Б. С. Павлов, Л. Д. Фаддеев, З.4. Нуль-множества операторных функций с положительной мнимой частью, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1978, том 81, 85–88

3.4. НУЛЬ-МНОЖЕСТВА ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МНИМОЙ ЧАСТЬЮ

Пусть E – сепарабельное гильбертово пространство, M – функция, аналитическая в единичном круге $\mathbb{D}$ и принимающая значения в множестве непрерывных операторов, действующих в E, непрерывная по норме вплоть до границы и представимая в каждой точке ζ, $\zeta \in \operatorname{clos}\mathbb{D}$, в виде

$$M(\zeta) = I + C(\zeta),$$

где $C(\zeta)$ – вполне непрерывный оператор в E. Предположим, что:

А. В замкнутом единичном круге $\operatorname{clos}\mathbb{D}$ функция M имеет модуль непрерывности ω:

$$\|M(\zeta)-M(\zeta')\| \leqslant \omega(|\zeta-\zeta'|), \quad \zeta,\zeta' \in \operatorname{clos}\mathbb{D}.$$

Б. Функция M имеет в круге $\mathbb{D}$ положительную мнимую часть: $\operatorname{Im} M(\zeta) \stackrel{def}{=} \dfrac{M(\zeta)-M(\zeta)^*}{2i} > \mathbb{O}$ при всех ζ, $\zeta \in \mathbb{D}$.

Условимся называть корнем функции M такую точку ζ, $\zeta \in \operatorname{clos}\mathbb{D}$, что

$$\inf_{e,\|e\|=1} \|M(\zeta)e\| = 0.$$

Ввиду полной непрерывности оператора $I-M$ всякому корню ζ отвечает вектор e, $e \in E$, такой, что $M(\zeta)e = \mathbb{O}$. Легко убедиться, что корни функции с положительной мнимой частью могут лежать лишь на окружности $\mathbb{T}$. Обозначим множество всех корней функции M символом Λ, и пусть $m\Lambda_\delta$ – мера Лебега его δ-окрестности на окружности $\mathbb{T}$.

ГИПОТЕЗА I. При условиях А, Б имеет место оценка

$$m\Lambda_\delta \leqslant C\cdot\omega(\delta), \quad C>0.$$

Поскольку вопрос о структуре множества корней в спектральных задачах, о которых пойдет речь ниже, является локальным, т.е. связан лишь с поведением функции M вблизи множества Λ, то целесообразно ослабить условие А, заменив его следующим

$$\text{А}'.\ \|M^{-1}(z)\| \leqslant \omega(\operatorname{dist}(z,\Lambda)).$$

ГИПОТЕЗА 2. При условиях А$'$, Б выполняется неравенство

$$m\Lambda_\delta \leqslant C\cdot\omega(\delta).$$

Отметим, что справедливость любой из гипотез I, 2 с модулем непрерывности ω, $\omega(\delta) \equiv \delta \cdot const$, влекла бы конечность множества корней функции M.

Высказанные гипотезы согласуются с известными фактами теории операторов и теории скалярных аналитических функций. Их доказательство позволит описать структуру сингулярного и дискретного спектра возмущенного оператора в терминах "относительной гладкости" возмущения. С целью проиллюстрировать указанные связи, опишем ситуацию теории возмущений, где возникают такого сорта вопросы.

Пусть H – гильбертово пространство, $\overset{\circ}{A}$, V – самосопряженные операторы в H, $V \geqslant 0$,

$$A = \overset{\circ}{A} + V,$$

E – подпространство значений оператора V, $E = clos\, VH$. Из второго резольвентного тождества немедленно выводится соотношение между резольвентами возмущенного и невозмущенного операторов

$$(I_E - V^{1/2} \mathcal{R}_z V^{1/2})(I_E + V^{1/2} \overset{\circ}{\mathcal{R}}_z V^{1/2}) = I_E, \quad Im\, z > 0. \qquad (I)$$

Здесь $\mathcal{R}_z = (A - zI)^{-1}$, $\overset{\circ}{\mathcal{R}}_\lambda = (\overset{\circ}{A} - zI)^{-1}$. Функция M,

$$M(z) = I_E + V^{1/2} \overset{\circ}{\mathcal{R}}_z V^{1/2}, \quad M : E \to E,$$

обладает положительной мнимой частью. Возмущение V будем называть относительно гладким, если в каком-либо спектральном представлении τ оператора $\overset{\circ}{A}$

$$H \xrightarrow{\ \tau\ } L^2(\mathbb{R})$$
$$\overset{\circ}{A} f \xrightarrow{\qquad} x f(x)$$

оператору V отвечает интегральный оператор с гладким ядром. Возмущенный оператор A в этом представлении совпадает с так называемой моделью Фридрихса (см., например, [I]),

$$A f \xrightarrow{\ \tau\ } x f + \int v(x,\xi) f(\xi)\, d\xi. \qquad (2)$$

Задача исследования структуры сингулярного σ_s и дискретного σ_d спектров такого оператора может быть сведена (см.[I]) к изучению структуры множества корней Λ соответствующей операторной функции M, так как, согласно (I), выполнено $\sigma_s \cup \sigma_d \subset \Lambda$. Именно на этом пути доказана в [I] теорема о конечности дискретного и отсутствии сингулярного спектра модели Фридрихса при условии достаточной гладкости ядра ($v(x,\xi)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha>1/2$) и хорошего убывания на бесконечности. При этом решающую роль играет тот факт, что возникающая функция M в точках корней имеет повышенную гладкость по сравнению с ядром v и, таким, образом, для нее выполняется условие A' с $\omega(\delta)\equiv C\delta$.

Анализ одномерной модели Фридрихса с ядром класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha<1/2$, (см.[2]), показывает, что указанное соответствие остается справедливым и в этом случае:

ТЕОРЕМА[2]. Если $v(x,\xi)=\varphi(x)\varphi(\xi)$, $0<x,\ \xi<1$, $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, $\varphi\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha<1/2$, то функция M,

$$M(z)=\int_{-1}^{1}\frac{|\varphi(t)|^2}{t-z}\,dt,\quad \operatorname{Im} z>0,$$

удовлетворяет условию A' с $\omega\equiv C\delta^{2\alpha}$, а сингулярный и дискретный спектры оператора A,

$$Af=xf(x)+\int_{-1}^{1}\varphi(x)\varphi(t)f(t)\,dt$$

в пространстве $L^2(-1,1)$ содержатся в множестве Λ корней функции M, которое удовлетворяет условию

$$m\Lambda_\delta\leqslant C\delta^{2\alpha},\quad \delta>0.$$

В [2] также доказано,что сформулированная теорема о спектре в определенном смысле точна.

Построения работы [2] основаны на скалярном аналоге гипотезы 2, справедливость которого доказана в статье [3]. Что касается гипотезы I в скалярном случае, то, повидимому, можно значительно усилить соответствующее утверждение. Подробнее см. стр. 249 настоящего сборника.

Мы же не решаемся формулировать столь тонкие гипотезы в многомерном случае. Дело в том, что даже предлагаемые нами более простые на вид утверждения I и 2 пока не удалось доказать (уже) в случае матриц-функций 2x2.

ЛИТЕРАТУРА

I. Ф а д д е е в Л.Д. О модели Фридрихса в теории возмущений. - Труды Матем.ин-та. АН СССР им.В.А.Стеклова, I964, 30, 33-75.

2. П а в л о в Б.С., П е т р а с С.В. О сингулярном спектре слабо возмущенного оператора умножения. – Функц. анал. и его прил., 1970, 4, № 2, 54–61.
3. П а в л о в Б.С. Теорема единственности для функций с положительной мнимой частью. – В кн.: Проблемы матем.физики, ЛГУ, 1970, 118–124.

Б.С.ПАВЛОВ
Л.Д.ФАДДЕЕВ

СССР,
191011, Ленинград, Д-11,
Фонтанка, 27
ЛОМИ