Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. Д. Фаддеев, 30 лет в математической физике, *Тр. МИАН СССР*, 1987, том 176, 4–29

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 195.218.150.2
6 июля 2017 г., 15:13:41

Труды Математического института АН СССР
1987, том 176

УДК 530.145

Л. Д. ФАДДЕЕВ

30 ЛЕТ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Юбилей МИАН, которому посвящена эта серия статей, представляет каждому автору прекрасную возможность выразить свой личный взгляд на математику. По счастливой случайности мой возраст точно совпадает с возрастом института. Поэтому я решился воспользоваться этим обстоятельством как поводом для того, чтобы написать свою научную биографию. Я постарался дать в ней субъективный взгляд на развитие математической физики за последние 25 лет. Я надеюсь, что мой личный опыт, критически пересмотренный в пятидесятилетнем возрасте, отразит объективные тенденции развития математики в наши дни.

1. Образование

Я думаю, что большое влияние на становление меня как ученого оказала разумная доля упрямства и нонконформизма. Я не пошел на математический факультет ЛГУ, хотя рос в семье профессиональных математиков. А на физическом факультете, где я специализировался по теоретической физике, я оторвался от основной группы сокурсников, начав более углубленно заниматься математикой.

Конечно, в последнем случае решающую роль сыграла прекрасная традиция преподавания математики на физическом факультете, созданная главным образом академиком В. И. Смирновым. Начиная с 3-го курса все математическое образование я получил от О. А. Ладыженской: от основного курса комплексной переменной и спецкурсов по уравнениям в частных производных и теории операторов до спецсеминаров и дипломной работы. Все это было очень привлекательно, но, с другой стороны, очень индивидуализировано, так что я развивался в определенной изоляции, в которой оставался длительное время.

Здесь уместно задать вопрос: в какой обстановке легче расти молодому ученому: в группе или в одиночестве? И то и другое имеет преимущества и недостатки. Например, мне пришлось много читать и я помню, как мое знание литературы удивляло более старших коллег. По своим ученикам я вижу, что они читают значительно меньше, точнее, только то, что надо для непосредственной работы, зато широта кругозора у них образуется от общения с единомышленниками, которого я был лишен.

На физфаке я прошел полный курс теоретической физики — электродинамики, статистической физики, квантовой механики, теории относительности и квантовой теории поля. Сейчас я понимаю, что это дало мне важный мировоззренческий фундамент и сняло мистическое покрывало с квантовой теории. Я специально подчеркиваю это, потому что неоднократно с удивлением убеждал-

ся, какой психологический барьер представляет квантовая механика для моих московских коллег, кончивших мех.-мат. МГУ — классическое образование сделало для них кажущуюся неопределенность квантовой парадигмы неприемлемой или, во всяком случае, отталкивающей.

Чтение научной литературы я начал после 3-го курса с книги В. А. Фока «Начала квантовой механики», изданной в 1932 г. [1]. Книга была большой библиографической редкостью, и моя мать В. Н. Фаддеева получила ее из рук самого Владимира Александровича. А на 4-м курсе, т. е. в 1954/55 г., по инициативе О. А. Ладыженской мы — т. е. она и небольшая компания студентов — начали изучение книги К. О. Фридрихса «Математические аспекты квантовой теории поля» [2], отдельные главы которой публиковались в журнале «Communications in Pure and Applied Mathematics» начиная с 1949 г. и вышли отдельным изданием в 1953 г. Одновременно другие мои сокурсники с энтузиазмом разбирали квантовую электродинамику по только что вышедшему сборнику статей «Новейшее развитие квантовой электродинамики» и книге А. И. Ахиезера и В. А. Берестецкого «Квантовая электродинамика». Различие нашего образования особенно хорошо подчеркивается этим примером.

Чтение книги Фридрихса оказало очень большое влияние на формирование моих научных интересов и технического арсенала. Оно подвело меня к самостоятельной работе в области теории рассеяния. Другая книга, изучавшаяся на семинаре,— «Разложение по собственным функциям» Б. М. Левитана [3] контрастно отличалась от книги Фридрихса конкретностью материала и методов. Имея в голове общую картину теории рассеяния от Фридрихса и опыт операторного подхода к уравнениям в частных производных из спецкурсов Ладыженской, я решил перекладывать конкретные результаты теории сингулярного оператора Штурма—Лиувилля, выученные по Левитану, на случай многомерного уравнения Шредингера. Но в этот момент вышла работа А. Я. Повзнера [4] по теореме разложения по собственным функциям, и мне оставалось лишь уточнять его работу. На этом пути и был написан диплом.

Для доклада в кружке О. А. дала мне работу Н. Левинсона [5], из которой я впервые узнал об обратной задаче рассеяния для уравнения Шредингера в ее простейшем варианте — задаче восстановления потенциала в s-волновом операторе по фазе рассеяния. В работе Левинсона обсуждалась лишь теорема единственности. Однако ко времени моего доклада уже появилась общая работа И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [6] об обратной задаче для уравнения Штурма—Лиувилля и работы В. А. Марченко [7] и М. Г. Крейна [8] по обратной задаче теории рассеяния. Чтение этих работ и написанного на «фридриховском» языке обзора Кэя и Мозеса [9] навсегда связало меня с тематикой обратной задачи.

Итак, в результате обучения на физическом факультете в 54—56 гг. математические вопросы квантовой теории рассеяния стали моей научной специальностью. Сейчас на кафедре математической физики физфака это традиционная тематика, которая входит в ее специализацию. Тогда же я был первым выпускником в этой области. Интересно, что собственные занятия О. А. Ладыженской не были близки к этой тематике. Однако именно она сделала этот выбор для моего образования. Интуиция научного руководителя играет важную роль для становления ученика. Я навсегда благодарен О. А. за данное мне направление в самостоятельную научную жизнь.

2. Первые работы

Переход от студента к аспиранту в 1956 г. и поступление из аспирантуры в ЛОМИ стал непрерывным, естественно, что О. А. осталась моим научным руководителем. Однако теперь конкретные задачи для занятий я искал уже сам. Задачи эти были связаны с теорией рассеяния для уравнения Шредингера с убывающим на бесконечности потенциалом. В прямой постановке основные вопросы — теорема разложения по собственным функциям непрерывного спектра и связь стационарной и нестационарной постановки задачи рассеяния — были уже выяснены в работах Повзнера и Фридрихса. В обратной постановке в упомянутых выше работах Гельфанда, Левитана, Марченко, Крейна была решена задача о полной характеристике данных рассеяния для радиального уравнения Шредингера. Конечно, имелись большие возможности по совершенствованию результатов оригинальных работ, оставаясь в рамках этих постановок. Однако хотелось сделать что-то свое, по-настоящему новое. Две выдающиеся задачи быстро стали мне ясны: обобщение теории рассеяния на случай оператора Шредингера нескольких частиц и обратная задача для трехмерного оператора Шредингера с убывающим, сферически-несимметричным потенциалом.

Постановку первой задачи я осознал, читая физическую литературу. В связи с освоением формализма S-матрицы в квантовой теории поля, с помощью которого Ф. Дайсон в 1953 г. разъяснил широкой общественности концептуально более трудные работы Фейнмана и Швингера по квантовой электродинамике конца 40-х годов, в середине 50-х годов публиковалось изрядное количество статей, посвященных этому формализму. Появился даже термин «формальная теория рассеяния», а в тексте вместо уравнения Шредингера или операторов квантовой электродинамики фигурировали только буквы H и H_0 для полного и невозмущенного гамильтонианов. Основным приемом была теория возмущений.

Первые работы главным образом относились к задаче рассеяния в системе двух частиц, и лишь кратко комментировалась ситуация с перестройкой. Однако работа Х. Экштейна 1956 г. [10] была специально посвящена созданию формализма для таких процессов. Сопоставление этой работы с моим математическим образованием и привело меня к пониманию состояния дела в задаче многих частиц. Основное отличие состоит в том, что непрерывный спектр полного гамильтониана отличен, вообще говоря, от такового для оператора, получающегося из H после того, как опустить члены взаимодействия между некоторыми частицами. Именно: каждая совокупность связанных подсистем порождает свою ветвь непрерывного спектра полного гамильтониана соответствующей кратности. Спектр оператора, исследованного Повзнером и соответствующего задаче двух частиц, с равномерной кратностью заполняет положительную полуось.

Отличие постановки задачи и формулировки ответа находит свое отражение в отличии техники: ни одно наивное уравнение теории возмущений не подходит для исследования.

Обратная задача для многомерного уравнения Шредингера, хотя по постановке и не отличается от уже решенной, имеет тем не менее важное техническое отличие: естественные данные рассеяния для этой задачи сильно переопределены. Действительно, в трехмерном случае амплитуда рассеяния $f(k, \alpha, \beta)$, $k \in R^+$, $\alpha, \beta \in S^2$, зависит от пяти переменных, в то время как потенциал

$v(x)$, $x \in R^3$ в уравнении Шредингера зависит лишь от трех. Ясно, что в качестве амплитуды рассеяния мы можем брать не произвольные функции. Общие соотношения унитарности и вещественности не меняют этой ситуации. В то же время в случае радиального уравнения Шредингера условия на данные рассеяния — фазу рассеяния $\eta(k)$ — связаны лишь с подбором соответствующего функционального класса. Таким образом, наряду с техникой восстановления появилась нетривиальная задача нахождения подходящих условий на данные рассеяния.

Опять отличие постановки стало сопряжено с отсутствием технических средств. Наивные попытки перенести формализм Гельфанда—Левитана или Марченко на трехмерный случай приводили к расходящимся рядам.

Итак, я имел постановку интересных задач, но не видел средств для их решения. В такой ситуации естественно было наряду с поисками таких средств делать также то, что можно было сделать. Именно так появились мои первые печатные работы[1] — теорема единственности для трехмерной обратной задачи, строгое доказательство дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния вперед; полное исследование обратной задачи для одномерного уравнения Шредингера на всей оси было получено при поиске подхода к трехмерной обратной задаче; абстрактная работа по теории возмущений непрерывного спектра объединила подходы Фридрихса [11] и Повзнера к одноканальной теории рассеяния: от первого взята модель, а от второго метод исследования, основанный на фредгольмовом уравнении для резольвенты. В этой работе мне помогла О. А., сформулировавшая удачный критерий компактности в пространстве гельдеровых функций. Отмечу еще работу по формуле следов — перенос работы Гельфанда и Левитана [12] на сингулярный оператор Штурма—Лиувилля с непрерывным спектром. В процессе работы над этой статьей я впервые осознал важную концепцию характеристического детерминанта дифференциального оператора — которая сейчас проходит через всю математическую физику и с которой с тех пор тесно связана моя научная жизнь.

Для конечномерного оператора A характеристический детерминант $\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\lambda} \ln \Delta(\lambda) = -\operatorname{Tr} R(\lambda),$$

где $R(\lambda)$ — резольвента оператора A,

$$R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Это уравнение может быть положено в основу общего определения $\Delta(\lambda)$, однако при этом требуется регуляризация следа резольвенты, менее тривиальная, если A имеет непрерывный спектр. Эволюция понятия характеристического детерминанта связана с развитием приемов для такой регуляризации. Я считаю, что с технической точки зрения $\Delta(\lambda)$ более удобен, чем ζ-функция:

$$\zeta(s) = \operatorname{Tr} A^{-s},$$

получившая популярность в работах М. Атьи и И. Зингера по теории индекса.

Чтение литературы и самостоятельная работа сделали меня профессионалом

---

[1] Я не привожу формальных ссылок. Полный список моих работ, вышедших до 1984 г., дан в библиографическом указателе литературы: Л. Д. Фаддеев. Л.: ЛОМИ АН СССР, 1984.

по теории рассеяния — области функционального анализа, актуальной и до сих пор. Я могу без ложной скромности сказать, что уже к концу 50-х годов сознавал эту область шире, чем упомянутые мною ученые, для которых она была не главной. На конференции в Дубне в 1958 г., посвященной открытию лаборатории теоретической физики, на которой присутствовали И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, В. А. Марченко и М. Г. Крейн, с их согласия обзорный доклад по обратной задаче поручили мне. В основу доклада легла обзорная статья, подготовленная мной в качестве аспирантского экзамена и опубликованная впоследствии в УМН.

Моему формированию в эти годы очень помогало участие в семинарах и конференциях. Из семинаров в Ленинграде в первую очередь надо упомянуть семинар В. И. Смирнова по функциональному анализу и дифференциальным уравнениям и семинар теоретического отдела ФТИ, который проходил под руководством И. М. Шмушкевича и впоследствии В. Н. Грибова. Выступления на этих семинарах сыграли важную дисциплинирующую роль в моей работе.

Например, я твердо считал, что в докладе можно говорить не более 30% того, что знаешь. Такой запас прочности был достаточен для того, чтобы быть готовым ответить на любые вопросы. Сейчас, когда мораль в научном обществе сильно упростилась, такие взгляды слишком неконкурентоспособны, и я не считаю возможным прививать их своим ученикам.

Хорошо помню чувство раздвоенности, которое мне приходилось испытывать, выступая в разных аудиториях — физической и математической. Чтобы быть понятым, я должен был говорить на двух разных языках и быть в каком-то смысле переводчиком. Я чувствовал неадекватность как языка, принятого у физиков-теоретиков, так и стандартного «строгого» математического языка для изложения собственных результатов. Но приходилось делать определенное насилие над собой с тем, чтобы тебя слушали и понимали. Впрочем, это научило меня чувствовать реакцию слушателей. Как ни парадоксально, впервые я освободился от этого давления, делая доклады по-английски в Принстоне во время командировки в США зимой 1972 г. Этому способствовал также широкий состав слушателей, среди которых были как математики, так и физики-теоретики.

Насколько я помню, весной 58 г. я впервые выступил на семинаре И. М. Гельфанда, о котором слышал столько легенд. Меня предупреждали об ожидающих меня опасностях: И. М. часто останавливал докладчика и продолжал доклад вместо него, не стесняясь в выражениях, комментируя ошибки докладчика. Я рассказывал работу Фридрихса 48 г. [11] по теории возмущений непрерывного спектра и определению S-матрицы со своими добавлениями и так как профессионально был лучше подготовлен, то И. М. не сумел меня сбить. Попало только В. Б. Лидскому за то, что он в свое время сказал, что работа Фридрихса не интересная.

На этом семинаре я познакомился с Ф. А. Березиным, который в это время естественно переходил от тематики, связанной с теорией представлений, к более широким интересам в квантовой теории. Научная дружба долгое время связывала нас с тех пор, и мы многому друг у друга научились. Алик (как его называли) Березин, Витя (В. П.) Маслов, с которым я познакомился на конференции в Одессе в 1958 г., и Боб (Р. А.) Минлос — вот и вся компания специалистов по квантовой математической физике, которая существовала в конце 50-х годов. Я не говорю о знаменитой школе академика Н. Н. Боголюбова, своеобразная тематика и самобытные методы которой были мне тогда непонятны.

Что же касается конференций, мне очень повезло, так как в конце 50-х годов был расцвет функционального анализа и каждый год проводились большие всесоюзные совещания — в Москве, Одессе, Харькове. Для меня участие в них было прекрасной возможностью поучиться у старших и познакомиться со сверстниками. Как уже говорилось, в Одессе я впервые встретился с В. П. Масловым, с которым меня с тех пор связывает дружба и взаимная поддержка.

В конференциях физиков я начал принимать участие много позднее. Впрочем, в 1959 г. мне удалось попасть на знаменитую Рочестерскую конференцию по физике высоких энергий, состоявшуюся в Киеве, и посмотреть со стороны на всемирно известных ученых по теории элементарных частиц.

Чтение книги Фридрихса в студенческие годы не прошло зря. Оно дало мне свое направление в теории поля. В то же время работы по квантовой электродинамике, о которых мне приходилось много слышать на семинаре в ФТИ, меня не зацепляли. Я не видел в них красивых математических структур. Более того, вследствие появившегося у Л. Д. Ландау в 57 г. убеждения, что КЭД противоречива, теория поля надолго вышла из моды у знакомых мне физиков. Наибольшее влияние на меня в это время оказало чтение работ И. Сигала. Его оригинальный язык меня, к счастью, не отпугивал. От Сигала я почерпнул ряд важных концепций: понятие алгебры наблюдаемых, специфику систем с бесконечным числом степеней свободы и, главное, понятие деформации алгебраических структур. Последнее понятие у Сигала возникло при своеобразной интерпретации любимой им конформной группы SU (2,2). Философская идея, почерпнутая у Сигала, о том, что каждой деформации алгебры наблюдаемых соответствует появление размерных констант (например, скорости света c, постоянной Планка $\hbar$), является для меня до сих пор основой моей физической парадигмы. Я считаю, что донес эти идеи и до Ф. А. Березина, что повлияло на его работы по квантованию 70-х годов.

Здесь я осмелюсь сказать, что теоретико-групповой подход к квантовой теории, идущий от Г. Вейля и развивавшийся И. М. Гельфандом и И. Сигалом, представляется мне более важным, чем чисто операторный подход Дж. фон Неймана. Что же касается собственно теории операторов, то мне, естественно, наиболее импонирует конкретная концепция спектрального представления Фридрихса, заменяющая абстрактное понятие спектральной функции.

Последним результатом по теории поля, который я слышал на семинаре в Физтехе в 1957 г., была работа В. Тирринга [13] по точно решаемой квантовой двумерной модели теории поля, которую теперь называют моделью Тирринга. В основе ее лежал технический прием использования закона сохранения заряда для сведения теоретико-полевой модели к системе N-частичных и к уравнению Шредингера. Для последних Тиррингом было получено точное решение. Для моей научной судьбы эта работа сыграла огромную роль как непосредственно в конце 50-х годов, так и 20 лет позднее.

Частицы (точнее, квазичастицы), рассматриваемые Тиррингом, были безмассовыми; естественно было попробовать перенести его результаты на случай массивных частиц. Двухчастичное уравнение было легко решить, и меня поразило появление связанного состояния в двухчастичном секторе. Я был достаточно образован, чтобы понять, что это означает появление новых частиц в описываемой модели; до тех пор идеология теории поля состояла в том, что каждому сорту частиц сопоставляли свое соответствующее поле, а здесь, в массивной модели Тирринга, становилось ясным, что одно поле может описывать целый

спектр частиц и возникает возможность вычислять их массы. Конечно, для полной реализации этой программы нужно было решать уравнение для любого числа частиц.

Другая естественная идея состояла в перенесении метода Тирринга на реальную систему в четырехмерном пространстве-времени. Здесь было бы нетрудно сформулировать N-частичный подход, но соответствующие задачи на собственные значения оказались сингулярными, и я начал тренироваться работать с ними. В нерелятивистском пределе в простейшем случае возникает уравнение Шредингера

$$-\Delta\psi + \varepsilon\delta(x)\psi = k^2\psi,$$

где $\delta(x)$ — трехмерная дельта-функция. Вследствие сингулярности функции Грина оператора Лапласа соответствующее интегральное уравнение приводит к появлению бесконечностей. Однако уже известная мне процедура перенормировки позволила поглотить эти бесконечности в определение константы ε, устремляя ее к нулю по закону

$$1/\varepsilon + \Lambda = 1/\varepsilon_r,$$

где Λ — расходящаяся константа, а ε_r — конечный перенормированный заряд. К сожалению, в релятивистской ситуации такая процедура уже не работает, точнее, приводит к тривиальному ответу для взаимодействия. Я был уже не одинок и имел возможность обсудить эту ситуацию с Аликом Березиным. Он нашел для наивной перенормировки адекватный язык теории расширений: оператор энергии получается как расширение оператора невзаимодействующих частиц, т. е. оператора Лапласа, рассматриваемого на функциях, исчезающих в некоторой окрестности начала координат. Возникновение нетривиального ответа, полученного перенормировкой, соответствовало существованию нетривиального расширения. В релятивистском четырехмерном случае таких расширений не было, т. е. соответствующие индексы дефекта были нулевыми.

Сейчас точечный потенциал, определенный по нашему рецепту, представляет собой важную модель в математической физике. Однако для меня важнейшее идеологическое значение приобрела иллюстрация к перенормировке заряда. Естественную интерпретацию получила и теорема о «нуль-заряде» Ландау. В то же время почему-то я не потерял веру в существование теории поля в четырехмерии, свободной от парадокса нуль-заряда. О значении этой работы для моего отношения к появившейся в середине 60-х годов конструктивной теории поля см. ниже.

Влияние работы Тирринга этим не оканчивается. После первого промежуточного успеха в двухчастичном секторе, я, естественно, потратил много сил на нахождение точного решения многочастичных секторов. И хотя в этом не преуспел [2], тем не менее работа натолкнула меня на важное открытие: итерируя интегральное уравнение теории возмущений в трехчастичном секторе, я нашел перестройку его в систему уравнений, в формулировку которой вошли симметрично характеристики всех подсистем трехчастичной системы. Я немедленно понял общий характер этой перестройки и его значение для теории рассеяния в системе трех частиц. Таким образом, недостающее техническое средство,

---

[2] Несколько лет позже Ф. А. Березин и его ученик В. Н. Сушко нашли такое решение [14], но не справились с задачей о переходе к представлению с положительной энергией.

о котором говорилось выше, попало мне в руки. Можно было отложить работу над моделью Тирринга и вернуться к теории рассеяния. Именно это и заняло три года моей жизни, результатом которых явилась докторская диссертация «Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц», опубликованная как том «Трудов МИАН» в 1963 г. Эта первая по-настоящему самостоятельная работа быстро принесла мне определенную международную известность и помогла самоутвердиться.

Работа носила технический характер, и рассказ о ней не поучителен. Отмечу лишь, как мне помог В. М. Бабич, сославшись на теорему С. М. Никольского в ответ на вопрос о теории Фредгольма для операторов, которые сами не вполне непрерывны, но имеют вполне непрерывную степень. В остальном технические средства исследования системы интегральных уравнений и использования результатов для теоремы полноты собственных функций я развивал сам. Здесь уже вполне пригодился опыт продумывания формальной теории рассеяния несколькими годами раньше.

Защита диссертации осенью 63 г. (через год после подачи в Ученый совет МИАН) ознаменовала конец периода первых работ. Подведем некоторый итог этих лет. Основными духовными учителями в эти годы были К. О. Фридрихс и И. Е. Сигал. Достижения были связаны с квантовой механикой, однако немалое время занимало продумывание концепций теории поля. Улучшилось положение с одиночеством в начальный период, появился единомышленник Алик Березин и первый ученик — В. С. Буслаев.

3. Развитие вширь

Итак, к началу 63 г. одна из поставленных задач в теории рассеяния — прямая задача для системы трех частиц — была решена в той степени, которая удовлетворяла меня. Можно было приступить ко второй задаче — обратной задаче для многомерного оператора Шредингера. Однако теория поля, или, более общо, теория систем с бесконечным числом степеней свободы, привлекала меня все больше и больше. Важным было то, что я наконец чувствовал достаточно сил, терпения и, немаловажно, имел возможность не торопиться, для того чтобы сделать что-то небанальное в этой области. Напомню еще раз, что в кругу знакомых мне физиков интерес к релятивистской теории был потерян, и она развивалась лишь как техническое средство в физике твердого тела в связи с успехом теории сверхпроводимости. Работа по модификации постановки задачи рассеяния, принимающей во внимание эффекты самодействия и приводящей к изменению энергий одночастичного состояния, и точная формулировка квантовой теории бозе-газа, полученная совместно с новым сотрудником В. Н. Поповым, были моими первыми опубликованными работами по теории поля. В последней проблеме меня привлекла возможность использовать представление коммутационных соотношений, неэквивалентное фоковскому. Однако основное время занимало чтение и поиск интересной задачи в релятивистской области. Я читал в первую очередь классические работы по квантовой электродинамике Фейнмана и Швингера, переведенные в сборниках «Новейшее развитие квантовой электродинамики» [15] и «Проблемы современной физики» [16], а также книгу «Теория квантованных полей» [17], где опубликованы четыре статьи Швингера. В результате я привык к столь разному стилю этих авторов и в основном сумел погрузить их подходы в круг привычных мне концепций. При этом метод

континуального интеграла Фейнмана привлек меня больше, чем концепция «принципа действия» Швингера; с другой стороны, я отдавал дань формальной элегантности и вниманию к языку, присущим работам Швингера. Важную роль в моем образовании сыграл другой сборник переводов статей «Элементарные частицы и компенсирующие поля» [18]. Введенный Д. Д. Иваненко термин компенсирующее поле вызывал неудовлетворение, но нельзя не восхищаться его интуитивным пониманием будущей важности калибровочных полей.

Что касается собственного опыта, то я знал роль теории расширений для объяснения перенормировки заряда, понимал перенормировку массы и верил в нуль-заряд для таких простых вариантов теории поля, как самодействующее скалярное поле. Поэтому надо было найти теоретико-полевую систему, в которой нелинейности, обусловливающие взаимодействие, были не введены искусственно, а связаны с естественным принципом. Это привело меня к теории тяготения Эйнштейна. Для подготовки я стал читать монографию А. Лихнеровича «Théories relativistes de la gravitation et de l'electromagmatisme» [19], которая стала моим первым учебником по дифференциальной геометрии. Когда же я случайно увидел на лотке старой книги перевод его монографии «Теория связностей в целом и группы голономии» [20], уважение к автору заставило меня ее купить за странную цену 46 коп. Каково же было мое удивление, когда открыв ее дома, я увидел, что связности и поля Янга—Миллса, о которых я уже знал из упомянутого выше сборника о компенсирующих полях,— одно и то же. Примерно в то же время вышли знаменитые лекции Фейнмана [21] по его опыту квантования гравитации. Поле Янга—Миллса использовано там как объект для упражнений: с одной стороны, подобно гравитации это поле (связность в векторном расслоении) имеет естественное самодействие; с другой стороны, работа с ним гораздо менее громоздка. В то время (1964 г.) практически не было никакой идеи о том значении поля Янга—Миллса, которое оно приобрело сейчас.

Фейнман использовал язык континуального интеграла, но в его рамках он использовал искусственные конструкции, отработанные на примере электродинамики, и обратил внимание на возникающие несогласованности. Я уже имел достаточное геометрическое мышление для того, чтобы осознать основное отличие закона калибровочного преобразования

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \varepsilon$$

в электродинамике и

$$A_\mu \to g A_\mu g^{-1} + \partial_\mu g g^{-1}$$

в теории поля Янга—Миллса: орбита действия калибровочной группы во втором случае нелинейна в отличие от первого. В результате если мы хотим параметризовать классы калибровочно эквивалентных полей, вводя пересекающую орбиты поверхность при помощи какого-либо простого уравнения, например плоскость

$$\partial_\mu A_\mu = 0,$$

то орбиты пересекают ее под фиксированным углом в первом случае и под углом, зависящем от A, во втором. Другими словами, при замене переменных $A \to (A^T, g)$ от полей к классам и групповым переменным возникает нетривиальный якобиан. Я имел смелость предположить, что этот якобиан является детерминантом дифференциального оператора. С калибровочным условием $\partial_\mu A_\mu = 0$

естественно ассоциировался дифференциальный оператор $Mu = \Box u + [A_\mu, \partial_\mu u]$, не зависящий от A в случае электродинамики. Нетривиальность $\det M$ для поля Янга—Миллса и должна была отвечать за модификацию правил его квантования. Я поделился этими соображениями со своим сотрудником в ЛОМИ В. Н. Поповым, который лучше меня знал формальные приемы, применяемые в континуальном интеграле. Через пару дней он пришел с выводом, основанным на знаменитом теперь трюке с «вставлением единицы» и приводящим к ответу, о котором я догадывался. Это было, насколько я помню, ранней осенью 66 г. Наконец, был получен новый результат в релятивистской теории поля. У меня не было сомнений, что перед нами был первый пример релятивистской полевой модели, свободной от противоречий нуля заряда, и что надо работать над поисками ее физических приложений. Я помню также, с какой тщательностью я выбирал слова для письма в «Physical Letters», которое мы с В. Н. Поповым послали в конце 66 г. Более подробный текст, опубликованный как препринт Института теоретической физики АН УССР в Киеве в 67 г., содержал развернутое изложение нашего предложения со следующими усовершенствованиями: 1) доказательство в рамках континуального интеграла эквивалентности квантования с сокращением объема группы и канонического квантования в кулоновской калибровке; 2) интегральное представление для якобиана через интеграл по антикоммутирующим переменным, которые теперь часто называют духами Фаддеева—Попова; 3) идею доказательства инвариантности процедуры перенормировки по отношению к выбору условия калибровки. Кроме того, там были сосчитаны (причем правильно) все однопетлевые расходимости — об этом подробнее будет сказано ниже. Наконец, последний раздел содержал сводку правил квантования гравитационного поля, однако то, что было стимулом для начала работы, уже отошло на задний план. Ясно было, что надо продолжать работать с полем Янга—Миллса.

Одним из уроков стало понимание фундаментальности канонического формализма. Здесь важным было чтение работ Дирака по релятивистской теории поля [22], по теории систем со связями [23] и в особенности каноническому формализму теории гравитации Эйнштейна [24], которые я нашел в процессе подготовки к включению этой теории в нашу схему. Кроме того, в связи с обучением дифференциальной геометрии я много разговаривал с Димой (Владимиром Игоревичем) Арнольдом; он обучил меня инвариантному изложению классической механики, а я настойчиво пробовал разъяснить ему, что такое квантование. Отражением всего этого стала моя статья о квантовании систем со связями, написанная в 67 г. и опубликованная через пару лет в первом номере журнала ТМФ. В этой статье все еще чувствуется упомянутая выше раздвоенность: основной текст и приложение написаны на разных языках. Я не стал бы этого делать сейчас.

Как раз в 67 г. теория полей Янга—Миллса, наконец, привлекла внимание широкого круга физиков в связи со знаменитой ныне объединенной теорией электромагнитных и слабых взаимодействий Вейнберга—Салама—Глешоу. Я знал С. Вейнберга по работам и личной встрече в 64 г. на конференции по физике высоких энергий в Дубне и написал ему письмо, в котором обращал его внимание на нашу с Витей Поповым работу. В ответ я получил оттиск с изложением его модели и просьбу посмотреть, не годятся ли наши методы для ее квантования. Однако ни он, ни я не обратили серьезного внимания на наши взаимные работы. В результате объединение наших идей было проведено только Г. т'Хоофтом несколько лет спустя.

В 1967 г. появилась фундаментальная серия статей Де Витта по квантованию гравитационного поля [25], содержащая и общие соображения по калибровочным полям и основанная на его работе в течение нескольких лет. Так же как и я, Де Витт отправлялся от лекции Фейнмана, упомянутой выше, но он более тесно следовал намеченному там формализму. В определенном смысле наш с Поповым формализм и подход Де Витта дополняют друг друга. Мы даем доказательство унитарности на основании вывода эквивалентности с канонической формулировкой. Де Витт же дает общее доказательство независимости от выбора условия фиксации калибровки. Мы обменялись с Де Виттом серией писем, в которых этот вопрос был выяснен. Оба подхода объединились окончательно в результате так называемого трюка т'Хоофта, введенного в его первой работе по калибровочным полям [26].

Обилие уже упомянутых имен показывает, что к концу 60-х годов я вышел из изоляции, о которой говорил в предыдущем разделе. Как ни странно это звучит, но именно в результате поездки на конгресс Международного математического союза в 1962 г. в Стокгольм я познакомился с моими московскими сверстниками: В. И. Арнольдом, Ю. И. Маниным, А. А. Кирилловым, Я. Г. Синаем, с которыми с тех пор поддерживаю дружеские отношения. О влиянии В. И. Арнольда на развитие моего геометрического мышления уже говорилось выше. В Стокгольме же я познакомился с учеными из института математических исследований Нью-Йоркского университета, который теперь носит имя Куранта: П. Лаксом, Л. Ниренбергом, Ю. Мозером. Это знакомство расширилось во время Советско-Американской встречи в Новосибирске в 1963 г., которая стала настоящим праздником математики. Наконец, на конференции в Дубне в 1964 г. я познакомился с многими зарубежными физиками, кроме С. Вейнберга.

Однако знакомства носили скорее светский, чем научный характер. Исключением явилось уже упоминавшееся выше общение с Арнольдом. По-прежнему мои научные интересы были далеки от основной моды в математике и наиболее близким единомышленником был Ф. А. Березин. Но так или иначе частые поездки в Москву были заняты научными разговорами и конечно расширяли мой кругозор и влияли на мировоззрение.

Работа по трем частицам тем временем завоевывала популярность среди физиков, сначала за рубежом, а затем и дома. Довольно быстро (в 1964, 65 гг.) вышли два перевода моей диссертации на английский язык и потоком пошли работы по конкретным расчетам в ядерной физике. В 1967 г. на конференции по ядерной физике в Тбилиси Ю. А. Симонов выступил с активной пропагандой моего подхода. Хотя я сам ценю эту работу как математическую, ее роль для физиков мне сформулировал кто-то из американских ученых таким образом: она дала гарантию, что в трехчастичных системах можно делать расчеты, и, таким образом, можно вкладывать в них большие усилия и средства. Такой прагматический подход к оценке математической работы был для меня новым.

Ну а где же обратная задача? В процессе подготовки к работе в теории поля в 63—65 гг. я о ней не забывал. Следуя общему рецепту Фейнмана, сформулированному по моему как раз в польских лекциях, я переписывал формализм одномерных задач в разных эквивалентных формах и искал именно ту, которая допускает обобщение. Наконец, в 1965 г. я нашел основное техническое средство: я понял, как обобщить на многомерный оператор Лапласа «вольтеррову» функцию Грина оператора второго порядка, формально лежащую в основе

подхода Марченко:

$$G_{\pm}(x, k) = \pm \frac{\sin kx}{k} \theta(\mp x);$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

«Вольтерровских» функций Грина в многомерном случае нет — и многочисленные поиски ее как мной, так и другими авторами заранее были обречены на провал. Однако $G_{\pm}$ допускает толкование как ядро резольвенты $(H - k^2 I)^{-1}$ оператора H, задаваемого дифференциальным оператором — d^2/dx^2 в пространстве функций с экспоненциальным весом $L_2(R, e^{qx})$, внутри параболы $\operatorname{Im} k = q$. Эта парабола является спектром H. В многомерном случае спектр заполняет всю внутренность параболы и продолжение резольвенты не вольтеррово, но необходимые условия аналитичности для развития программы Марченко у такой фукции Грина есть. Теперь решение обратной задачи становится делом техники. Однако я ограничился публикацией двух предварительных заметок в 65—66 гг. и прекратил на время работу — задача о квантовании поля Янга—Миллса полностью меня захватила.

К середине 60-х годов относится интерлюдия с формулой следа Сельберга. Подготавливая выпуск «Обобщенных функций», посвященный применению теории представлений в теории автоморфных функций, И. М. Гельфанд, М. И. Граев и И. И. Пятецкий-Шапиро решили включить в него вывод и полное доказательство формулы следа, обобщающей более конкретную формулу Сельберга. Однако, как известно, для некомпактной фундаментальной области появляется непрерывный спектр, который представляет собой определенное техническое затруднение. В конце осени 64 г. они пригласили меня как профессионала в теории возмущений непрерывного спектра помочь преодолеть эти трудности — но в рамках схемы, развиваемой в книге. И. И. Пятецкий-Шапиро терпеливо объяснял геометрию однородных пространств дискретных групп, орисферы и т. д. Однако более классический язык Сельберга, работу которого 57 г. [27] я, конечно, также прочел, был мне более понятен. Предварительным этапом доказательства формулы следа должна была стать теорема разложения по собственным функциям. Меня привлекала эта задача, поскольку она несколько выходила за стандартные рамки теории возмущений; именно изучаемый оператор — автоморфный оператор Лапласа Δ_Γ — нельзя естественно представить в виде невозмущенного оператора и возмущения, и, таким образом, основное средство — интегральные уравнения — здесь отсутствовало. Таким образом, налицо был еще пример, где надо было придумать нестандартное техническое средство. В этом случае было сравнительно просто — резольвента оператора Δ_Γ дается хорошо контролируемым рядом вдали от спектра; для продолжения ее к спектру я предложил использовать тождество Гильберта, которое после явной регуляризации и дало требуемые фредгольмовы уравнения. Для упомянутой книги это рассуждение не подходило, но И. М. Гельфанд предложил его закончить и написать статью для «Трудов Московского математического общества». Том «Трудов» уже сдавался в печать в феврале 65 г., мне были даны только две недели для окончания работы и оформления статьи, но я успел. Впрочем, после этого статья и весь том лежали без движения и были опубликованы лишь через два года.

Это занятие внесло свой вклад в расширение моего математического кругозора. Хотя сам я выступал все еще как аналитик, постановка задачи, ее геометрическая интерпретация, аппарат групп и алгебр Ли — все вошло в мой арсенал.

Примерно в это же время прошел групповой бум в физике в связи с успехами классификации адронов. Я помню на семинаре в ФТИ удивление теоретиков, учивших классификацию алгебр Ли по Картану — оказывается, есть математика, совершенно отличающаяся от классической математической физики, содержащая интересные и явные вычисления, а не теоремы существования и единственности. Глядя назад, я считаю, что именно здесь впервые современная математика прорвалась в теоретическую физику со своими терминами и представлениями, без предварительной адаптации. Этот процесс, а вместе с ним обратная ассимиляция концепций теоретической физики математиками продолжаются во все больших масштабах и в наше время.

Во время аспирантуры и позже, уже работая в ЛОМИ, я в той или иной степени вел преподавательскую работу в университете; специализация по математической физике, образовавшаяся на кафедре математики физического факультета, руководимой В. И. Смирновым, активно развивалась. Я вел спецсеминары со студентами по математическим основам теории рассеяния, теории дифференциальных операторов дифференциальной геометрии, группам и алгебрам Ли — по мере того, как учился этому сам, вел дипломные работы. Первым учеником-дипломником был В. С. Буслаев, который вырос в атмосфере интересов к теории рассеяния, однако после него образовался перерыв. Сотрудничавший со мной в середине 60-х годов О. А. Якубовский, который получил схему обобщения перестройки уравнений теории рассеяния на случай N частиц, и В. Н. Попов, о котором говорилось выше, пришли ко мне уже после диплома и некоторой самостоятельной работы. Только в конце 60-х годов, когда я официально вернулся в ЛГУ, сначала неудачно на мат.-мех, а затем более естественно на родной физфак, количество дипломников, продолживших работать со мной, быстро стало расти. Некоторые из них — П. П. Кулиш, А. Б. Венков, М. А. Семенов-Тян-Шанский, В. Е. Корепин, Л. А. Тахтаджян, А. Г. Рейман — и сегодня сотрудничают со мной в ЛОМИ; И. Я. Арефьева уехала в Москву, но тесно с нами связана; другие — например, В. Л. Калинин — ушли из науки. Именно появление учеников больше всего способствовало избавлению меня от чувства изоляции, о котором много говорилось выше.

4. Синтез

Итак, к концу 60-х годов я окончательно перестал быть только специалистом в теории рассеяния как области функционального анализа. Можно сказать, что я превратился в профессионала по современной математической физике в широком смысле слова, в сферу научных интересов которого входили квантовая механика и квантовая теория поля с приложениями в теории элементарных частиц, а в технический арсенал, помимо традиционного функционального анализа, также дифференциальная геометрия, теория групп Ли, гамильтонов подход и методы континуального интегрирования. Начался зрелый период жизни и, к большому моему удивлению, период необычайного объединения идей и результатов, над которыми я работал в разное время и с разными целями. В этом разделе я приведу несколько поучительных примеров этой тенденции.

В предыдущем разделе я остановился на поисках приложения квантовой теории Янга—Миллса и упомянул непростительное невнимание к работам по спонтанному нарушению симметрии, лежащему в основе модели Салама—Вейнберга—Глешоу. Неприязнь к теории скалярных полей, связанная с парадоксом «0-заряд», проявилась здесь в полной мере. Она же позволила мне написать в 68 г. письмо Дж. Глимму, в котором я предупреждал о будущих трудностях программы конструктивной теории поля, если она будет основана на теории $\lambda\varphi^4$, и призывал его обратиться к теории Янга—Миллса. Тогда я получил весьма резкий ответ, но сейчас сами конструктивисты фактически признали мою правоту, доказав теорему о «0-заряде» для этой модели.

Итак, будучи уверенным в хорошем ультрафиолетовом поведении модели Янга—Миллса, я искал способ преодолеть инфракрасные расходимости, связанные с ее безмассовостью. Опыт полевой теории сверхпроводимости показывал, что надо искать «аномальные» функции Грина, взяв в качестве поля материи фермионы. Мой молодой ученик П. П. Кулиш и я израсходовали гору бумаги в поисках удачного варианта, но ничего не нашли. Единственной удачей стал естественный формализм асимптотической динамики для КЭД, который теперь связывают с нашими именами.

В середине 1970 г. я получил приглашение в Новосибирск на конференцию по обратной задаче. Я решил поехать и сделать доклад по обратной задаче для многомерного оператора Шредингера, которую в этом случае предварительно следовало завершить. Это удалось сделать; было показано, что найденные мною ранее в 66 г. необходимые свойства амплитуды рассеяния, связанные с ее факторизацией, являются на самом деле и достаточными. Довольно громоздкий текст отразил все мое знание свойств многомерного оператора Шредингера и в связи с уже описанными ожиданиями в юности доставляет мне до сих пор большое удовольствие как некоторый рекорд. Однако значение конференции не ограничилось тем, что она стала стимулом для завершения работы над многомерной обратной задачей. На ней я впервые услышал о методе обратной задачи для решения нелинейных уравнений. А. Б. Шабат сделал доклад о своей совместной работе [28] с В. Е. Захаровым о переносе знаменитого теперь метода Гарднера—Грина—Крускала—Миуры на случай нелинейного уравнения Шредингера. Появление второго, после уравнения КдФ, примера применения метода стало первым и важнейшим свидетельством его универсальности. Сама же возможность нового и свежего использования моей старой работы 1958 г. по обратной задаче для одномерного оператора Шредингера на всей оси была ударом с неба. Более того, знакомые мне от первой работы с В. С. Буслаевым формулы следов также играли большую роль.

Я знал В. Е. Захарова еще со времени Советско-Американского симпозиума 63 г. и сразу нашел с ним общий язык. Глядя на формулу

$$r(k, t) = r(k)\, e^{ik^2 t}$$

для изменения начальных данных рассеяния, в терминах которых уравнение КдФ линеаризуется, мы быстро вспомнили переменные действие—угол: допустимые функции $r(k)$ образуют фазовое пространство, причем меняется со временем лишь аргумент $r(k)$, а модуль остается постоянным. Естественно было предположить, что преобразование от начальных данных уравнения КдФ к данным рассеяния является аналогом канонического преобразования к переменным действие—угол в бесконечномерной ситуации.

Я вернулся в Ленинград и в течение февраля 71 г. продумывал путь реализации этой идеи. Володя Захаров занимался этим же в Новосибирске; в начале марта он прислал мне свой текст, я же направил ему свой, несколько более элегантный; наши подходы были двойственны: я основывался на симплектической структуре, а он на пуассоновой, как бы мы сказали сейчас. В результате было решено опубликовать мой вариант, который мы послали в журнал «Функциональный анализ и его приложения». Впоследствии в ТМФ вышел и первоначальный вариант Захарова в его совместной работе с С. В. Манаковым.

Статья вышла поздней осенью 71 г. В ней фактически не было ни одной новой формулы — формулы следов, выражение вариации потенциала через вариации данных рассеяния и т. д. — все это было известно. Однако новое употребление этих формул привело к новым идеям, которые определили мои научные интересы на десятилетие. В статье было все — теория поля, гамильтоновы методы, дифференциальная геометрия и техника теории рассеяния, которыми я независимо занимался в прошлом. Более того, стал очевидным новый механизм появления частиц в нелинейной теории — помимо волновых мод (соответствующих частице в обычном квантовании) уравнение КдФ имело и солитонную моду, которую естественно было интерпретировать как новую частицу. Старая мечта иметь несколько частиц, ассоциированных с одним полем, получила новую реализацию. Не хватало только релятивизма: уравнение КдФ связано с гидродинамикой (или теорией плазмы) и всерьез его квантовать было антифизично.

Релятивистский пример — модель sine-Gordon — был подсказан мне Дж. Клаудером. С декабря 71 г. по март 72 г. я в течение трех месяцев был в командировке в США и после одного из докладов по нашей работе с В. Е. Захаровым Клаудер упомянул об этом уравнении. Он же сказал, что этим уравнением интересуются оптики, в частности Лэмб.

По возвращении домой я задал поиск L — M пары для уравнения sine-Gordon своему ученику Л. А. Тахтаджяну. Отправляясь от работы Лэмба, он в начале 73 г. получил эту пару для светоподобных координат. Летом 73 г. свой подход к этой же задаче опубликовала группа Абловиц—Кауп—Ньюэлл—Сегюр, которая этой работой активно вошла в коллектив специалистов, занимающихся методом обратной задачи. Нужное (как нам тогда казалось) для переменных действие—угол выражение в лабораторных координатах было найдено несколько позднее в результате стимулирующих разговоров с Володей Захаровым. Тотчас уже отработанная техника позволила написать переменные действие—угол с очень красивой интерпретацией: в теории релятивистского самодействующего поля с массой m и константой связи γ солитоны соответствуют тяжелой частице с массой $M = 8m/\gamma$, а двойные солитоны — бризеры — набору частиц с массой $(16m/\gamma)\sin\theta$, где θ — одна из координат, определяющая период колебаний двойного солитона. Координата χ, сопряженная с θ, также имеет угловой характер, так что все фазовое пространство внутреннего движения бризера представляет собой тор $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \chi \leqslant 32\pi/\gamma$. В результате квазиклассическое квантование в переменных действие—угол приводит к выводу, что двойным солитонам соответствует целая система частиц с массами

$$M_n = \frac{16m}{\gamma}\sin\frac{n\gamma}{16}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

первая из которых при $\gamma \to 0$ совпадает с основной частицей теории возму-

щений. Итак, одно нелинейное поле порождает целый спектр масс: при этом некоторые из этих частиц тем тяжелее, чем меньше константа связи; исследование рассеяния солитонов показало также, что сила взаимодействия солитонов также увеличивается обратно пропорционально константе связи. Наконец, у солитона появилась помимо импульса еще одна дискретная характеристика — заряд, принимающий два значения ± 1 и допускающий простую топологическую интерпретацию. Все это не могло не наводить на спекуляции о возможном появлении сильных взаимодействий внутри нелинейной теории, описывающей слабые взаимодействия. Название статьи «Адроны из лептонов», которую я опубликовал в некоторой эйфории в начале 75 г., отражало это настроение. К сожалению, как мы видим сейчас, природа рассудила иначе.

Однако вернемся к 73 г. О переменных действие—угол для sine-Gordon мы с Тахтаджяном впервые доложили на конференции по методу обратной задачи, созванной А. Б. Шабатом в Уфе. Помимо естественных участников — Захаров, Шабат и Манаков, я, Тахтаджян и В. Б. Матвеев (ученик В. С. Буслаева, заинтересовавшийся методом обратной задачи) на ней присутствовали Ю. И. Манин и С. П. Новиков. Там впервые для меня ученые, работающие в основных разделах теоретической математики — алгебре, топологии, алгебраической геометрии — стали слушать нас, специалистов по матфизике. Это было очень вдохновляюще. Конференция в Уфе сыграла большую роль в развитии метода обратной задачи; началось проникновение в эту тематику методов алгебраической геометрии. В Москве эту тенденцию возглавил С. П. Новиков, быстро создавший целую группу, в Ленинграде над ней стали работать В. Б. Матвеев и А. Р. Итс. Я же укрепился в убеждении, что солитонный механизм появления спектра масс в квантовой теории поля является очень перспективным. Надо было искать солитоны в реалистическом четырехмерном случае.

Научная литература по этому поводу была весьма скудная. Через работу Д. Финкельштейна [29] о топологических аспектах теории поля я вышел на работу Скирма [30]. К моему восхищению, он нашел солитон в четырехмерной нелинейной σ-модели, которой я уже увлекался ранее в связи со стремлением найти геометрический смысл для нелюбимого хиггсова скалярного мезона. (Я даже придумал элегантную формулировку модели объединенного $EM + W$ взаимодействия, основанную на $O(3)$-группе, привлекая нелинейное n-поле; но природа опять рассудила иначе, и открытие нейтральных токов убило мое предложение.) Дифференциально-геометрическая формулировка σ-модели позволила мне дать инвариантное определение модели Скирма для произвольной компактной группы. Физическая картина Скирма — киральное поле соответствует π-мезону, а солитон интерпретируется как протон — мне не понравилась. Отмеченный выше круг идей однозначно вел меня к другой картине: киральное поле есть составная часть полей, описывающих слабое и электромагнитное взаимодействия.

В самое последнее время Э. Виттен возродил модель Скирма в первоначальной интерпретации. Я полагаю, что он впервые услышал об этой модели в моих лекциях на школе теоретической физики в Лез-Уш (Франция) в 1975 г.

Другой важной работой, которую я знал в это время, была статья Ч. Н. Янга и Т. Т. Ву [31], посвященная классическим решениям уравнения Янга—Миллса. Они ввели подстановку

$$A_i^a(x) = \varepsilon_{aim} \frac{x_m}{x^2} f(x^2)$$

для пространственных компонент поля, связанного с группой SU (2), но показали, что решения с конечной энергией не существует.

Наконец, я познакомился с простым приемом, основанным на масштабном преобразовании, который просто позволял доказывать отсутствие частицеподобных решений для конкретных уравнений (теорема Деррика).

С этим багажом я принялся искать многомерные солитоны. Одновременно надо было продолжать работу над развитием квантового подхода к теории солитонов. Переменные действие—угол, найденные для вполне интегрируемых моделей, позволили дать первое квазиклассическое приближение для спектра и физического рассеяния. Результаты по такому квантованию модели sine-Gordon, в том числе формулу для спектра масс, я с Тахтаджяном послал в виде письма в «Physical Letters» в конце 73 г.

С декабря 73 г. я стал пропагандировать солитоны в качестве элементарных частиц перед физиками. Первый доклад на теоретическом семинаре ИТЭФ в Москве принес большое удовлетворение. После семинара в ФТИ (теперь переведенного в ЛИЯФ) для меня очень неожиданной была атмосфера дружелюбного стремления понять докладчика. (Хотя я вряд ли кого-нибудь обратил в свою веру.) Зато когда зимой 74 г. я попробовал повторить свою проповедь перед старыми знакомыми на школе ЛИЯФ, меня ожидал полный провал. После четырех часов у доски, прерываемых ироническими комментариями типа «мечта Эйнштейна», я потерял голос и должен был сойти со сцены. Незаметная поддержка пришла со стороны слушавших меня А. М. Полякова и А. А. Мигдала. Они подошли ко мне после доклада с ободряющими замечаниями и попросили продолжить; я рассказал все, что знал к тому времени о многомерных солитонах: подстановку Янга и Ву, модель Скирма и топологический заряд, найденное мной двумерное решение в нелинейной σ-модели с единичным зарядом — будущий двумерный инстантон Белавина—Полякова. Знакомство с Сашей Поляковым стало главным приобретением на злополучной школе. Кроме того, я вынес техническую задачу о доказательстве отсутствия множественного рождения в солитонных теориях. «Этого не может быть,— говорили мне на докладе и рисовали соответствующую диаграмму,— и поэтому все твои квантовые рассуждения бессмысленны». Новый ученик В. Е. Корепин сразу сосчитал нужные диаграммы и показал, что на поверхности масс они сокращаются. Таким образом, я был прав, но получил урок лучше предугадывать интересы аудитории (70-процентного запаса прочности у меня уже не было).

Я продолжил пропаганду солитонов во время командировки в ФРГ в начале 74 г. Я также постарался узнать, что стало с нашим с Тахтаджяном письмом, посланным редактору в Италию. Но 74 г. был плохой для связи с Италией, там шли забастовки, телефон не работал, и, по-видимому, письмо пропало на почте. Более того, второй экземпляр письма, посланный через полгода после первого, также пропал. В результате я в определенной степени потерял приоритет на введение солитонов в теорию элементарных частиц.

Действительно, 1974—75 гг. стали фестивалем частицеподобных решений. Монополь т'Хоофта—Полякова, серия статей Дашена—Хаслахера—Невье, посвященная квазиклассическому квантованию, работа Р. Джакива о квантовании солитонов, и, наконец, инстантоны Белавина—Полякова—Тюпкина—Шварца привлекли к солитонной тематике широкий круг специалистов по теории элементарных частиц. Без ложной скромности я считаю, что сделал для этого больше, чем содержится в опубликованных работах. Среди профессиона-

лов высокого класса идея, даже намек на идею, часто важнее, чем ее техническое воплощение.

Вместе с солитонами усилилось проникновение в теоретическую физику топологических методов, результаты которого мы наблюдаем и сейчас.

На работе с солитонами в середине 70-х годов выросла большая группа молодых ученых в Москве и Ленинграде. В ИТФ им. Л. Д. Ландау это ученики В. Е. Захарова, С. В. Манаков и А. В. Михайлов, а также А. Замолодчиков и В. Фатеев. У С. П. Новикова это И. Кричевер и Б. Дубровин; в ЛГУ В. Б. Матвеев и А. Р. Итс, в моей группе в ЛОМИ Л. А. Тахтаджян, В. Е. Корепин, Е. К. Склянин. Таким образом, компания значительно расширилась и ощущение изоляции полностью отпало. К сожалению, Ф. А. Березин, о дружбе с которым так много говорилось в предыдущем разделе, остался холоден к новому развитию, и наши пути разошлись.

Переходя к последнему десятилетию, уместно сказать, на каком фоне шла моя работа. Роль полей Янга—Миллса в формулировке основ теории элементарных частиц стала общепризнанной. Стандартная теория $EM + W$ получила экспериментальное подтверждение. Квантовая хромодинамика — теория сильных взаимодействий — также была в хорошей форме. Основной теоретической задачей стало доказательство конфайнмента. В отсутствие такого доказательства в оборот вошли расчеты на больших компьютерах для решетчатого приближения к точной теории. Идей по конфайнменту у меня не было, а решетка не привлекала, да и хорошего компьютера у нас нет. Поэтому я продолжил работать над солитонами. Естественно, это опять привело к некоторой изоляции — но без одиночества. У меня в ЛОМИ уже была большая группа молодых сотрудников, и работа с ними доставляла подлинное удовольствие.

В области трехмерных солитонов я отстаивал идею локализованных солитонов типа Скирма, топологический заряд для которых определялся гомотопической группой π_3 в отличие от «ежей» Полякова — т'Хоофта, связанных с группой π_2. Любимым объектом был тороидальный солитон для n-поля, принимающего значения на сфере S^2, топологическим зарядом для которого является инвариант Хопфа — своеобразный скрученный вихрь. К сожалению, до сих пор нет строгого доказательства существования для такого решения.

Начиная с 75 г. вместе с В. Е. Корепиным я приступил к систематической разработке квазиклассического приближения к квантовой теории солитонов. Здесь большую роль сыграл опыт работы с континуальным интегралом, который после работ с В. Н. Поповым я неоднократно продумывал, в том числе для обзорных лекций в Лез-Уш в 75 г., и для монографии по калибровочным полям, написанной совместно с А. А. Славновым в 76 г. Кстати, последняя явилась первым изложением квантовой теории поля, в котором формализм континуального интеграла вводится с самого начала, минуя операторное квантование. Мы с Корепиным разработали технику разложения по петлям для S-матрицы, допускающую солитонные начальные и конечные состояния. Эта техника альтернативна более популярному методу коллективных переменных и в отличие от него явно релятивистски инвариантна. Наши результаты опубликованы в виде большой статьи в «Physical Reports».

По мере работы все более настоятельно чувствовалась необходимость точного квантования моделей теории поля, допускающих решение методом обратной задачи. Для одной модели — нелинейного уравнения Шредингера (НШ) — классическое и квантовое решение были независимо известны и квазикласси-

ческий подход к переменным действие—угол хорошо их согласовывал. Однако не хватало общей идеи.

Первая половина 78 г. стала поворотным пунктом. В конце 77 г. в мою лабораторию прибыла болгарская аспирантка С. Пачева, муж которой Е. Нисимов уже работал у нас. В связи с заинтересовавшей нас тогда проблемой об аномалиях токов в двухмерных киральных моделях, она предложила сделать доклад о работах Р. Бакстера [32] по квантовой теории магнитных цепочек. Я уже слышал о важности этих работ для теории поля от А. Лютера. В докладе Пачевой вдруг появился оператор $T(\lambda)$, игравший роль производящей функции для квантовых интегралов движения. Аналогия с формулами следов из метода обратной задачи была потрясающая. Стало ясно, что основным данным рассеяния классического метода обратной задачи — коэффициентам отражения $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ — можно и нужно придать квантовый смысл. Этой задачей в начале 78 г. занялся молодой сотрудник Е. К. Склянин на примере модели НШ.

Довольно скоро стало ясно, что основную роль играет правильное обобщение известных скобок Пуассона

$$\{a(\lambda),\ b(\mu)\} = a(\lambda)\, b(\mu)/(\lambda^2 - \mu^2)$$

на квантовый случай. Летом 78 г. мне пришла в голову идея об однородном соотношении

$$A(\lambda)\, B(\mu) = \alpha(\lambda, \mu)\, B(\mu)\, A(\lambda),$$

где $\alpha = 1 + i/(\lambda - \mu) + \ldots$, где ... означают квантовые поправки. Опыт квазиклассической работы с моделями НШ и sine-Gordon позволил дать правдоподобную формулу для $\alpha(\lambda, \mu)$ для этих моделей. Если для модели НШ, допускающей сохранение заряда, оправдание этих формул оказалось несложным и было быстро сделано Е. К. Скляниным, то для релятивистской модели sine-Gordon не было видно никакого подхода.

Осенью 78 г. мы в Ленинграде достаточно созрели для того, чтобы устроить специальное рабочее совещание: «Квантовая теория солитонов», которое с тех пор собирается регулярно раз в 2 года. На этом совещании я рассказал о гипотетических коммутационных соотношениях. Присутствовавший В. Фатеев еще раз напомнил о Бакстере — у него были какие-то ассоциации между написанными соотношениями и формулами Бакстера. В результате Женя Склянин взялся всерьез читать Бакстера и пришел к важной идее о коммутационных соотношениях для квантового аналога оператора L вспомогательной линейной задачи, взятого из метода обратной задачи. Дальше события развивались быстро. Зная о решеточных приближениях в теории поля, я построил приближенный L_n-оператор для модели sine-Gordon и получил для него соотношение

$$R(\lambda, \mu)\,(L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)) = (L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda))\, R(\lambda, \mu),$$

из которого требуемые коммутационные соотношения для $A(\lambda)$ и $B(\mu)$ следуют естественным способом при переходе к пределу бесконечной решетки. Но тут появился неожиданный подарок: оказалось, что эти соотношения вместе с еще некоторым свойством L-оператора позволили строить собственные векторы оператора энергии и для конечных решеток! Никакой алгебраической геометрии, как всегда, квантовая теория оказалась проще классической.

Так мы, развивая квантовый аналог метода обратной задачи, пришли к алгебраическому анзатцу Бете и сомкнулись с деятельностью по точным моделям в квантовой теории магнетиков, ведущей историю от классической рабо-

ты Бете 31 г. [33], и точно решаемым моделям классической статистической физики двумерных решеток. Наш подход дал естественные рамки и обобщения для этого важного раздела математической физики.

Конечно, основным интересом для меня оставалась квантовая теория поля, в данном случае модель sine-Gordon. Теперь для ее решения были все технические средства, и вскоре Тахтаджян, Склянин и я написали подробную статью. В марте 79 г. я также написал большую статью «Квантовый метод обратной задачи», в которой подвел первые итоги развития этого полугодия. Наконец, для тома УМН, посвященного 70-летию Н. Н. Боголюбова, Тахтаджян и я подготовили обзор по нашему подходу к задачам статистической физики.

Уместно сказать об еще одном стимуле для поисков точной квантовой теории солитонов. Во время командировки в США весной 78 г. я узнал о работах Адлера и Костанта, в которых была установлена интерпретация некоторых примеров динамических систем, интегрируемых методом обратной задачи, в терминах симплектических однородных пространств (орбит). В работе Адлера речь шла об уравнении КдФ, а Костант разбирал конечномерный пример модели Тода. Известные мне от А. А. Кириллова результаты о соответствии классической динамики на орбитах и теории представлений, играющих для них роль квантового аналога, немедленно указывали на возможность построения точной квантовой теории для интегрируемых моделей, подпадающих под аналог теории Адлера—Костанта. К сожалению, до сих пор окончательного смыкания конкретного подхода, описанного выше, и общих теоретико-групповых соображений еще не получено. Однако на этом пути мои сотрудники А. Г. Рейман и М. А. Семенов-Тян-Шанский получили много красивых результатов в классической области.

Итак, к 79 г. произошел замечательный, в высшей степени удовлетворительный синтез моих научных интересов разных лет. Теория рассеяния через обратную задачу и метод обратной задачи вошли в квантовую теорию поля. Массивная модель Тирринга, служившая 20 лет назад выходом в теорию поля, снова появилась в качестве заключительного шага—иллюстрации созданного общего метода.

На этом я закончу последовательное изложение своей научной биографии. Последние 5 лет усилия всей группы были посвящены консолидации и техническому развитию квантового метода обратной задачи, которое в основном теперь завершено. В частности, В. Е. Корепин и новый член лаборатории Федя Смирнов получили впечатляющие результаты по корреляционным функциям и формфакторам, показав, что метод позволяет выйти за рамки поверхности энергии. Буквально в недрах метода вырос Коля Решетихин, открывший необыкновенное комбинаторное богатство R-матриц. Наконец, подпала под действие метода долго сопротивлявшаяся задача о квантовании кирального поля.

В результате я нахожусь на распутье. В физике тем временем произошли поучительные перемены. Расчеты на решетках затихли в ожидании новых сверхкомпьютеров. Инстантоны почти забыты, и идеи для доказательства конфайнмента все еще нет. Идея великого объединения постепенно привела к разгулу спекулятивных страстей: суперсимметрия, многомерное пространство-время и, наконец, суперструна. Интересно видеть, как параллельно с этим в мировой физике выросло новое поколение раскрепощенно занимающихся математическими упражнениями без страха перед старшими, которые в любой момент могут их спросить об отношении их результатов к эксперименту. Боюсь, что

я в такое развитие внес большой вклад как работами, так и пропагандой новой математической физики. Однако для нового поколения молодых ученых, слушавших, скажем, мои лекции в Лез-Уш в 1975 г., я уже непоправимо старый консерватор.

До сих пор новые занятия выглядят как кинематические, и какое-то время я мог утешать себя и ободрять свою группу лозунгом: «Лучше хорошая динамика в двумерном, чем кинематика в одиннадцатимерном пространстве-времени». Однако нельзя исключить возможность, что развитие идет к тривиализации динамики и на элементарном уровне она действительно становится элементарной. К тому же струна — это тоже двухмерная теория. Таким образом, вполне возможно, что нас увлечет волна разработки теории струны.

Тем временем я не могу отделаться от мнения, что старая честная теория Янга—Миллса еще не исчерпала всех своих возможностей. Одна из них связана со свойством аномалий, которые недавно были связаны с дифференциальной топологией. Мне удалось внести в эту проблему свой вклад — я нашел нетривиальное расширение калибровочной группы в трехмерном пространстве, обобщающее центральное расширение группы петель. В настоящее время вместе с новым учеником Самсоном Шаташвили я занимаюсь поисками применения этого результата к квантовой теории поля Янга—Миллса, взаимодействующего с киральными фермионами. В этом к нам скоро подсоединится молодой студент физфака Антон Алексеев.

5. Неудачные проекты, ошибки и упущенные возможности

Описанная выше картина моего научного развития слишком прямолинейна и радужна. Я думаю, что будет поучительно поделиться здесь и опытом неудач. Тетради, в которые я переписываю результаты вычислений с черновых листочков, свидетельствуют о многих незаконченных или тупиковых проектах (в случае публикации статьи я, как правило, не переписываю черновиков).

Выше уже говорилось о поисках совместно с П. П. Кулишом «сверхпроводящих» решений для введения массы в теорию Янга—Миллса в окрестности 70 г. У нас не было руководящей идеи. Основной вопрос состоял в том, что́ будет играть роль размерного параметра. Идея Намбу—Иона-Лазинио о том, что в качестве такого параметра можно взять импульс обрезания, казалась мне противоестественной. Сейчас я могу назвать это недостатком воображения, но в то время априорные ограничения уводили меня в сторону. Я слишком поздно осознал, что формула «размерной трансмутации»

$$m = \Lambda e^{-1/g},$$

где Λ — импульс обрезания, а g — безразмерная константа связи, столь же осмысленна, как и приведенная выше формула перенормировки заряда для уравнения Шредингера с точечным потенциалом. В результате я упустил возможность участвовать в буме «асимптотической свободы» начала 70-х годов. Это тем более обидно, что как уже отмечалось выше, я был уверен в отсутствии парадокса. «0-заряд» для теории Янга—Миллса имел в своем распоряжении как однопетлевые поправки, сосчитанные с В. Н. Поповым в 1967 г., так и определение инвариантного заряда, данное А. Славновым в 1971 г. [34].

Вместо этого поиски размерного параметра вывели меня на киральные поля, определив мои попытки в 71—74 гг. сделать свой вариант для модели объединенного электромагнитного и слабого взаимодействий. Идеологически

это направление оказалось несостоятельным, но технические приемы оказались полезны для инвариантной формулировки модели Скирма.

В середине 70 г. А. А. Мигдал и А. М. Поляков выяснили важную модельную роль киральных полей в двумерном пространстве-времени [35, 36], а В. Е. Захаров и А. В. Михайлов доказали интегрируемость в классическом варианте [37]. Поэтому естественно было попытаться найти точное квантовое решение двумерной модели в рамках квантового метода обратной задачи. Работа в этом направлении заняла неоправданно большое время; впрочем, анализируя, наконец, полученное вместе с Колей Решетихиным решение, я вижу, что оно использует все последние достижения метода, разработанные уже в 80-е годы. Тупиковое направление, на которое Л. А. Тахтаджян и я убили массу времени, состояло в попытке получить модель кирального поля как подходящий предел неабелевой модели Тода. Мираж близкого решения дезориентировал нас несколько лет. Решение было получено на другом пути, когда мы осознали важность и богатство интегрируемых моделей магнетиков с большим значением спина.

Несостоятельные поиски были и в математических направлениях. В середине 60-х годов я очень активно увлекался методом орбит Кириллова—Костанта для построения неприводимых представлений групп Ли как квантования симплектических однородных пространств. Возможность развить инвариантную процедуру квантования на нелинейных многообразиях была весьма привлекательна. В качестве нетривиального примера я выбрал странные серии представлений вещественных полупростых групп Ли. Однако аспирант В. Л. Калинин, хорошо выполнивший дипломную работу по доказательству формулы следа Сельберга и которому я дал эту задачу в качестве диссертационной темы, проникся к ней отвращением и использовал все силы для доказательства ее бесперспективности. В результате из этого проекта ничего не вышло. Сейчас странные серии принято описывать в терминах L_2-когомологий, и я до сих пор не собрался с силами посмотреть естественность этого языка с точки зрения метода орбит.

Говоря о развитии теории Сельберга, следует упомянуть о попытках перейти от группы SU (2) к группам старшего ранга. У меня перед глазами была естественная аналогия с многочастичным уравнением Шредингера, причем выходы разной размерности фундаментальной области на бесконечность соответствовали разным каналам рассеяния. Возможность работы в этом направлении я обсуждал с другим своим партнером по работе над формулой следа — А. Б. Венковым. Он быстро убедил меня, что общие методы теории рассеяния слишком громоздки для этой тематики. Дело в том, что дискретные подгруппы с конечным объемом фундаментальной области в случае старшего ранга имеют арифметическое происхождение и метод Лэнглендса, явно это учитывающий, имеет преимущество. Насколько я знаю сейчас, ситуация в этой теме не окончательно удовлетворительна, и, возможно, когда-нибудь придется возродить мой проект.

Незавершенные проекты и работа в тупиковом направлении занимают значительную часть рабочего времени каждого ученого, и к этому надо относиться спокойно. Гораздо более болезненно воспринимаются упущенные возможности (термин, введенный Ф. Дайсоном).

Трудно подавить ревность, когда результат, к которому ты был близок, получен другим. Невольно обсуждаешь сам с собой, что́ увело тебя от пра-

вильного направления, какие шоры затемнили твое воображение. Такое продумывание бывает полезным для дальнейшей научной деятельности.

В моей жизни в наиболее драматических случаях роль шор сыграла неприязнь к спонтанному нарушению симметрии. Общаясь с А. Поляковым в последнее время, я наглядно убедился, как полученное в молодости образование по статистической физике помогает ему работать в квантовой теории поля. У нас на физфаке ЛГУ в мое студенческое время со статфизикой было плохо, и в результате она неизменно вызывала во мне отрицательные эмоции (наверное, подобные таковым у В. И. Арнольда по отношению к квантовой теории). Только работая с интегрируемыми моделями в последние годы, я частично проникся идеями статфизики. В конце же 60-х годов в период активной работы с полями Янга—Миллса я был их начисто лишен. Поэтому я и не обратил должного внимания на модель Вейнберга после нашего обмена письмами в 67 г. — спонтанное нарушение, или механизм Хиггса, играет в ней основную роль. Мне хотелось ввести массу более элегантно. В результате я прошел мимо наиболее модного направления в развитии теории Янга—Миллса в начале 70-х годов.

Нелюбовь к механизму Хиггса и, более общо, скалярным полям материи, помешала мне еще раз, когда в начале 74 г. я искал примеры многомерных солитонов и упустил монопольное решение т' Хоофта—Полякова [38, 39]. Как уже отмечалось выше, я знал подстановку Янга—Ву, но вместо скалярного поля пытался использовать нелинейное n-поле со значениями на двумерной сфере.

О печальной истории с парадоксом «0-заряд» для теории Янга—Миллса уже говорилось выше.

Разбирая неудачи, следует упомянуть и об ошибках в опубликованных работах. Я знаю о трех серьезных ошибках в своих статьях; к счастью, все они оказались поправимыми.

Исследуя свойства компонент $\psi_\alpha(k_\alpha, p_\alpha)$, $\alpha = 12, 23, 31$, волновой функции системы трех частиц, я получил для них гельдеровские оценки с разными показателями гладкости по переменным k_α и p_α. Мне, по недоразумению, показалось, что для дальнейшей работы нужна лишь гладкость каждой компоненты по своей переменной k_α. Это действительно так для каждого двухчастичного канала, отвечающего индексу α. Однако в трехчастичном канале участвует сумма компонент и переменная типа k одного канала является линейной комбинацией переменных k и p для другого; другими словами, полученная мной гладкость еще не обеспечивала свойство трехчастичной волновой функции. Необходимую поправку нашел Д. Р. Яфаев [40], который использовал более тонкие функциональные пространства.

Другая ошибка была допущена при формулировке необходимых и достаточных свойств матрицы рассеяния для одномерного уравнения Шредингера с потенциалом $v(x)$, удовлетворяющим условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|v(x)|\,dx < \infty.$$

В ситуации общего положения $r(0) = -1$, что и сформулировано в моей работе. Однако это условие следует уточнить в виде

$$r(k) = -1 + \alpha k + o(k), \quad \alpha \neq 0.$$

Это, а также более громоздкое условие в случае присутствия виртуального уровня было найдено В. А. Марченко, который в своей книге [41], вышедшей в 1977 г., и привел уточненную формулировку моей теоремы.

В свое оправдание я могу сказать то, что, занимаясь одномерным уравнением Шредингера в конце 50-х годов, я смотрел на него как на промежуточный пример между радиальным и трехмерным уравнением и обращал внимание в первую очередь на существенные новые свойства матрицы рассеяния, следующие из локальности потенциала. Эта задача, однако, неожиданно получила новый смысл через 10 лет в методе обратной задачи.

В 1979 г., по-видимому, не зная о поправке В. А. Марченко, Дейфт и Трубовиц в большой статье [42] очень драматично представили историю с моей ошибкой. В отличие от В. А. Марченко они не смогли разобрать случай потенциала с конечным первым моментом и наложили на $v(x)$ более сильное условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)\,|v(x)|\,dx < \infty,$$

обеспечивающее дифференцируемость $r(k)$ для всех k. К сожалению, появившаяся к тому времени более широкая и менее образованная солитонная аудитория некритически восприняла помпезную работу Дейфта и Трубовица и частично даже отдала им мою теорему. Такие трагикомические ситуации встречаются нечасто.

Больше всего досады доставило мне легкомыслие, проявленное в работе по квазиклассическому квантованию двойного солитона (бризера) в модели sine-Gordon. После того как мы с Тахтаджяном осознали компактность фазового пространства для внутреннего движения бризера, стало ясно, что его масса квантуется. Соответствующая формула приведена выше. Однако в первых публикациях, следуя формальной аналогии с квазиклассическими формулами квантовой механики, я произвольно заменил целое число n на $n + {}^1/_2$. Дополнительное слагаемое ${}^1/_2$ (индекс Маслова) в квантовой механике происходит из однопетлевого приближения. Но в такой полевой модели, как sine-Gordon, однопетлевая поправка проявляет себя по-другому. Как показали Дашен, Хаслахер и Неве [43], она приводит к перенормировке константы связи

$$\gamma \to \frac{\pi\gamma}{\pi-\gamma}.$$

Мы с Корепиным легко могли найти эту поправку, но упустили ее. К сожалению, это обстоятельство также косвенно повлияло на мой приоритет в квантовой теории солитонов.

Сейчас, когда я занимаюсь точными решениями моделей теории поля и использую более алгебраические, чем функционально-аналитические средства, я считаю, что ошибка в явной формуле более непростительна, чем в функциональной оценке. Лучший способ избавиться от ошибок — это выдержка. Работа не должна писаться в спешке, и ей следует полежать после того, как она написана, прежде чем посылать ее в журнал. Имея в виду именно это (а также задержку с переводами) я полусерьезно говорю своим ученикам, что мы должны работать на два года вперед, чтобы находиться на международном уровне. В современной научной жизни с ее спешкой и суетой это, к сожалению, удается крайне редко.

Заключение

На этом я закончу описание своей жизни в математической физике в течение 30 лет. Получившийся текст — это далеко не первая известная мне научная автобиография; возможно, что я набрался большей смелости и написал ее в более раннем возрасте, чем это обычно принято. Ну что ж, зато в этом случае взгляд назад может еще помочь мне самому в дальнейшей работе.

Если в одном слове сфокусировать сферу моих научных интересов, получится квантование.

Если одним термином охарактеризовать технические средства, это будет детерминант.

Если меня спросят, кто из математических физиков 20-го века мне наиболее импонирует, я отвечу — П. А. М. Дирак, Г. Вейль и В. А. Фок.

Думаю, что эти же выводы я сделал бы, если бы писал эту статью в более соответствующем возрасте, скажем через 10 лет.

На протяжении описанных 30 лет я встречал и получил помощь от многих хороших людей. Об этом подробно говорилось выше, так что я частично повторюсь. Я благодарен

О. А. Ладыженской за первый толчок в правильном направлении;

Ф. А. Березину за долгую научную дружбу;

В. П. Маслову за моральную поддержку и энтузиазм;

В. И. Арнольду за критику и обучение инвариантному геометрическому языку;

В. Е. Захарову за введение в новую (солитонную) тематику;

А. М. Полякову и С. П. Новикову за конструктивную и стимулирующую конкуренцию.

Мои ученики В. С. Буслаев, В. Н. Попов, О. А. Якубовский, Б. С. Павлов, П. П. Кулиш и С. П. Меркурьев, которым уже за 40, более молодые А. Б. Венков, И. Я. Арефьева, М. М. Скриганов, В. Б. Матвеев, Л. А. Тахтаджян, М. А. Семенов-Тян-Шанский, А. Г. Рейман, В. Е. Корепин и научная молодежь Е. К. Склянин, Ф. А. Смирнов, Н. Ю. Решетихин, В. О. Тарасов и С. Л. Шаташвили — это группа, которой можно гордиться. Общение и совместная работа с ними составляет основное содержание моей теперешней научной жизни.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фок В. А.* Начала квантовой механики. Л.: КУБУЧ, 1932.
2. *Friedrichs K. O.* Mathematical aspects of quantum theory of fields. N. Y.; L.: Intersci. publ., 1953.
3. *Левитан Б. М.* Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.: Гостехтеориздат, 1950.
4. *Повзнер А. Я.* О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $\Delta U + CU$ // Мат. сб. 1953. Т. 32 (74). С. 109—156; О разложении функций, являющихся решением задачи рассеяния // ДАН СССР. 1955. Т. 104, № 3. С. 360—367.
5. *Levinson N.* On the uniqueness of the potential in a Schroedinger equation for a given asymptotic phase // Dan. Videnskab. Selskab. mat.-fys. medd. 1949. Vol. 25, N 9.
6. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15. С. 309—360.
7. *Марченко В. А.* Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн // ДАН СССР. 1955. Т. 104. С. 695—698.
8. *Крейн М. Г.* Об определении потенциала частицы по ее S-функции // ДАН СССР. 1955. Т. 105. С. 433—436.
9. *Kay T., Moses H.* The determination of the scattering potential from the spectral measure function // Nuovo Cim. 1955. Vol. 2. P. 917—961; 1956. Vol. 3. P. 66—84; 1956. Vol. 3. P. 276—304.

10. *Ekstein H.* Theory of time-dependent scattering for multichannel processes // Phys. Rev. 1956. Vol. 101. P. 880—890.
11. *Friedrchs K. O.* On the perturbations of continuous spectra // Communs Pure and Appl. Math. 1948. Vol. 1. P. 361—406.
12. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. 1953. Т. 88. С. 593—596.
13. *Thirring W.* A soluble relativistic field theory // Ann. Phys. 1958. Vol. 9. P. 91—112.
14. *Березин Ф. А., Сушко В. Н.* Релятивистская двумерная модель самовзаимодействующего фермионного поля с ненулевой массой покоя // ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 1293 — 1306.
15. Новейшее развитие квантовой электродинамики: Сб. пер./ Под ред. Д. Д. Иваненко. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
16. Проблемы современной физики: Сб. пер. / Под ред. В. Б. Берестецкого, А. Д. Галанина. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. № 3.
17. *Швингер Ю.* Теория квантованных полей. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
18. Элементарные частицы и компенсирующие поля: Сб. пер./ Под ред. Д. Д. Иваненко. М.: Мир, 1964.
19. *Lichnerowicz A.* Théorie relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme. Paris: Masson, 1955.
20. *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономий: Пер. с фр. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
21. *Feynman R.* Quantum theory of gravitation // Acta phys. pol. 1963. Vol. 24. P. 697—722.
22. *Dirac P. A. M.* Forms of relativistic dinamics // Rev. Mod. Phys. 1949. Vol. 21. P. 392—400.
23. *Dirac P. A. M.* Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
24. *Dirac P. A. M.* The theory of gravitation in Hamiltonian form // Proc. Roy. Soc. A. Vol. 246. P. 333—343, 1958.
25. *De-Witt B.* Quantum theory of gravity // Phys. Rev. 1967. Vol. 160. P. 1113—1194.
26. *T'Hooft H.* Renormalization of massless Yang—Mills fields // Nucl. Phys. B. 1971. Vol. 33. P. 173—199.
27. *Selberg A.* Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series // J. Indian. Math. Soc. 1956. Vol. 20. P. 47—87.
28. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118—134.
29. *Finkelstein D.* Kinks // J. Math. Phys. 1966. Vol. 7. P. 1218—1225.
30. *Skyrme T. H. R.* A nonlinear field theory // Proc. Roy. Soc. A. 1961. Vol. 260. P. 127 — 138.
31. *Wy T. T., Yang C. N.* // Properties of matter in the unusual conditions / Ed. H. Mark, S. Cornbux. N. Y., Intersci., 1969. P. 349—354.
32. *Baxter R.* Partition function of the Eight-Vertex lattice model // Ann. Phys. 1972. Vol. 70. P. 193—228.
33. *Bethe H.* Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunctionen der linearen Atomkette // Ztschr. Phys. 1931. Bd. 71. S. 205—226.
34. *Славнов А. А.* Тождества Уорда в калибровочных теориях // ТМФ. 1972. Т. 10. С. 153 — 161.
35. *Polyakov A. M.* Interaction of Goldstone particles in two dimensions. Application to ferromagnets and massive Yang—Mills fields // Phys. Lett. B. 1975. Vol. 59. P. 79—81.
36. *Мигдал А. А.* Фазовые переходы в калибровочных и решетчатых системах // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. С. 1457—1465.
37. *Захаров В. Е., Михайлов А. В.* Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 1953—1973.
38. *T'Hooft H.* Magnetic monopoles in unified gauge theories // Nucl. Phys. B. 1974. Vol. 79. P. 276—284.
39. *Поляков А. М.* Спектр частиц в квантовой теории поля // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 430—433.
40. *Яфаев Д. Р.* О сингулярном спектре в системе трех частиц // Мат. сб. 1978. Т. 106, № 4. С. 622—640.
41. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.
42. *Deift P., Trubowitz E.* Inverse scattering on the line // Communs Pure and Appl. Math. 1979. Vol. 32. P. 121—253.
43. *Dashen R., Hasslacher B., Neveu A.* Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques // Phys. Rev. D. 1975. Vol. 11. P. 3424—3450.