

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

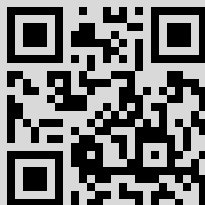
Заседания семинара имени И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики, *УМН*, 1974, том 29, выпуск 3(177), 241–250

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 195.218.150.2

30 июня 2017 г., 15:48:24



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМЕНИ И. Г. ПЕТРОВСКОГО
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ¹⁾

Заседание 12 сентября 1973 г.

1. Б. С. Митягин «Вальрасовские векторные поля в моделях чистого обмена».

В докладе рассказано о некоторых простейших экономико-математических моделях.

В основе многих моделей математической экономики лежат представления о том, что поведение отдельного потребителя (экономического агента, участника экономической системы) обусловлено его индивидуальной функцией полезности $u(x)$, или, более общо, отношением предпочтения \preceq , которые задаются на неотрицательном ортанте \mathbb{R}_+^n n -мерного пространства продуктов (векторов — наборов потребительских благ). При этом (подробнее см. [1], гл. 5) предполагаются выполненными свойства желательности благ (монотонность, т. е. если $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ и $x \leq y$, то $u(x) \leq u(y)$, или $x \preceq y$), непрерывность, т. е. $u(x)$ — непрерывная функция, или множества $X_a = \{x \in \mathbb{R}_+^n: a \preceq x\}$ замкнуты при любом $a \in \mathbb{R}_+^n$. Часто предполагают и (строгую) выпуклость предпочтений, т. е. (строгую) вогнутость функции $u(x)$ или (строгую) выпуклость множеств X_a ; это означает, что взвешенные комбинации наборов потребительских благ предпочтительнее каждого из наборов.

Простейшей моделью, иллюстрирующей одну из основных проблем математической экономики — задачу согласования несовпадающих интересов многих участников экономической системы, — является модель чистого обмена. В такой экономике $\mathcal{E} = \{n, I; \preceq_i, \omega_i, i \in I\}$ с n продуктами, I участниками и заданными для каждого $i \in I$ отношениями предпочтений и начальными запасами продуктов ω_i один из возможных способов согласования интересов всех участников предполагает задание строго положительного вектора цен $p \in (\mathbb{R}^n)_+$. Функция спроса i -го участника (в случае строго выпуклых предпочтений) определяется как вектор $f_i(p, w)$, максимизирующий предпочтение \preceq_i на бюджетном множестве $Q(w) = \{x: \langle p, x \rangle \leq w\}$. Из свойства желательности благ вытекает, что $\langle p, f_i(p, w) \rangle = w$ (закон Вальраса). Вектор цен p^0 называется равновесным, если векторное поле дисбаланса $\Phi(p, \omega) = \sum_{i \in I} f_i(p, \langle p, \omega_i \rangle) - \sum_{i \in I} \omega_i$ обращается в нуль: $\Phi(p^0, \omega) = 0$; в этом случае совокупный спрос в системе совпадает с предложением. Так как $Q(w)$ не

¹⁾ Информация о предыдущих заседаниях семинара опубликована в УМН 28:5 (1973), 257—266.

меняется при одновременном изменении масштаба p и w , то p можно считать нормированным: $\sum_{i=1}^I p_i^2 = 1$; тогда в силу закона Вальраса, $\langle p, \Phi(p, \omega) \rangle = 0$, и $\Phi(p, \omega)$ — векторное поле на части S_+^{n-1} единичной сферы в \mathbb{R}^n . Такие векторные поля назовем *вальрасовскими* (I -вальрасовскими, где I — число участников в экономике \mathcal{E}).

Тем самым, вопрос о существовании равновесных цен — это вопрос об особых точках вальрасовских векторных полей. Их специальная структура долгое время питала надежды на возможность сравнительно простого анализа. В 1960 г. Г. Скарф [2] дал пример ($n = 3$) экономики, вальрасовское поле которой имеет единственную особую точку p^0 , и эта точка глобально неустойчива (p^0 для системы $\dot{p} = \Phi(p)$ является неустойчивым фокусом [3], § 20.4); *механизм цен* едва ли может служить регулирующим в скарфовской экономике. Этот пример подрывал уверенность в достаточности вальрасовской аксиоматики; окончательный удар был нанесен совсем недавно (1972—1973) Х. Зонненшайном [4] и Г. Дебре [5]. Ими, грубо говоря, показано, что *любое векторное поле на S_+^{n-1} является вальрасовским при $I \geq n$* . Тем самым, анализ множества W_ω векторов равновесных цен — задача столь же трудная, как и вопрос о структуре множества особых точек векторных полей на сфере (на S_+^{n-1}). Отметим вопрос: *какие векторные поля Φ на S_+^{n-1} являются k -вальрасовскими, $k < n$?* Г. Дебре [5] показал, что градиент положительно-определенной формы $B(p - p^0, p - p^0)$, $p^0 \in S_+^{n-1}$, не является k -вальрасовским полем, если $k < n$.

Если *совокупный спрос* в экономике \mathcal{E} *ненасыщаем*, т. е. $\left| \sum_{i \in I} f_i(p, \langle p, \omega_i \rangle) \right| \rightarrow \infty$

при $p \rightarrow \partial S_+^{n-1}$, то индекс векторного поля $\Phi(p)$ оказывается равным 1 (см. [7] — [9]) и это обеспечивает непустоту $W_\omega = \{p: \Phi(p, \omega) = 0\}$, т. е. существование векторов равновесных цен. В случае гладких функций спроса f_i , $i \in I$, возможно содержательное использование теории гладких отображений; решающий шаг в этом направлении был сделан Г. Дебре [6]. Им, в частности, показано [6], что *множество W_ω конечно почти для всех наборов $\omega = (\omega_i)_I$ начальных запасов*; см. также [7] — [9]. Дальнейшие применения дифференциальной топологии в моделях математической экономики даны Э. Диркером [10], С. Смейлом [11], Э. Зиманом [12].

Недостаточность механизма цен как механизма регулирования экономики становится еще яснее при разборе динамических моделей. Норма эффективности капиталовложений, сроки окупаемости, коэффициент дисконтирования и другие экономические понятия требуют для своего осмысливания введения в модели содержательной динамики, и это может делаться на основе математической теории оптимальных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Х. Н и к а й д о, Выпуклые структуры и математическая экономика, М., «Мир», 1972.
- [2] H. S c a r f, Some examples of global instability of the competitive equilibrium, Intern. Econ. Review 1:3 (1960), 157—172.
- [3] В. И. А р н о л ь д, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Наука», 1974.
- [4] H. S o n n e n s c h e i n, Market excess demand functions, Econometrica 40:3 (1972), 549—563.
- [5] G. D e b r e a u, Excess demand functions, Working paper 1 —177, Committee of Econometrics and Mathematical Economics, Univ. of California, Berkeley, April, 1973.
- [6] G. D e b r e a u, Economics with a finite set of equilibria, Econometrica 38 (1970), 387—392.
- [7] Б. С. М и т я г и н, Заметки по математической экономике, УМН 27:3 (1972), 3—19.
- [8] E. and H. D i e r k e r, The local uniqueness of equilibria, Econometrica 40:5 (1972), 867—884.
- [9] E. D i e r k e r, Two remarks on the number of equilibria of an economy, Econometrica 40:5 (1972), 951—953.

- [10] E. Dierker, Topological methods in Walrasian economics, CORE Discussion papers, No. 7301, Jan. 1973; Center for Operations Research and Econometrics, Louvain et Bruxelles.
- [11] С. Смейл, Глобальный анализ и экономика, I. Оптимум Парето и обобщения теории Морса, УМН 27:3 (1972), 177—187.
- [12] E. C. Zeeman, On the unstable behavior of stock exchanges, Math. Inst. of Univ. of Warwick, Coventry, England, July 1973.

Заседания 19 и 26 сентября 1973 г.

1. В. И. Арнольд «Критические точки функций и классификация каустик».

1. Доклад был посвящен в основном обзору результатов статей [1] — [5]. Две теоремы, не вошедшие в эти статьи, формулируются ниже.

2. Теорема 1 (О. В. Ляпко). *Пространство комплексных функций Морса имеет в окрестности функций A_μ, D_μ, E_μ (см. [2]) локальный гомотопический тип пространства $K(\pi, 1)$. При этом π — подгруппа конечного индекса ν в группе кос Артина из μ нитей; здесь $\nu = \mu!h^\mu/|W|$, где h — число Кокстера, а $|W|$ — порядок группы Вейля. Таким образом, ν имеет следующие значения:*

Тип особенности	A_μ	D_μ	E_6	E_7	E_8
ν	$(\mu+1)^{\mu-1}$	$2(\mu-1)^\mu$	$2^9 \cdot 3^4$	$2 \cdot 3^{12}$	$22 \cdot 3^5 \cdot 5^7$

Пространство $K(\pi, 1)$, о котором идет речь в теореме 1, можно описать следующим образом. Пусть $f(x), x \in \mathbb{C}^n$ — взвешенно-однородный многочлен с критической точкой $x = 0$ одного из типов A_μ, D_μ, E_μ . Пусть $F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_\mu e_\mu$ — μ -параметрическая версальная деформация функции f , где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\mu) \in \mathbb{C}^\mu$ — параметр, а $e_s(x)$ — мономы.

Обозначим через G множество всех значений $\lambda \in \mathbb{C}^\mu$, для которых функция $F(\cdot, \lambda): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ не имеет ни кратных критических точек, ни кратных критических значений. Тогда G — пространство $K(\pi, 1)$.

3. Теорема 2. *Всякая голоморфная функция двух переменных с изолированной критической точкой 0 с 3-струей x^3 приводится биголоморфной в окрестности точки 0 заменой координат к одной из нормальных форм следующего списка:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 J_{k,2} \leftarrow J_{k,3} \leftarrow J_{k,4} \leftarrow \dots & & & & J_{k+1,2} \leftarrow J_{k+1,3} \leftarrow \dots & & \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 \dots \leftarrow J_{k,1} \leftarrow E_{6k} \leftarrow E_{6k+1} \leftarrow E_{6k+2} \leftarrow J_{k+1,0} \leftarrow J_{k+1,1} \leftarrow E_{6(k+1)} \leftarrow \dots & & & & & &
 \end{array}$$

Здесь буквами обозначены следующие функции переменных x, y :

$$\begin{aligned}
 E_{6k} &= x^3 + y^{3k+1} + a(y)xy^{2k+1}, \quad k \geq 1; \\
 E_{6k+1} &= x^3 + xy^{2k+1} + a(y)y^{3k+2}, \quad k \geq 1; \\
 E_{6k+2} &= x^3 + y^{3k+2} + a(y)xy^{2k+2}, \quad k \geq 1; \\
 J_{k,l} &= x^3 + x^2y^k + a(y)y^{3k+l}, \quad k > 1, l > 0, a_1 \neq 0; \\
 J_{k,0} &= x^3 + bx^2y^k + y^{3k} + c(y)xy^{2k+1}, \quad k > 1, 4b^3 + 27 \neq 0,
 \end{aligned}$$

где $a(y) = a_1 + a_2y + \dots + a_{k-1}y^{k-2}$, $c(y) = c_1 + c_2y + \dots + c_{k-2}y^{k-3}$.

Модальность ростков всех указанных функций в 0 равна $k - 1$; кратность (число Милнора) дается формулами $\mu(J_{k,l}) = 6k + l - 2$, $\mu(E_s) = s$.

4. Пользуюсь случаем указать некоторые из опечаток в [1] — [4]. В [2] на стр. 13 на строках 24 и 26 и на стр. 14 на строке 27 вместо $x_1 x_2^4$ должно быть $ax_1 x_2^4$; в [4] на стр. 32, на строке 5 снизу должно быть -2 вместо $+2$. На той же странице 32 неверно нарисованы диаграммы X_9 и J_{10} ; правильные диаграммы $X_9 = T_{2, 4, 4}$ и $J_{10} = T_{2, 3, 6}$ имеются на следующей странице (т. е. на стр. 33 в [4]).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, Интегралы быстро осциллирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий, Функц. анализ 6:3 (1972), 61—62.
 [2] В. И. Арнольд, Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_n , D_n , E_n и лагранжевы особенности, Функц. анализ 6:4 (1972), 3—25.
 [3] В. И. Арнольд, Классификация унимодальных критических точек функций, Функц. анализ 7:3 (1973), 75—76.
 [4] В. И. Арнольд, Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера, УМН 28:5 (1973), 17—44.
 [5] В. И. Арнольд, Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек, УМН 29:2 (1974), 11—49.

Заседания 3 и 10 октября 1973 г.

1. Я. Г. Синай «Элементы математической теории фазовых переходов второго рода».

В докладе рассматривались математические задачи, возникающие при исследовании критической точки в решетчатых классических моделях ферромагнетизма. Гамильтониан в таких моделях имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum U(|i-j|) s(i) s(j), \quad i, j \in V,$$

где $s(i)$ — спиновая переменная, принимающая значения ± 1 , U — потенциал парного взаимодействия, зависящий только от расстояния r и подчиненный условию

$$\int_0^\infty U(r) r^{d-1} dr < \infty, \quad S(V) = \sum_{i \in V} s(i). \quad \text{При этом условии статистические суммы}$$

$$\Xi(\beta, h | V) = \sum_{s(i): i \in V} \exp[-\beta(\mathcal{H} + hS(V))], \quad Z(\beta, m | V) = \sum_{S(V)=[mV]} \exp(-\beta H)$$

имеют асимптотики: $f(\beta, h) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \Xi(\beta, h | V)$, $g(\beta, m) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln Z(\beta, m | V)$.

Задача о фазовых переходах второго рода есть задача исследования особенностей функций $f(\beta, h)$, $g(\beta, m)$. Известная феноменологическая теория Ландау исходит из того, что особенности этих функций суть особенности общего вида. Это предположение автоматически приводит к нахождению всех критических индексов.

Хорошо известно, что теория Ландау имеет ограниченную область применимости. Более общее предположение, общепринятое в физической литературе, состоит в том, что в окрестности критической точки справедливы своеобразные законы подобия. С одной стороны, это делает теорию фазовых переходов второго рода близкой к теории турбулентности в духе гипотез автомодельности А. Н. Колмогорова. С другой стороны, это приводит к совершенно новым типам распределений вероятностей, которые естественно назвать автомодельными. В докладе дается строгое определение автомодельных распределений и найдены для любой размерности гауссовские автомодельные распределения.

Вопрос о том, когда автомодельное распределение вероятностей может появиться как предельное распределение в критической точке, связан со свойством устойчивости этого распределения. Точные результаты, относящиеся к так называемым асимптотическим иерархическим моделям Дайсона, принадлежат П. М. Блехеру и докладчику (Сопн.

math. Phys. 33 (1973), 23—42). Из этих результатов вытекают точные значения критических индексов и, как следствие, справедливость при некоторых предположениях теории Ландау.

При анализе упомянутых моделей возникают интересные нелинейные интегральные уравнения. Имеются естественные гипотезы, которые приводят к выражениям для критических индексов в случае любого решения этих уравнений, подчиненного ряду естественных ограничений. По-видимому, все критические индексы выражаются через спектр соответствующей линеаризованной задачи.

В докладе было также объяснено, почему исследование критической точки становится более простым в случае далекодействующих потенциалов.

Заседание 17 октября 1973 г.

1. Л. А. Фальковский «О некоторых граничных задачах со случайной поверхностью».

Многие задачи физики связаны с граничным условием на поверхности, форма которой в действительности достаточно сложна. Решение такой задачи невозможно получить, да оно и не имеет физического смысла. Представляет интерес вычисление различных наблюдаемых величин, усредненных по ансамблю случайных поверхностей, на которых формулируется граничное условие.

В качестве примера рассмотрим систему трех уравнений

$$(1) \quad (c_\alpha^2 \Delta + \omega^2) u_\alpha(r) = 0,$$

описывающих смещения $u_\alpha(r)$ упругой среды с частотой ω , тремя поляризациями α и соответствующими скоростями распространения c_α . Граничное условие — отсутствие внешних сил

$$(2) \quad \sum_{\beta=x, y, z} \sigma_{\alpha\beta} n_\beta = 0, \quad \sigma_{\alpha\beta} \sim \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta},$$

должно быть выполнено на некоторой случайной поверхности, уравнение которой запишем в виде

$$(3) \quad x = \xi(s),$$

где n — нормаль к поверхности (3), s — совокупность двух координат y, z .

Другим примером могут быть так называемые поверхностные магнитные уровни электрона, движущегося в металле в присутствии постоянного магнитного поля. Эта задача сводится к уравнению Шрёдингера

$$(4) \quad [H(r) - \omega]\psi(r) = 0,$$

где $H(r) = \frac{1}{2m}(p - A)^2$, $p = -i\nabla$ — оператор импульса, A — вектор-потенциал магнитного поля, с граничным условием

$$(5) \quad \psi(r) = 0$$

на поверхности металла (3).

Если поверхность твердого тела является плоскостью $x = 0$, то уравнения (1), (4) определяют собственную частоту ω_0 волны, распространяющейся вдоль поверхности без затухания. Шероховатости (3) приводят к рассеянию этой волны в другие волны и, таким образом, к ее затуханию. Это комплексное смещение собственных частот, а также число собственных состояний с частотами, меньшими заданного значения ω , можно вычислить, определив функцию Грина $G^\omega(rr')$, удовлетворяющую соответствующим (1) или (4) неоднородным уравнениям и усредненную по функциям $\xi(s)$.

Решение поставленной задачи получено [1] — [3] в случае, когда средняя величина шероховатости $\langle \xi^2(s) \rangle$ мала по сравнению с квадратом расстояния λ , на котором изменяется решение уравнений (1), (4) по переменной x . В главном приближении результат определяется спектром невозмущенной задачи, а также корреляционной функцией $\langle \xi(s)\xi(s') \rangle$, являющейся средней характеристикой поверхности.

Наряду со смещением собственных частот рассматриваются различные кинетические свойства системы, например, электропроводность. В этом случае возникает вопрос о вычислении усредненного коэффициента отражения для волны, падающей из глубины твердого тела на случайную поверхность. Точнее говоря, требуется связать билинейную по $\psi(r)$ форму в отраженной волне с амплитудой падающей волны. Полученное в том же приближении по $\langle \xi^2 \rangle / \lambda^2$ среднее граничное условие позволяет находить кинетические коэффициенты [4], [5]. Влияние поверхности оказывается существенным тогда, когда длина свободного пробега (расстояние, на которое проникает информация о поверхности) сравнивается с расстоянием, на котором меняются макроскопические свойства (толщина пластины или глубина скин-слоя).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. А. Фальковский, Плотность и затухание поверхностных магнитных состояний, ЖЭТФ 58 (1970), 1830—1842.
 [2] Е. И. Уразаков, Л. А. Фальковский, О распространении рэлеевской волны по шероховатой поверхности, ЖЭТФ 63 (1972), 2297—2303.
 [3] А. Я. Бланк, Л. А. Фальковский, Затухание магнитных поверхностных уровней в сверхпроводнике, ЖЭТФ 60 (1971), 797—805.
 [4] Л. А. Фальковский, Скин-эффект на шероховатой поверхности, ЖЭТФ 60 (1971), 838—845.
 [5] Л. А. Фальковский, О сопротивлении тонких металлических образцов, ЖЭТФ 64 (1973), 1855—1860.

Заседания 24 и 31 октября 1973 г.

1. А. Ф. Андреев «Динамическое промежуточное состояние сверхпроводников».

Если сверхпроводник конечных размеров поместить во внешнее магнитное поле, то при увеличении поля наступает момент, когда сверхпроводимость разрушается, но металл не становится полностью нормальным. Существует интервал полей, когда сверхпроводник находится в так называемом промежуточном состоянии. При этом его объем разбивается на большое число чередующихся областей, занятых сверхпроводящей и нормальной фазой. В состоянии термодинамического равновесия границы раздела между фазами неподвижны и их расположение, определяемое условием минимальности энергии, соответствует обычно системе чередующихся слоев. В специфических случаях, когда концентрация одной из фаз мала, термодинамически более выгодной становится нитевидная структура. Нормальные или сверхпроводящие области представляют собой в этом случае тонкие нити цилиндрической формы, вытянутые вдоль магнитного поля.

Если в сверхпроводнике, находящемся в промежуточном состоянии, возникает электрическое поле или переменное магнитное поле, то границы раздела фаз искривляются и, вообще говоря, начинают двигаться. В принципе задача о таком динамическом промежуточном состоянии должна решаться на основе уравнений Максвелла

$$(1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{e}, \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t},$$

справедливых в нормальных областях. Здесь \mathbf{e} , \mathbf{h} — напряженности электрического и магнитного полей, c — скорость света, σ — проводимость нормального металла. В сверхпроводящих областях $\mathbf{h} = \mathbf{e} = 0$, а на границах раздела фаз решение уравнений (1) должно удовлетворять условиям

$$(2) \quad \mathbf{h}\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \times \left[\mathbf{e} + \frac{V}{c} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}) \right] = 0, \quad |\mathbf{h} \times \mathbf{n}| = H_c,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к границе, V — нормальная скорость ее движения, H_c — характеристическая для сверхпроводника постоянная (так называемое критическое магнит-

ное поле). Однако ввиду чрезвычайно большого числа границ раздела ($10^2 \div 10^3$) решение задачи в сформулированной выше точной постановке практически невозможно. Но именно при большом числе границ весьма полезным является макроскопическое описание промежуточного состояния. В этом описании промежуточное состояние рассматривается как некоторая среда, характеризуемая величинами, усредненными по большому числу областей. Таковы векторы \mathbf{B} и \mathbf{E} , определяемые как средние по объему от \mathbf{h} и \mathbf{e} соответственно, и концентрация нормальной фазы x_n . Следствием (1) и (2) является следующая система уравнений макроскопической электродинамики промежуточного состояния:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\operatorname{H}\nabla) \mathbf{H} = \frac{4\pi}{cx_n} (\sigma \mathbf{E} \times \mathbf{H}), \\ (3) \quad \mathbf{E}\mathbf{B} = 0, \quad x_n = |\mathbf{B}|/H_c, \end{aligned}$$

где $\mathbf{H} = H_c \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ — вектор магнитной напряженности. В отличие от уравнений электродинамики обычных сред, система (3) нелинейна. Ее решение позволяет вычислять усредненное электромагнитное поле и, кроме того, расположение и скорость движения границ раздела фаз.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. L o n d o n, Superfluids, New York, J. Wiley & Sons, Inc., 1950, 96—124.
- [2] А. Ф. А н д р е е в, Электродинамика промежуточного состояния сверхпроводников, ЖЭТФ 51:5 (1966), 1510—1521.
- [3] А. Ф. А н д р е е в, Ю. В. Ш а р в и н, Динамика промежуточного состояния сверхпроводников, ЖЭТФ 53:4 (1967), 1499—1504.

Заседания 14 и 21 ноября 1973 г.

1. Р. Л. Д о б р у ш и н, Р. А. М и н л о с «Вероятностные методы в квантовой теории поля».

В попытках преодолеть трудности, возникающие при строгом построении квантовой теории поля, был сформулирован тот минимум свойств, которыми должен быть наделен объект, именуемый квантовым полем. Так возникла аксиоматическая теория поля. Хотя из ее аксиом получены важные общие следствия, вся эта теория оставалась до недавнего времени «предтеорией», так как, кроме банальных случаев так называемых свободных полей (или некоторых их обобщений) не существовало (и с физической точки зрения до сих пор не существует) никакой корректно определенной модели, удовлетворяющей всем аксиомам теории поля. Первый пример такой модели — так называемое поле $P_{\frac{1}{2}}(\varphi)$ для двумерного пространства-времени — был построен в серии работ Глимма и Джаффе.

Как вытекает из аксиом теории поля, всякое квантовое поле однозначно характеризуется набором $\{W_n(x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n, n = 1, 2, \dots\}$ обобщенных функций, называемых функциями Уайтмана. Эти функции допускают аналитическое продолжение на мнимую ось, и их значения на этой оси называются функциями Швингера.

Нельсон показал, что широкий класс марковских евклидово-инвариантных случайных полей, обладающих всеми моментами, порождает системы функций Швингера и тем самым — некоторое квантовое поле. На этом пути удается явно построить двумерные марковские поля, которые порождают квантовые поля, отвечающие взаимодействию вида $P_{\frac{1}{2}}(\varphi)$. Само построение проводится по следующей схеме: для любой ограниченной области явно указываются условные распределения значений поля внутри области при заданных его граничных значениях и затем показывается, что эта система условных распределений действительно порождается каким-нибудь марковским полем. При некоторых значениях параметров такое поле единственно, а при других — не единственно. Отметим, что описанная схема определения поля по его условным распределениям в конечных областях была введена и разработана в связи с задачами классической статистической физики.

Заседание 28 ноября 1973 г.

1. К. И. Бабенко «Несколько замечаний о конструировании вычислительных алгоритмов».

Доклад посвящен некоторым общим вопросам конструирования вычислительных алгоритмов.

Пусть X и Y — некоторые метрические компакты, и пусть отображение $A: X \rightarrow Y$ биективно. Задача состоит в вычислении $g = Af$. Ясно, что многие задачи вычислительной математики могут быть схематизированы именно таким образом. Сформулируем, что мы понимаем под численным решением и его точностью. Если обратиться к реальной ситуации, имеющей место при решении задач на ЭВМ, то увидим, что на входе в любой численный алгоритм информация о функции f подается в виде таблицы, причем мы можем совершенно игнорировать то обстоятельство, что f иногда задается в виде формулы. Таким образом, будем считать, что f задается в виде таблицы. На выходе из алгоритма получаем приближенные значения функции g опять же в виде таблицы, и хотя реально выдача может не содержать полной таблицы g , программа потенциально позволяет получить полную таблицу этой функции.

Пусть F — банахово пространство; $X \subset F$. Под таблицей элемента $f \in X$ будем понимать двоичное слово T_f длины N и алгоритм \mathcal{A} , который по слову T_f определяет некоторый элемент $\varphi_f \in F$. Точностью таблицы называется величина $\|f - \varphi_f\|$. Алгоритм \mathcal{A} не зависит от слова T_f , и лишь в этом смысле понимается его массовость. Точностью данного способа табулирования называется величина

$$\sup_{f \in X} \|f - \varphi_f\|.$$

В соответствии со сказанным любой алгоритм численного решения рассматриваемой задачи будет характеризоваться величинами N и ε . Количество N — длина таблицы элемента f на входе в алгоритм, а ε — точность того способа табулирования, который определен на выходе из алгоритма и служит для получения таблицы g . Нас прежде всего интересует связь между N и ε . Легко доказать, что всегда $\mathcal{H}(\varepsilon) \leq N$, где $\mathcal{H}(\varepsilon)$ есть ε — энтропия компакта Y . Так как $\mathcal{H}(\varepsilon)$ как функция ε полунепрерывна справа, то корректно определена величина

$$\varepsilon_N = \inf \{ \varepsilon: \mathcal{H}_\varepsilon(y) \leq N \}.$$

Понятно, что ε_N — та максимально возможная точность, которую можно получить, задавая на входе таблицы f длины N . При довольно общих предположениях о компактах X и Y и операторе A можно утверждать, что существуют вычислительные алгоритмы, позволяющие получить решение задачи с точностью $\varepsilon > \varepsilon_N$, сколь угодно мало отличающейся от ε_N , при условии, что на входе задана таблица длины N . Таким образом, корректно характеризовать алгоритмы с точки зрения той точности ε , которую они имеют при заданной длине таблицы N . Качество алгоритма можно оценить величиной $\varepsilon_N/\varepsilon$: чем меньше это отношение, тем в известном смысле хуже алгоритм. Рассмотрим несколько примеров.

Введем класс $W_r(M; a, b) \subset C[a, b]$, $f \in W_r(M; a, b) \Leftrightarrow \frac{d^r f}{dx^r} \in \text{Lip}(\alpha, M)$, $r = \bar{r} + \alpha$,

$0 < \alpha \leq 1$. Пусть $X = W_r(M; a, b) \cap \{f: \|f\|_C \leq L\}$, где L — достаточно большое число.

1) Допустим, что $A = \frac{d^v}{dx^v}$, $v < r$, а Y — образ X . Тогда $\varepsilon_N \asymp MN^{-(r-v)}$. Обычный способ численного дифференцирования, основанный на дифференцировании лагранжева интерполяционного многочлена, приводит к алгоритму, для которого $\varepsilon \asymp MN^{-(r-v)}$. Таким образом, $\varepsilon_N/\varepsilon \asymp 1$, и этот алгоритм оптимален по порядку величины погрешности.

2) Допустим, что $Af = \int_a^x f(x) dx$, а Y — образ X . Нетрудно подсчитать, что $\varepsilon_N \asymp MN^{-r-1}$.

Любой алгоритм численного интегрирования, у которого на входе берется таблица, содержание которой зависит лишь от значений функции в некоторых N_0 узлах, будет иметь точность $\varepsilon \simeq MN_0^{-r}$. Таким образом, $\varepsilon_N/\varepsilon \simeq N^{-1}$. Аналогичная ситуация возникает и при решении краевых задач, например, для уравнения Лапласа. Поучителен пример обратной и прямой задачи Коши для уравнения теплопроводности. Ситуация здесь, грубо говоря, такая же, как и соответственно в примерах 1) и 2).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах, УМН 14:2 (1959), 3—86.
 [2] А. Г. Витушкин, Оценка сложности задачи табулирования, М., Физматгиз, 1959.

Заседание 12 декабря 1973 г.

1. Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тахтаджян «Частицы для уравнения Сайн—Гордон».

Уравнение, упомянутое в заглавии, имеет вид

$$(*) \quad u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

и встречается во многих задачах теоретической физики. В частности, его можно рассматривать как релятивистскую двумерную модель теории поля, считая, что скорость света, постоянная Планка и масса поля положены равными единице.

Естественное условие на решение имеет вид

$$\exp \{iu(x, t)\} \rightarrow 1, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \text{или} \quad u(x, t) \rightarrow 0 \pmod{2\pi}, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Целое число $n = \frac{1}{2\pi} (u(\infty, t) - u(-\infty, t))$ является интегралом движения и различает классы решений с разными значениями «заряда» n .

Уравнение (*) может быть решено методом обратной задачи, о котором здесь уже рассказывал В. Е. Захаров. Соответствующая линейная спектральная задача не похожа на стандартные, так что потребовалось дополнительное развитие формализма обратной задачи для того, чтобы погрузить уравнение (*) в общую схему. Это было сделано авторами совместно с В. Е. Захаровым, и результаты публикуются в ДАН. Здесь мы ограничимся описанием соответствующих данных рассеяния. В них входят два коэффициента перехода $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, удовлетворяющие условиям

$$|a|^2 + |b|^2 = 1; \quad a(-\lambda) = \overline{a(\lambda)}; \quad b(-\lambda) = -\overline{b(\lambda)}.$$

Функция $a(\lambda)$ имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость и имеет там нули, расположенные симметрично относительно вещественной оси. Обозначим через $i\kappa_l$ ($l = 1, \dots, p$) чисто мнимые нули, через λ_k ($k = 1, \dots, q$) комплексные нули в правом верхнем квадранте. В данные рассеяния входят вещественные числа c_l ($l = 1, \dots, p$) и комплексные числа d_k ($k = 1, \dots, q$), по одному на каждый нуль.

Данные рассеяния ($a(\lambda)$, $b(\lambda)$, c_l , d_k) взаимно однозначно связаны с данными Коши для уравнения (*) и просто зависят от времени:

$$\frac{b(\lambda, t)}{b(\lambda, 0)} = \exp \left\{ i \left(2\lambda + \frac{1}{8\lambda} \right) t \right\}; \quad \frac{c_l(t)}{c_l(0)} = \exp \left\{ \left(\frac{1}{8\kappa_l} - 2\kappa_l \right) t \right\};$$

$$\frac{d_k(t)}{d_k(0)} = \exp \left\{ i \left(2\lambda_k + \frac{1}{8\lambda_k} \right) t \right\}; \quad a(\lambda, t) = a(\lambda, 0).$$

Основной результат данного доклада состоит в доказательстве полной интегрируемости уравнения (*) и вычислении соответствующих переменных типа действие — угол. С уравнением (*) можно связать однопараметрическое множество гамильтоновых систем,

причем данные Коши играют роль канонических переменных и единственная нетривиальная скобка Пуассона имеет вид

$$\{u_l(x, t), u(y, t)\} = \gamma \delta(x - y).$$

Здесь γ — произвольное вещественное число, играющее роль константы связи. Положим

$$\rho(\lambda) = -\frac{8}{\pi\gamma\lambda} \ln |a(\lambda)|; \quad \varphi(\lambda) = \arg b(\lambda); \quad p_l = \frac{1}{\gamma} \ln \kappa_l; \quad q_l = 8 \ln |c_l|;$$

$$\xi_k = \frac{4}{\gamma} \ln |\lambda_k|; \quad \eta_k = 4 \ln |d_k|; \quad \theta_k = \arg \lambda_k; \quad \varphi_k = \arg d_k.$$

В этих переменных нетривиальные скобки Пуассона имеют вид

$$\{\rho(\lambda), \varphi(\lambda')\} = \delta(\lambda - \lambda'); \quad \{p_l, q_l\} = \delta_{ll'};$$

$$\{\xi_k, \eta_{k'}\} = \delta_{kk'}; \quad \{\theta_k, \varphi_{k'}\} = \frac{\gamma}{16} \delta_{kk'},$$

а энергия P_0 и импульс P_1 поля u выражаются только через переменные типа действие:

$$P_0 = \int_0^\infty \left(2\lambda + \frac{4}{8\lambda} \right) \rho(\lambda) d\lambda + \frac{1}{\gamma} \sum_l \left(\frac{4}{\kappa_l} + 16\kappa_l \right) + \frac{1}{\gamma} \sum_k \frac{\lambda_k - \bar{\lambda}_k}{i} \left(16 + \frac{4}{|\lambda_k|^2} \right);$$

$$P_1 = \int_0^\infty \left(-2\lambda + \frac{4}{8\lambda} \right) \rho(\lambda) d\lambda + \frac{1}{\gamma} \sum_l \left(\frac{4}{\kappa_l} - 16\kappa_l \right) + \frac{1}{\gamma} \sum_k \frac{\lambda_k - \bar{\lambda}_k}{i} \left(-16 + \frac{4}{|\lambda_k|^2} \right).$$

Выписанные ответы имеют естественную интерпретацию в терминах релятивистских частиц, составляющих возможные возбуждения рассматриваемой системы. Эти частицы делятся на три сорта:

1°. Нейтральная частица массы 4.

2°. Частица массы $8/\gamma$, причем, как можно показать, ей соответствует заряд $n = \pm 1 = \text{sign } c$.

3°. Нейтральная составная частица, имеющая внутреннюю степень свободы, причем ее масса меняется в пределах от 0 до $16/\gamma$, в зависимости от внутреннего движения.

Решая уравнение (*) по теории возмущений, мы получили бы лишь частицу первого сорта. Таким образом, рассматриваемое уравнение дает явный пример теоретико-полевой системы, в которой одно поле порождает много различных частиц.

В заключение доклада обсуждается роль переменных типа действие — угол для квантования уравнения (*). В частности, показывается, что в квантовой механике константа связи γ может принимать лишь дискретный набор значений $8\pi/N$, где N — положительное целое число.