В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, Уравнение Кортевега–де Фриса — вполне интегрируемая гамильтонова система, *Функц. анализ и его прил.*, 1971, том 5, выпуск 4, 18–27

Функциональный анализ и его приложения,
т. 5, вып. 4, 1971, 18—27

УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИСА — ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМАЯ ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА

В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев

Уравнение Кортевега — де Фриса (КдФ), давно возникшее в приближенной теории гидродинамических волн,

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0; \quad u(x, t)|_{t=0} = u(x); \quad -\infty < x < \infty; \quad (1)$$
$$u(x) \to 0, \quad |x| \to \infty,$$

последнее время явилось предметом интенсивного исследования [1]—[3], [12]. Группа ученых, включающая Гарднера, Грина, Забусского, Крускала и Миуру, сделала два важных наблюдения:

1. Уравнение (1) с гладкими начальными данными допускает бесконечный набор первых интегралов. Эти интегралы имеют локальные плотности, т. е. представляются в виде $I_n[u] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_n(u, u_x, \ldots)\,dx$, где $P_n(u, u_x, \ldots)$ — полином по u и пространственным производным от u порядка до $n-2$, содержащий слагаемое u^n. Первые три таких полинома имеют вид $P_1(u) = u$, $P_2(u) = u^2$, $P_3(u, u_x) = u^3 + \frac{1}{2}u_x^2$. Явный вид одиннадцати P_n приведен в [2], [3]; в [3] указана общая процедура для их определения. Другой подход к определению $P_n(u, u_x, \ldots)$ развит Лэксом [4].

2. Явное решение уравнения КдФ можно получить при помощи формализма задачи рассеяния для уравнения Шредингера

$$-\psi_{xx} + u(x)\psi = k^2\psi. \quad (2)$$

Поясним это подробнее. Если

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\,|u(x)|\,dx < \infty, \quad (3)$$

то уравнение (2) имеет двукратный положительный непрерывный спектр и конечное число отрицательных собственных значений $-\varkappa_l^2$, $l = 1, \ldots, n$. Доказательство см., например, в [5]. Пусть $r(k)$ — коэффициент отражения налево, т. е. функция, участвующая в асимптотике при $x \to -\infty$ решения $\psi(x, k)$ уравнения (2), однозначно определенного условиями

$$\begin{aligned} \psi(x, k) &= e^{ikx} + r(k)e^{-ikx} + o(1), \quad x \to -\infty; \\ \psi(x, k) &= t(k)e^{ikx} + o(1), \qquad x \to \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть, далее, $\psi_l(x)$ — собственные функции дискретного спектра, нормированные условием $\psi_l(x) = e^{\varkappa_l x}(1 + o(1))$, $x \to -\infty$, и c_l, $l = 1, \ldots, m$ — соответствующие нормирующие множители $c_l = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_l^2(x)\,dx\right)^{-1}$. Набор $s = (r(k), \varkappa_l, c_l)$ называется *данными рассеяния* для уравнения (2). Отображение $u(x) \to s$ потенциалов $u(x)$ в данные рассеяния s однозначно обратимо. Соответствующая процедура восстановления $u(x)$ по s — обратная задача рассеяния — впервые сформулирована в [6] и строго исследована в [5]. В [5] получены необходимые и достаточные условия на данные рассеяния, соответствующие потенциалам, удовлетворяющим условию (3)

Замечательный результат работы [1] состоит в следующем. Рассмотрим в множестве данных рассеяния действие однопараметрической группы

$$r(k) \to e^{8ik^3t} r(k), \qquad \varkappa_l \to \varkappa_l, \qquad c_l \to e^{8\varkappa_l^3 t} c_l. \tag{5}$$

Оказывается, что соответствующее движение в множестве потенциалов $u(x) \to u(x, t)$ определяет решение $u(x, t)$ уравнения КдФ.

В настоящей работе мы предлагаем некоторую интерпретацию этого результата и основанный на ней новый его вывод. По нашему мнению, эта интерпретация дает простое объяснение несколько мистическим выводам работы [2].

Наша интерпретация может быть сформулирована следующим образом. Уравнение КдФ является вполне интегрируемой гамильтоновой системой. Отображение $u \to s$ играет роль преобразования переменных $u(x)$ к каноническим переменным типа действие — угол (см., например, [7]).

Чтобы оправдать эти утверждения, мы должны:

1) предъявить симплектическую форму Ω на множестве потенциалов $u(x)$ и гамильтониан $H[u]$ — функцию на этом множестве, которые порождают уравнение КдФ по правилам гамильтоновой механики (см., например, [8]);

2) вычислить прообразы формы Ω и гамильтониана $H[u]$ при отображении $u \to s$ и выразить в терминах данных рассеяния канонические переменные типа действие — угол.

Первая задача решается просто. Нетрудно убедиться, что уравнение КдФ можно записать в виде

$$u_t = \frac{d}{dx} \frac{\delta I_3[u]}{\delta u(x)}, \tag{6}$$

где символ $\delta H[u]/\delta u(x)$ означает градиент (производную Фреше) функции $H[u]$. В работе [4] указано, что это утверждение принадлежит Гарднеру.

Запись (6) уравнения КдФ явно гамильтонова. Соответствующая симплектическая форма

$$\Omega(\delta_1 u, \delta_2 u) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{x} dy \, [\delta_1 u(x) \, \delta_2 u(y) - \delta_1 u(y) \, \delta_2 u(x)] \tag{7}$$

имеет постоянные коэффициенты в переменных u и потому замкнута. Мы используем здесь старинную, но понятную и удобную в нашем бесконечномерном случае координатную запись дифференциальной формы в терминах «локальных координат» $u(x)$ и их дифференциалов — вариаций $\delta_1 u(x)$ и $\delta_2 u(x)$. Роль гамильтониана $H[u]$ играет интеграл движения

$$H[u] = I_3[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^3(x) + \frac{1}{2} u_x^2\right) dx.$$

Решению второй задачи посвящена большая часть статьи. В § 3 мы выразим гамильтониан $H[u]$ через данные рассеяния в следующем виде:

$$H[u] = -\frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^4 \ln(1 - |r(k)|^2) \, dk - \frac{32}{5} \sum_{l=1}^{m} \varkappa_l^5. \tag{8}$$

Мы покажем, что это выражение является частным случаем формул следов

[9], [10], [11]. Одновременно мы получим явные формулы для всех первых интегралов $I_n[u]$, доказав простое рекуррентное соотношение для плотностей $P_n(u, u_x, \ldots)$. В терминах данных рассеяния эти интегралы выражаются формулами, аналогичными (8), т. е. в них участвуют моменты функции $\ln(1 - |r(k)|^2)$ и степени $\varkappa_l$.

В § 2 при помощи формализма обратной задачи рассеяния мы выразим форму Ω в терминах данных рассеяния и найдем соответствующие канонические переменные. В частности, мы покажем, что переменными типа импульсов являются $P(k) = -\frac{k}{\pi}\ln(1 - |r(k)|^2)$, $p_l = \varkappa_l^2$, $l = 1, \ldots, m$, так что факт постоянства интегралов $I_n[u]$ станет тривиальным. Столь же тривиализуется решение гамильтоновых уравнений, и формулы (5) дают соответствующий ответ.

Предварительно в § 1 мы приведем без подробного вывода необходимые факты из теории рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси в удобной для нас форме.

Настоящую статью можно было бы написать на языке теории гладких бесконечномерных многообразий. Мы не следуем этой прогрессивной тенденции в современной математической физике только для того, чтобы удержать статью в размерах, которых она заслуживает. По этой же причине мы опускаем многие обоснования, останавливаясь подробнее на формальных выводах.

§ 1. Сведения из теории рассеяния

Уравнение Шредингера (2) при условии (3) имеет решения $f(x, k)$ и $g(x, k)$, однозначно определенные при всех вещественных k условиями

$$f(x, k) = e^{ikx} + o(1),\ x \to \infty; \qquad g(x, k) = e^{-ikx} + o(1),\ x \to -\infty. \tag{9}$$

При этом $f(x, k) = \overline{f(x, -k)}$, $g(x, k) = \overline{g(x, -k)}$. Пары $f(x, k)$, $f(x, -k)$ и $g(x, k)$, $g(x, -k)$ образуют при $k \neq 0$ две фундаментальные системы решений уравнения (2). Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} f(x, k) &= b(k)g(x, k) + a(k)g(x, -k),\\ g(x, k) &= -b(-k)f(x, k) + a(k)f(x, -k), \end{aligned} \tag{10}$$

где коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ удовлетворяют условиям

$$a(-k) = \overline{a(k)}; \qquad b(-k) = \overline{b(k)}, \qquad |a|^2 = 1 + |b|^2. \tag{11}$$

При этом $a(k) = \frac{1}{2ik}\{f(x, k), g(x, k)\}$, где $\{f, g\} = f_x g - g_x f$.

Решения $f(x, k)$ и $g(x, k)$ и коэффициент $a(k)$ допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной k и при больших k:

$$a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad f(x, k)e^{-ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad g(x, k)e^{ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right).$$

Последние две оценки равномерны по x из интервала (α, ∞) и $(-\infty, \beta)$ соответственно, где α, β — произвольные конечные числа.

При $\operatorname{Im} k \neq 0$ решение $f(x, k)$ экспоненциально убывает при $x \to \infty$, а $g(x, k)$ — при $x \to -\infty$. Если $a(i\varkappa) = 0$, то решения $f(x, i\varkappa)$ и $g(x, i\varkappa)$ линейно зависимы, так что $\psi(x) = g(x, i\varkappa)$ экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$

$$\psi(x) = e^{\varkappa x}(1 + o(1)),\ x \to -\infty, \qquad \psi(x) = de^{-\varkappa x}(1 + o(1)),\ x \to \infty, \tag{12}$$

и, таким образом, определяет собственную функцию уравнения (2). Соответствующее собственное значение $(i\varkappa)^2$ должно быть вещественным, так что $\operatorname{Im}\varkappa = 0$, а функция $\psi(x)$ — вещественна. Обозначим через $\dot\psi(x)$ производную от $g(x, k)$ по k при $k = k_0$. Эта функция принимает мнимые значения и имеет асимптотики

$$\dot\psi(x) = O(xe^{\varkappa x}),\ x \to -\infty,\ \dot\psi(x) = he^{\varkappa x}(1 + o(1)),\ x \to \infty. \tag{13}$$

Из уравнения Шредингера нетрудно получить, что

$$\frac{1}{c} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx = ihd. \tag{14}$$

Будем считать, что $a(k)$ имеет всего m нулей и снабдим номером l, $l = 1, \ldots, m$, соответствующие функции $\psi_l(x)$ и $\dot\psi_l(x)$, нормирующие константы c_l, собственные значения $\varkappa_l$ и асимптотические коэффициенты d_l и h_l.

Рассмотрим решение $\psi(x, k) = f(x, k)/a(k)$. Из (9) и (10) очевидно, что $\psi(x, k)$ удовлетворяет асимптотическому условию (4), причем коэффициент отражения представляется в виде

$$r(k) = b(k)/a(k). \tag{15}$$

Таким образом, мы полностью определили совокупность данных рассеяния $s = (r(k), \varkappa_l, c_l)$.

Заметим теперь, что коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ определяются по данным рассеяния. Действительно, из (15) и (11) получаем, что

$$1 - |r|^2 = \frac{|a|^2 - |b|^2}{|a|^2} = \frac{1}{|a|^2}, \tag{16}$$

определив $|a(k)|$ по коэффициенту отражения. Условие аналитичности и знание нулей $a(k)$ позволяет записать его в виде

$$a(k) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r(q)|^2)}{k - q} dq\right\} \prod_{l=1}^{m} \frac{k - i\varkappa_l}{k + i\varkappa_l},\ \operatorname{Im} k \neq 0, \tag{17}$$

$$a(k) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} a(k + i\varepsilon),\ \operatorname{Im} k = 0.$$

Зная $a(k)$, мы можем найти $b(k)$ при помощи (15).

Перейдем теперь к обратной задаче. Ее решение основано на интегральном уравнении, впервые полученном в [6] и являющемся частным случаем уравнения Гельфанда — Левитана. Пусть $s_1 = (r_1(k), \varkappa_l^{(1)}, c_l^{(1)}, l = 1, \ldots, m_1)$ и $s_2 = (r_2(k), \varkappa_l^{(2)}, c_l^{(2)}, l = 1, \ldots, m_2)$ — данные рассеяния для двух потенциалов $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Построим ядро $F(x, y)$,

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [r_2(k) - r_1(k)]\, g_1(x, k)\, g_1(y, k)\, dk +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m_2} c_l^{(2)} g_1(x, i\varkappa_l^{(2)})\, g_1(y, i\varkappa_l^{(2)}) - \sum_{l=1}^{m_1} c_l^{(1)} g_1(x, i\varkappa_l^{(1)})\, g_1(y, i\varkappa_l^{(2)}), \tag{18}$$

и рассмотрим уравнение для ядра $K(x, y)$,

$$K(x, y) + F(x, y) + \int\limits_{-\infty}^{x} K(x, z)\, F(z, y)\, dz = 0, \quad x > y. \tag{19}$$

Это уравнение однозначно разрешимо, и

$$u_2(x) - u_1(x) = \frac{d}{dx} K(x, x). \tag{20}$$

При $u_1 = 0$ это уравнение позволяет восстановить потенциал $u_2(x)$ по его данным рассеяния. В определении (18) следует считать, что $g_1(x, k) = e^{-ikx}$ и $c_l^{(1)} = 0$. В качестве $c_l^{(2)}$ и $\varkappa_l^{(2)}$ можно брать произвольные положительные числа, так чтобы среди $\varkappa_l$ не было равных. Коэффициент $r(k)$ должен удовлетворять условиям $r(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right)$, $|k| \to \infty$; $|r(k)| \leqslant 1$, а преобразование Фурье построенного по нему коэффициента $b(k)$,

$$B(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k)\, e^{-ikx} dk,$$

должно удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) \left| \frac{d}{dx} B(x) \right| dx < \infty$$

(ср. [5]). Вообще, в отношении гладкости функции $u(x)$ и $\frac{d}{dx} B(x)$ ведут себя одинаково.

§ 2. Вычисление формы Ω через данные рассеяния

Рассмотрим потенциал $u(x)$ и две его вариации $\delta_1 u(x)$ и $\delta_2 u(x)$. Пусть s, $\delta_1 s$, $\delta_2 s$ — соответствующие данные рассеяния и их вариации. Мы должны вычислить $\Omega(\delta_1 u, \delta_2 u)$ в терминах s, $\delta_1 s$ и $\delta_2 s$. Для этого надо найти явное выражение для δu через s и δs и подставить его в определение (7) формы Ω.

Займемся этими вычислениями. Формулы (18), (19) и (20) дают нам следующие выражения для вариации $\delta u(x)$:

$$\delta u(x) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta r(k)\, g^2(x, k)\, dk + \sum_{l=1}^{m} \left(\psi_l^2(x)\, \delta c_l + 2ic_l \psi_l(x)\, \dot{\psi}_l(x)\, \delta\varkappa_l\right)\right],$$

где обозначения $g(x, k)$, $r(k)$, $\psi_l(x)$, $\dot{\psi}_l(x)$, $\varkappa_l$ и c_l введены выше. Подстановка таких формул для $\delta_1 u(x)$ и $\delta_2 u(x)$ в (7) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned}
\Omega_s(\delta_1 s, \delta_2 s) = & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(k, q)\,[\delta_1 r(k)\, \delta_2 r(q) - \delta_1 r(q)\, \delta_2 r(k)]\, dk\, dq + \\
& + \sum_{l=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} B_l(k)\,[\delta_1 r(k)\, \delta_2\varkappa_l - \delta_1\varkappa_l\, \delta_2 r(k)]\, dk + \\
& + \sum_{l,j=1}^{m} [C_{lj}(\delta_1\varkappa_l \delta_2 c_j - \delta_1 c_j \delta_2\varkappa_l) + D_{lj}(\delta_1\varkappa_l \delta_2\varkappa_j - \delta_1\varkappa_j \delta_2\varkappa_l)] + \\
& + \sum_{l=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} E_l(k)\,[\delta_1 r(k)\, \delta_2 c_l - \delta_1 c_l \delta_2 r(k)]\, dk + \sum_{l,j=1}^{m} F_{lj}\,[\delta_1 c_l \delta_2 c_j - \delta_1 c_j \delta_2 c_l],
\end{aligned}$$

где

$$A(k, q) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{g^2(x, k), g^2(x, q)\}\, dx, \quad B_l(k) = \frac{ic_l}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{g^2(x, k), \psi_l(x)\, \dot{\psi}_l(x)\}\, dx;$$

$$C_{lj} = 2ic_l \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{\psi_l(x)\,\dot{\psi}_l(x),\ \psi_j^2(x)\}\,dx;$$

$$D_{lj} = -\,4c_l c_j \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{\psi_l(x)\,\dot{\psi}_l(x),\ \psi_j(x)\,\dot{\psi}_j(x)\}\,dx,$$

$$E_l(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \{g^2(x,k),\ \psi_l^2(x)\}dx, \quad F_{lj} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{\psi_l^2(x),\ \psi_j^2(x)\}\,dx$$

и мы используем стандартное обозначение $\{f,\ g\} = f_x g - g_x f$ для определителя Вронского. Интегралы в определении $A(k,\ q)$ и $B_l(k)$ следует понимать в смысле теории обобщенных функций.

Оказывается, что все выписанные интегралы можно явно вычислить и выразить только через данные рассеяния. Покажем это подробно на примере интеграла для $A(k,\ q)$. Из уравнения Шредингера нетрудно получить, что

$$g(x,k)\,g(x,q) = \frac{1}{q^2-k^2}\frac{d}{dx}\{g(x,k),\ g(x,q)\}. \tag{21}$$

С другой стороны,

$$\{g^2(x,k),\ g^2(x,q)\} = 2g(x,k)\,g(x,q)\,\{g(x,k),\ g(x,q)\},$$

откуда, используя (21), имеем

$$\{g^2(x,k),\ g^2(x,q)\} = \frac{1}{q^2-k^2}\frac{d}{dx}(\{g(x,k),\ g(x,q)\})^2.$$

Последняя формула позволяет выразить интегралы $A(k,\ q)$, $E_l(k)$ и F_{lj} через асимптотику соответствующих вронскианов. При этом очевидно, что $E_l(k) = 0$, $F_{lj} = 0$, а для $A(k,\ q)$ получаем выражение (см. (9), (10))

$$A(k,q) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{q^2-k^2}\cdot\frac{1}{8\pi^2}[(a(k)\,a(q)\,i\,(q-k)\,e^{-i(k+q)N} +$$
$$+\,a(k)\,b(-q)\,i\,(k+q)\,e^{i(q-k)N} - a(q)\,b(-k)\,i\,(k+q)\,e^{i(k-q)N} +$$
$$+\,b(-k)\,b(-q)\,i\,(k-q)\,e^{i(k+q)N})^2 - (i\,(q-k)\,e^{i(k+q)N})^2].$$

Используем известное соотношение в теории обобщенных функций

$$\lim_{N\to\infty} P\frac{e^{ixN}}{x} = i\pi\delta(x),$$

где символ P означает, что $1/x$ понимается в смысле главного значения. Тогда для $A(k,\ q)$ получится окончательное выражение

$$A(k,q) = \frac{ik}{\pi}\,|a(k)|^2\,\delta(k+q) + \frac{1}{\pi^2}P\frac{k^2+q^2}{k^2-q^2}\,a(k)\,a(q)\,b(-k)\,b(-q),$$

где при упрощении первого слагаемого мы использовали также, что в силу (11)

$$|a|^4 - |b|^4 + 1 = (|a|^2 - |b|^2)(|a|^2 + |b|^2) + 1 = |a|^2 + |b|^2 + 1 = 2\,|a|^2.$$

Выражения для $B_l(k)$, C_{lj} и D_{lj} считаются аналогично. При этом надо использовать такие тождества:

$$\{g^2(x,k),\psi_l(x)\dot{\psi}_l(x)\} = -\frac{1}{k^2+\varkappa_l^2}\cdot\frac{d}{dx}(\{g(x,k),\psi_l(x)\}\{g(x,k),\dot{\psi}_l(x)\})+\ldots,$$

$$\{\psi_l(x)\dot{\psi}_l(x),\psi_l(x)\dot{\psi}_j(x)\}=\frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa_l^2-\varkappa_j^2}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}(\{\psi_l(x),\dot{\psi}_j(x)\}\{\dot{\psi}_l(x),\psi_j(x)\}+\{\psi_l(x),\psi_j(x)\}\{\dot{\psi}_l(x),\psi_j(x)\})+\ldots,$$

где мы не выписываем полных производных от быстро убывающих функций. В результате мы получаем

$$B_l(k) = -\frac{4}{\pi}\frac{k^2-\varkappa_l^2}{k^2+\varkappa_l^2}a(k)b(-k),\quad C_{lj}=\delta_{lj}\frac{4\varkappa_l}{c_l},\ D_{lj}=-4\frac{\varkappa_l^2+\varkappa_j^2}{\varkappa_l^2-\varkappa_j^2}(1-\delta_{lj}),$$

причем при вычислении используются асимптотики (12) и (13) и тождество (14).

Полученные формулы позволяют нам явно выразить форму через данные рассеяния:

$$\Omega_s(\delta_1 s,\delta_2 s) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{ik}{\pi}|a(k)|^2[\delta_1 r(k)\delta_2 r(-k)-\delta_1 r(-k)\delta_2 r(k)]\,dk+$$

$$+\frac{P}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k^2+q^2}{k^2-q^2}a(k)a(q)b(-k)b(-q)[\delta_1 r(k)\delta_2 r(q)-\delta_1 r(q)\delta_2 r(k)]\,dk\,dq+$$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varkappa_l^2-k^2}{k^2+\varkappa_l^2}a(k)b(-k)[\delta_1 r(k)\delta_2\varkappa_l-\delta_1\varkappa_l\delta_2 r(k)]\,dk+$$

$$+2\sum_{l=1}^{m}\frac{\varkappa_l}{c_l}[\delta_1\varkappa_l\delta_2 c_l-\delta_1 c_l\delta_2\varkappa_l]+2\sum_{\substack{l,j=1\\ l\neq j}}^{m}\frac{\varkappa_l^2+\varkappa_j^2}{\varkappa_j^2-\varkappa_l^2}[\delta_1\varkappa_l\delta_2\varkappa_j-\delta_1\varkappa_j\delta_2\varkappa_l]. \tag{22}$$

Покажем теперь, что набор переменных

$$P(k) = -\frac{k}{\pi}\ln(1-|r(k)|^2),\qquad Q(k)=\arg b(k),$$
$$p_l=\varkappa_l^2,\quad q_l=2\ln b_l,\quad b_l=ic_l\frac{d}{dk}a(k)|_{k=i\varkappa_l},\quad l=1,\ldots,m, \tag{23}$$

является каноническим, т. е. форма Ω в этих переменных выглядит следующим образом:

$$\Omega_s(\delta_1 s,\delta_2 s) =$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\delta_1 P(k)\delta_2 Q(k)-\delta_1 Q(k)\delta_2 P(k))\,dk+\sum_{l=1}^{m}(\delta_1 p_l\delta_2 q_l-\delta_1 q_l\delta_2 p_l). \tag{24}$$

Не останавливаясь на мотивировке выбора (23), мы убедимся в этом прямой подстановкой. Замечая, что $\arg b(k) = \arg r(k) + \arg a(k)$, и используя

(17), получим

$$\delta Q(k)=\frac{1}{2i}\left(\frac{\delta r(k)}{r(k)}-\frac{\delta r(-k)}{r(-k)}\right)-\sum_{l=1}^{m}\frac{2k}{k^2+\varkappa_l^2}\,\delta\varkappa_l-$$

$$-\frac{P}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{q-k}\,\frac{1}{1-|r(q)|^2}\,(r(q)\,\delta r(-q)+r(-q)\,\delta r(q))\,dq.$$

Далее, непосредственно из (22) следует, что

$$\delta P(k)=\frac{k}{\pi}\,\frac{1}{1-|r(k)|^2}\,(r(k)\,\delta r(-k)-r(-k)\,\delta r(k)),\quad \delta p_l=2\varkappa_l\delta\varkappa_l.$$

Наконец, используя (17) и опуская члены, пропорциональные $\delta\varkappa_l$, имеем

$$\delta q_l=\frac{\delta c_l}{c_l}-2\sum_{j\neq l}^{m}\frac{\varkappa_l}{\varkappa_l^2-\varkappa_j^2}\,\delta\varkappa_j+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{q-i\varkappa_l}\,\frac{1}{1-|r(q)|^2}\,(r(q)\,\delta r(-q)+r(-q)\,\delta r(q))\,dq+\dots$$

Подставим эти выражения для вариаций в (24). Полученное выражение легко преобразуется к виду (22), если учесть (11), (15) и (16).

Таким образом, мы выразили через данные рассеяния некоторый набор переменных, канонических для симплектической формы Ω. В следующем параграфе мы убедимся, что этот набор играет роль переменных типа действие — угол по отношению к гамильтониану $H[u]$.

§ 3. Тождества следов и подведение итогов

В этом параграфе будем считать, что функция $u(x)$ бесконечно дифференцируема и быстро убывает вместе со всеми производными. В этом случае $\ln a(k)$ допускает при $|k|\to\infty$ асимптотическое разложение по обратным степеням k,

$$\ln a(k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^n}. \tag{25}$$

Мы предложим два способа вычисления коэффициентов c_n. Равенство коэффициентов, полученных этими двумя способами, и даст нам искомые тождества, выражающие интегралы движения через данные рассеяния.

Для доказательства (25) заметим, что в силу упомянутой связи между свойствами гладкости $u(x)$ и преобразования Фурье коэффициента $b(k)$ этот коэффициент быстро убывает при $|k|\to\infty$. В силу (11) и (16) это влечет быстрое убывание $\ln(1-|r(k)|^2)$, т. е. подынтегральной функции в (17). В результате мы можем оправдать разложение (25), причем

$$c_{2j}=0;\qquad c_{2j+1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}k^{2j}\ln(1-|r(k)|^2)\,dk-\frac{2}{2j+1}\sum_{l=1}^{m}(i\varkappa_l)^{2j+1}.$$

Второй способ вычисления коэффициентов c_n основан на уравнении Шредингера. Рассмотрим функцию $\chi(x,k)=\ln f(x,k)$, которая определена при всех достаточно больших $|k|$, $\operatorname{Im}k\geqslant 0$. При $\operatorname{Im}k>0$ функция $\chi(x,k)$ имеет асимптотики

$$\chi(x,k)=ikx+o(1),\ x\to\infty;$$
$$\chi(x,k)=ikx+\ln a(k)+o(1),\quad x\to-\infty. \tag{26}$$

Рассмотрим функцию

$$\sigma(x, k) = \frac{d}{dx}\chi(x, k) - ik.$$

Она является решением уравнения типа Рикатти

$$\sigma_x + \sigma^2 - u + 2ik\sigma = 0 \tag{27}$$

и убывает при $x \to \infty$. Из (26) мы видим, что

$$\ln a(k) = -\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, k)\, dx.$$

Это равенство, полученное при $\operatorname{Im} k > 0$, по гладкости переносится и на вещественную ось. Используя дифференциальное уравнение (27), убеждаемся, что $\sigma(x, k)$ допускает асимптотическое разложение

$$\sigma(x, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n(x)}{(2ik)^n},$$

где для коэффициентов $\sigma_n(x)$ выполняются рекуррентные соотношения

$$\sigma_n(x) = -\frac{d}{dx}\sigma_{n-1}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{n-k-1}(x)\,\sigma_k(x), \quad n = 2, \ldots; \quad \sigma_1(x) = u(x).$$

Несколько первых коэффициентов имеют вид

$$\sigma_2 = -u_x, \quad \sigma_3 = -u^2 + u_{xx},$$
$$\sigma_4 = -u_{xxx} + 4uu_x, \quad \sigma_5 = u_{xxxx} - 6uu_{xx} - 5u_x^2 + 2u^3.$$

Мы видим, что $\sigma_2(x)$ и $\sigma_4(x)$ являются полными производными. Это свойство справедливо для всех $\sigma_{2j}(x)$. Возвращаясь к $\ln a(k)$, убеждаемся в справедливости (25), причем

$$c_{2j+1} = -\left(\frac{1}{2i}\right)^{2j+1} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{2j+1}(x)\, dx,$$

так что

$$c_1 = -\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, dx, \quad c_3 = -\frac{1}{8i}\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x)\, dx, \quad c_5 = -\frac{1}{32i}\int_{-\infty}^{\infty} (2u^3 + u_x^2)\, dx.$$

Мы пришли, таким образом, к набору соотношений

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{2j+1}(x)\, dx = (-1)^j 2^{2j} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2j-1} P(k)\, dk - \frac{2^{2(j+1)}}{2j+1} \sum_{l=1}^{m} p_l^{\frac{2j+1}{2}},$$

где в записи правых частей мы использовали введенные выше обозначения (23). В частности,

$$H[u] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_5(x)\, dx = 8\int_{-\infty}^{\infty} k^3 P(k)\, dk - \frac{32}{5}\sum_{l=1}^{m} p_l^{5/2},$$

так что гамильтониан, действительно, является функцией только «импульсов», что оправдывает нашу аналогию между переменными $P(k)$, p_l, $Q(k)$, q_l и переменными типа действие — угол в гамильтоновой механике.

Мы закончили решение второй задачи, сформулированной во введении. Заметим теперь, что во введенных переменных уравнение КдФ выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} P(k) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_l = 0 \quad \frac{d}{dt} Q(k) = 8k^3, \quad \frac{d}{dt} q_l = -8\varkappa_l^3,$$

и тривиально решается. Формулы (5) дают это решение.

На основании развитой нами механической аналогии мы воспроизвели все результаты работ [2] — [4]. Существование бесконечного набора интегралов движения для уравнения КдФ при этом стало тривиальностью. Наш метод позволяет также дать явное решение для всех обобщенных уравнений КдФ

$$u_t = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \frac{\delta I_n[u]}{\delta u(x)}.$$

Однако наиболее привлекателен он с методической точки зрения: мы имеем теперь в нашем распоряжении нетривиальную модель бесконечномерной вполне интегрируемой гамильтоновой системы.

Институт ядерной физики
СО АН СССР
Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступила в редакцию
14 июня 1971 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M., Method for solving the Korteweg — de Vries equation, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095—1097.
2. Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D., Korteweg — de Vries equation and generalizations, II. Existence of conservation laws and constants of motion, J. Math. Phys. **9**, № 8 (1968), 1204—1209.
3. Kruskal M. D., Miura R. M., Gardner C. S., Zabusky N. J., Korteweg — de Vries equation and generalizations, V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws, J. Math. Phys. **11**, № 3 (1970), 952—960.
4. Lax P. D., Intergrals of nonlinear equations and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math. **21**, № 2 (1968), 467—490.
5. Фаддеев Л. Д., Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **73** (1964), 314—336.
6. Kay J., Moses H. E., The determination of the scattering potential from the spectral measure function, III, Nuovo Cimento **3**, № 2 (1956), 277—304.
7. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика, М., Физматгиз, 1958,
8. Арнольд В. И., Лекции по классической механике, М., изд. МГУ, 1968.
9. Гельфанд И. М., Левитан Б. М., Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, ДАН СССР **88**, № 4 (1953), 593—596.
10. Гельфанд И. М., О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, УМН **XI**, вып. 1 (1956), 191—198.
11. Буслаев В. С., Фаддеев Л. Д., О формулах следов для сингулярного дифференциального оператора Штурма — Лиувилля, ДАН СССР **132**, № 1 (1960), 13—16.
12. Захаров В. Е., Кинетическое уравнение для солитонов, ЖЭТФ **60**, № 3 (1971), 993—1000.