Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Простая связь геометрического и гамильтонова представлений интегрируемых нелинейных уравнений, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1982, том 115, 264–273

Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев

ПРОСТАЯ СВЯЗЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО И ГАМИЛЬТОНОВА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В основу интегрирования известных нелинейных эволюционных уравнений (уравнение Кортевега-де Фриса, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение sine-Gordon и т.д.) обычно кладется их представление в виде условия совместности двух линейных задач

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mathcal{U}(x,t,\lambda)F, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = V(x,t,\lambda)F, \qquad (2)$$

которое выглядит следующим образом

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [\mathcal{U},V] = 0. \qquad (3)$$

Здесь F – вектор-функция со значениями в пространстве $\mathbb{C}^n$, которое принято называть вспомогательным, а $\mathcal{U}$ и V – матрицы в этом пространстве, параметризованные функциями $\psi_\alpha(x,t)$ $\alpha=1,\dots,N$, (классические поля), входящими в нелинейное уравнение и спектральным параметром λ из $\mathbb{C}^1$, от которого они зависят мероморфно. Не умаляя общности можно считать, что матрица $\mathcal{U}$ имеет нулевой след.

Это представление интегрируемых уравнений называется геометрическим, так как матрицы-функции $\mathcal{U}(x,t,\lambda)$ и $V(x,t,\lambda)$ можно интерпретировать как локальные коэффициенты связности в тривиальном расслоении $\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^n$, где пространство-время $\mathbb{R}^2$ играет роль базы, а вспомогательное пространство $\mathbb{C}^n$ – роль слоя. При этом уравнения (1)-(2) означают, что вектор F ковариантно постоянен, а условие (3) показывает, что связность $(\mathcal{U},V)$ имеет нулевую кривизну. Поэтому (3) принято называть условием нулевой кривизны. Оно заменяет представление типа Лакса в современном формализме метода обратной задачи (см. [1]).

В качестве примера рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\varkappa|\psi|^2\psi, \qquad (4)$$

где $\Psi(x,t)$ – комплекснозначная функция (классическое заряженное поле), а параметр $\varkappa$ (константа связи) вещественен. В этом примере вспомогательное пространство двумерно и матрицы $\mathcal{U}(x,t,\lambda)$, $V(x,t,\lambda)$ имеют вид

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \lambda \mathcal{U}_1, \quad V = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}_0 = \varkappa \bar{\Psi}\sigma_+ + \Psi\sigma_-, \quad \mathcal{U}_1 = \frac{1}{2i}\sigma_3; \\ &V_0 = i\varkappa|\Psi|^2\sigma_3 - i\varkappa\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x}\sigma_+ + i\frac{\partial\Psi}{\partial x}\sigma_-, \\ &V_1 = -\mathcal{U}_0, \quad V_2 = -\mathcal{U}_1 \end{aligned} \tag{6}$$

и мы использовали стандартные матрицы в $\mathbb{C}^2$ – матрицы Паули

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ &\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

В этом примере матрица $\mathcal{U}(x,t,\lambda)$ имеет единственный простой полюс при $\lambda = \infty$ с вычетом $\frac{1}{2i}\sigma_3$.

Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим интегрируемое нелинейное эволюционное уравнение на поля Ψ_α с периодическими граничными условиями

$$\Psi_\alpha(x+L,t) = \Psi_\alpha(x,t), \quad \alpha = 1,\ldots,N. \tag{8}$$

Условие нулевой кривизны (3) сразу приводит к бесконечному набору интегралов движения для этого уравнения, производящей функцией которых является след матрицы монодромии линейной задачи (I). Напомним, что матрица монодромии определяется как

$$T(\lambda,t) = \overleftarrow{\exp}\int_{x_0}^{x_0+L} \mathcal{U}(x,t,\lambda)\,dx, \tag{9}$$

где интеграл понимается как мультипликативный. Теперь из (8) следует, что $\mathrm{tr}\,T(\lambda,t)$ не зависит от x_0, а из (3) действительно получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t} T\,\mathrm{tr}\,T(\lambda,t) = 0. \tag{I0}$$

С другой стороны, при гамильтоновом подходе к методу обратной задачи, идущем от работы [2], используется только линейная задача (I) и специальное свойство скобок Пуассона матричных элементов матрицы $\mathcal{U}(x,t,\lambda)$, рассматриваемых как функционалы на фазовом пространстве $\{\Psi_\alpha(x), \alpha=1,\dots,N\}$ с заданной симплектической структурой. В современной форме, отработанной после создания квантового варианта метода обратной задачи (см. [3] - [4]) это свойство формулируется следующим образом (см. [5] - [8])

$$\{\mathcal{U}(x,\lambda) \underset{,}{\otimes} \mathcal{U}(y,\mu)\} =$$

$$= [r(\lambda,\mu), \mathcal{U}(x,\lambda)\otimes I + I\otimes \mathcal{U}(y,\mu)]\,\delta(x-y), \qquad (11)$$

где для сокращения записи мы опустили аргумент t, который в гамильтоновом подходе играет роль параметра. Так что (11) и последующие формулы даны в фиксированный момент времени t. Здесь в правой части (11) $\otimes$ означает обычное тензорное произведение, а I - единичная матрица в $\mathbb{C}^n$. Символ $\{A \underset{,}{\otimes} B\}$ в левой части (11) для матриц A и B в $\mathbb{C}^n$, матричные элементы которых являются функционалами от $\Psi_\alpha(x)$, означает матрицу в $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$ имеющую тот же вид, что и $A\otimes B$, но где произведения $A_{ik} B_{ln}$ заменены на скобки Пуассона $\{A_{ik}, B_{ln}\}$. И, наконец, $r(\lambda,\mu)$ - некоторая матрица в $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$, называемая классической r - матрицей.

Например, для нелинейного уравнения Шредингера r - матрица выглядит следующим образом

$$r(\lambda,\mu) = -\frac{\varkappa}{\lambda-\mu} P, \qquad (12)$$

где P - матрица перестановки в $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$, имеющая вид

$$P = \frac{1}{2}\left(I\otimes I + \sum_{a=1}^{3} \sigma_a\otimes\sigma_a\right). \qquad (13)$$

Из локального свойства (11) следует соответствующее глобальное свойство для матрицы монодромии

$$\{T(\lambda) \underset{,}{\otimes} T(\mu)\} = [r(\lambda,\mu), T(\lambda)\otimes T(\mu)] \qquad (14)$$

и, в частности,

$$\{\mathrm{tr}\, T(\lambda), \mathrm{tr}\, T(\mu)\} = 0. \qquad (15)$$

Последнее соотношение в гамильтоновом подходе и заменяет утверждение (10).

Поясним это подробнее на примере двумерного вспомогательного пространства. В этом случае вследствие унимодулярности $T(\lambda)$ естественно положить

$$\mathrm{tr}\, T(\lambda) = 2\cos p(\lambda). \tag{16}$$

Тогда для каждого полюса λ_j (который для простоты считается простым) матрицы-функции $\mathcal{U}(x,\lambda)$ функция $p(\lambda)$ имеет разложение в формальный ряд Лорана по переменной $\lambda-\lambda_j$

$$p(\lambda) = \frac{c_j L}{\lambda-\lambda_j} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{nj} (\lambda-\lambda_j)^n, \tag{17}$$

который является асимптотическим при $\lambda \to \lambda_j$. Здесь c_j – некоторая константа, характеризующая полюс λ_j, а c_{nj} – локальные функционалы на фазовом пространстве, являющиеся интегралами движения. Все эти интегралы находятся в инволюции и образуют полный набор, содержащий, в частности, и гамильтониан исходного уравнения.

Мы покажем здесь, что если выполняется соотношение (11), то универсальное уравнение

$$\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} = \left\{ p(\mu), \Psi_\alpha \right\}, \quad \alpha = 1, \dots, N \tag{18}$$

представляется в виде (3)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(x,\lambda) - \frac{\partial}{\partial x} V(x,\lambda;\mu) + \left[\mathcal{U}(x,\lambda), V(x,\lambda;\mu) \right] = 0, \tag{19}$$

где как функция μ матрица $V(x,\lambda;\mu)$ для каждого λ_j допускает разложение в формальный ряд Тейлора по переменной $\mu-\lambda_j$

$$V(x,\lambda;\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{nj}(x,\lambda)(\mu-\lambda_j)^n. \tag{20}$$

Таким образом для общего уравнения, порожденного гамильтонианом

$$H = \sum_{j,n} a_{nj}\, c_{nj} [\Psi_\alpha] \tag{21}$$

представление в виде условия нулевой кривизны получается после разложения (20) и соответствующая матрица $V(x,\lambda)$ имеет вид

$$V(x,\lambda)=\sum_{j,n} a_{nj} V_{nj}(x,\lambda). \tag{22}$$

Этот важный результат известен и принадлежит Е.К.Склянину [6], А.Г.Изергин и В.Е.Корепин [7] обобщили его на квантовый случай. Здесь мы дадим простой и более общий вывод этого результата. Рассмотрим сначала для определенности случай нелинейного уравнения Шредингера

Для вывода введем матрицу перехода $T(x,y;\lambda)$ уравнения (I)

$$\frac{\partial}{\partial x} T(x,y;\lambda)=U(x,\lambda)\,T(x,y;\lambda), \tag{23}$$

$$T(x,y;\lambda)\Big|_{y=x}=I. \tag{24}$$

Она допускает представление

$$T(x,y;\lambda)=\Phi(x,\lambda)\exp Z(x,y;\lambda)\,\Phi^{-1}(y,\lambda), \tag{25}$$

где матрица Z диагональна, $Z(x,x;\lambda)=I$, а Φ имеет вид

$$\Phi(x,\lambda)=I+W(x,\lambda), \tag{26}$$

где W антидиагональна и раскладывается в формальный ряд Тейлора по переменной

$$W(x,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{W_n(x)}{\lambda^n}. \tag{27}$$

Для определения коэффициентов $W_n(x)$ имеем дифференциальное уравнение типа Рикатти

$$\frac{dW}{dx}+i\lambda\sigma_3 W-u_0+W u_0 W=0, \tag{28}$$

а Z определяется из соотношения

$$Z(x,y;\lambda)=-\frac{i\lambda\sigma_3}{2}(x-y)+\int_y^x u_0(z)\,W(z,\lambda)\,dz. \tag{29}$$

Из (28) получаем, что $W_n(x)$ однозначно определяются из рекуррентных соотношений

$$W_{n+1}(x)=i\sigma_3\left(\frac{dW_n}{dx}(x)+\sum_{k=1}^{n-1}W_{n-k}(x)u_0(x)W_k(x)\right) \tag{30}$$

и начального условия

$$W_1(x)=-i\sigma_3 u_0(x). \tag{31}$$

Таким образом матричные элементы коэффициентов $W_n(x)$ являются полиномами от полей $\Psi(x), \bar{\Psi}(x)$ и их производных.

Получим теперь выражение для матрицы $V(x,\lambda;\mu)$ через $\Phi(x,\mu)$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(x,\lambda)=\left\{P(\mu),\mathcal{U}(x,\lambda)\right\}, \tag{32}$$

которое порождает уравнение (18). Равенство в (32) понимается как равенство матричных элементов. Для подсчета скобок Пуассона в правой части (32) используем соотношение (11) и определение (9) матрицы монодромии. Имеем

$$\left\{T(\mu)\underset{,}{\otimes}\mathcal{U}(x,\lambda)\right\}=\int_{x_0}^{x_0+L}\Big(\big(T(x_0+L,y;\mu)\otimes I\big)\cdot$$

$$\cdot\left\{\mathcal{U}(y,\mu)\underset{,}{\otimes}\mathcal{U}(x,\lambda)\right\}\big(T(y,x_0;\mu)\otimes I\big)\Big)\,dy=$$

$$=\big(T(x_0+L,x;\mu)\otimes I\big)\left[r(\mu,\lambda),\mathcal{U}(x,\mu)\otimes I+I\otimes\mathcal{U}(x,\lambda)\right]\cdot$$

$$\cdot\big(T(x,x_0;\mu)\otimes I\big). \tag{33}$$

Введем матрицу $M(x,x_0;\lambda,\mu)$ в $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$

$$M(x,x_0;\lambda,\mu)=$$

$$=\big(T(x_0+L,x;\mu)\otimes I\big)\,r(\mu,\lambda)\big(T(x,x_0,\mu)\otimes I\big). \tag{34}$$

Расписывая коммутатор в правой части равенства (33) с учетом дифференциального уравнения (23) и вытекающего из (23)-(24) двойственного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y}T(x,y;\lambda)=-T(x,y;\lambda)\mathcal{U}(y,\lambda) \tag{35}$$

получаем

$$\{T(\mu) \overset{\otimes}{,} u(x,\lambda)\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} M(x, x_0; \lambda, \mu) + [M(x, x_0; \lambda, \mu), I \otimes u(x,\lambda)]. \tag{36}$$

Возьмем теперь в этом равенстве след по первому сомножителю $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, который обозначим через tr_1. Тогда

$$\{tr\, T(\mu), u(x,\lambda)\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \widetilde{V}(x,\lambda;\mu) + [\widetilde{V}(x,\lambda;\mu),\ u(x,\lambda)], \tag{37}$$

где

$$\widetilde{V}(x,\lambda;\mu) = tr_1 M(x, x_0; \lambda, \mu) \tag{38}$$

и не зависит от x_0.

Это и есть нужное представление в виде условия нулевой кривизны для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,\lambda) = \{tr\, T(\mu),\ u(x,\lambda)\}, \tag{39}$$

однако (34) и (38) показывают, что выражение для $\widetilde{V}(x,\lambda;\mu)$ нелокально.

Убедимся теперь, что при переходе к локальным интегралам движения $\widetilde{V}(x,\lambda;\mu)$ упрощается и также становится локальным. Для этого подставим в (34) и (38) разложение (25). Мы получим, что

$$\widetilde{V}(x,\lambda,\mu) = tr_1\Big(\big(\Phi(x_0+L,\mu) \exp Z(x_0+L, x; \mu) \cdot$$

$$\Phi^{-1}(x,\mu) \otimes I\big)\, r(\mu,\lambda) \big(\Phi(x,\mu) \exp Z(x, x_0; \mu) \cdot$$

$$\Phi^{-1}(x_0,\mu) \otimes I\big)\Big) = tr_1\Big(\big(\exp Z(x_0+L, x_0, \mu) \otimes I\big) \cdot$$

$$\big(\Phi^{-1}(x,\mu) \otimes I\big)\, r(\mu,\lambda)\, \big(\Phi(x,\mu) \otimes I\big)\Big); \tag{40}$$

при этом мы учли, что в силу (8)

$$\Phi(x+L,\lambda)=\Phi(x,\lambda) \tag{4I}$$

и использовали свойство операции tr_1

$$tr_1\big((A\otimes I)B\big)=tr_1\big(B(A\otimes I)\big), \tag{42}$$

где A - матрица в $\mathbb{C}^2$, а B - в $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$. Представим матрицу $\exp Z(x_0+L,x_0;\mu)$ с учетом (I6) и (25) в виде

$$\exp Z(x_0+L,x_0;\mu)=\cos p(\mu)I+i\sin p(\mu)\sigma_3. \tag{43}$$

Первое слагаемое в (43) дает в $\tilde{V}(x,\lambda;\mu)$ вклад пропорциональный $tr_1\, r(\mu,\lambda)$ и не зависит от x. Для интегрируемых уравнений, в том числе и для нелинейного уравнения Шредингера, $tr_1\, r(\mu,\lambda)$ пропорционален единичной матрице в $\mathbb{C}^2$. Поэтому этот член несущественен и его можно опустить. Таким образом получаем, что

$$\tilde{V}(x,\lambda;\mu)=$$

$$=i\sin p(\mu)tr_1\Big(\big(\Phi(x,\mu)\sigma_3\Phi^{-1}(x,\mu)\otimes I\big)\,r(\mu,\lambda)\Big). \tag{44}$$

Вспоминая, что

$$\{tr\,T(\mu),\cdot\}=-2\sin p(\mu)\{p(\mu),\cdot\}, \tag{45}$$

окончательно получаем, что уравнение (32) представимо в виде (I9) где

$$V(x,\lambda;\mu)=-\frac{i}{2}tr_1\Big(\big(\Phi(x,\mu)\sigma_3\Phi^{-1}(x,\mu)\otimes I\big)r(\mu,\lambda)\Big) \tag{46}$$

и локально зависит от $u_0(x)$ и ее производных. Учитывая явный вид r- матрицы (I2) для нелинейного уравнения Шредингера получаем для $V(x,\lambda;\mu)$ следующее простое выражение

$$V(x,\lambda;\mu)=\frac{i\varkappa}{2(\lambda-\mu)}\Phi(x,\mu)\sigma_3\Phi^{-1}(x,\mu). \tag{47}$$

Для других уравнений мы получаем семейство матриц $V_j(x,\lambda;\mu)$ связанных с каждым полюсом λ_j матрицы $U(x,\lambda)$, которые также даются выражениями вида (46). Более точно, представим в окрестности простого полюса λ_j матрицу $U(x,\lambda)$ как

$$u(x,\lambda) = \frac{c_j}{\lambda-\lambda_j} Q_j(x)\sigma_3 Q_j^{-1}(x) + u_j(x,\lambda), \tag{48}$$

где матрица $u_j(x,\lambda)$ уже регулярна при $\lambda = \lambda_j$. Отметим, что именно коэффициент c_j и участвовал в разложении (17). Тогда для матрицы перехода справедливо разложение вида (25)

$$T(x,y;\lambda) = \Phi_j(x,\lambda) \exp Z_j(x,y;\lambda) \Phi_j^{-1}(y,\lambda), \tag{49}$$

где теперь

$$\Phi_j(x,\lambda) = Q_j(x)\big(I + W_j(x,\lambda)\big), \tag{50}$$

а матрица $W_j(x,\lambda)$ по-прежнему антидиагональна. Она раскладывается в формальный ряд Тейлора по переменной $\lambda-\lambda_j$ и удовлетворяют дифференциальному уравнению вида (28)

$$\frac{dW_j}{dx} - \frac{2c_j\sigma_3}{\lambda-\lambda_j} W_j + \left[W_j, \tilde{u}_j^{(1)}\right] - \tilde{u}_j^{(2)} + W_j \tilde{u}_j^{(2)} W_j = 0, \tag{51}$$

где $\tilde{u}_j^{(1)}(x,\lambda)$ и $\tilde{u}_j^{(2)}(x,\lambda)$ – соответственно диагональная и антидиагональная части матрицы $\tilde{u}_j(x,\lambda)$, которая получается из матрицы $u_j(x,\lambda)$ с помощью калибровочного преобразования с матрицей $Q_j(x)$ и имеет вид

$$\tilde{u}_j(x,\lambda) = Q_j^{-1}(x) u_j(x,\lambda) Q_j(x) - Q_j^{-1}(x) \frac{d}{dx} Q_j(x). \tag{52}$$

Уравнение (51) позволяет однозначно определить коэффициенты Тейлора $W_{nj}(x)$ матрицы $W_j(x,\lambda)$, которые выражаются через значения входящих в $\tilde{u}_j(x,\lambda)$ полей и их производных в точке x. Соответствующая матрица $V_j(x,\lambda;\mu)$ при этом имеет вид (46)

$$V_j(x,\lambda;\mu) = -\frac{i}{2} tr_1\Big(\big(\Phi_j(x,\mu)\sigma_3 \Phi_j^{-1}(x,\mu) \otimes I\big) r(\mu,\lambda)\Big). \tag{53}$$

Приведенные рассуждения без труда обобщаются и на случай кратных полюсов матрицы $u(x,\lambda)$.

Литература

1. З а х а р о в В.Е., М а н а к о в С.В., Н о в и к о в С.П., П и т а е в с к и й Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М., 1980.

2. З а х а р о в В.Е., Ф а д д е е в Л.Д. Уравнение Кортевега -де Фриса - вполне интегрируемая гамильтонова система, Функц. анализ и прил., 1971, т.5, № 4, с.18-27.
3. С к л я н и н Е.К., Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Квантовый метод обратной задачи. I. ТМФ, 1979, т.40, № 2, с.194-220.
4. Ф а д д е е в Л.Д. Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля. - В сб.: "Проблемы квантовой теории поля" (Труды У Международного совещания по нелокальным теориям поля, Алушта 1979), Дубна, 1979, с.249- 299.
5. **S k l y a n i n E.K. On Complete Integrability of the Landau - Lifschitz Equation. LOMI preprint E-3-79, Leningrad, 1979.**
6. С к л я н и н Е.К. Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1980, т.95, с.55-128.
7. И з е р г и н А.Г., К о р е п и н В.Е. Решеточная модель, связанная с нелинейным уравнением Шредингера. - Докл.АН СССР, 1981, т.259, № 1, с.76-79.
8. К у л и ш П.П., С к л я н и н Е.К. О решениях уравнения Янга-Бакстера. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1980, т.95, с.129-160.