где  $P_x$  — проектор в  $L_2(\mathbb{R})$

$$P_x \psi(y) = \theta(y - x) \psi(y).$$

Заметим теперь, что

$$\ln \Delta_1(x) = \text{Tr} \ln(I + \Omega_x) = \text{Tr} \ln(I + P_x \Omega_1),$$

где  $\text{Tr}$  слева определен в пространстве  $L_2(x, \infty)$ , а справа — в  $L_2(\mathbb{R})$ . Оператор  $P_x \Omega_1 = Q_x$  является интегральным оператором в  $L_2(\mathbb{R})$  с ядром

$$Q_x(y, z) = \theta(y - x) \Omega_1(y + z).$$

Из последней формулы получаем

$$\frac{d}{dx} \ln \Delta_1(x) = \text{Tr} \left( (I + \Gamma_x) \frac{d}{dx} P_x \Omega_1 \right).$$

Здесь мы ввели резольвенту  $\Gamma_x$  оператора  $Q_x$ , т. е. интегральный оператор, ядро которого удовлетворяет уравнению

$$\Gamma_x(y, z) + \theta(y - x) \left[ \Omega_1(y + z) + \int_x^\infty \Gamma_x(y, t) \Omega_1(t + z) dt \right] = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением Гельфанд — Левитана (4.1), мы убеждаемся, что

$$\Gamma_x(x, x) = A_1(x, x).$$

В введенных обозначениях искомый нами след выражается следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \Delta_1(x) &= - \int dy dz (\delta(y - z) + \Gamma_x(y, z)) \delta(y - x) \Omega_1(z + y) = \\ &= \Gamma_x(x, x) = A_1(x, x), \end{aligned}$$

что и доказывает первую формулу в (6.5). Второе соотношение доказывается совершенно аналогично.

## Глава II

### ПРОСТЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Описанный в первой главе технический аппарат без значительных изменений переносится на ряд одномерных задач теории рассеяния. В этой главе мы рассмотрим несколько примеров, ограничиваясь в основном лишь формулировками результатов, обобщающих или модифицирующих утверждения, полученные в главе I. Кроме того, в § 4 мы рассмотрим приложение развитых методов теории рассеяния для решения нелинейных уравнений из теории одномерных сплошных сред.

#### § 1. ПОТЕНЦИАЛЫ С РАЗЛИЧНЫМИ АСИМПТОТИКАМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Здесь мы рассмотрим два примера оператора Шредингера

$$H\psi(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + v(x)\psi(x),$$

где потенциал  $v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , имеет различное поведение при  $x \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow \infty$ :

Пример 1.

$$v(x) \rightarrow c^2, \quad x \rightarrow -\infty; \quad v(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

был рассмотрен В. С. Буслаевым и В. Л. Фоминым [6].

Пример 2.

$$v(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow -\infty; \quad v(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

исследован в работе П. П. Кулиша [14].

Мы не будем выходить из рамок элементарной стационарной теории рассеяния. Погружение всех рассмотрений в абстрактную схему теории рассеяния возможно, но не слишком поучительно. Мы также не будем приводить никаких доказательств, отсылая за ними к упомянутым оригинальным работам.

Перейдем к описанию первого примера. Будем считать, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 (1 + |x|) |v(x) - c^2| dx &< \infty; \\ \int_0^\infty (1 + |x|) |v(x)| dx &< \infty. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Пусть  $k_1 = \sqrt{k^2 - c^2}$  определено так, что  $\operatorname{Im} k_1 \geq 0$  при  $\operatorname{Im} k \geq 0$ . Решения  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  уравнения Шредингера

$$\psi''(x) + k^2 \psi(x) = v(x) \psi(x) \tag{1.2}$$

выделяются асимптотическими условиями

$$f_1(x, k) = e^{ik_1 x} + o(1), \quad x \rightarrow \infty;$$

$$f_2(x, k) = e^{-ik_1 x} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty;$$

и являются при фиксированном  $x$  аналитическими функциями параметров  $k$  и  $k_1$  в верхней полуплоскости. Справедливы интегральные представления

$$f_1(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty A_1(x, y) e^{iky} dy,$$

$$f_2(x, k) = e^{-ik_1 x} + \int_{-\infty}^x A_2(x, y) e^{-ik_1 y} dy,$$

причем для ядер  $A_1(x, y)$  и  $A_2(x, y)$  выполняются оценки, аналогичные собранным в § 1 главы I. Решения  $u_1(x, k)$  и  $u_2(x, k)$  уравнения (1.2) однозначно определяются принципом излучения и имеют вид

$$u_1(x, k) = s_{11}(k) f_2(x, k) = s_{12}(k) f_1(x, k) + f_1(x, -k);$$
$$k > 0,$$

$$u_2(x, k) = s_{22}(k) f_1(x, k) = s_{21}(k) f_2(x, k) + f_2(x, -k); \\ k > c.$$

Коэффициенты  $s_{ij}(k)$ , определяющие матрицу рассеяния, обладают следующими свойствами

1. Унитарность:

$$\frac{k}{k_1} \overline{s_{22}(k)} s_{12}(k) + \overline{s_{21}(k)} s_{11}(k) = 0, \quad k > c; \\ \frac{k}{k_1} |s_{22}(k)|^2 + |s_{21}(k)|^2 = 1; \quad \frac{k_1}{k} |s_{11}(k)|^2 + |s_{12}(k)|^2 = 1, \quad k > c; \\ |s_{12}(k)| = 1, \quad 0 < k < c; \\ s_{22}(c) = 0 \Rightarrow s_{21}(c) = -1; \\ s_{11}(0) = 0 \Rightarrow s_{12}(0) = -1.$$

2. Симметрия:

$$k_1 s_{11}(k) = k s_{22}(k).$$

3. Аналитичность: коэффициент  $s_{11}(k)$  является предельным значением функции, аналитической в верхней полуплоскости и имеющей там простые полюса на мнимой оси в точках  $k = i\alpha_l$  с вычетами

$$\text{Res } s_{11}(k) \Big|_{k=i\alpha_l} = i\gamma_l; \quad \gamma_l = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, i\alpha_l) f_2(x, i\alpha_l) dx \right)^{-1}.$$

4. Поведение при  $|k| \rightarrow \infty$ : существуют преобразования Фурье

$$F_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_{12}(k) e^{ikx} dk; \quad F_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_{21}(\sqrt{c^2 + k^2}) e^{-ikx} dk$$

такие, что

$$\int_a^{\infty} \left| \frac{d}{dx} F_1(x) \right| (1 + |x|) dx \leq C(a); \\ \int_{-\infty}^b \left| \frac{d}{dx} F_2(x) \right| (1 + |x|) dx \leq C(b).$$

Обратим внимание на модификацию условий унитарности и симметрии.

Сформулированные свойства позволяют восстановить всю матрицу  $S(k)$  по коэффициенту отражения  $s_{12}(k)$ . В то же время знание  $s_{21}$  при  $k > c$  для этого недостаточно.

Уравнение Гельфанд — Левитана для ядра  $A_1(x, y)$  выглядит без изменений

$$A_1(x, y) + \Omega_1(x + y) + \int_x^{\infty} A_1(x, z) \Omega_1(z + y) dz = 0, \quad x < y.$$

Здесь

$$\Omega_1(x) = F_1(x) + \sum_{l=1}^N m_l^{(1)} e^{-\kappa_l x},$$

где функция  $F_1(x)$  уже введена, а

$$m_l^{(1)} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x, i\kappa_l))^2 dx \right)^{-1}.$$

В ядре  $\Omega_2$  уравнения Гельфанд—Левитана для ядра  $A_2(x, y)$

$$A_2(x, y) + \Omega_2(x+y) + \int A_2(x, z) \Omega_2(z+y) dz = 0, \quad x > y,$$

присутствует новое слагаемое

$$\Omega_2(x) = F_2(x) + \sum_{l=1}^N m_l^{(2)} e^{\kappa_l x} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk e^{-x \sqrt{c^2 - k^2}} |s_{11}(k)|^2.$$

Здесь  $m_l^{(2)}$  связаны с  $m_l^{(1)}$  по формуле

$$m_l^{(1)} m_l^{(2)} = \frac{\sqrt{c^2 + \kappa_l^2}}{\kappa_l} \gamma_l^2.$$

Исследование этих уравнений и доказательство необходимости и достаточности сформулированных выше свойств матрицы  $S(k)$ , соответствующей потенциалу  $v(x)$ , удовлетворяющему условию (1.1), приводится аналогично тому, как это было сделано в главе I. Подробности см. в [6].

Перейдем теперь к описанию примера 2. В этом случае уравнение Шредингера (1.2) имеет решение  $u(x, k)$ , имеющее асимптотику

$$u(x, k) = o(1), \quad x \rightarrow -\infty;$$

$$u(x, k) = e^{-ikx} + s(k) e^{ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \infty,$$

где коэффициент отражения  $s(k)$  удовлетворяет условию унитарности  $|s(k)| = 1$ . При больших  $k$  функция  $s(k)$  быстро осциллирует. Обратная задача состоит в восстановлении  $v(x)$  по заданной функции  $s(k)$ .

Уточним условия на потенциал  $v(x)$ , при которых справедливы сформулированные ниже результаты. Характер роста потенциала  $v(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$  трудно выразить явно в терминах асимптотического поведения  $\ln s(k)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Можно, однако, расширить класс потенциалов  $v(x)$  так, что необходимые и достаточные свойства соответствующих коэффициентов отражения становится возможным описать. Будем считать, что при конечных  $a$

$$\int_a^{\infty} (1 + |x|) v(x) dx < C(a),$$

и что спектр задачи Штурма — Лиувилля

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi + v(x)\psi(x) = \lambda\psi(x), -\infty < x < x_0, \frac{d}{dx}\psi(x) \Big|_{x=x_0} = 0$$

при некотором  $x_0$  полуограничен снизу и дискретен. Будем также считать, что рассматриваемый оператор  $H$  не имеет дискретного спектра.

Существование решения  $f(x, k)$  такого, что

$$f(x, k) = e^{ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \infty,$$

его аналитические свойства по параметру  $k$  и, в частности, интегральное представление

$$f(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty A(x, y) e^{iky} dy$$

доказываются уже знакомыми нам методами. Коэффициент  $s(k)$  однозначно определяется условием, согласно которому

$$u(x, k) = f(x, -k) + s(k)f(x, k)$$

интегрируем с квадратом в окрестности  $x = -\infty$ . Свойства  $s(k)$  состоят в следующем.

1. Преобразование Фурье

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(k) e^{ikx} dk,$$

определенное как обобщенная функция, совпадает с абсолютно непрерывной функцией такой, что

$$\int_a^\infty (1 + |x|) \left| \frac{d}{dx} F(x) \right| dx < C(a).$$

2.  $s(k)$  может быть представлена в виде

$$s(k) = s_0(k) + O\left(\frac{1}{|k|}\right),$$

где  $|s_0(k)| = 1$  при  $\operatorname{Im} k = 0$  и  $s_0(k)$  имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость переменной  $k$ , причем при  $\operatorname{Im} k > 0$  справедлива оценка

$$|s_0(k)| \leq e^{2\operatorname{Im} k x_0}.$$

3. Функция  $u(x, k) = f(x, -k) + f(x, k)s(k)$  должна иметь аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость такое, что функция  $\rho(\lambda)$ , определенная соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - k^2} = \frac{u(x_0, k)}{\frac{d}{dx} u(x, k) \Big|_{x=x_0}},$$

является спектральной функцией задачи Штурма — Лиувилля на полуоси  $(-\infty, x_0)$  с граничным условием  $\frac{d}{dx}\phi(x)=0$  при  $x=x_0$ .

Заметим, что в формулировке последнего условия, помимо функции  $s(k)$ , участвует и решение  $f(x, k)$  уравнения Шредингера (1.2), так что это свойство на первый взгляд не формулируется во внутренних терминах функции  $s(k)$ . На самом деле ситуация не столь плоха. Действительно, по всякой функции  $s(k)$ , удовлетворяющей условиям 1 и 2, а также условию унитарности, можно решить уравнение Гельфанд — Левитана — Марченко

$$A(x, y) = F(x + y) + \int_x^{\infty} A(x, z) F(z + y) dz = 0, \quad x < y,$$

при  $x=x_0$  и найти решение  $f(x, k)$  и его производную при  $x=x_0$ . После этого и следует проверять условие 3. Восстановление потенциала  $v(x)$  при  $x < x_0$  следует проводить при помощи процедуры Гельфанд — Левитана для решения обратной задачи Штурма — Лиувилля с дискретным спектром. На этом мы заканчиваем описание примера 2 и отсылаем за подробностями к статье [14].

## § 2. КАНОНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Многие методы, развитые для одномерного оператора Шредингера, естественно переносятся (и иногда даже упрощаются) на дифференциальный оператор канонической линейной системы, который мы запишем в матричных обозначениях

$$H = J \frac{d}{dx} + Q(x).$$

Здесь  $J$  — симплектическая матрица и  $Q$  — вещественная симметричная матрица-функция с нулевым следом

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}.$$

Технические приемы для исследования спектральных свойств такого оператора были развиты в работах М. Г. Крейна и его учеников, а также в работах М. Г. Гасымова и Б. М. Левитана. Соответствующие ссылки можно найти в [13], [7]. Во всех этих работах оператор  $H$  рассматривался на полуоси  $0 \leq x < \infty$ . В этом параграфе мы приведем основные формулы и результаты стационарной теории

рассеяния и обратной задачи для оператора  $H$  на всей оси, следуя дипломной работе Тахтаджяна [20].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$J \frac{d}{dx} \psi(x) + Q(x) \psi(x) = k \psi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.1)$$

играющую в нашем случае роль уравнения Шредингера. Система (2.1) имеет решения  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$ , которые являются векторами-столбцами и имеют следующую асимптотику

$$f_1(x, k) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \infty,$$

$$f_2(x, k) = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Для доказательства существования таких решений достаточно считать, что коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$  матрицы  $Q(x)$  являются абсолютно интегрируемыми функциями

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(x)| dx < \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |q(x)| dx < \infty. \quad (2.2)$$

Компоненты  $f_i^{(1)}(x, k)$  и  $f_i^{(2)}(x, k)$  решений  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  при фиксированном  $x$  имеют аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость параметра  $k$ . При больших  $k$

$$f_1(x, k) e^{-ikx} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + o(1); \quad f_2(x, k) e^{ikx} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} + o(1).$$

При вещественных  $k$  пары решений  $f_1(x, k), \overline{f_1(x, k)}$  и  $f_2(x, k), \overline{f_2(x, k)}$  образуют две фундаментальные системы решений уравнения (2.1). Коэффициенты перехода  $a(k)$  и  $b(k)$  вводятся формулами

$$f_2(x, k) = a(k) \overline{f_1(x, k)} + b(k) f_1(x, k);$$

$$f_1(x, k) = -\overline{b(k)} f_2(x, k) + a(k) \overline{f_2(x, k)}.$$

Эти коэффициенты удовлетворяют тождеству

$$1 + |b(k)|^2 = |a(k)|^2$$

и могут быть выражены через  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  по формуле

$$a(k) = -\frac{1}{2i} \{f_1(x, k), f_2(x, k)\}.$$

Здесь  $\{f, g\}$  — аналог вронсиана — определяется как билинейная форма матрицы

$$\{f, g\} = f^{(1)} g^2 - f^{(2)} g^{(1)}.$$

Мы видим, что  $a(k)$  имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость и имеет там оценку при  $k \rightarrow \infty$

$$a(k) = 1 + o(1).$$

Функция  $a(k)$  не имеет нулей в верхней полуплоскости, так как такие нули соответствовали бы комплексным собственным значениям формально самосопряженной системы (2.1).

Знание фундаментальной системы решений системы уравнений позволяет нам ввести решения  $u(x, k)$ , удовлетворяющие принципу излучения и развить теорию рассеяния аналогично тому, как мы это сделали в § 2 главы I на примере уравнения Шредингера с убывающим потенциалом. Мы не будем этого делать здесь и ограничимся тем, что скажем, что матрица  $S(k)$  определяется по коэффициентам перехода  $a(k)$  и  $b(k)$  формулами, буквально совпадающими с приведенными там. Единственное отличие состоит в том, что параметр  $k$  теперь пробегает всю вещественную ось. В частности, вся матрица  $S(k)$  может быть восстановлена по одному из коэффициентов отражения

$$s_{12}(k) = \frac{b(k)}{a(k)}, \quad s_{21}(k) = -\frac{\overline{b(k)}}{\overline{a(k)}}.$$

Для решений  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$  справедливы интегральные представления

$$f_1(x, k) = f_0(x, k) + \int_x^{\infty} A_1(x, y) f_0(y, k) dy;$$

$$f_2(x, k) = \overline{f_0(x, k)} + \int_{-\infty}^x A_2(x, y) \overline{f_0(y, k)} dy.$$

Здесь вектор-столбец  $f_0(x, k)$  имеет вид

$$f_0(x, k) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx},$$

и ядра  $A_1(x, y)$  и  $A_2(x, y)$  являются вещественными матрицами-функциями, абсолютно интегрируемыми по  $y$  при фиксированном  $x$ .

Ядра  $A_1(x, y)$  и  $A_2(x, y)$  можно использовать для построения вольтерровых операторов преобразования и, в частности, выразить через них условие полноты. Мы не будем делать здесь этого и приведем лишь формулы, выражющие  $Q(x)$  через эти ядра

$$Q(x) = -[A_1(x, x), J] = [A_2(x, x), J]$$

и формулировку одного из уравнений Гельфандса — Левитана:

$$A_1(x, y) + F_1(x + y) + \int_x^{\infty} A_1(x, z) F_1(z + y) dz = 0, \quad x < y.$$

Здесь матрица-функция  $F_1(x)$  вводится по формуле

$$F_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left( s_{12}(k) \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} e^{ikx} \right) dk.$$

На основании исследования этого уравнения и его аналога для ядра  $A_2(x, y)$  можно показать, что свойства матрицы  $S(k)$ , состоящие в ее унитарности и симметрии, аналитичности коэффициента прохождения и абсолютной интегрируемости преобразований Фурье  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  коэффициентов отражения  $s_{12}(k)$  и  $s_{21}(k)$

$$\int_a^{\infty} |F_1(x)| dx < C(a), \quad \int_{-\infty}^b |F_2(x)| dx < C(b)$$

являются необходимыми и достаточными свойствами матрицы рассеяния для канонической системы с матрицей  $Q(x)$ , удовлетворяющей условию (2.2).

Скажем теперь, в каком смысле каноническая система является обобщением уравнения Шредингера. Если матрица  $Q(x)$  имеет вид

$$Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

то система уравнений (2.1) эквивалентна уравнению Шредингера с оператором  $H$  вида

$$H = \left( \frac{d}{dx} + q(x) \right) \left( -\frac{d}{dx} + q(x) \right) = -\frac{d^2}{dx^2} + q^2(x) + q'(x),$$

который, очевидно, является положительно определенным. Необходимым и достаточным условием на данные рассеяния, соответствующие матрице  $Q(x)$  вида (2.3), является вещественность

$$s_{ij}(-k) = \overline{s_{ij}(k)},$$

которая и сводит фактически область изменения параметра  $k$  к полуоси.

В заключение отметим, что случай системы (2.1), когда матрица  $Q(x)$  имеет вид

$$Q(x) = \begin{pmatrix} m+p & q \\ q & -m-p \end{pmatrix},$$

где  $m$  — положительная постоянная (система уравнений Дирака с массой), был недавно рассмотрен И. С. Фроловым [30].

### § 3. ФОРМУЛА СЛЕДОВ

В этом параграфе мы выведем тождества, связывающие моменты, функции  $\ln|a(k)|$ , где  $a(k)$  — один из коэффициентов перехода, с интегралами от полиномов, образованных

производными потенциалов в одномерном операторе Шредингера или операторе канонической системы. Впервые такие формулы появились, по-видимому, в работе [5], которая в свою очередь развивает работу И. М. Гельфанд и В. М. Левитана [9]. В этих работах поясняется, почему такие тождества естественно называть формулами следов. Вывод, который мы приведем, не будет использовать общих теоретико-операторных соображений и взят из работы [10].

Рассмотрим сначала случай оператора Шредингера. Будем считать, что потенциал  $v(x)$  — функция типа Шварца. Тогда коэффициенты отражения  $s_{12}(k)$  и  $s_{21}(k)$  убывают при  $|k| \rightarrow \infty$  быстрее, чем  $|k|^{-n}$  при любом  $n > 0$ . Из формулы

$$\ln a(k) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{\ln |a(k')|}{k' - k} dk' + 2i \sum_{l=1}^N 2 \operatorname{arctg} \frac{x_l}{k},$$

которая представляет собой вариант записи соотношения (1.2.9), следует, что  $\ln a(k)$  имеет разложение по обратным степеням  $k$

$$\ln a(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{k^n}, \quad (3.1)$$

где

$$c_{2j} = 0; c_{2j+1} = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2j} \ln |a(k)| dk - \frac{2}{2j+1} \sum_{l=1}^N (ix_l)^{2j+1}.$$

Четные степени исчезают вследствие четности подынтегральной функции  $\ln |a(k)|$ . Имея в виду отмеченную выше интерпретацию  $a(\sqrt{\lambda})$  как регуляризованного характеристического определителя оператора  $H$ , мы можем сказать, что  $c_{2j+1}$  пропорциональны регуляризованным следам полуцелых степеней  $\frac{2j+1}{2}$  оператора  $H$ , в то время как такие следы для целых степеней исчезают.

Мы вычислим теперь коэффициенты  $c_n$  непосредственно через  $v(x)$ . Это вычисление можно интерпретировать как определение матричного следа операторов  $H^{\frac{j+1}{2}}$ . Тождества, которые получаются после приравнивания двух таким образом полученных выражений для  $c_n$ , и называются формулами следов. В приведенных ниже элементарных вычислениях эта интерпретация не будет очевидной.

Рассмотрим функцию

$$\chi(x, k) = \ln f_1(x, k) - ikx.$$

Можно показать, что эта функция аналитична по  $k$  при  $\operatorname{Im} k > 0$  и достаточно большом  $|k|$  при любом фиксированном  $x$ . При больших  $|x|$  она имеет асимптотики

$\chi(x, k) = o(1)$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $\chi(x, k) = \ln a(k) + o(1)$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  
так что

$$\ln a(k) = - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, k) dx,$$

где

$$\sigma(x, k) = \frac{d}{dx} \chi(x, k).$$

Из уравнения Шредингера вытекает, что  $\sigma(x, k)$  удовлетворяет уравнению Рикатти

$$\frac{d}{dx} \sigma + \sigma^2 - v + 2ik\sigma = 0,$$

которое можно использовать для определения асимптотического разложения

$$\sigma(x, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n(x)}{(2ik)^n}. \quad (3.2)$$

Для коэффициентов  $\sigma_n(x)$  при этом получаются рекуррентные соотношения

$$\sigma_n(x) = - \frac{d}{dx} \sigma_{n-1}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{n-k-1}(x) \sigma_k(x), \quad n=2, \dots; \quad \sigma_1(x) = v(x).$$

Несколько первых коэффициентов имеют вид

$$\sigma_2(x) = - \frac{d}{dx} v(x); \quad \sigma_3(x) = - v^2(x) + \frac{d^2}{dx^2} v(x);$$

$$\sigma_4(x) = - \frac{d^3}{dx^3} v(x) + 4v(x) \frac{d}{dx} v(x);$$

$$\sigma_5(x) = \frac{d^4}{dx^4} v(x) - 6v(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) - 5 \left( \frac{d}{dx} v(x) \right)^2 + 2v^3(x).$$

Мы видим, что  $\sigma_2(x)$  и  $\sigma_4(x)$  являются полными производными. Это свойство сохраняется и для всех  $\sigma_n(x)$  с четными  $n$ . Возвращаясь к  $\ln a(k)$ , мы убеждаемся, что в разложении (3.1) коэффициенты  $c_n$  записываются в виде

$$c_{2j} = 0; \quad c_{2j+1} = - \left( \frac{1}{2i} \right)^{2j+1} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{2j+1}(x) dx,$$

так что, например,

$$c_1 = - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) dx; \quad c_3 = - \frac{1}{8i} \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) dx;$$

$$c_5 = -\frac{1}{32i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2v^3(x) + \left( \frac{d}{dx} v(x) \right)^2 \right] dx.$$

Мы получили, таким образом, набор тождеств

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{2j+1}(x) dx = -\frac{(2i)^{2j+2}}{\pi} \int_0^{\infty} k^{2j} \ln |a(k)| dk - 2 \frac{(2)^{2j+1}}{2j+1} \sum_{i=1}^N x_i^{2j+1},$$

которые и называются формулами следов. Их интерпретация в терминах следов полуцелых степеней оператора  $H$  делается особенно очевидной в связи с присутствием в правой части суммы полуцелых степеней его дискретных собственных значений.

Дифференциальный оператор канонической системы рассматривается аналогичным образом. В качестве функции  $\sigma(x, k)$ , следуя работе [11], используем выражение

$$\sigma(x, k) = \frac{d}{dx} \ln \left( \frac{1}{2i} (f_1^{(1)}(x, k) + i f_1^{(2)}(x, k)) \right) - ik.$$

Можно показать, что

$$\ln a(k) = - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, k) dx.$$

Из канонической системы (2.1) для  $\sigma(x, k)$  получается уравнение

$$2ik\sigma = \sigma^2 + w(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{w(x)} \sigma \right) - |w|^2, \quad w = p + iq,$$

которое можно использовать для асимптотического разложения типа (3.2). При этом первые коэффициенты  $\sigma_n(x)$  имеют вид

$$\sigma_1(x) = -|w|^2; \quad \sigma_2 = -w\bar{w}'; \quad \sigma_3 = -w\bar{w}'' + |w|^4,$$

$$\sigma_4 = -w\bar{w}''' + w\bar{w}'|w|^2 + 4w^2\bar{w}\bar{w}'.$$

В результате для  $\ln a(k)$  получается асимптотическое разложение вида (3.1), где все коэффициенты  $c_n$ , вообще говоря, отличны от нуля, и два разных способа их вычисления приводят к тождествам

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n(x) dx = (2i)^n \int_{-\infty}^{\infty} k^{n-1} \ln |a(k)| dk.$$

Эти формулы можно интерпретировать в терминах регуляризованных следов степеней оператора  $H$  канонической системы.

Если условие бесконечной дифференцируемости  $v(x)$  или  $p(x)$  и  $q(x)$ , которое мы использовали при выводе тождеств, не выполняется, то количество верных формул следов определяется числом гладких производных. При этом абсол-

лютная сходимость одного из интегралов в этих тождествах гарантирует сходимость второго. Таким образом, формулы следов служат некоторым косвенным средством для того, чтобы по свойствам потенциала можно было получать сведения о поведении данных рассеяния.

В серии работ [31], [32], [33] итальянских физиков тождества, аналогичные полученным здесь, для радиальных операторов Шредингера и их релятивистских аналогов были использованы и для более содержательных утверждений по поводу обратной задачи.

#### § 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Работа группы Краскала [42] и последующая работа Лакса [44] открыли новую область приложения теории рассеяния. Именно, оказалось, что при помощи задачи рассеяния можно описать общее решение некоторых нелинейных эволюционных уравнений с одной пространственной переменной. Здесь мы опишем два характерных примера таких приложений.

##### 1. Уравнение Кортевега—де Фриса

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 6 v(x, t) \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} v(x, t). \quad (4.1)$$

##### 2. Нелинейное уравнение Шредингера

$$-i \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - 2w(x, t)|w(x, t)|^2. \quad (4.2)$$

В первом примере  $v=v(x, t)$  — вещественная функция, а функция  $w(x, t)$  во втором примере комплексна,  $w(x, t)=p(x, t)+iq(x, t)$ . Мы будем считать их быстро убывающими при больших  $|x|$  и фиксированном  $t$ .

Покажем, что оба уравнения представляют собой уравнение движения для бесконечномерной гамильтоновой системы. Напомним, что в определении таких систем существует симплектическое многообразие  $(M, \Omega)$ , где  $M$  — дифференцируемое четномерное многообразие и  $\Omega$  — замкнутая невырожденная 2-форма на нем, и выделенная функция (гамильтониан)  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Траектории гамильтоновой системы даются посредством дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = J(dh(\xi)), \quad (4.3)$$

где  $\xi$  — точка многообразия,  $\dot{\xi}$  — касательный вектор к траектории в точке  $\xi$  и  $J$  — отображение один-форм в векторные поля, определенное формой  $\Omega$  (см., например, [2]).

Заметим теперь, что уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta h[v]}{\delta v(x)}, \quad (4.4)$$

где функционал  $h[v]$  имеет вид

$$h[v] = \int_{-\infty}^{\infty} [v^3(x) + \frac{1}{2} \left( \frac{dv(x)}{dx} \right)^2] dx.$$

Сравнивая (4.3) и (4.4), мы видим, что последнее уравнение действительно имеет гамильтонов вид, причем  $h[v]$  играет роль гамильтониана, а антисимметричный оператор  $J = \frac{\partial}{\partial x}$  порождает симплектическую структуру в множестве функций  $v(x)$ . Соответствующая 2-форма, которую мы запишем как билинейную форму вариаций  $\delta_1 v$  и  $\delta_2 v$  функции  $v(x)$ , определяется оператором, обратным к  $J$ , и имеет вид

$$\Omega(\delta_1 v, \delta_2 v) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^x dy [\delta_1 v(x) \delta_2 v(y) - \delta_1 v(y) \delta_2 v(x)]. \quad (4.5)$$

Аналогичные объекты для уравнения (4.2) имеют вид

$$h[w] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left| \frac{d}{dx} w \right|^2 + |w|^4 \right) dx$$

и

$$\Omega(\delta_1 w, \delta_2 w) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta_1 w(x) \overline{\delta_2 w(x)} - \overline{\delta_1 w(x)} \delta_2 w(x)) dx,$$

соответственно. Мы видим, что симплектическая структура в пространстве комплексных функций  $w(x)$  индуцируется естественной комплексной структурой вещественного пространства функций  $p(x)$  и  $q(x)$ ,  $w = p + iq$ .

Задача рассеяния используется для описания замены переменных в уравнениях (4.1), (4.2), при которой они становятся явно решаемыми. Опишем соответствующую схему сначала на примере уравнения Кортевега — де Фриса. Рассмотрим функцию  $v(x)$  как потенциал в операторе Шредингера  $H$ , изученном в предыдущей главе. Пусть  $(s_{12}(k), \chi_l, m_l^{(1)})$  — соответствующие данные рассеяния, которые в свою очередь однозначно определяют  $v(x)$ . Оказывается, что функционал  $h[v]$  и форма  $\Omega$  в явном виде могут быть выражены через данные рассеяния и их вариации. Соответствующие формулы имеют вид

$$h[v] = 16 \int_{-\infty}^{\infty} k^3 P(k) dk - \frac{32}{5} \sum_{l=1}^N p_l^{5/2} \quad (4.6)$$

и

$$\Omega = \int_0^\infty \delta_1 P(k) \delta_2 Q(k) dk + \sum_{l=1}^N \delta_1 p_l \delta_2 q_l - (1 \leftrightarrow 2), \quad (4.7)$$

где

$$P(k) = \frac{2k}{\pi} \ln |a(k)|; \quad Q(k) = 2 \arg b(k); \quad (4.8)$$

$$p_l = \kappa_l^2; \quad q_l = 2 \ln b_l; \quad b_l = i m_l^{(1)} \left. \frac{d}{dk} a(k) \right|_{k=i\kappa_l},$$

причем коэффициенты перехода  $a(k)$  и  $b(k)$  построены по исходным данным рассеяния.

Мы видим, что новые переменные являются явно каноническими, причем  $P(k)$ ,  $p_l$ ,  $l=1, \dots, N$ , играют роль канонических импульсов, а  $Q(k)$ ,  $q_l$ ,  $l=1, \dots, N$ , — канонических координат. Более того, гамильтониан  $\hbar[v]$  оказывается зависящим только от импульсов, так что гамильтоновы уравнения в новых переменных тривиально решаются. Возвращаясь к данным рассеяния, соответствующее решение можно записать в виде

$$s_{12}(k, t) = s_{12}(k, 0) e^{8ik^2 t}; \quad \kappa_l(t) = \kappa_l(0); \quad m_l^{(1)}(t) = e^{8\kappa_l^3 t} m_l^{(1)}(0). \quad (4.9)$$

Описанные факты и дают возможность решать уравнение Кортевега—де Фриса при помощи вспомогательной задачи рассеяния. Пусть  $v(x, 0) = v(x)$  — функция типа Шварца, задающая данные Коши для этого уравнения. Последовательность отображений

$$v(x, 0) \rightarrow (s_{12}(k, 0), m_l^{(1)}(0), \kappa_l(0)) \rightarrow (s_{12}(k, t), m_l^{(1)}(t), \kappa_l(t)) \rightarrow \\ \rightarrow v(x, t)$$

определяет соответствующее решение. Здесь первая слева стрелка означает решение прямой задачи рассеяния для уравнения Шредингера с потенциалом  $v(x) = v(x, 0)$ , следующая стрелка задана в (4.9) и, наконец, последняя стрелка представляет решение обратной задачи.

Именно это предложение и было приведено в первой работе Краскала и др. [42]. Приведенная здесь его гамильтонова интерпретация получена в работе [10].

Аналогичные формулы

$$\hbar[w] = 4 \int_{-\infty}^{\infty} k^2 P(k) dk \quad (4.10)$$

и

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta_1 P(k) \delta_2 Q(k) - \delta_1 Q(k) \delta_2 P(k)] dk, \quad (4.11)$$

где

$$P(k) = \frac{1}{\pi} \ln a(k); Q(k) = \arg b(k),$$

можно получить для нелинейного уравнения из примера 2. Здесь  $a(k)$  и  $b(k)$  — коэффициенты перехода для канонической системы (2.1), построенной по функциям  $p(x) = \operatorname{Re} w(x)$ ,  $q(x) = \operatorname{Im} w(x)$ . Отметим, что в определении импульса  $P(k)$  отсутствует множитель  $k$  и что область изменения переменной  $k$  теперь вся ось. Эти формулы были получены в дипломной работе Л. А. Тахтаджяна [20]. Из них следует, что общее решение задачи Коши для уравнения дается последовательностью отображений

$$w(x, 0) \rightarrow (a(k, 0), b(k, 0)) \rightarrow (a(k, t), b(k, t)) \rightarrow w(k, t),$$

причем

$$a(k, t) = a(k, 0); b(k, t) = e^{4ik^2t} b(k, 0).$$

Близкое уравнение

$$-i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \kappa \psi(x, t) |\psi(x, t)|^2, \kappa > 0,$$

(обратим внимание на противоположный знак перед нелинейностью) было рассмотрено ранее в работе В. Е. Захарова и А. Б. Шабата [11]. Соответствующая задача рассеяния там несамосопряженная и математически до сих пор еще не исследована.

Остановимся теперь коротко на выводе формул (4.6), (4.7), (4.10) и (4.11). Рассмотрим только уравнение Кортевега — де Фриса, так как второй пример рассматривается аналогично. Формула (4.6) нами уже выведена в предыдущем параграфе, она представляет собой запись тождества следов № 3. Действительно, коэффициент  $c_5$  пропорционален функционалу  $\langle v \rangle$ . Правая часть соотношения (4.6) возникает, если принять во внимание определения (4.8). Отметим здесь, что из приведенных результатов следует, что все функционалы  $c_{2j+1}$  от функции  $v(x)$  являются сохраняющимися величинами для уравнения Кортевега — де Фриса. Действительно, тождества следов показывают, что все эти функционалы зависят только от переменных типа импульсов, которые со временем не меняются. Это наблюдение дает простой и исчерпывающий подход к проблеме описания и полноты интегралов движения для уравнения Кортевега — де Фриса, которому посвящена значительная литература. Ссылки можно найти, например, в [43].

Для вывода выражения (4.7) для формы  $\Omega$  заметим, что при помощи уравнения Гельфанд — Левитана можно получить следующее выражение для вариации потенциала  $v(x)$  через вариации данных рассеяния

$$\delta v(x) = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta s_{12}(k) f_1^2(x, k) dk + \right. \\ \left. + 2 \sum_{l=1}^N (f_1^2(x, i\omega_l) \delta m_l^{(1)} + 2im_l^{(1)} f(x, i\omega_l) f(x, i\omega_l) \delta \omega_l) \right].$$

Здесь  $s_{12}(k)$ ,  $f_1(x, k)$ ,  $\omega_l$ ,  $m_l^{(1)}$  — объекты, соответствующие потенциалу  $v(x)$ , а  $f_1(x, k)$  — производная от  $f_1(x, k)$  по  $k$ . После этого вычисление формы  $\Omega$  получается при подстановке указанного выражения в (4.5) и вычисления интеграла по  $x$  и  $y$ . Для этого оказывается полезной формула

$$\{f^2(x, k), f^2(x, l)\} = \frac{1}{l^2 - k^2} \frac{d}{dx} (\{f(x, k), f(x, l)\})^2,$$

которая просто следует из уравнения Шредингера. Подробности вычислений можно найти в работе [10], к которой мы и отсылаем читателя. Если он проведет приведенные там вычисления, то ему будет нетрудно перенести их на второй рассмотренный нами пример и получить формулу (4.11). Что касается же формулы (4.10), то она представляет собой тождество следов № 3 для канонической системы.

На этом мы заканчиваем описание неожиданного приложения формализма теории рассеяния для решения одномерных нелинейных уравнений. Внутренние причины того, почему эта схема работает так же, как и область ее применимости, пока еще не выяснены. «Экспериментальный» подход к ее использованию может состоять в следующем: рассмотрим одномерный дифференциальный оператор, для которого исследованы прямая и обратная задачи рассеяния и описаны тождества следов. Найдем на множестве коэффициентов этого оператора симплектическую структуру, которую можно выразить явно через данные рассеяния. Тогда уравнения, порожденные этой структурой и каким-нибудь функционалом из формул следов как гамильтонианом, могут оказаться точно решаемыми. Конечно, эта схема очень ненаучна, но ее приходится использовать за неимением лучшей. Уравнение (4.2) было найдено как раз таким способом.

В связи с этой схемой особенно актуальными являются поиски новых задач рассеяния, которые поддаются исследованию. Очевидными кандидатами являются обобщения уравнения Шредингера или канонической системы на случай вектор-функций. Монография [1] показывает, что большинство результатов, известных для скалярных уравнений, без труда переносятся на случай векторных уравнений. Более перспективными, однако, являются уравнения высших порядков. Например, как показал недавно В. Е. Захаров, дифференциальный оператор третьего порядка

$$Hu = i \frac{d^2}{dx^2} + 2ip(x) \frac{d}{dx} + i \frac{dp(x)}{dx} + q(x) \quad (4.12)$$

порождает нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 2 \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 + 2u(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4}, \end{aligned}$$

играющее роль континуального аналога нелинейной проблемы Ферми—Паста—Улама. Обратная задача теории рассеяния для оператора (4.12) до сих пор еще не решена.

### Глава III

## ТРЕХМЕРНЫЙ ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА

В этой главе мы будем рассматривать оператор Шредингера в пространстве функций, зависящих от трех переменных,

$$H = -\Delta + v(x) = H_0 + V.$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа и  $v(x)$  — функция, которую мы будем считать вещественной ограниченной и достаточно быстро убывающей на бесконечности.

Спектральный анализ этого оператора значительно сложнее, чем для рассмотренного в главе I одномерного оператора Шредингера. Это в особенности относится к детальному исследованию свойств типа гладкости и асимптотического поведения амплитуды рассеяния, которое необходимо провести для того, чтобы можно было обсуждать достаточные или необходимые условия на эту функцию, соответствующую потенциалу  $v(x)$  из некоторого класса. Поэтому в этой главе мы приведем лишь формальную схему решения обратной задачи, не оговаривая каждый раз явно, при каких условиях на потенциал  $v(x)$  справедливы приводимые рассуждения. Традиционное условие на  $v(x)$ , при котором выполняются большинство приведенных ниже оценок, выглядит следующим образом:

$$|v(x)| \leq C(1 + |x|)^{-3-\epsilon}, \quad \epsilon > 0.$$

При этом условии оператор  $H$ , определенный в  $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$  на плотной области  $\mathfrak{D} = \dot{W}_2^2(\mathbb{R}^3)$ , является самосопряженным.

Мы рассматриваем трехмерный случай лишь для определенности. Все формулы без труда обобщаются на случай произвольного  $n \geq 2$ . В подходящих местах мы будем отмечать

анalogии или расхождения с рассмотренным в главе I одномерным случаем. Излагаемый материал появился впервые в [29].

## § 1. ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

Построение теории рассеяния для пары операторов  $H$  и  $H_0$  в стационарном варианте основано на существовании набора решений  $u^{(\pm)}(x, k)$  уравнения Шредингера

$$\Delta\psi(x) + k^2\psi(x) = v(x)\psi(x) \quad (1.1)$$

со следующим асимптотическим поведением на бесконечности, т. е. при  $|x| \rightarrow \infty$ ,

$$u^{(\pm)}(x, k) = e^{i(k \cdot x)} + \frac{e^{\pm i|k||x|}}{|x|} f^{(\pm)}(k, n) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad (1.2)$$

(принцип излучения). Здесь

$$k \in \mathbb{R}^3, |x| = (x \cdot x)^{1/2}, |k| = (k \cdot k)^{1/2}, n = \frac{x}{|x|}.$$

Решения  $u^{(\pm)}(x, k)$  аналогичны наборам решений  $u_i^{(\pm)}(x, k)$  и  $u_2^{(\pm)}(x, k)$  из § 2 гл. I. Роль принимающего два значения индекса  $i=1, 2$  играет направление  $\alpha = k/|k|$  вектора  $k$ , пробегающее единичную сферу  $S^2$ .

Доказательство существования и исследование решений  $u^{(\pm)}(x, k)$  было проведено А. Я. Повзнером [18], [19]. Схема рассуждений, приведенная в главе I и основанная на существовании фундаментальной системы решений уравнения Шредингера, не переносится на наш случай. Поэтому приходится исследовать непосредственно интегральные уравнения теории рассеяния

$$u^{(\pm)}(x, k) = e^{i(k \cdot x)} + \int G^{(\pm)}(x - y, |k|) v(y) u^{(\pm)}(y, k) dy. \quad (1.3)$$

Здесь  $G^{(\pm)}(x, |k|)$  — функции Грина уравнения Гельмгольца

$$\Delta G^{(\pm)}(x, |k|) + k^2 G^{(\pm)}(x, |k|) = \delta(x),$$

однозначно определяемые принципом излучения. Известные в трехмерном случае явные выражения

$$G^{(\pm)}(x, |k|) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i|k||x|}}{|x|}$$

получаются из общей формулы

$$G^{\pm}(x, |k|) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \frac{e^{i(l \cdot x)}}{k^2 - l^2 \pm i0} dl \quad (1.4)$$

после вычисления интеграла. В последней формуле участвует известная обобщенная функция  $(x \pm i0)^{-1}$ .

$$Hu = i \frac{d^2}{dx^2} + 2ip(x) \frac{d}{dx} + i \frac{dp(x)}{dx} + q(x) \quad (4.12)$$

порождает нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 2 \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 + 2u(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4}, \end{aligned}$$

играющее роль континуального аналога нелинейной проблемы Ферми—Паста—Улама. Обратная задача теории рассеяния для оператора (4.12) до сих пор еще не решена.

### Глава III

## ТРЕХМЕРНЫЙ ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА

В этой главе мы будем рассматривать оператор Шредингера в пространстве функций, зависящих от трех переменных,

$$H = -\Delta + v(x) = H_0 + V.$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа и  $v(x)$  — функция, которую мы будем считать вещественной ограниченной и достаточно быстро убывающей на бесконечности.

Спектральный анализ этого оператора значительно сложнее, чем для рассмотренного в главе I одномерного оператора Шредингера. Это в особенности относится к детальному исследованию свойств типа гладкости и асимптотического поведения амплитуды рассеяния, которое необходимо провести для того, чтобы можно было обсуждать достаточные или необходимые условия на эту функцию, соответствующую потенциалу  $v(x)$  из некоторого класса. Поэтому в этой главе мы приведем лишь формальную схему решения обратной задачи, не оговаривая каждый раз явно, при каких условиях на потенциал  $v(x)$  справедливы приводимые рассуждения. Традиционное условие на  $v(x)$ , при котором выполняются большинство приведенных ниже оценок, выглядит следующим образом:

$$|v(x)| \leq C(1 + |x|)^{-3-\epsilon}, \quad \epsilon > 0.$$

При этом условии оператор  $H$ , определенный в  $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$  на плотной области  $\mathcal{D} = W_2^2(\mathbb{R}^3)$ , является самосопряженным.

Мы рассматриваем трехмерный случай лишь для определенности. Все формулы без труда обобщаются на случай произвольного  $n \geq 2$ . В подходящих местах мы будем отмечать

анalogии или расхождения с рассмотренным в главе I одномерным случаем. Излагаемый материал появился впервые в [29].

## § 1. ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

Построение теории рассеяния для пары операторов  $H$  и  $H_0$  в стационарном варианте основано на существовании набора решений  $u^{(\pm)}(x, k)$  уравнения Шредингера

$$\Delta\psi(x) + k^2\psi(x) = v(x)\psi(x) \quad (1.1)$$

со следующим асимптотическим поведением на бесконечности, т. е. при  $|x| \rightarrow \infty$ ,

$$u^{(\pm)}(x, k) = e^{i(k \cdot x)} + \frac{e^{\pm i|k||x|}}{|x|} f^{(\pm)}(k, n) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad (1.2)$$

(принцип излучения). Здесь

$$k \in \mathbb{R}^3, |x| = (x \cdot x)^{1/2}, |k| = (k \cdot k)^{1/2}, n = \frac{x}{|x|}.$$

Решения  $u^{(\pm)}(x, k)$  аналогичны наборам решений  $u_i^{(\pm)}(x, k)$  и  $u_2^{(\pm)}(x, k)$  из § 2 гл. I. Роль принимающего два значения индекса  $i=1, 2$  играет направление  $\alpha = k/|k|$  вектора  $k$ , проходящее единичную сферу  $S^2$ .

Доказательство существования и исследование решений  $u^{(\pm)}(x, k)$  было проведено А. Я. Повзнером [18], [19]. Схема рассуждений, приведенная в главе I и основанная на существовании фундаментальной системы решений уравнения Шредингера, не переносится на наш случай. Поэтому приходится исследовать непосредственно интегральные уравнения теории рассеяния

$$u^{(\pm)}(x, k) = e^{i(k \cdot x)} + \int G^{(\pm)}(x - y, |k|) v(y) u^{(\pm)}(y, k) dy. \quad (1.3)$$

Здесь  $G^{(\pm)}(x, |k|)$  — функции Грина уравнения Гельмгольца

$$\Delta G^{(\pm)}(x, |k|) + k^2 G^{(\pm)}(x, |k|) = \delta(x),$$

однозначно определяемые принципом излучения. Известные в трехмерном случае явные выражения

$$G^{(\pm)}(x, |k|) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i|k||x|}}{|x|}$$

получаются из общей формулы

$$G^{\pm}(x, |k|) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \frac{e^{i(l \cdot x)}}{k^2 - l^2 \pm i0} dl \quad (1.4)$$

после вычисления интеграла. В последней формуле участвует известная обобщенная функция  $(x \pm i0)^{-1}$ .

Исследование А. Я. Повзнера основано на теории Фредгольма для уравнений (1.3). Важную роль играет теорема Като [35], из которой следует, что однородные уравнения, соответствующие (1.3), при вещественных  $k$  не имеют нетривиальных ограниченных решений. А. Я. Повзнер показал, что решения  $u^{(\pm)}(x, k)$  образуют полную ортонормированную систему собственных функций непрерывного спектра оператора  $H$ , который заполняет всю положительную полуось. Этот спектр имеет равномерную бесконечную кратность, так что собственные функции нумеруются помимо собственного значения  $k^2$  точкой  $\alpha \in S^2$ . Кроме непрерывного спектра, оператор  $H$  может иметь конечное число неположительных собственных значений конечной кратности. Мы будем для упрощения формул считать, что весь дискретный спектр  $H$  состоит из одного простого отрицательного собственного значения, которое обозначим через  $-\kappa^2$ . Соответствующую нормированную собственную функцию, которую можно считать вещественной, обозначим через  $u(x)$ .

Условия полноты и ортогональности функций  $u^{(\pm)}(x, k)$  записываются в виде

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \overline{u^{(\pm)}(x, k)} u^{(\pm)}(y, k) dk + u(x) u(y) = \delta(x - y); \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int u^{(\pm)}(x, k) \overline{u^{(\pm)}(x, l)} dx = \delta(k - l). \quad (1.6)$$

Амплитуда рассеяния  $f(k, l)$  просто связана с функцией  $f^{(+)}(k, n)$ , описывающей асимптотику решений  $u^{(+)}(x, k)$

$$f^{(+)}(k, n) = -2\pi^2 f(k, l); \quad k^2 = l^2; \quad n = \frac{l}{|l|},$$

и может быть выражена через решение  $u^{(+)}(x, k)$  по формуле

$$f(k, l) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{-i(l, x)} v(x) u^{(+)}(x, k) dx, \quad (1.7)$$

являющейся аналогом формул (I.1.22), (I.1.23).

Приведем теперь связь функций  $u^{(\pm)}(x, k)$  и волновых операторов. Введем для этого диагональное представление для оператора  $H_0$ . Пусть пространство  $\mathfrak{H}_0$  образовано функциями  $\varphi(\lambda, \alpha)$ , заданными на  $\mathbb{R}_+ \times S^2$  и имеющими скалярное произведение

$$(\varphi, \varphi')_0 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{2} \int_{S^2} d\alpha \varphi(\lambda, \alpha) \overline{\varphi'(\lambda, \alpha)},$$

где  $d\alpha$  — элемент поверхности сферы  $S^2$ . Определим изоморфизм  $T_0: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_0$  по формуле

$$\psi(x) \rightarrow T_0 \psi = \varphi(\lambda, \alpha); \quad \varphi(\lambda, \alpha) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int e^{i\sqrt{\lambda}(x, \alpha)} \psi(x) dx.$$

Оператор  $T_0$  унитарен

$$T_0^* T_0 = I; \quad T_0 T_0^* = I_0$$

и переводит оператор  $H_0$  в оператор умножения на  $\lambda$

$$H_0 \psi(x) \rightarrow \lambda \varphi(\lambda, \alpha).$$

Введем теперь еще два отображения  $T_{\pm} : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_0$ ,

$$\psi \rightarrow T_{\pm} \psi = \varphi_{\pm}; \quad \varphi_{\pm}(\lambda, \alpha) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int u^{(\pm)}(x, \sqrt{\lambda}\alpha) \psi(x) dx.$$

Соотношения полноты и ортогональности (1.5), (1.6) записываются через них следующим образом

$$T_{\pm}^* T_{\pm} = I - P; \quad T_{\pm} T_{\pm}^* = I_0.$$

Здесь  $P$  — проектор в  $\mathfrak{H}$  на одномерное подпространство, наложенное на функцию  $u(x)$ .

Волновые операторы  $U^{(\pm)}$  выглядят следующим образом

$$U^{(\pm)} = T_{\pm}^* T_0. \quad (1.8)$$

Доказательство этого факта можно провести по схеме, использованной в § 2 гл. I. Подробные рассуждения по этому поводу можно найти в статье Икэбэ [34], которая содержит также некоторые усовершенствования работ А. Я. Повзнера.

Свяжем теперь оператор рассеяния  $S$ , определяемый формулой

$$U^{(-)} = U^{(+)} S,$$

с амплитудой рассеяния  $f(k, l)$ . Для этого заметим, что решения  $u^{(+)}(x, k)$  и  $u^{(-)}(x, k)$  являются линейно зависимыми

$$u^{(+)}(x, k) = u^{(-)}(x, k) + \int g(k, l) \delta(k^2 - l^2) u^{(-)}(x, l) dl, \quad (1.9)$$

и из сравнения их асимптотик следует, что ядро  $g(k, l)$  совпадает с амплитудой рассеяния

$$g(k, l) = -2\pi i f(k, l), \quad (1.10)$$

которая в свою очередь должна удовлетворять соотношению типа унитарности. Для записи последнего удобно ввести в  $\mathfrak{H}_0$  оператор  $\hat{S}$  по формуле

$$\hat{S} \varphi(\lambda, \alpha) = \varphi(\lambda, \alpha) - i\pi \sqrt{\lambda} \int_{S^2} f(\sqrt{\lambda}\alpha, \sqrt{\lambda}\beta) \varphi(\lambda, \beta) d\beta.$$

Этот оператор и является унитарным.

Сравнение приведенных определений показывает, что оператор рассеяния может быть записан в виде

$$S = T_0^* \hat{S} T_0,$$

что и дает искомую связь. Отметим аналогию полученных формул с формулами из § 2 гл. I.

В дальнейшем нам будет удобнее ссылаться на пространство  $\mathfrak{H}_0$  просто как на  $L_2(\mathbb{R}^3)$ , используя отождествление

$$\varphi(\lambda, \alpha) = \varphi(k); |k| = \sqrt{\lambda}; \frac{k}{|k|} = \alpha.$$

В этом случае оператор  $T_0$  представляет собой преобразование Фурье

$$\psi(x) \rightarrow T_0 \psi = \varphi(k); \varphi(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{i(k,x)} \psi(x) dx.$$

Оператор  $\hat{S}$  в таких обозначениях выглядит следующим образом

$$\hat{S} \varphi(k) = \varphi(k) - 2\pi i \int f(k, l) \delta(k^2 - l^2) \varphi(l) dl. \quad (1.11)$$

Вернемся к решениям  $u^{(\pm)}(x, k)$  и скажем еще несколько слов об их свойствах. Можно показать, что функции  $u^{(+)}(x, |k|\alpha)$  при фиксированном  $x$  и  $\alpha$  имеют аналитическое продолжение на верхнюю полуплоскость параметра  $s = |k|$  и имеют простой полюс в точке  $s = ix$ . Главная часть в окрестности этого полюса имеет вид

$$\text{Res } u^{(+)}(x, s\alpha)|_{s=ix} = c(\alpha) u(x), \quad (1.12)$$

где

$$c(\alpha) = \frac{1}{2ix} \int e^{-ix(x,\alpha)} v(x) u(x) dx \quad (1.13)$$

и  $u(x)$  — уже упомянутая собственная функция. Для доказательства следует исследовать уравнение (1.3) в комплексной области  $s = |k|$ . Вариант таких рассуждений можно найти в [24]. Далее, при больших  $|k|$ , имеет место асимптотика

$$u^{(+)}(x, k) = e^{ix(x,k)} + o(1), \quad (1.14)$$

причем если  $v(x)$  — дифференцируема, то здесь можно заменить  $o(1)$  на  $O\left(\frac{1}{|k|}\right)$ . Вывод можно найти в [22]. В частности, из приведенных результатов следует, что амплитуда рассеяния вперед, т. е. функция

$$f(|k|, \alpha) = f(k, k)$$

имеет при фиксированном  $\alpha$  аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость параметра  $s = |k|$ , имеет при  $s = ix$  полюс с главной частью

$$\text{Res } f(s, \alpha)|_{s=ix} = \frac{2ix}{(2\pi)^3} c(\alpha) c(-\alpha) \quad (1.15)$$

и на бесконечности имеет асимптотику

$$f(s, \alpha) = q + o(1), q = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int v(x) dx.$$

Для доказательства следует использовать представление (1.7) для амплитуды рассеяния.

Последнее свойство, впервые полученное в работах физиков Вана [48] и Хури [41], является аналогом условия аналитичности коэффициента прохождения  $a(k)$  из главы I. Однако в отличие от одномерного случая, это условие далеко не исчерпывает все необходимые условия на амплитуду рассеяния, которые следуют из локальности потенциала. В следующем параграфе мы получим далекое обобщение этого свойства, сформулированное в [28].

Обратной задачей мы называем проблему восстановления потенциала  $v(x)$  по заданной амплитуде рассеяния  $f(k, l)$ . Из приведенных результатов следует важное отличие многомерного случая от рассмотренного выше одномерного: при  $n \geq 2$  существует не более одного потенциала, решающего обратную задачу. Действительно, из (1.14) следует, что при больших  $|k| = |l|$

$$f(k, l) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i(k-l, x)} v(x) dx + o(1),$$

так что, положив  $k - l = m$  и устремив  $|k|$  к бесконечности, мы можем восстановить преобразование Фурье от потенциала в таком пределе. Это давнее и простое утверждение, полученное в [3] и [21], долгое время было единственным строгим результатом по многомерной обратной задаче. Оно, конечно, не особенно интересно, но из него во всяком случае следует, что, в отличие от одномерного случая, все характеристики дискретного спектра, нужные для решения обратной задачи, должны вычисляться по самой амплитуде рассеяния.

## § 2. В ПОИСКАХ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В одномерном случае большую роль играли операторы преобразования  $U_1$  и  $U_2$ , выделенные условием вольтерровости. Как указывалось еще во введении, их естественным многомерным аналогом является набор операторов  $U_\gamma$ , с направлением вольтерровости  $\gamma \in S^2$ .

$$U_\gamma \psi(x) = \psi(x) + \int_{(y-x, \gamma) > 0} A_\gamma(x, y) \psi(y) dy. \quad (2.1)$$

В этом параграфе мы покажем, как можно доказать существование таких операторов.

Опыт главы I показывает, что вольтерровы операторы преобразования порождаются набором решений уравнения Шредингера, обладающих специальными свойствами аналитичности. В нашем случае следует искать такие решения

$f_\gamma(x, k)$  уравнения (1.1), которые имеют аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной  $s=(k, \gamma)$  при фиксированных  $x$  и  $k_\perp=k-(k, \gamma)\gamma$  такое, что при  $|x| \rightarrow \infty$

$$|f_\gamma(x, k) e^{-is(x, \gamma)}| \leq C \quad (2.2)$$

при  $\operatorname{Im} s \geq 0$  и имеет асимптотику при больших  $s$

$$f_\gamma(x, k) e^{-is(\gamma, x)} = e^{i(k_\perp, x)} + o(1).$$

Действительно, если такие наборы решений  $f_\gamma(x, k)$  существуют, то, вводя отображения  $T_\gamma$  из  $\mathfrak{H}$  в  $\mathfrak{H}_0$ , по формуле

$$\psi(x) \rightarrow T_\gamma \psi = \varphi_\gamma(\lambda, \alpha), \quad \varphi_\gamma(\lambda, \alpha) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int f_\gamma(x, \sqrt{\lambda} \alpha) \psi(x) dx,$$

мы можем убедиться, что операторы

$$U_\gamma = T_\gamma^* T_0 \quad (2.3)$$

имеют вид (2.1), где ядро  $A_\gamma(x, y)$ , являясь возможно обобщенной функцией  $x_\perp$  и  $y_\perp$ , будет классической функцией переменных  $(x, \gamma)$ ,  $(y, \gamma)$ , так что условие, согласно которому оно исчезает при  $(x, \gamma) > (y, \gamma)$ , корректно.

Можно пытаться искать решения типа  $f_\gamma(x, k)$  при помощи интегральных уравнений вида

$$u_\gamma(x, k) = e^{i(k, x)} + \int G_\gamma(x - y, k) v(y) u_\gamma(y, k) dy \quad (2.4)$$

при подходящем выборе функций Грина  $G_\gamma(x, k)$  уравнения Гельмгольца. В одномерном случае решения  $f_1(x, k)$  и  $f_2(x, k)$ , порождающие вольтерровы операторы преобразования, были определены именно так (см. (1.1.4)). Для выполнения условия аналитичности функции Грина  $G_\gamma(x, k)$  сами должны удовлетворять такому требованию: при фиксированных  $\gamma$ ,  $x$  и  $k_\perp$  они должны иметь аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость параметра  $s=(k, \gamma)$  такое, что

$$|G_\gamma(x, k) e^{-is(x, \gamma)}| \leq C \frac{1}{|x|}.$$

Такие функции действительно существуют. Наводящие соображения для их поисков и аналогия с функциями  $G_1(x, k)$  и  $G_2(x, k)$  из § 1 гл. I приведены в [27]. Здесь мы ограничимся тем, что приведем выражение для  $G_\gamma$  в виде интеграла, который, к сожалению, не удается вычислить явно

$$G_\gamma(x, k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{e^{i(l, x)}}{k^2 - l^2 + i0(k - l, \gamma)} dl, \quad (2.5)$$

где  $(x + i0a)^{-1}$  понимается как  $(x + i0)^{-1}$  при  $a > 0$  и как

$(x - io)^{-1}$  при  $\alpha < 0$ . Нетрудно убедиться, что  $G_\gamma(x, k)$  зависит от  $k$  лишь посредством комбинаций  $s = (k, \gamma)$  и  $\mu^2 = k^2 - (k, \gamma)^2$ . При  $\operatorname{Im} s > 0$  выражение (2.5) можно переписать в виде

$$G_\gamma(x, k) = G_\gamma(x, \mu, s) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{e^{i(l+s\gamma, x)}}{\mu^2 + s^2 - (l+s\gamma)^2} dl,$$

откуда и следуют сформулированные выше свойства типа аналитичности и ограниченности. Отметим еще, что при  $\operatorname{Im} s = 0$  выполняется условие вещественности

$$G_\gamma(x, k) = \overline{G_\gamma(x, -k)}. \quad (2.6)$$

Важное отличие функции  $G_\gamma(x, k)$  от одномерных  $G_1(x, k)$  и  $G_2(x, k)$  состоит в том, что она не является вольтерровской. Поэтому для исследования уравнения (2.4) мы не можем применять метод последовательных приближений и вынуждены использовать теорию Фредгольма. При этом получается, что решение  $u_\gamma(x, k)$  этого уравнения существует, является аналитической функцией  $s = (k, \gamma)$  при  $\operatorname{Im} s > 0$  и удовлетворяет там условию ограниченности при всех  $s$ , для которых однородное уравнение

$$h(x) - \int G_\gamma(x - y, \mu, s) v(y) h(y) dy = 0 \quad (2.7)$$

не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих условию

$$|h(x) e^{-is(x, y)}| \leq C.$$

Сингулярные  $s$ , при которых такие решения существуют, расположены дискретно, не имеют точек накопления при  $\operatorname{Im} s > 0$  и являются полюсами конечного порядка для  $u_\gamma(x, k)$ .

Такие сингулярные  $s$ , вообще говоря, существуют. Действительно, из сравнения (2.5) и (1.4) ясно, что при  $k \parallel \gamma$  функции Грина  $G^{(+)}(x, |k|)$  и  $G_\gamma(x, k)$  совпадают. Тем самым совпадают и решения  $u^{(+)}(x, k)$  и  $u_\gamma(x, k)$  при  $k \parallel \gamma$ . При этом же условии переменная  $s = (k, \gamma)$  есть просто  $|k|$ . В конце § I мы говорили, что  $u^{(+)}(x, k)$  при фиксированном  $x$  имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость по переменной  $s = |k|$  и имеет там простой полюс при  $s = ix$ . Таким образом,  $u_\gamma(x, k)$  при  $k_\perp = 0$  имеет полюс при  $s = ix$ . При изменении  $\gamma$ , или, что то же самое, появлении неисчезающего  $k_\perp$ , этот полюс будет двигаться не исчезая. Таким образом, мы убедились, что если оператор  $H$  имеет дискретный спектр, то сингулярные значения  $s$  существуют.

Нам не удалось доказать аналог теоремы Като для уравнения (2.4), т. е. мы не можем гарантировать, что это уравнение разрешимо при всех вещественных  $k$  или что сингулярные значения  $s$  не выходят на вещественную ось. Мы поэтому вынуждены потребовать, что потенциал  $v(x)$  таков, что таких

решений нет. Мы будем называть это требование условием С. В дальнейшем мы сможем сформулировать эквивалентное условие в терминах амплитуды рассеяния. При выполнении этого условия из (2.6) следует, что

$$u_\gamma(x, k) = \overline{u_\gamma(x, -k)}. \quad (2.8)$$

Итак, решения  $u_\gamma(x, k)$  вследствие описанных сингулярностей не могут служить для определения вольтерровых операторов преобразования. Нетрудно, однако, их подправить. Рассмотрим для этого регуляризованный определитель Фредгольма  $\Delta_\gamma(k)$  уравнения (2.4). Формальное определение дается формулой

$$\ln \Delta_\gamma(k) = \text{Tr} (\ln(I - G_\gamma(k)V) + G_\gamma(k)V), \quad (2.9)$$

где мы используем очевидное обозначение  $G_\gamma(k)$  для интегрального оператора с ядром  $G_\gamma(x-y, k)$ . След в правой части можно понимать в теоретико-операторном смысле, если провести симметризацию участвующих под знаком следа операторов по схеме

$$V = |V|^{1/2} J |V|^{1/2}, \quad G_\gamma(k)V \rightarrow |V|^{1/2} G_\gamma(k) |V|^{1/2} J.$$

Имея в виду, что этот прием можно считать выполненным, мы в дальнейшем его упоминать больше не будем. Функция  $\Delta_\gamma(k)$  зависит от  $k$  только посредством переменных  $\mu$  и  $s$  и при этом  $\Delta_\gamma(\mu, s)$  при фиксированных  $\gamma$  и  $\mu$  аналитично по  $s$  в верхней полуплоскости, имеет там асимптотику

$$\Delta_\gamma(\mu, s) = 1 + o(1)$$

и исчезает в сингулярных  $s$ . При этом кратность соответствующих нулей достаточна для того, чтобы уничтожить все полюса в произведении

$$f_\gamma(x, k) = u_\gamma(x, k) \Delta_\gamma(k), \quad (2.10)$$

так что набор решений  $f_\gamma(x, k)$  удовлетворяет всем требованиям, описанным в начале этого параграфа, и поэтому может служить для определения вольтерровых операторов преобразования.

На этом мы закончим описание поисков многомерных вольтерровых операторов преобразования, которые были на самом деле гораздо более драматическими, чем может показаться по этому изложению. В следующем параграфе мы начнем вычислять нормирующий множитель, соответствующий этим операторам.

Этот параграф мы закончим тем, что добавим несколько слов об определителе  $\Delta_\gamma(k)$ . Из отмеченной связи функций  $G^{(+)}(x, |k|)$  и  $G_\gamma(x, k)$  при  $k \parallel \gamma$  следует, что  $\Delta_\gamma(k)$  при  $k \parallel \gamma$  является определителем Фредгольма  $\Delta^{(+)}(|k|)$  интегрального уравнения теории рассеяния,

$$\ln \Delta^{(+)}(|k|) = \text{Tr} (\ln(I - G^{(+)}(|k|)V) + G^{(+)}(|k|)V).$$

Из этого выражения нетрудно получить, что

$$\frac{d}{d\lambda} \ln \Delta^{(+)}(\sqrt{\lambda}) = -\text{Tr}((H - \lambda I)^{-1} - (H_0 - \lambda I)^{-1}),$$

так что  $\Delta^{(+)}(\sqrt{\lambda})$  является регуляризованным характеристическим определителем оператора  $H$ . В этом смысле он аналогичен коэффициенту перехода  $a(\sqrt{\lambda})$  из главы I. В дальнейшем нам понадобится формула

$$\arg \Delta^{(+)}(|k|) = \frac{1}{2i} \ln \det S(k^2), \quad (2.11)$$

где  $S(k^2)$  — набор операторов в  $L_2(S^2)$ , естественно порожденный оператором  $\hat{S}$ . Вывод этого соотношения, характерного для формул следов, можно найти, например, в [4].

### § 3. НОРМИРУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ $u_\gamma(x, k)$

Формулы (2.10) и (2.3) показывают, что мы найдем нормирующие множители для операторов преобразования  $U_\gamma$ , если мы будем знать определитель  $\Delta_\gamma(k)$  и операторы  $\hat{Q}_\gamma^{(\pm)}$ , при помощи которых решения  $u_\gamma(x, k)$  можно выразить как линейную комбинацию решений  $u^{(\pm)}(x, k)$ . Если считать этот оператор интегральным, ядро которого  $Q_\gamma^{(\pm)}(k, l)$  является обобщенной функцией, то соответствующая формула должна иметь вид

$$u_\gamma(x, k) = \int Q_\gamma^{(\pm)}(k, l) u^{(\pm)}(x, l) dl. \quad (3.1)$$

В этом параграфе мы опишем набор таких операторов  $\hat{Q}_\gamma^{(\pm)}$ , которые являются в некотором смысле аналогом матриц  $M_i^{(\pm)}(k)$ , описанных в § 3 гл. I. Подходящее выражение для определителя Фредгольма  $\Delta_\gamma(k)$  будет получено в следующем параграфе.

Сравним функции Грина  $G^{(\pm)}(x, |k|)$  и  $G_\gamma(x, k)$ , участвующие в интегральных уравнениях (1.3) и (2.4). Из формул (1.4) и (2.5) следует, что

$$\begin{aligned} G_\gamma(x, k) &= G^{(+)}(x, |k|) + \frac{2\pi i}{(2\pi)^3} \int e^{i(l, x)} \delta(l^2 - k^2) \theta[(l - k, \gamma)] dl = \\ &= G^{(-)}(x, |k|) - \frac{2\pi i}{(2\pi)^3} \int e^{i(l, x)} \delta(l^2 - k^2) \theta[(k - l, \gamma)] dl. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $\theta(t)$  — функция Хевисайда. Используя первое из этих соотношений, мы можем переписать уравнение (2.4) для  $u_\gamma(x, k)$  в виде

$$u_\gamma(x, k) = e^{i(k, x)} + \frac{2\pi i}{(2\pi)^3} \int e^{i(l, x-y)} \delta(l^2 - k^2) \theta[(l - k, \gamma)] \times$$

$$\times v(y) u_\gamma(y, k) dy dl + \int G^{(+)}(x - y, |k|) v(y) u_\gamma(y, k) dy.$$

Рассмотрим первые два слагаемых в правой части как новый свободный член. Вводя обозначение

$$Q_\gamma^{(+)}(k, l) = \delta(k - l) + 2\pi i \delta(k^2 - l^2) \theta[(l - k, \gamma)] h_\gamma(k, l), \quad (3.3)$$

где

$$h_\gamma(k, l) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{-i(l, x)} v(x) u_\gamma(x, k) dx, \quad (3.4)$$

мы можем переписать их в виде

$$\int Q_\gamma^{(+)}(k, l) e^{i(l, x)} dl,$$

т. е. как линейную комбинацию свободных членов в уравнении (1.3) для  $u^{(+)}(x, k)$ . Интегральный оператор в возникшем уравнении также совпадает с оператором из уравнения (1.3). На основании теоремы единственности для этого уравнения мы можем утверждать, что выполняется соотношение (3.1), где ядро  $Q_\gamma^{(+)}(k, l)$  дается формулой (3.3). Аналогично мы можем получить, что

$$Q_\gamma^{(-)}(k, l) = \delta(k - l) - 2\pi i \delta(k^2 - l^2) \theta[(k - l, \gamma)] h_\gamma(k, l). \quad (3.5)$$

Формулы (3.3) и (3.5) и представляют собой искомые соотношения, определяющие операторы  $\hat{Q}_\gamma^{(\pm)}$ , которые действуют в  $\mathcal{H}_0$  по формуле

$$\hat{Q}_\gamma^{(\pm)} \varphi(k) = \varphi(k) \pm 2\pi i \int h_\gamma(k, l) \theta[\pm(l - k, \gamma)] \delta(k^2 - l^2) \varphi(l) dl.$$

Привычные уже нам соображения показывают, что операторы  $\hat{Q}_\gamma^{(\pm)}$  определяют факторизацию оператора рассеяния. Сравнивая (1.9), (1.11) и (3.1), получаем, что

$$\hat{S} = \hat{Q}_\gamma^{(+)-1} \hat{Q}_\gamma^{(-)}. \quad (3.6)$$

Заметим теперь, что ядро  $h_\gamma(k, l)$ , участвующее в определении (3.3) и (3.4), одно и то же. Это позволяет использовать соотношение (3.6) для однозначного определения  $h_\gamma(k, l)$  по амплитуде рассеяния. Действительно, перепишем его в виде

$$\hat{Q}_\gamma^{(+)} \hat{S} = \hat{Q}_\gamma^{(-)}$$

и подставим сюда выражения (1.11), (3.3) и (3.5) для  $\hat{S}$  и  $\hat{Q}_\gamma^{(\pm)}$ . Мы получим соотношение

$$\begin{aligned} h_\gamma(k, l) &= f(k, l) + 2\pi i \int h_\gamma(k, m) \theta[(m - k, \gamma)] \times \\ &\quad \times \delta(m^2 - k^2) f(m, l) dm, \end{aligned} \quad (3.7)$$

которое можно рассматривать как линейное интегральное уравнение для определения  $h_\gamma(k, l)$  по заданной  $f(k, l)$ . Это уравнение затрагивает только угловые переменные участвующих в нем ядер. Длины всех векторов, равные между собой, входят в него лишь как параметры. В следующем параграфе мы убедимся, что условие  $C$  эквивалентно условию однозначной разрешимости этого уравнения.

Отметим теперь важное свойство функций  $h_\gamma(k, l)$ , которое следует из свойств аналитичности решений  $u_\gamma(x, k)$ . Рассмотрим интегральное представление (3.4) для  $h_\gamma(k, l)$  и положим в нем  $(k, \gamma) = (l, \gamma) = s$ . Вследствие оценки типа (2.2) подынтегральное выражение абсолютно интегрируемо при всех несингулярных  $s$  из верхней полуплоскости. Отсюда следует, что функция  $h_\gamma(k, l)$  при  $(k, \gamma) = (l, \gamma) = s$  и фиксированных  $k_\perp, l_\perp$  и  $\gamma$  имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной  $s$  и полюса конечного порядка в сингулярных значениях  $s$ .

Подчеркнем, что локальность потенциала  $v(x)$  самым существенным образом используется при выводе этого свойства аналитичности. Действительно, рост решения  $u_\gamma(x, k)$  по  $x$  при  $\operatorname{Im} s > 0$  компенсируется убыванием  $e^{-i(l,x)}$  только благодаря тому, что эти функции перемножаются под знаком интеграла в (3.4). Для нелокального  $V$  аргументы  $x$  и  $y$ , от которых эти функции будут зависеть в формуле типа (3.4), будут разными и указанная компенсация не осуществится. В дальнейшем при исследовании обратной задачи мы убедимся, что полученное нами необходимое условие аналитичности является в существенном и достаточном условием на амплитуду рассеяния, соответствующую локальному потенциалу. А сейчас стоит сказать, что это условие является обобщением аналитичности амплитуды рассеяния вперед, отмеченной в § 2. Действительно, из уравнения (3.7) очевидно, что при  $k \parallel \gamma$  амплитуды  $f(k, l)$  и  $h_\gamma(k, l)$  совпадают. При таком условии также  $k = l$ , если  $(k, \gamma) = (l, \gamma)$ . Таким образом,

$$h_\gamma(k, l)|_{k \parallel \gamma; (k, \gamma) = (l, \gamma)} = f(k, k)$$

и показанная нами аналитичность функции в левой части влечет аналитичность правой части, которая и отмечалась выше.

Приведем еще одно полезное соотношение, связывающее ядра  $h_\gamma(k, l)$  при разных  $\gamma$ . Используем для этого факторизацию (3.6) и условие унитарности оператора  $\hat{S}$ . Переписывая соотношение

$$\hat{S}^* = \hat{S}^{-1}$$

через формулу (3.6), используя разные  $\gamma$  в левой и правой части, мы получим

$$\hat{Q}_\gamma^{(-)} \hat{Q}_\gamma^{(-)*} = \hat{Q}_\gamma^{(+)} \hat{Q}_\gamma^{(+)*}. \quad (3.8)$$

Положим здесь  $\gamma' = -\gamma$  и перепишем получившееся соотношение в виде

$$\hat{Q}_\gamma^{(-)} \hat{Q}_{-\gamma}^{(-)*} = \hat{Q}_\gamma^{(+)} \hat{Q}_{-\gamma}^{(+)*}.$$

Операторы  $\hat{Q}_\gamma^{(\pm)}$  являются вольтерровыми, что явно видно из присутствия функции Хевисайда в их определении. При этом направление вольтерровости операторов в правой и левой частях последнего соотношения противоположно. Оно совместно, таким образом, только если каждая из этих частей в отдельности является единичным оператором. Мы пришли к важному соотношению

$$\hat{Q}_\gamma^{(\pm)*} = \hat{Q}_{-\gamma}^{(\pm)-1}. \quad (3.9)$$

Перепишем также общее соотношение (3.8) более подробно через ядра участвующих в нем операторов

$$\begin{aligned} h_\gamma(k, l) - h_{\gamma'}(-l, -k) &= \\ = 2\pi i \int h_\gamma(k, m) h_{\gamma'}(-l, -m) &(\theta[(m-k, \gamma)] - \\ - \theta[(l-m, \gamma')]) \delta(k^2 - m^2) dm. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь мы использовали еще соотношение

$$\overline{h_\gamma(-k, -l)} = h_\gamma(k, l),$$

которое следует из свойства (2.8) и интегрального представления (3.4). Формула (3.10) представляет собой обобщение уравнения (3.7).

Благодаря соотношению (3.9) нам не придется решать интегральных уравнений для определения операторов, обратных к нормирующим множителям  $\hat{Q}_\gamma^{(\pm)}$ , которые участвуют в построении весового оператора  $W_\gamma$ .

#### § 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ $\gamma$

Вернемся к оператору преобразования  $U_\gamma$ . Соответствующие ему нормирующие множители мы уже почти подсчитали — они строятся при помощи операторов  $\hat{Q}_\gamma^{(\pm)}$  и определителя Фредгольма  $\Delta_\gamma(k)$ . Явные формулы можно записать в виде

$$\hat{N}_\gamma^{(\pm)} \varphi(k) = \int \overline{\hat{Q}_\gamma^{(\pm)}(l, k)} \overline{\Delta_\gamma(l)} \varphi(l) dl, \quad (4.1)$$

и операторы  $N_\gamma^{(\pm)}$  действуют в  $\mathfrak{H}$  по формуле

$$N_\gamma^{(\pm)} = T_0^* \hat{N}_\gamma^{(\pm)} T_0; \quad U_\gamma = U^{(\pm)} N_\gamma^{(\pm)}. \quad (4.2)$$

В этом параграфе мы покажем, что определитель  $\Delta_\gamma(k)$  мож-

но явно выразить через ядро  $h_\gamma(k, l)$ , а тем самым и через амплитуду рассеяния.

Кроме нормирующих множителей, для формулировки уравнения типа Гельфанд — Левитана нам надо получить выражение для обобщенного элемента  $\chi_\gamma$ , являющегося прообразом собственной функции дискретного спектра  $u(x)$  при отображении  $U_\gamma$ . Это нетрудно сделать на основании уже отмеченного совпадения функций  $u_\gamma(x, k)$  и  $u^{(+)}(x, k)$  при  $k \parallel \gamma$  и формулы (2.10).

Будем исходить из соотношения

$$f_\gamma(x, k) = e^{i(k, x)} + \int_{(y-x, \gamma) > 0} A_\gamma(x, y) e^{i(k, y)} dy, \quad (4.3)$$

которое представляет собой конкретный вариант записи более абстрактного определения (2.1) и (2.3). Отметим его аналогию с формулами (I.1.8), (I.1.9). Полагая здесь  $k = s\gamma$  и выражая  $f_\gamma(x, k)$  через  $u^{(+)}(x, k)$  и  $\Delta_\gamma(k)$ , мы получаем

$$u^{(+)}(x, s\gamma) \Delta^{(+)}(s) = e^{is(x, \gamma)} + \int_{(y-x, \gamma) > 0} A_\gamma(x, y) e^{is(y, \gamma)} dy.$$

Мы используем здесь отмеченное выше совпадение  $\Delta_\gamma(s\gamma)$  и  $\Delta^{(+)}(s)$ . При нашем предположении о простоте дискретного собственного значения, определитель  $\Delta^{(+)}(s)$  имеет простой нуль при  $s = ix$ , так что, полагая в последней формуле  $s = ix$  и используя (1.12), мы получаем

$$u(x) = m(\gamma) \left[ e^{-\kappa(x, \gamma)} + \int_{(y-x, \gamma) > 0} A_\gamma(x, y) e^{-\kappa(y, \gamma)} dy \right],$$

где

$$m(\gamma) = \left[ \frac{d}{ds} \Delta^{(+)}(s) \Big|_{s=ix} c(\gamma) \right]^{-1}$$

и  $c(\gamma)$  введено в (1.13). Эта формула и представляет нужный нам результат; мы видим, что

$$u = U_\gamma \chi_\gamma; \quad \chi_\gamma(x) = m(\gamma) e^{-\kappa(x, \gamma)}. \quad (4.4)$$

Итак, для того, чтобы выразить все величины, входящие в уравнение Гельфанд — Левитана через амплитуду рассеяния, нам остается получить выражение для  $\Delta_\gamma(k)$  и  $c(\gamma)$ . Для этого оказываются удобными дифференциальные уравнения для функций  $u_\gamma(x, k)$ ,  $h_\gamma(k, l)$ ,  $\Delta_\gamma(k)$  и  $c(\gamma)$  по параметру  $\gamma$ . Эта переменная пробегает единичную сферу, и поэтому для дифференцирования удобно использовать операторы Ли, соответствующие действию группы вращений. Нам не надо выписывать явные формулы для этих операторов и достаточно одного соотношения

$$M_\xi f[(\gamma, a)] = f'[(\gamma, a)](a, \gamma \times \xi).$$

Здесь  $(\gamma, \alpha)$  — скалярное произведение  $\gamma$  и произвольного вектора  $\alpha$ ,  $f(t)$  — произвольная функция,  $M_\xi$  — оператор Ли, соответствующий дифференцированию в направлении  $\xi$ ,  $\gamma \times \xi$  — векторное произведение векторов  $\gamma$  и  $\xi$ .

Дифференцируя формулу (3.2), получаем

$$M_\xi G_\gamma(x, k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \omega_{\gamma, \xi}(k, l) e^{i(l, x)} dl, \quad (4.5)$$

где

$$\omega_{\gamma, \xi}(k, l) = 2\pi i \delta(l^2 - k^2) \delta[(l - k, \gamma)] (l - k, \gamma \times \xi).$$

Эта формула позволит нам получить дифференциальные уравнения для всех величин, упомянутых в начале параграфа. Начнем с функций  $u_\gamma(x, k)$ . Дифференцируя уравнение (2.4), получаем соотношение

$$M_\xi u_\gamma(x, k) = \int M_\xi G_\gamma(x - y, k) v(y) u_\gamma(y, k) dy + \\ + \int G_\gamma(x - y, k) v(y) M_\xi u_\gamma(y, k) dy.$$

Это уравнение отличается от (2.4) только свободным членом, который можно записать в виде линейной комбинации плоских волн вида

$$\int R_{\gamma, \xi}(k, l) e^{i(l, x)} dl, \quad (4.6)$$

где

$$R_{\gamma, \xi}(k, l) = \omega_{\gamma, \xi}(k, l) h_\gamma(k, l). \quad (4.7)$$

В выражении для  $\omega_{\gamma, \xi}(k, l)$  присутствуют  $\delta$ -функции, так что в интеграле (4.6)  $l^2 = k^2$  и  $(l, \gamma) = (k, \gamma)$ . Напомним, что функция Грина  $G_\gamma(x, k)$  зависит от  $k$  только через  $k^2$  и  $(k, \gamma)$ . Это вместе с уравнением (2.4) позволяет утверждать, что

$$M_\xi u_\gamma(x, k) = \int R_{\gamma, \xi}(k, l) u_\gamma(x, l) dl.$$

Используя теперь определение (3.4) ядра  $h_\gamma(k, l)$ , имеем

$$M_\xi h_\gamma(k, l) = \int h_\gamma(k, m) \omega_{\gamma, \xi}(k, m) h_\gamma(m, l) dm \quad (4.8)$$

интегро-дифференциальное уравнение для ядра  $h_\gamma(k, l)$ .

Перейдем теперь к дифференциальному уравнению для определителя Фредгольма  $\Delta_\gamma(k)$ . Определение этой величины дается формулой (2.9). Дифференцируя ее по  $\gamma$  и используя (4.5), получаем

$$M_\xi 1 \Pi \Delta_\gamma(k) = - \int [h_\gamma(l, l) - q] \omega_{\gamma, \xi}(k, l) dl,$$

где константа

$$q = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int v(x) dx$$

представляет собой асимптотику ядра  $h_\gamma(l, l)$  при больших  $|l|$ . Полученное дифференциальное уравнение можно явно решить. Рассмотрим функцию

$$g_\gamma(k) = -2\pi i \int [h_\gamma(l, l) - q] \theta[(l - k, \gamma)] \delta(k^2 - l^2) dl.$$

Дифференцируя ее по  $\gamma$ , получаем

$$\begin{aligned} M_\xi g_\gamma(k) &= -2\pi i \int h_\gamma(l, m) h_\gamma(m, l) \omega_{\gamma, \xi}(l, m) \theta[(l - k, \gamma)] \times \\ &\quad \times \delta(k^2 - l^2) dl - \int [h_\gamma(l, l) - q] \omega_{\gamma, \xi}(k, l) dl. \end{aligned}$$

Первое слагаемое здесь исчезает. Действительно, функция  $\omega_{\gamma, \xi}(l, m)$  антисимметрична по  $l$  и  $m$ , а остальная часть подынтегрального выражения в этом слагаемом — симметрична, так как мы можем считать, что  $(m, \gamma) = (l, \gamma)$ . Таким образом, дифференциальные уравнения для  $1\pi \Delta_\gamma(k)$  и  $g_\gamma(k)$  совпадают, так что эти функции совпадают с точностью до слагаемого, не зависящего от  $\gamma$ . Мы знаем, однако, что при  $k \parallel \gamma$  определитель  $\Delta_\gamma(k)$  совпадает с определителем Фредгольма  $\Delta^{(+)}(|k|)$  интегрального уравнения теории рассеяния (1.3). В то же время  $g_\gamma(k) = 0$  при  $\gamma \parallel k$ . Мы приходим к соотношению

$$1\pi \Delta_\gamma(k) = 1\pi \Delta^{(+)}(|k|) - 2\pi i \int h_\gamma(l, l) \theta[(l - k, \gamma)] \delta(k^2 - l^2) dl.$$

Аналогичным образом мы можем исследовать определитель Фредгольма  $\tilde{\Delta}_\gamma(k)$  интегрального уравнения (3.7), в котором участвует интегральный оператор  $P_\gamma(k)$  с ядром

$$P_\gamma(k; l, m) = 2\pi i \theta[(l - k, \gamma)] \delta(l^2 - m^2) f(l, m).$$

В этом случае можно показать, что

$$\ln \tilde{\Delta}_\gamma(k) = \text{Tr } 1\pi(I - P(k)) = g_\gamma(k),$$

откуда

$$\Delta_\gamma(k) = \Delta^{(+)}(|k|) \tilde{\Delta}_\gamma(k). \quad (4.9)$$

Мы знаем на основании теоремы Като, что  $\Delta^{(+)}(|k|) \neq 0$  при вещественных  $|k|$ . Тогда соотношение (4.9) и доказывает упомянутую выше эквивалентность проблемы однозначной разрешимости для уравнений (3.7) и (2.4).

Выразим теперь через  $h_\gamma(k, l)$  определитель  $\Delta^{(+)}(|k|)$ . Напомним для этого, что  $\Delta^{(+)}(|k|)$  имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной  $|k| = s$ , имеем там единственный нуль при  $s = ix$  и при  $\text{Im } s = 0$  имеет место соотношение (2.11). Пусть  $Q_\gamma^{(+)}(|k|)$  и  $Q_\gamma^{(-)}(|k|)$  —ope-

раторы в  $L_2(S^2)$ , определенные по  $\hat{Q}_Y^{(+)}$  и  $\hat{Q}_Y^{(-)}$  так же, как  $S(|k|)$  был определен по  $\hat{S}$ .

Факторизация (3.6) приводит к соотношению

$$S(|k|) = Q_Y^{(+)-1}(|k|) Q_Y^{(-)}(|k|),$$

которое приводит к формуле

$$\ln \det S(|k|) = \operatorname{Tr} \ln S(|k|) = \operatorname{Tr} [1_{\Pi} Q_Y^{(-)}(|k|) - 1_{\Pi} Q_Y^{(+)}(|k|)],$$

из которой следует, что

$$\ln \det S(|k|) = -\pi \int h_Y(l, l) \delta(l^2 - k^2) dl = 2i \arg \Delta^{(+)}(|k|), \quad (4.10)$$

так как вследствие вольтерровости операторов  $\hat{Q}_Y^{(+)}$  и  $\hat{Q}_Y^{(-)}$  все степени операторов  $Q_Y^{(\pm)} - I$  в разложении логарифмов, кроме первой, дают нулевой вклад в след. Зная  $\arg \Delta^{(+)}(|k|)$ , мы можем восстановить всю эту функцию по формуле

$$\Delta^{(+)}(s) = \exp \left\{ \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(t)}{t-s} \right\} \frac{s-i\omega}{s+i\omega}, \quad \operatorname{Im} s > 0, \quad (4.11)$$

где

$$\eta(t) = \arg \Delta^{(+)}(t) + 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{t}. \quad (4.12)$$

Объединяя (4.10), (4.11) и (4.12), получаем явное выражение для  $\Delta^{(+)}(|k|)$  через  $h_Y(k, l)$ .

Покажем теперь, как выразить через амплитуду рассеяния  $f(k, l)$  функцию  $c(\gamma)$ , участвующую в построении вектора  $\chi_Y$  (см. (4.4)). Рассмотрим амплитуду рассеяния  $f(k, l)$  как функцию переменной  $\gamma = \frac{l}{|l|}$  и применим к ней оператор  $M_{\xi}$  по этой переменной. Используя интегральное представление (1.7) и свойства аналитичности решения  $u^{(+)}(x, k)$ , получаем, что

$$M_{\xi} f(k, |k| \gamma) |_{k \perp Y} = g(|k|, \gamma)$$

так же, как и  $f(k, k)$ , имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость по переменной  $s = |k|$  с полюсом при  $s = i\omega$ . Соответствующий вычет, как нетрудно убедиться при помощи (1.12), имеет вид

$$\operatorname{Res} g(s, \gamma) |_{s=i\omega} = \frac{2i\omega}{(2\pi)^3} c(\gamma) M_{\xi} c(-\gamma).$$

Сравнивая это соотношение с (1.15), получаем

$$M_{\xi} 1_{\Pi} c(\gamma) = \frac{g(s, -\gamma)}{f(s, -\gamma)} \Big|_{s=i\omega}. \quad (4.13)$$

Решая это уравнение, считая известной правую часть, мы

можем получить соотношение

$$c(\gamma) = b(\gamma) c(-\gamma),$$

где  $b(\gamma)$  выражается через интегралы от этой правой части. Умножая здесь обе части на  $c(\gamma)$ , получаем окончательно

$$c^2(\gamma) = \operatorname{Res} f(s, \gamma)|_{s=i\infty} \frac{(2\pi)^3}{2i\pi} b(\gamma),$$

так что квадрат функции  $c(\gamma)$  явно выражается через амплитуду рассеяния. В уравнении Гельфанд—Левитана входит именно этот квадрат. Мы можем теперь переходить к непосредственной формулировке этого уравнения.

### § 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Предполагая, что потенциал  $v(x)$  удовлетворяет условиям

- $v(x)$  — гладкая, быстро убывающая функция;
  - уравнение (2.7) не имеет нетривиальных ограниченных решений при всех вещественных  $k$ ;
- мы показали, что амплитуда рассеяния  $f(k, l)$  обладает следующими свойствами:

1. Однозначно разрешимо интегральное уравнение (3.7) при любом  $\gamma \in S^2$ , определяя семейство ядер  $h_\gamma(k, l)$ .

2. Функция  $\Delta_\gamma(k)$ , построенная по  $h_\gamma(k, l)$  по формулам (4.9), (4.10) и (4.11), имеет ограниченное аналитическое продолжение по переменной  $s = (k, \gamma)$  в верхнюю полуплоскость.

3. Функция  $h_\gamma(k, l) \Delta_\gamma(k)$  при  $(k, \gamma) = (l, \gamma)$  также имеет такое продолжение по  $s = (k, \gamma)$  при произвольных фиксированных  $l_\perp$  и  $k_\perp$ .

Последнее свойство представляет собой богатый набор необходимых условий, явно убивающих несколько параметров в амплитуде рассеяния. Оказывается, что оно в существенном исчерпывает необходимые условия на амплитуду рассеяния, о которых говорилось во введении. Именно, мы покажем, что если оно выполнено, то существует локальный потенциал  $v(x)$ , для которого  $f(k, l)$  является амплитудой рассеяния. Это будет сделано при помощи формализма обратной задачи.

Начнем с того, что выпишем интегральное уравнение для определения оператора преобразования  $U_\gamma$ . Идея вывода этого уравнения уже изложена во введении. Соответствующий весовой оператор  $W_\gamma$  имеет ядро

$$W_\gamma(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{-i(k, x)} \tilde{W}_\gamma(k, l) e^{i(l, y)} dk dl + m^2(\gamma) e^{-i(x+y, \gamma)}, \quad (5.1)$$

где

$$\tilde{W}_\gamma(k, l) = \frac{1}{\Delta_\gamma(-k)} \int Q_{-\gamma}(k, m) \overline{Q_{-\gamma}(l, m)} dm \frac{1}{\Delta_\gamma(l)}.$$

При написании этих формул мы используем абстрактное определение весового оператора из введения, конкретный вид нормирующих множителей  $N_\gamma^{(\pm)}$  из (4.1) и соотношение (3.9).

Уравнение Гельфанд — Левитана имеет вид

$$A_\gamma(x, y) + \Omega_\gamma(x, y) + \int_{(z-x, \gamma) > 0} A_\gamma(x, z) \Omega_\gamma(z, y) dz = 0, \quad (5.2)$$

$$(x, \gamma) < (y, \gamma),$$

где

$$\Omega_\gamma(x, y) = W_\gamma(x, y) - \delta(x - y).$$

Ядро  $\Omega_\gamma(x, y)$  полностью восстанавливается по амплитуде рассеяния  $f(k, l)$ , как это было показано в предыдущем параграфе.

Уравнение (5.2) является уравнением для  $A_\gamma(x, y)$  как функции переменной  $y$ , а  $x$  и  $\gamma$  играют роль параметров. Ядро в этом уравнении, очевидно, положительно, что обеспечивает его однозначную разрешимость. Таким образом, мы получаем возможность восстановить оператор преобразования  $U_\gamma$  по амплитуде рассеяния.

Построим по найденным операторам преобразования семейство операторов

$$H_\gamma = U_\gamma H_0 U_\gamma^{-1}. \quad (5.3)$$

Мы собираемся показать, что если выполнены сформулированные в начале этого параграфа свойства, то оператор  $H_\gamma$  не зависит от  $\gamma$ , а соответствующий оператор  $V_\gamma = H_\gamma - H_0$  является оператором умножения на вещественную функцию  $v(x)$ , причем исходная функция  $f(k, l)$  является амплитудой рассеяния для этого потенциала.

Формальная схема доказательства значительно упрощается, если мы будем считать, что дискретного спектра нет. Мы ограничимся здесь изложением только этого случая, так что будем считать, что второе слагаемое в формуле (5.1) отсутствует.

Начало исследования проводится по схеме, совершенно аналогичной одномерному случаю в § 5 гл. I. Можно показать, что вольтерров оператор

$$U_\gamma = I + A_\gamma,$$

построенный по решению  $A_\gamma(x, y)$  уравнения (5.2), удовлетворяет соотношению

$$U_\gamma W_\gamma U_\gamma^* = I, \quad (5.4)$$

откуда следует, что оператор  $H_\gamma$  — самосопряжен.

Покажем теперь, что оператор  $V_\gamma = H_\gamma - H_0$  локален в  $\gamma$ -направлении, т. е. что его ядро — обобщенная функция — выражается в виде

$$V_\gamma(x, y) = \delta((x, \gamma) - (y, \gamma)) \tilde{V}(x, y).$$

Для этого заметим, что в тождестве

$$H_0 A_\gamma - A_\gamma H_0 = -V_\gamma(I + A_\gamma), \quad (5.5)$$

которое следует из (5.3), имеются члены с сингулярностями разного порядка на плоскости  $(x, \gamma) = (y, \gamma)$ . Само ядро  $A_\gamma(x, y)$  имеет сингулярность типа скачка

$$A_\gamma(x, y) = {}^\theta [(y - x, \gamma)] A_\gamma(x, y).$$

При коммутации его с  $H_0$  возникает более сингулярное слагаемое вида

$$2\delta((x, \gamma) - (y, \gamma)) \left( \frac{\partial}{\partial(x, \gamma)} + \frac{\partial}{\partial(y, \gamma)} \right) A_\gamma(x, y),$$

которое может скомпенсироваться в правой части тождества (5.5) лишь потенциалом  $V_\gamma(x, y)$ , так что мы получаем явное выражение для потенциала  $V_\gamma(x, y)$  через ядро  $A_\gamma(x, y)$

$$V_\gamma(x, y) = -2\delta((x, \gamma) - (y, \gamma)) \frac{\partial}{\partial(x, \gamma)} (A_\gamma(x, y)|_{(x, y)=(y, \gamma)}).$$

До этого места мы нигде не использовали условий аналитичности ядра  $h_\gamma(k, l)$ . Это свойство даст нам возможность утверждать, что оператор  $H_\gamma$  не зависит от  $\gamma$ , так что потенциал  $V_\gamma$  локален в каждом направлении и является, таким образом, оператором умножения на функцию. Естественно для этого воспользоваться дифференциальными уравнениями по параметру  $\gamma$ .

В первую очередь заметим, что дифференциальное уравнение (4.8) можно вывести, исходя из определения  $h_\gamma(k, l)$  посредством интегрального уравнения (3.7). Действительно, дифференцируя (3.7) по  $\gamma$ , получаем

$$M_\xi h_\gamma(k, l) = 2\pi i \int h_\gamma(k, m) \delta[(m - k, \gamma)] \delta(k^2 - m^2) (m - k, \gamma \times \xi) \times \\ \times f(m, l) dm + 2\pi i \int M_\xi h_\gamma(k, m) 0[(m - k, \gamma)] \delta(k^2 - m^2) f(m, l) dm.$$

Свободный член здесь можно записать в виде

$$\int R_{\gamma, \xi}(k, m) f(m, l) dm$$

(см. определение (4.7) ядра оператора  $R_{\gamma, \xi}$ ). С другой стороны, умножая уравнение (3.7) на  $R_{\gamma, \xi}(q, k)$  и интегрируя по  $k$ , получаем для

$$r_\gamma(q, l) = \int R_{\gamma, \xi}(q, k) h_\gamma(k, l) dk$$

уравнение с интегральным членом вида

$$2\pi i \int R_{\gamma, \xi}(q, k) h_\gamma(k, m) \theta[(m - k, \gamma)] \delta(m^2 - k^2) f(m, l) dk dm.$$

Вследствие присутствия  $\delta[(q - k, \gamma)]$  в ядре  $R_{\gamma, \xi}(q, k)$  мы можем заменить здесь  $\theta[(m - k, \gamma)]$  на  $\theta[(m - q, \gamma)]$ . После этого уравнения для  $M_\xi h_\gamma(q, l)$  и  $r_\gamma(q, \gamma)$  совпадут, так что мы можем утверждать, что (4.8) выполнено для ядра  $h_\gamma(k, l)$ , восстановленного по  $f(k, l)$ .

Напомним теперь, что сама процедура построения  $\Delta_\gamma(k)$  по  $h_\gamma(k, l)$  основана на уравнении (4.8) для этой функции. Все это позволяет утверждать, что ядро  $L_\gamma(k, l)$  оператора  $\hat{L}_\gamma = \hat{N}_\gamma^{(+)-1}$  (см. (4.1), (4.2)) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$M_\xi L_\gamma(k, l) = \int \Pi_{\gamma, \xi}(k, m) L_\gamma(m, l) dm,$$

где

$$\Pi_{\gamma, \xi}(k, l) = R_{-\gamma, \xi}(k, l) - \delta(k - l) \int [h_{-\gamma}(m, m) - q] \omega_{-\gamma, \xi}(m, l) dm.$$

Этой формулой мы вводим оператор  $\hat{\Pi}_{\gamma, \xi}$  в пространстве  $\mathfrak{H}_0$ . Анализичность  $h_\gamma(k, l)$  при  $(k, \gamma) = (l, \gamma)$  приводит к тому, что оператор  $\Pi_{\gamma, \xi} = T_0^* \Pi_{\gamma, \xi} T_0$  — треугольный

$$\Pi_{\gamma, \xi}(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{-i(k, x)} \Pi_{\gamma, \xi}(k, l) e^{i(l, y)} dk dl = 0, \quad (x, \gamma) > (y, \gamma).$$

Заметим также, что выполняется соотношение

$$\Pi_{\gamma, \xi}^* = -\Pi_{-\gamma, \xi},$$

которое является простым следствием формулы (3.9).

Вспоминая определение оператора  $W_\gamma$ , получаем, что

$$M_\xi W_\gamma = \Pi_{\gamma, \xi} W_\gamma + W_\gamma \Pi_{-\gamma, \xi}. \quad (5.6)$$

Докажем теперь, основываясь на уравнении (5.4), что

$$M_\xi U_\gamma = -U_\gamma \Pi_{\gamma, \xi}. \quad (5.7)$$

Для этого заметим, что оператор  $M_\xi U_\gamma$  — треугольный и потому однозначно определяется уравнением

$$(M_\xi U_\gamma) W_\gamma + U_\gamma (M_\xi W_\gamma) = -U_\gamma^{*-1} (M_\xi U_\gamma^*) U_\gamma^{*-1},$$

которое получается при дифференцировании уравнения (5.4). Действительно, если мы явно распишем это уравнение через ядра участвующих в нем операторов, то при  $(x, \gamma) < (y, \gamma)$  правая часть исчезнет, и мы получим линейное интегральное уравнение для ядра оператора  $M_\xi U_\gamma$ , которое только свободным членом отличается от уравнения Гельфанд — Левитана. Используя (5.4) и (5.6), нетрудно получить, что  $-U_\gamma \Pi_{\gamma, \xi}$  удовлетворяет этому уравнению. Из вольтерровости  $U_\gamma$  и треугольности  $\Pi_{\gamma, \xi}$  следует, что  $U_\gamma \Pi_{\gamma, \xi}$  также тре-

угольный. Вследствие отмеченной однозначности, можно считать, что (5.7) доказано.

Обратимся к оператору  $H_\gamma$ , введенному в (5.3). Имеем

$$\begin{aligned} M_\xi H_\gamma &= (M_\xi U_\gamma) H_0 U_\gamma^{-1} - U_\gamma H_0 U_\gamma^{-1} (M_\xi U_\gamma) U_\gamma^{-1} = \\ &= U_\gamma H_0 \Pi_{\gamma, \xi} U_\gamma^{-1} - U_\gamma \Pi_{\gamma, \xi} H_0 U_\gamma^{-1} = 0, \end{aligned}$$

так как оператор  $\Pi_{\gamma, \xi}$  коммутирует с  $H_0$ . Мы получили обещанное свойство постоянства  $H_\gamma$  как функции  $\gamma$ , а вместе с ним и локальность потенциала  $V$ .

При переносе этой схемы на случай, когда дискретный спектр присутствует, следует соблюдать осторожность при дифференцировании вклада в уравнение (5.2) от несобственного вектора  $\chi_\gamma$ . Удобнее предварительно сделать поворот всех переменных, так чтобы при изменении  $\gamma$  не менялось направление вольтерровости искомых операторов. После этого дифференцирование по  $\gamma$  не вызовет осложнений. При доказательстве соотношения типа (5.6) надо будет использовать дифференциальное уравнение вида (4.13).

Нам осталось показать, что исходное ядро  $f(k, l)$  является амплитудой рассеяния для построенного оператора Шредингера  $H$ . Для этого достаточно доказать, что построенные по оператору преобразования  $U_\gamma$  и определителю  $\Delta_\gamma(k)$  при помощи формул (4.3) и (2.10) решения  $u_\gamma(x, k)$  при больших  $|x|$  имеют асимптотику

$$u_\gamma(|x| \gamma, k) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = e^{i|x|(k, \gamma)} + o(1). \quad (5.8)$$

Действительно, после того, как такая формула доказана, нетрудно убедиться, что набор решений

$$u^{(+)}(x, k) = \int \overline{Q_{-\gamma}^{(+)}(l, k)} u_\gamma(x, l) dl,$$

который не зависит от  $\gamma$  вследствие соотношения (5.7), имеет асимптотику (1.2), в которой участвует исходное ядро  $f(k, l)$ . Мы не приводим рассуждений, доказывающих (5.8), так как они требуют значительно более детального исследования ядра  $A_\gamma(x, y)$ , чем мы пока ограничивались.

Такое исследование должно быть проведено для того, чтобы сделать строгими формальные рассуждения этой главы. Имеющиеся в нашем распоряжении его варианты слишком громоздки для того, чтобы их можно было поместить в настоящем обзоре. Мы надеемся, что приведенная здесь формальная схема решения многомерной обратной задачи рассеяния может стать стимулом для некоторых читателей, которые разработают более адекватные аналитические модели для её оправдания.

На этом мы заканчиваем описание состояния проблемы «Обратная задача квантовой теории рассеяния», в котором она находилась к началу 1973 года.

## БИБЛИОГРАФИЯ

1. Агранович З. С., Марченко В. А., Обратная задача теории рас-сения. Харьков, Харьковск. ун-т, 1960, 268 стр. (РЖМат, 1963, 3Б399К)
2. Арнольд В. И., Лекции по классической механике. М., Изд. МГУ, 1968
3. Березанский Ю. М., О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера. Тр. Моск. мат. о-ва, 1958, 7, 3—62 (РЖМат, 1959, 9105)
4. Буслаев В. С., Формулы следов для оператора Шредингера в трехмерном пространстве. Докл. АН СССР, 1962, 143, № 5, 1067—1070 (РЖМат, 1962, 8Б384)
5. —, Фаддеев Л. Д., О формулах следов для дифференциального сингулярного оператора Штурма—Лиувилля. Докл. АН СССР, 1960, 132, № 1, 13—16 (РЖМат, 1962, 8Б169)
6. —, Фомин В. Л., К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси. Вестн. Ленингр. ун-та, 1962, № 1, 56—64 (РЖМат, 1962, 10Б156)
7. Гасымов М. Г., Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка  $2n$ . Тр. Моск. мат. о-ва, 1968, 19, 41—112 (РЖМат, 1969, 5Б538)
8. Гельфанд И. М., Левитан Б. М., Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Изв. АН СССР. Сер-мат., 1951, 15, № 2, 309—360
9. —, —, Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. Докл. АН СССР, 1953, 88, № 4, 593—596 (РЖМат, 1953, 239)
10. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д., Уравнение Кортеугена—де Фриса—вполне интегрируемая гамильтонова система. Функц. анализ и его прил., 1971, 5, № 4, 18—27 (РЖМат, 1972, 4Б651)
11. Шабат А. Б., Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах. Ж. эксперим. и теор. физ., 1971, 61, № 1, 118—134
12. Крейн М. Г., Об определении потенциала частицы по ее  $S$ -функции. Докл. АН СССР, 1955, 105, № 3, 433—436 (РЖМат, 1956, 6Б68)
13. —, Мелик-Адамян Ф. Э., К теории  $S$ -матриц канонических дифференциальных уравнений с суммируемым потенциалом. Докл. АН АрмССР, 1968, 46, № 4, 150—155 (РЖМат, 1969, 3Б208)
14. Кулиш П. П., Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера на оси. Мат. заметки, 1968, 4, № 6, 677—684 (РЖМат, 1969, 4Б229)
15. Левин Б. Я., Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка. Докл. АН СССР, 1956, 106, № 2, 187—190 (РЖМат, 1957, 423)
16. Марченко В. А., Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн. Докл. АН СССР, 1955, 104, № 5, 695—698 (РЖМат, 1956, 6Б69)
17. —, Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля. Киев, «Наук. думка», 1972 (РЖМат, 1972, 10Б519К)
18. Повзнер А. Я., О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора  $-\Delta + cu$ . Мат. сб., 1953, 32, № 1, 109—156 (РЖМат, 1953, 263)
19. —, О разложении по функциям, являющимся решением задачи рас-сения. Докл. АН СССР, 1955, 104, № 3, 360—363 (РЖМат, 1956, 5Б80)
20. Тахтаджян Л. А., Метод обратной задачи для решения одномерного нелинейного уравнения Шредингера. Дипломная работа. Мат. мех. фак. ЛГУ, 1972

21. Фаддеев Л. Д., Единственность решения обратной задачи рассеяния. Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 7, 126—130 (РЖМат, 1957, 4839)  
 22. —, О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора Шредингера. Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 7, 164—172 (РЖМат, 1960, 8937)  
 23. —, О связи  $S$ -матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера. Докл. АН СССР, 1958, 121, № 1, 63—66 (РЖМат, 1959, 2621)  
 24. —, О дисперсионных соотношениях в нерелятивистской теории рассеяния. Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, 35, № 2, 433—439 (РЖМат, 1960, 12951)  
 25. —, Обратная задача квантовой теории рассеяния. Успехи мат. наук, 1959, 14, № 4, 57—119 (РЖМат, 1960, 9175)  
 26. —, Свойства  $S$ -матрицы одномерного уравнения Шредингера. Тр. мат. ин-та. АН СССР, 1964, 73, 314—336 (РЖМат, 1966, 1Б369)  
 27. —, Растущие решения уравнения Шредингера. Докл. АН СССР, 1965, 165, № 3, 514—517 (РЖМат, 1967, 2Б385)  
 28. —, Факторизация  $S$ -матрицы многомерного оператора Шредингера. Докл. АН СССР, 1966, 167, № 1, 69—72 (РЖМат, 1966, 8Б457)  
 29. —, Трехмерная обратная задача квантовой теории рассеяния. Сб. тр. Всес. симпозиума по обратным задачам для дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1972  
 30. Фролов И. С., Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси. Докл. АН СССР, 1972, 207, № 1, 44—47 (РЖМат, 1973, 3Б759)  
 31. Calogero F., Degasperis A., Values of the potential and its derivatives at the origin in terms of the  $s$ -wave phase shift and bound-state parameters. J. Math. Phys., 1968, 9, № 1, 90—116 (РЖМат, 1968, 12Б485)  
 32. Corbella O. D., Inverse scattering problem for Dirac particles. J. Math. Phys., 1970, 11, № 5, 1695—1713  
 33. Degasperis A., On the inverse problem for the Klein—Gordon  $s$ -wave equation. J. Math. Phys., 1970, 11, № 2, 551—567 (РЖМат, 1970, 11Б472)  
 34. Ikebe T., Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1960, 5, № 1, 1—34 (РЖМат, 1961, 3Б492)  
 35. Kato T., Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient. Commun. Pure and Appl. Math., 1959, 12, № 3, 402—425 (РЖМат, 1961, 3Б220)  
 36. —, Perturbation theory for linear operators. Berlin, Springer, 1966, XIX, 592pp. (РЖМат, 1968, 9Б533К)  
 37. Kay I., The inverse scattering problem when the reflection coefficient is a rational function. Commun. Pure and Appl. Math., 1960, 13, № 3, 371—393 (РЖМат, 1962, 1Б184)  
 38. —, Moses H. E., The determination of the scattering potential from the spectral measure function. I. Nuovo Cimento, 1955, 2, № 5, 917—961 (РЖМат, 1957, 8770)  
 39. —, —, The determination of the scattering potential from the spectral measure function. II. Nuovo Cimento, 1956, 3, № 1, 66—84 (РЖМат, 1957, 8771)  
 40. —, —, The determination of the scattering potential from the spectral measure function. III. Nuovo Cimento, 1956, 3, № 2, 276—304 (РЖМат, 1957, 8772)  
 41. Khuri N. N., Analyticity of the Schrödinger scattering amplitude and nonrelativistic dispersion relations. Phys. Rev., 1957, 107, № 4, 1148—1156

42. Kruskal M. D., Gardner C. S., Greene J. M., Miura R. M., Method for solving the Korteweg—de Vries equation, Phys. Rev. Lett., 1967, 19, № 19, 1095—1097
43. —, Miura R. M., Gardner C. S., Zabusky N. J., Korteweg—de Vries equation and generalizations. V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservations laws. J. Math. Phys., 1970, 11, № 3, 952—960
44. Lax P. D., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Communis Pure and Appl. Math., 1968, 21, № 5, 467—490
45. —, Phillips R., Scattering theory. New York—London, Acad. Press, 1967, XII, 276 pp. (РЖМат, 1969, 11Б547К)
46. Levinson N., On the uniqueness of the potential in a Schroedinger equation for a given asymptotic phase. Kgl. Danske Videnskab. Selskab. mat. Fys. medd., 1949, 25, № 9
47. Loeffel J. J., On an inverse problem in potential scattering theory. Ann. Inst. H. Poincaré, 1968, 8A, № 4, 339—447
48. Wong D., Dispersion relation for nonrelativistic particles. Phys. Rev., 1957, 107, № 1, 302—306
-

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1. Манин Ю. И. <math>p</math>-АДИЧЕСКИЕ АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ</b>	5
Введение . . . . .	5
<b>Г л а в а I. Функции Якоби — Тейта</b>	7
§ 1. Основные соглашения . . . . .	7
§ 2. $p$ -адические ряды Лорана . . . . .	8
§ 3. Функции Якоби — Тейта . . . . .	15
<b>Г л а в а II. Абелевы функции</b>	19
§ 1. Ряды Лорана от многих переменных . . . . .	19
§ 2. Периоды, поляризации, тэта-функции . . . . .	22
§ 3. Поле абелевых функций . . . . .	27
<b>Г л а в а III. Группы и функции Шоттки</b>	31
§ 1. Группы Шоттки . . . . .	31
§ 2. Дивизоры и автоморфные функции . . . . .	37
§ 3. Аналитический якобиан группы Шоттки . . . . .	46
§ 4. Дерево группы $PGL(2)$ . . . . .	49
§ 5. Координаты, круги, двойные отношения . . . . .	55
§ 6. Действие группы Шоттки на дерево . . . . .	59
§ 7. Поляризация аналитического якобиана группы Шоттки . . . . .	69
§ 8. Схемы Мамфорда . . . . .	72
§ 9. Конструкция формальных факторов . . . . .	76
<b>Г л а в а IV. <math>p</math>-адические аналитические пространства и формальные схемы</b>	80
§ 1. Аффинoidные пространства . . . . .	80
§ 2. Аналитические пространства . . . . .	84
§ 3. Связь с формальными схемами . . . . .	86
§ 4. Алгебраизация аналитических объектов . . . . .	88
Библиография . . . . .	91
<b>2. Фаддеев Л. Д. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ. II.</b>	93
Введение . . . . .	93
<b>Г л а в а I. Одномерный оператор Шредингера</b>	105
§ 1. Фундаментальная система решений уравнения Шредингера . . . . .	105
§ 2. Теория рассеяния . . . . .	112
§ 3. Вольтерровы операторы преобразования . . . . .	119
§ 4. Уравнения Гельфанд — Левитана . . . . .	122
§ 5. Исследование обратной задачи . . . . .	126
§ 6. Частные случаи решения обратной задачи . . . . .	134
<b>Г л а в а II. Простые обобщения и приложения</b>	139
§ 1. Потенциалы с различными асимптотиками на бесконечности . . . . .	139
§ 2. Каноническая система . . . . .	144
§ 3. Формула следов . . . . .	147
§ 4. Нелинейные эволюционные уравнения . . . . .	151

<i>Г л а в а III. Трехмерный оператор Шредингера</i>	156
§ 1. Теория рассеяния	157
§ 2. В поисках вольтерровых операторов преобразования	161
§ 3. Нормирующие множители для решений $u_\gamma(x, k)$	165
§ 4. Дифференциальные уравнения по параметру $\gamma$	168
§ 5. Исследование обратной задачи	173
Библиография	178
<i>3. Розанов Ю. А. ОБНОВЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕССЫ И ПРОБЛЕМА ФАКТОРИЗАЦИИ</i>	181
<i>Г л а в а I. Общие понятия и некоторые примеры</i>	181
§ 1. Основная проблема теории обновляющих процессов	181
§ 2. Регуляризация процессы и проблемы факторизации	188
<i>Г л а в а II. Регулярные стационарные процессы</i>	197
§ 1. Структурный тип регулярного стационарного процесса	197
§ 2. Представление Вольда и факторизация спектральной плотности	201
§ 3. Кратность регулярного стационарного процесса	207
§ 4. Некоторые условия регулярности	210
<i>Г л а в а III. Эквивалентные случайные процессы</i>	223
§ 1. Понятие эквивалентности. Вероятностная интерпретация в случае гауссовских распределений	223
§ 2. Эквивалентность стационарных процессов	233
§ 3. Случайные процессы, эквивалентные винеровскому процессу	249
Библиография	254

---

Технический редактор *Л. И. Дрожилова*

Опечатки к сборнику «Итоги науки и техники» выпуск  
 «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ. Т. 3»

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
33	18 сверху	$I(g) 1^<$	$I(g)^<$
	19 сверху	$I(g^{-1}) 1^<$	$I(g^{-1})^<$
72	2 снизу	$X^{p_1}$	$X^{p_2}$
77	19 сверху	$\Gamma/\Omega.$	$\Gamma \setminus \Omega$
	20 сверху	строений	строений
	21 сверху	является	является
89	10 снизу	$\Gamma/\Delta_{\Gamma}$	$\Gamma \setminus \Delta_{\Gamma}$
95	19 сверху	$U_0(t) = e^{-tH_0 t},$	$U_0(t) = e^{-tH_0 t},$
100	17 сверху	$\gamma = \pm \infty$	$\gamma = \pm 1:$
114	10 сверху	$s_{22}(k) = s_{11}(k).$	$\tilde{s}_{22}(k) = s_{11}(k).$
145	4 снизу	$\{f, g\} = f^{(1)}g^2 - f^{(2)}g^{(1)}.$	$\{f, g\} = f^{(1)}g^{(2)} - f^{(2)}g^{(1)}.$
220	4 снизу	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f_{\alpha}}{1 + \lambda^2} d\lambda > cI,$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda > -cI,$

Содержится подборочный номер ряда ошибок в напечатанной времененной теории случайных процессов 2-го порядка (в частности нестационарных), изложение принадлежащей автору концепции, с позиций которой результаты переосмыслены и которая позволила автору получить новые т