Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. Д. Фаддеев, Примеры гамильтоновых структур в теории интегрируемых моделей и их квантование, *Алгебра и анализ*, 2013, том 25, выпуск 2, 193–202

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 195.218.150.2
30 июня 2017 г., 16:01:45

Алгебра и анализ
Том 25 (2013), №2

Посвящается памяти
Владимира Савельевича Буслаева

ПРИМЕРЫ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СТРУКТУР В ТЕОРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ И ИХ КВАНТОВАНИЕ

© Л. Д. ФАДДЕЕВ

Володя Буслаев стал моим дипломным студентом, когда я сам был аспирантом и не мог быть его формальным руководителем. Мы занимались тонкими вопросами спектральной теории для задач с непрерывным спектром. А затем он нашел свой путь в математику. Думаю, что текст ниже ему бы понравился. Проблема квантования его всегда интересовала, и его работа ,,Производящий интеграл и канонический оператор Маслова в методе ВКБ“ [1] является важным вкладом в формирование этого понятия.

Изложенное ниже основано на моих докладах, сделанных осенью 2012 г. и посвященных описанию примеров гамильтоновых структур и их квантования, с которыми я сталкивался ранее, разрабатывая теорию интегрируемых эволюционных уравнений на двумерном пространстве-времени совместно с В. Захаровым, Л. Тахтаджаном и А. Волковым.

Алгебра наблюдаемых классической механики представляет собой коммутативную алгебру функций $f(\xi)$ на фазовом пространстве Γ с координатами ξ^a со структурой алгебры Ли $\{f, g\}$, которая является дифференцированием произведения

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g.$$

Ясно, что такая структура имеет вид

$$\{f, g\} = \Omega^{ab}(\xi)\partial_a f \partial_b g,$$

Работа над этой статьей частично поддержана грантами РФФИ 11-01-00570-а, 11-01-12037-офи-м, программой РАН ,,Математические проблемы нелинейной динамики“.

где антисимметричный ковариантный тензор 2-го ранга $\Omega^{ab}(\xi)$ удовлетворяет условию

$$\partial_k \Omega^{ab} \Omega^{kc} + \partial_k \Omega^{bc} \Omega^{ka} + \partial_k \Omega^{ca} \Omega^{kb} = 0,$$

обеспечивающему тождество Якоби

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0.$$

Тензор $\Omega^{ab}(\xi)$ можно рассматривать как скобку координат

$$\{\xi^a, \xi^b\} = \Omega^{ab}(\xi)$$

и называть ее скобкой Пуассона. Если размерность Γ четная и матрица Ω^{ab} невырождена, то обратная матрица Ω_{ab} определяет замкнутую 2-форму

$$\Omega = \Omega_{ab} d\xi^a \wedge d\xi^b, \quad d\Omega = 0$$

и Γ является симплектическим многообразием. Теорема Дарбу в этом случае утверждает, что заменой переменных $(\xi^a) \to (p^i, q_i)$ эта форма приводится к виду

$$\Omega = dp^i \wedge dq_i.$$

Переменные p^i, q_i (обобщенные импульсы и координаты) называются каноническими.

Динамика — развитие со временем — определяется уравнениями движения

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\},$$

где выделенная наблюдаемая H называется энергией или функцией Гамильтона. Тройка (Γ, Ω, H) называется гамильтоновой структурой. Квантование гамильтоновой структуры — ее некоммутативная деформация — не имеет однозначного подхода и требует определенного рода искусства.

§1. Примеры скобок

Пример 1. Абелев ток [2]. Координатами (бесконечномерного) фазового пространства являются функции $p(x)$ на оси $-\infty < x < \infty$ со скобкой Пуассона

$$\{p(x), p(y)\} = \delta'(x - y).$$

Антисимметрия очевидна, а тождество Якоби выполняется тривиально, так как правая часть не зависит от координат. Координата

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx$$

является центральной.

Простейший гамильтониан

$$H_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} p^2(x)dx \tag{1}$$

приводит к уравнениям движения

$$p_t(x,t) = -p_x(x,t)$$

с решением

$$p(x,t) = p(x-t),$$

и таким образом роль эволюции играет простой сдвиг.

Менее тривиальный гамильтониан

$$H_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \big(\frac{1}{2}p_x^2 + p^3\big)dx$$

приводит к уравнению Кортевега–де-Фриза

$$\partial_t + 6pp_x + p_{xxx} = 0.$$

Введем новые координаты

$$s(x) = p^2 + p_x,$$

посчитаем их скобку Пуассона и получим

$$\{s(x), s(y)\} = 2(s(x)+s(y))\delta'(x-y) + \delta'''(x-y).$$

Эта скобка называется скобкой Магри [3]. Жерве [4] заметил, что эта скобка представляет собой классический аналог коммутатора в алгебре Вирасоро — центральном расширении алгебры диффеоморфизмов прямой и $\delta'''(x-y)$ играет роль соответствующего 2-коцикла.

Пример 2. Модель Лиувилля. Координаты фазового пространства — канонические переменные $\pi(x)$, $\phi(x)$ со скобкой

$$\{\pi(x), \phi(x)\} = \delta(x-y).$$

Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\int (\pi^2 + \phi_x^2 + e^{2\phi})dx$$

приводит к уравнениям движения

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + e^{2\phi} = 0,$$

решение которого параметризуется двумя функциями $f(x)$, $g(x)$ в виде

$$e^{2\phi} = -\frac{f'(x+t)g'(x-t)}{\big(f(x+t)-g(x-t)\big)^2}.$$

В [5] Л. Тахтаджан и я сосчитали скобки Пуассона компонент $f(x)$ и $g(x)$. Приведу одну из них

$$\{f(x), f(y)\} = \epsilon(x-y)\big(f(x)-f(y)\big)^2 + f^2(x) - f^2(y). \tag{2}$$

Здесь $\epsilon(x)$ — знак переменной x

$$\epsilon(x) = 1, \quad x > 0; \quad \epsilon(x) = -1, \quad x < 0.$$

Антисимметричность очевидна, но тождество Якоби надо проверять. Оставлю это читателю.

Преобразование Мёбиуса

$$f(x) \to M(f) = \frac{af(x)+c}{bf(x)+d},$$

где матрица $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ вещественная и унимодулярная, вместе с таким же преобразованием для g оставляют поле ϕ инвариантным. Скобки для f, приведенные выше, не инвариантны, однако действие $SL(2,\mathbb{R})$ является Пуассоновым — при пересчете скобки трансформированных переменных следует учитывать Пуассонову структуру $SL(2,\mathbb{R})$ — скобку Склянина [6].

Приведем процедуру редукции — замены переменных, последовательно уничтожающей действия $SL(2,\mathbb{R})$ — сдвиг, преобразование подобия и инверсию. Это соответственно

замена 1

$$\xi(x) = f'(x),$$

замена 2

$$p(x) = -\frac{1}{2}(\ln\xi)_x = -\frac{1}{2}\frac{\xi_x}{\xi},$$

замена 3

$$s(x) = p^2(x) + p'.$$

Легко видеть, что

$$s(x) = S(f) = \frac{1}{2}\Big(\frac{f_{xxx}}{f_x} - \frac{3}{2}\Big(\frac{f_{xx}}{f_x}\Big)^2\Big)$$

— это производная Шварца от f, которая инвариантна при действии преобразования Мёбиуса на f.

Соответствующие скобки имеют вид

$$\begin{aligned} \{\xi(x), \xi(y)\} &= -2\epsilon(x-y)\xi(x)\xi(y), \\ \{p(x), p(y)\} &= \delta'(x-y), \end{aligned} \tag{3}$$

а скобку для $s(x)$ мы уже знаем.

§2. Дискретизация

Квантование бесконечномерных алгебр наблюдаемых сталкивается с определенными трудностями и требует тех или иных регуляризаций. Случай одномерного пространства, как в наших примерах, не слишком сложен, и, как правило, специалисты прибегают к понятию „нормального произведения“. Я, однако, предпочитаю регуляризацию, возникающую при замене непрерывной переменной x ее дискретными аналогами. Пусть Δ — интервал одномерной решетки, которая заменяет вещественную ось, и n — номер на этой цепочке. Формально мы пишем $x = n\Delta$ и вместо $\psi(x)$ имеем переменную ψ_n.

Начнем с наивного обобщения скобки (2)

$$\{f_n, f_m\} = \epsilon_{mn}(f_m - f_n)^2 + f_m^2 - f_n^2, \quad \epsilon_{mn} = 1,\ m > n;\ \epsilon_{mn} = -1,\ m < n,$$

и проделаем редукцию $1 \to 2 \to 3$. Оказывается, что наивная дискретизация

$$\begin{aligned} \xi_n &= f_{n+1} - f_n, \\ p_n &= \frac{\xi_n - \xi_{n+1}}{\xi_n + \xi_{n+1}}, \\ s_n &= (1 + p_n)(p_{n+1} - 1) \end{aligned}$$

приводит к удовлетворительным результатам. Например, получим

$$s_n = \frac{(f_{n+1} - f_n)(f_{n+3} - f_{n+2})}{(f_{n+2} - f_n)(f_{n+2} - f_{n-1})}$$

— инвариантное ангармоническое отношение. Более элегантная замена на втором шаге

$$w_n = \frac{\xi_{n+1}}{\xi_n}$$

дает

$$\hat{s}_n = (1 + w_n)(1 + w_{n+1}^{-1}) = s_n^{-1} \tag{4}$$

и более простые скобки (мы будем писать только нетривиальные)

$$\begin{aligned} \{w_n, w_{n+1}\} &= -2w_n w_{n+1}, \\ \{\hat{s}_n, \hat{s}_{n+1}\} &= \hat{s}_n \hat{s}_{n+1} - \hat{s}_n - \hat{s}_{n+1}, \\ \{\hat{s}_n, \hat{s}_{n+2}\} &= \frac{\hat{s}_n \hat{s}_{n+2}}{\hat{s}_{n+1}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Как видим, предложенная дискретизация привела к вполне самосогласованным результатам.

§3. Квантование

Начнем с квазилокальных скобок (5), которые, очевидно, дают дискретизацию скобок (2), если переходить к непрерывному пределу

$$w_n = e^{\Delta p_n}.$$

Квантование превращает w_n в образующие некоммутативной алгебры с соотношениями

$$w_n w_{n+1} = q^2 w_{n+1} w_n, \quad q = e^{i\hbar}, \tag{6}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка. Действительно, формально при $\hbar \to 0$ мы имеем

$$w_n w_{n+1} = (1 + 2i\hbar) w_{n+1} w_n$$

и при соответствии

$$\frac{i[a,b]}{\hbar} = \{a,b\}$$

получаем скобку (5). Таким образом, соотношение (6) является квантованием скобки Пуассона (5).

Посмотрим теперь, что соответствует наблюдаемой H_1, осуществляющей сдвиг. Очевидно, что этот аналог есть оператор K такой, что

$$w_n K = K w_{n-1}. \tag{7}$$

Формально K должен иметь вид

$$K = e^{-iH\Delta},$$

где H — квантованный гамильтониан (1), и представлять собой упорядочивание соответствующей экспоненты. Замечательно, что при нашей дискретной регуляризации эта цель достигается точно. Рассмотрим функцию $\theta(w)$, удовлетворяющую функциональному уравнению

$$\frac{\theta(qw)}{\theta(q^{-1}w)} = \frac{1}{w}, \tag{8}$$

и положим

$$K = \overrightarrow{\prod} \theta(w_n).$$

Я не буду вдаваться в проблему определения такого бесконечного произведения. В работе [5] мы рассматривали периодические граничные условия. Можно иметь дело и с другими вариантами, но мы останемся здесь на формальном уровне. Для доказательства (7) достаточно сделать следующее очевидное вычисление:

$$\begin{aligned} w_n\theta(w_{n-1})\theta(w_n) &= \theta(q^{-2}w_{n-1})w_n\theta(w_n) \\ &= \theta(w_{n-1})q^{-1}w_{n-1}w_n\theta(w_n) = \theta(w_{n-1})qw_nw_{n-1}\theta(w_n) \\ &= \theta(w_{n-1})qw_n\theta(q^2w_n)w_{n-1} = \theta(w_{n-1})\theta(w_n)w_{n-1}, \end{aligned}$$

и тем самым (7) выполняется.

Отметим, что попутно мы заметили структуру группы кос: пусть

$$b_n = \theta(W_n),$$

тогда

$$b_{n-1}b_nb_{n-1} = b_nb_{n-1}b_n.$$

Решение уравнения (8) в степенных рядах с точностью до постоянного множителя дается в виде

$$\theta(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{k^2}w^k, \tag{9}$$

т.е. θ-функцию. Однако для сходимости ряда следует требовать условие $|q| < 1$, что противоречит вещественности константы Планка. Мы обсудим выход из этой трудности в последнем разделе, а пока останемся на уровне формальных рядов.

Посмотрим, как в квантовом случае реализуется преобразование Миуры. Для этого представим $\theta(w)$ в виде (формула Якоби)

$$\theta(w) = r(w)r(w^{-1}),$$

где $r(w)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\frac{r(qw)}{r(q^{-1}w)} = \frac{1}{1+w},$$

дается формулой

$$\begin{aligned} r(w) &= \prod_n (1+q^{2n+1}w) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q-q^{-1})\dots(q^n-q^{-n})}w^n \\ &= \exp\sum \frac{(-1)^n w^n}{n(q-q^{-1})} \end{aligned} \tag{10}$$

и может быть названа q-аналогом Г-функции, экспоненты и дилогарифма. Мне больше всего импонирует третье название.

Хотя функция $r(w)$ может быть даже старше, чем θ-функция, ее использование в некоммутативном анализе много моложе. Основное свойство, обнаруженное Шутценберже [7], состоит в следующем: пусть u и v образуют Вейлеву пару

$$uv = q^2 vu.$$

Тогда

$$r(u)r(v) = r(u+v). \tag{11}$$

Шутценбержер рассматривал эту формулу как некоммутативный аналог биномиальных тождеств, используя тем самым интерпретацию $r(w)$ как q-Г-функцию.

В [2] А. Волков и я показали, что умножение $r(u)$ и $r(v)$ в обратном порядке дает соотношение

$$r(v)r(u) = r(u + v + q^{-1}uv),$$

которое при помощи (11) преобразуется в формулу пентагона

$$r(v)r(u) = r(u)r(q^{-1}uv)r(v).$$

В работе [8] Кашаев и я показали, что в квазиклассическом пределе последняя формула переходит в известное пятичленное тождество для дилогарифма Эйлера.

Мы используем последнее соотношение для описания дискретного квантового аналога алгебры Вирасоро. Замечая, что множитель $\theta(w_n)\theta(w_{n+1})$ в определении оператора K можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\theta(w_n)\theta(w_{n+1}) &= r(w_n^{-1})r(w_n)r(w_{n+1}^{-1})r(w_{n+1}) \\ &= r(w_n^{-1})r(w_n + w_{n+1}^{-1} + q^{-1}w_n w_{n+1}^{-1})r(w_{n+1}),\end{aligned}$$

мы видим, что K приобретает эквивалентную форму

$$K = \overrightarrow{\prod} r(s_n),$$

где

$$s_n = w_n + w_{n+1}^{-1} + q^{-1}w_n w_{n+1}^{-1}.$$

Очевидно, что s_n дает естественное квантование классической формулы (4). Данная формулировка дискретной алгебры Вирасоро была дана в [5]. А. Волков [9] показал, что генератор $d_n = r(s_n)$ обладает системой соотношений

$$\begin{aligned}d_{n+1}d_{n-1}d_n d_{n+1} &= d_{n-1}d_{n+1}d_n, \\ d_n d_{n-1}d_{n+1} &= d_{n-1}d_n d_{n+1}d_{n-1}.\end{aligned}$$

Групповой смысл этих соотношений еще не выяснен.

§4. Модулярный дубль

Как уже указывалось, рассуждения выше имеют недостаток — формулы (9) и (10) имеют смысл лишь при $|q| < 1$, а квантовое происхождение параметра q требует, чтобы $|q| = 1$. Выход из этого положения дается другим выбором решения этих уравнений. Развитие этого направления имеет 15-летнюю историю, начиная с работ [10, 11], и мы опишем результат в самой краткой форме.

Запишем генератор w_n в виде

$$w_n = e^{p_n}.$$

Соотношения (6) эквивалентны перестановочным соотношениям

$$[p_m, p_n] = 2ih(\delta_{m,n+1} - \delta_{m+1,n})$$

и очевидно дают квантовый аналог скобки Пуассона (2). Решение уравнений (9) и (10) дается следующими функциями:

$$\theta(w) = e^{ip^2/4\hbar},$$
$$r(w) = \exp -\frac{1}{4}\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipt}}{\operatorname{sh}\pi t \operatorname{sh}\hbar t}\frac{dt}{t}.$$

Сингулярность при $t = 0$ в последнем интеграле обходится сверху. Замечательное свойство этих формул — инвариантность по отношению к преобразованию

$$p \to \tilde{p} = \pi/\hbar, \quad h \to \tilde{h} = \pi^2/\hbar.$$

Операторы

$$\tilde{w}_n = e^{\tilde{p}_n}$$

коммутируют с операторами w_n. В то же время, оператор K, построенный по новой функции оператора $\theta(w)$, обслуживает одновременно обе алгебры, так как

$$\tilde{w}_n K = K\tilde{w}_{n-1}.$$

Я назвал такое объединение двух коммутирующих алгебр, порожденных образующими w_n и $\tilde{w}_n$, модулярным дублем. Общий характер структуры модулярного дубля и его роль при объяснении разного рода дуальностей становятся со временем более ясными. Но это уже другая история.

Список литературы

[1] Буслаев В. С., *Производящий интеграл и канонический оператор Маслова в методе ВКБ*, Функц. анал. и его прил. **3** (1969), №3, 17–31.

[2] Faddeev L. D., Volkov A. Yu., *Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice*, Phys. Lett. B **315** (1993), 311–318.

[3] Magri F., *A simple model of the integrable Hamiltonian equation*, J. Math. Phys. **19** (1978), 1156–1162.
[4] Gervais J.-L., *Transport matrices assiciated with the Virasoro algebra*, Phys. Lett. B **160** (1985), 279–282.
[5] Faddeev L. D., Takhtajan L. A., *Liouville model on the lattice*, Field Theory, Quantum Gravity and Strings. (Meudon/Paris VI, France 1984/85), Lecture Notes in Phys., vol. 246, Springer, Berlin, 1986, pp. 166–179.
[6] Склянин Е. К., *Волчок Горячева–Чаплыгина и метод обратной задачи рассеяния*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **133** (1984), 236–257.
[7] Schützenberger M. P., *Une interprétation de certaines solution de l'equation fonctionelle*, C. R. Acad. Sci. Paris **236** (1953), 352–353.
[8] Faddeev L., Kashaev R., *Quantum Dilogarithm*, Modern Phys. Lett. A **9** (1994), 427, [hep-th/9310070].
[9] Volkov A. Yu., *Beyond the "Pentagon Identity"*, Lett. Math. Phys. **39** (1997), 393–397.
[10] Faddeev L. D., *Discrete Heisenberg–Weyl group and modular group*, Lett. Math. Phys. **34**, (1995), 249–254, [hep-th/9504111].
[11] Faddeev L. D., *Modular double of quantum group*, Preprint math. QA/9912078.

Поступило 20 января 2013 г.