А. Ю. Волков, Л. Д. Фаддеев, Янг-бакстеризация квантового дилогарифма, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1995, том 224, 146–154

А. Ю. Волков, Л. Д. Фаддеев

ЯНГ–БАКСТЕРИЗАЦИЯ КВАНТОВОГО ДИЛОГАРИФМА

Посвящается памяти В. Н. Попова

В этой заметке мы дадим доказательство соотношения Янга–Бакстера для одной специальной R-матрицы, зависящей от спектрального параметра. Эта R-матрица играет роль фундаментальной R-матрицы в смысле [1] для простейшего оператора Лакса, связанного с тригонометрическим случаем основного коммутационного соотношения. Опишем этот оператор Лакса.

Пусть P и Q – гейзенбергова пара самосопряженных операторов с перестановочным соотношением

$$[P, Q] = -i\gamma I. \tag{1}$$

Мы трактуем вещественное число γ как безразмерную константу связи; постоянная Планка $\hbar$ положена равной 1. Построим вейлеву пару унитарных операторов

$$U = e^{iP}, \quad V = e^{iQ} \tag{2}$$

с перестановочным соотношением

$$UV = e^{i\gamma} VU. \tag{3}$$

Квантовое пространство $\mathcal{H}$, где неприводимо представлены P и Q, можно реализовать как $L_2(\mathbb{R})$ с элементами $\psi(x)$

$$Q\psi(x) = x\psi(x); \quad P\psi(x) = \frac{\gamma}{i}\frac{d}{dx}\psi(x) \tag{4}$$

(координатное представление). Для дальнейшего конкретный выбор реализации P и Q не является существенным.

Оператор Лакса действует в тензорном произведении квантового пространства $\mathcal{H}$ и вспомогательного пространства $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$ и может быть задан как матрица 2×2, коэффициенты которой являются операторами в $\mathcal{H}$

$$L_{f,a}(x) = \begin{pmatrix} U & xV \\ -xV^{-1} & U_1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Здесь x – комплексное число, называемое спектральным параметром. Индексы f и a обозначают квантовое и вспомогательное пространства, где действует $L_{f,a}(x)$. Эти обозначения удобны для записи основного коммутационного соотношения (ср. [2])

$$R_{a_1,a_2}\left(\frac{x}{y}\right) L_{f,a_1}(x)L_{f,a_2}(y) = L_{f,a_2}(y)L_{f,a_1}(x)R_{a_1,a_2}\left(\frac{x}{y}\right), \tag{6}$$

которое понимается как формула в $\mathcal{H}\otimes\mathcal{V}_1\otimes\mathcal{V}_2$. Здесь $R_{a_1,a_2}(x)$ – оператор в тензорном произведении $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V} = \mathbb{C}^4$, который может быть задан как 4×4 матрица

$$R(x) = \begin{pmatrix} [tx] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [x] & [t] & 0 \\ 0 & [t] & [x] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [tx] \end{pmatrix}; \quad [\alpha] = \alpha - \frac{1}{\alpha}, \tag{7}$$

где

$$t = e^{i\gamma} \tag{8}$$

(тригонометрическая или XXZ R-матрица).

Оператор $L_{f,a}(x)$ неоднократно появлялся в различных приложениях в теории квантовых интегрируемых моделей [3–7]. Более общая формула

$$L(x) = \begin{pmatrix} a\,U & bx\,V \\ cx\,V^{-1} & d\,U^{-1} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

в которой участвует набор параметров $h = (a,b,c,d)$, которые могут быть ограничены на алгебраическую кривую, появлялась в связи с киральной моделью Поттса [8] или моделью Азбеля–Хофштадтера [9]. Однако здесь мы ограничимся рассмотрением оператора (5).

Фундаментальной R-матрицей для данного Лаксова оператора называется оператор $R_{f_1,f_2}(x)$ в тензорном произведении двух квантовых пространств $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$, участвующий в соотношении

$$R_{f_1,f_2}\left(\frac{x}{y}\right) L_{f_1,a}(x)\,L_{f_2,a}(y) = L_{f_2,a}(y)\,L_{f_1,a}(x)\,R_{f_1,f_2}\left(\frac{x}{y}\right), \tag{10}$$

записанного в $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{V}$. (Здесь читатель должен убедиться в удобстве нашей мнемоники). Поскольку $\mathcal{V}$ двумерно, (10) представляет собой систему 4-х линейных уравнений для одного оператора $R_{f_1,f_2}(x)$. Эта система была исследована в [6], где было показано, что она имеет решение в виде

$$R_{f_1,f_2}(x) = P_{f_1,f_2}r(W,x). \tag{11}$$

Здесь P_{f_1,f_2} – оператор перестановки в $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$, а оператор $r(W,x)$, как следует из обозначения, является функцией одной операторной переменной W

$$W = U_1U_2V_1^{-1}V_2, \tag{12}$$

где U_1, V_1 и U_2, V_2 –вейлевы пары в первом и втором квантовых пространствах. Функция $r(w,x)$ в свою очередь является решением функционального соотношения

$$\frac{r(tw,x)}{r(t^{-1}w,x)} = \frac{1+xw}{x+w} \tag{13}$$

В работе [10], где была показана роль функции $r(w,x)$ для дискретизованной модели Sine-Gordon, нами было сделано утверждение, что функциональное уравнение (13) имеет решение $r(w,x)$ такое, что оператор $r(W,x)$ удовлетворяет соотношению Янга-Бакстера в следующей форме. Пусть u,v – вейлева пара с соотношением типа (3), но с удвоенным показателем γ

$$uv = t^2vu, \tag{14}$$

тогда справедлива формула

$$r(u,x)\,r(v,xy)\,r(u,y) = r(v,y)\,r(u,xy)\,r(v,x). \tag{15}$$

Нетрудно понять, что эта формула реализует абстрактное соотношение

$$R_{12}(x)\,R_{23}(xy)\,R_{12}(y) = R_{23}(y)\,R_{12}(xy)\,R_{23}(x) \tag{16}$$

для операторов в $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$, если положить в (15)

$$u = U_1U_2V_1^{-1}V_2, \quad v = U_2U_3V_2^{-1}V_3 \tag{17}$$

Следует отметить, что в [10] не было дано конкретное описание этого решения и наше утверждение было подвергнуто критике [11]. Поэтому здесь мы точно определим искомое решение уравнения (13) и явно докажем соотношение (15).

Заметим, что решение уравнения (13) в виде ряда по w

$$r(w,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x)w^n, \tag{18}$$

где

$$c_n(x) = \frac{(1-x)(t-xt^{-1})\dots(t^{n-1}-xt^{1-n})}{(t^{-1}-xt)\dots(t^{-n}-xt^n)}, \quad n>0,$$

$$c_0 = 1, \qquad c_{-n}(x) = c_n(x) \tag{19}$$

при вещественных γ сталкивается с трудностью типа малых знаменателей. Если γ/π рационально,

$$\gamma = \pi \frac{M}{N}, \tag{20}$$

то суммирование в (18) можно ограничть на интервал $0 \leqslant n \leqslant N-1$. В этом случае оператор $r(w,x)$ в определенном базисе совпадает с конечномерной R-матрицей Фатеева–Замолодчикова [12]. Однако для иррационального γ такой обрыв недопустим. В недавних лекциях [13] одного из авторов эта ситуация была подробно проанализирована. Было показано, что более корректно использовать некомпактифизированную переменную

$$s = \frac{1}{i} \ln w \tag{21}$$

как аргумент решения r. Другими словами, вместо вейлевой пары u, v в (14) следует использовать соответствующую гейзенбергову пару p, t с перестановочным соотношением

$$[p, q] = -2i\gamma I \tag{22}$$

и записать формулу (15) в виде

$$l(p,\lambda)\, l(q, \lambda+\mu)\, l(p,\mu) = l(q,\mu)\, l(p, \lambda+\mu)\, l(q,\lambda) \tag{23}$$

где $l(s,\lambda) = r(w,x)$ и для симметрии мы ввели аддитивный спектральный параметр

$$\lambda = \frac{1}{i} \ln x. \tag{25}$$

Функциональное уравнение (13) в новых переменных приобретает вид

$$\frac{l(s+\gamma,\lambda)}{l(s-\gamma,\lambda)} = \frac{1+e^{i(\lambda+s)}}{e^{i\lambda}+e^{is}}. \tag{26}$$

Мы покажем здесь, что уравнение (26) имеет решение, удовлетворяющее соотношению (23).

Мы рассмотрим сначала более простое уравнение

$$\frac{m(s+\gamma)}{m(s-\gamma)} = \frac{1}{1+e^{is}}, \tag{27}$$

соответствующее “компактифицированному” уравнению

$$\frac{n(tw)}{n(t^{-1}w)} = \frac{1}{1+w}, \tag{28}$$

которое в [14] было положено в основу определения квантового дилогарифма. В то время как решение уравнения (28) в виде ряда по w

$$n(w) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k w^k}{k(t^k - t^{-k})}\right\} \tag{29}$$

сталкивается при вещественных γ с трудностью малых знаменателей, уравнение (27) имеет решение, гладко зависящее от $\gamma \in \mathbb{R}$

$$m(s) = \exp \frac{1}{4} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\xi s}}{\operatorname{sh}\pi\xi \operatorname{sh}\gamma\xi} \frac{d\xi}{\xi}. \tag{30}$$

Контур интегрирования здесь обходит сингулярность при $\xi = 0$ сверху. Функциональные уравнения типа (26) встречались в теории дифракции и функция $m(s)$ может быть названа интегралом Малюженица [15]. Сравнение (29) и (30) показывает, что формально мы имеем

$$m(s) = \frac{n_t(w)}{n_{\hat{t}}(\hat{w})}, \tag{31}$$

где $n_t(w)$ – ряд (29), а $n_{\hat{t}}(\hat{w})$ – такой же ряд, но с параметрами

$$\hat{t} = t^{\pi^2/\gamma^2}, \quad \hat{w} = w^{\pi/\gamma}. \tag{32}$$

Хотя числитель и знаменатель в правой части (29) определены лишь при $\operatorname{Im}\gamma > 0$, их отношение регулярно при вещественных γ.

Общая картина, когда две дополнительных вейлевых переменных w и $\hat{w}$ определяют одну гейзенбергову переменную s, обсуждается в [17].

В [14] показано в каком смысле функция $n(w)$, хорошо определенная при $\operatorname{Im}\gamma > 0$, является квантовым аналогом дилогарифма Эйлера. В частности, там отмечено, что соотношение

$$n(v)\,n(u) = n(u)\,n(t^{-1}uv)\,n(v), \tag{33}$$

полученное ранее в [16], является аналогом знаменитого пятичленного функционального уравнения для дилогарифма. Имея в виду, что в гейзенберговых переменных

$$t^{-1}uv = e^{i(p+q)}, \tag{34}$$

и используя формулу (31) можем утверждать, что аналогом (33) является соотношение

$$m(q)\,m(p) = m(p)\,m(p+q)\,m(q), \tag{35}$$

которое мы и будем использовать в дальнейшем. При этом мы перенесем на $m(s)$ название "квантовый дилогарифм".

Теперь мы можем вернуться к функции $l(s,\lambda)$. Сравнение функциональных уравнений (27) и (26) показывает, что $r(s,\lambda)$ можно представить в виде

$$r(s,\lambda) = \frac{m(s)\,m(-s)}{m(\lambda+s)\,m(\lambda-s)}. \tag{36}$$

Другими словами, спектральный параметр входит в r-оператор просто как сдвиг операторной переменной.

Заметим теперь, что

$$m(s)\,m(-s) = \mathrm{const}\, h(s), \qquad h(s) = \exp\left\{-\frac{is^2}{4\gamma}\right\} \tag{37}$$

В силу однородности уравнения Янга-Бакстера (15), мы не будем обращать внимание на факторы, не зависящие от динамических переменных. Поэтому мы будем проверять соотношение (23) для функции $l(s,\lambda)$ вида

$$l(s,\lambda) = \frac{h(s)}{m(\lambda+s)\,m(\lambda-s)}. \tag{38}$$

Вся проверка будет основана на соотношениях

$$qh(p) = h(p)(p+q) \tag{39}$$

$$ph(q) = h(q)(p-q) \tag{40}$$

и свойстве квантового дилогарифма (35).

Подставим выражение типа (38) в (23) и вынесем числители налево, используя (39) и (40) для замены аргументов в знаменателе $l(s,\lambda)$. После этого они сократятся в силу соотношения

$$h(p)h(q)h(p) = h(q)h(p)h(q) \tag{41}$$

которое немедленно следует из (39), (40). Заметим, что (41) также представляет собой соотношение типа Янга-Бакстера, но без спектрального параметра.

Для доказательства (23) нам остается проверить формулу

$$\theta(q,\lambda)\theta(q-p,\lambda+\mu)\theta(p,\mu) = \theta(p,\mu)\theta(p+q,\lambda+\mu)\theta(q,\lambda), \tag{42}$$

где

$$\theta(s,\lambda) = m(\lambda+s)m(\lambda-s), \tag{43}$$

Мы сделаем эту проверку, используя несколько раз соотношение квантового дилогарифма (35), подбирая в качестве гейзенберговой пары различные комбинации переменных p и q и спектральных параметров. Мы будем преобразовывать левую часть (42), обозначив ее LHS:

$$\mathrm{LHS} = m(\lambda+q)\,m(\lambda-q)\,m(\lambda+\mu+q-p)\,m(\lambda+\mu-q+p)\times \\ \times\, m(\mu+p)\,m(\mu-p). \quad (44)$$

Равенство (35) позволяет утверждать, что

$$m(\lambda+q)\,m(\lambda+\mu+q-p) = m(\mu-p)\,m(\lambda+q)\,m(\mu-p)^{-1} \quad (45)$$

и

$$m(\lambda+\mu+p-q)\,m(\mu+p) = m(\lambda-q)^{-1}\,m(\mu+p)\,m(\lambda-q). \quad (46)$$

В результате LHS преобразуется к виду

$$\mathrm{LHS} = m(\lambda-q)\,m(\mu-p)\,m(\lambda+q)\,m(\mu-p)^{-1}\times \\ \times\, m(\lambda-q)^{-1}\,m(\mu+p)\,m(\lambda-q)\,m(\mu-p). \quad (47)$$

Теперь используем (35) в форме

$$m(\lambda-q)\,m(\mu-p) = m(\mu-p)\,m(\lambda+\mu-p-q)\,m(\lambda-q), \quad (48)$$

и LHS примет вид

$$\mathrm{LHS} = m(\mu-p)\,m(\lambda+\mu-p-q)\,m(\lambda+q)\,m(\lambda+\mu-p-q)^{-1}\times \\ \times\, m(\mu+p)\,m(\lambda+\mu-p-q)\,m(\lambda-q). \quad (49)$$

Следующий раз выпишем (35) в виде

$$m(\mu+p)\,m(\lambda+\mu-p-q) = m(\lambda+\mu-p-q)\,m(2\mu+\lambda-q)\,m(\mu+p) \quad (50)$$

и получаем еще одно выражение для LHS

$$\mathrm{LHS} = m(\mu-p)\,m(\lambda+\mu-p-q)\,m(2\mu+\lambda-q)\,m(\lambda+q)\,m(\mu+p)\,m(\lambda-q). \quad (51)$$

Последний раз используем (35) в виде

$$m(\lambda+q)\,m(\mu+p) = m(\mu+p)\,m(\lambda+\mu+p+q)\,m(\lambda+q) \quad (52)$$

и получим

$$\mathrm{LHS} = m(\mu-p)\,m(\lambda+\mu-p-q)\,m(2\mu+\lambda-q)\,m(\mu+p)\times \\ \times\, m(\lambda+\mu+p+q)\,m(\lambda+q)\,m(\lambda-q). \quad (53)$$

Сравнивая это выражение с правой частью в (42)

$$\mathrm{RHS} = m(\mu - p)\, m(\mu + p)\, m(\lambda + \mu + p + q)\, m(\lambda + \mu - p - q)\times \\ \times m(\lambda + q)\, m(\lambda - q), \quad (54)$$

мы убеждаемся, что требуемое равенство

$$\mathrm{LHS} = \mathrm{RHS} \quad (55)$$

выполняется вследствие (50). Этим доказательство соотношения Янга-Бакстера (23) завершается.

В ходе доказательства мы использовали соотношение (35) в различных модификациях 7 раз. Возможно, что существует и более короткий путь преобразования LHS в RHS, но мы удовлетворились тем, что был найден.

Итак, мы показали, что определенная комбинация из квантовых дилогарифмов с введением спектрального параметра дает решение уравнения Янга-Бакстера с квантовым пространством $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$. Это оправдывает заголовок нашей заметки. Следует отметить, что полученные формулы дают точный смысл утверждения, сформулированного нами в [10] в связи с динамической моделью – уравнением Sine-Gordon на пространственно-временной решетке.

Недавно в работе [18] был предложен сходный, но отличный от нашего, вариант формулы (38). Нам представляется, что показанная в этой статье возможность интерпретации соотношения Янга-Бакстера как строго операторного равенства в $\mathcal{H}$, доказывает преимущество нашей формулы.

Мы выражаем В. Бажанову, А. Бобенко, Р. Кашаеву, А. Кириллову и Н. Решетихину благодарность за дискуссии и конструктивную критику, приведшие к появлению этой статьи.

Работа была частично поддержана Международным Научным Фондом через грант No. R2H000 и грантом Академии Финляндии.

Литература

1. В. О. Тарасов, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, — Теор. Мат. Физ. **57** (1983), 163.
2. L. D. Faddeev, *Algebraic aspects of Bethe-ansatz.* lectures delivered at ITP, Stony-Brook, april 1994; preprint ITP-SB-94-11, HEP-TH 9404013; to the published in IJMP ser. A, 1995.
3. J. L. Gervais, — Phys. Lett. **B160** (1985), 279.
4. А. Ю. Волков, — Зап. научн. семин. ЛОМИ **161** (1987), 24 Теорет. Мат. Физ. 74, 1988, 135 .
5. В. Е. Корепин, В. О. Тарасов, частное сообщение, 1989.

6. A. Yu. Volkov, — Phys. Lett. **A167** (1992), 345.
7. А. Ю. Волков, Л. Д. Фаддеев, — Теор. Мат. Физ. **92** (1992), 207.
8. V. V. Bazhanov, Yu. G. Strogonov, — J. Stat. Phys. **51** (1990), 799.
9. L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, preprint TFT-93-63 Helsinki; HEP TH 9311075; to be published in Comm. Math. Phys.
10. L. D. Faddeev, A. Yu. Volkov, — Lett. Math. Phys. **32** (1994), 125.
11. В. В. Бажанов, Н. Ю. Решетихин, частное сообщение, март 1994.
12. V. Fateev, A. B. Zamolodchikov, — Phys. Lett. **A92** (1982), 37.
13. Л. Д. Фаддеев, *Current-like variables in massive and massless integrable models.* — Lectures at E. Fermi Summer School Varenna, 1994; HEP-TH/9406196 .
14. L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, — Mod. Phys. Lett. **A9** (1994), 427.
15. Г. Д. Малюжинец, — Акустический журнал **1** (1955), 144.
16. L. D. Faddeev, A. Yu. Volkov, — Phys. Lett. **B315**, (1993), 311.
17. L. D. Faddeev, *Modular group and Weyl-Heisenberg algebra.* — POMI preprint 1/1995, submitted to Lett. Math. Phys .
18. V. V. Bazhanov, A. I. Bobenko, and N. Yu. Reshetikhin, *Quantum discrete Sine-Gordon model at roots of 1.* — UC Berkeley preprint (1994) to be published in Comm. Math. Phys .

Volkov A. Yu., Faddeev L. D. Yang-Baxterization of quantum dilogarithm.

A new solution of Yang-Baxter relation with spectral parameter is found. The obtained R-matrix $R(x)$ is an operator in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, where $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$. This R-matrix is required for the justification of the solution of the Sine-Gordon model on discrete space-time, constructed by authors recently in [10].

Санкт-Петербургское Отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 января 1995 г.