Л. Д. Фаддеев, Пентагон Волкова для модулярного квантового дилогарифма, *Функц. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 4, 65–71

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/faa3054

Функциональный анализ и его приложения
2011, т. 45, вып. 4, с. 65–71

УДК 517.98

Пентагон Волкова для модулярного квантового дилогарифма*

© 2011. Л. Д. Фаддеев

Посвящаю памяти моего многолетнего друга Димы Арнольда

Новая форма уравнений пентагона, предложенная Волковым [1] для q-экспоненты на основе формальных рядов, выводится в рамках гильбертова пространства для модулярного варианта квантового дилогарифма.

Функция

$$e(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q^{-1}-q)\cdots(q^{-n}-q^{n})}\, x^n \tag{1}$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{2n+1}x) \tag{2}$$

известна еще со времен Эйлера. Менее популярно ее представление в виде

$$e(x) = \exp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(-1)^n}{n(q^n-q^{-n})}\,.$$

Здесь в знаменателе суммы стоит целое число n и его q-аналог, так что естественно говорить о q-дилогарифме или, следуя современной моде, о квантовом дилогарифме. Это становится особенно естественным, если использовать $e(x)$ в некоммутативном контексте.

Пусть U, V образуют вейлеву пару:

$$UV = q^2 VU. \tag{3}$$

Шютценберже показал [2], что

$$e(U)e(V) = e(U+V). \tag{4}$$

В работе [3] Волков и я вывели формулу

$$e(V)e(U) = e(U+V+q^{-1}UV),$$

откуда, в силу (4), следует пентагональное соотношение

$$e(V)e(U) = e(U)e(q^{-1}UV)e(V). \tag{5}$$

*Работа написана при поддержке программы РАН «Математические проблемы нелинейной динамики», гранта 09-01-93108-НЦНИЛа и гранта РФФИ 11-01-00570.

В [4] Кашаев и я показали, что эта формула является некоммутативным аналогом пятичленного соотношения для дилогарифма Роджерса $\mathrm{L}(x)$

$$\mathrm{L}(x)+\mathrm{L}(y)=\mathrm{L}\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right)+\mathrm{L}(xy)+\mathrm{L}\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right), \tag{6}$$

где x, y — переменные из интервала $[0,1]$. Доказательство основано на квазиклассическом вычислении в пределе $q\to 1$ с использованием асимптотики

$$e(u)\sim\exp\left\{\frac{1}{2\ln q}E(u)\right\},\qquad E(u)=\mathrm{Li}_2(-u),$$

где $\mathrm{Li}_2(u)$ — дилогарифм Эйлера. Функции $\mathrm{L}(x)$ и $\mathrm{Li}_2(x)$ связаны соотношением

$$\mathrm{L}(x)=\mathrm{Li}_2(x)+\frac{1}{2}\ln x\ln(1-x).$$

Последний результат вызывает некоторые вопросы:

1. Почему в некоммутативной формуле участвует дилогарифм Эйлера, а в классическом пределе стоит дилогарифм Роджерса?

2. Почему аргументы функций в формулах (5) и (6) так различаются?

Ответ на первый вопрос обсуждается уже в [4], и окончательный ответ найден в работе [5], где подробно исследуется квазиклассическая асимптотика в формуле (5) и ее обобщениях, возникающих в конформной теории поля. Очень красивый ответ на второй вопрос дан в работе Волкова [1], где пентагональное соотношение было переписано в новой форме.

Начнем с классического случая. Пусть

$$R(u)=\mathrm{L}\left(\frac{u}{1+u}\right).$$

Легко проверить, что соотношение (6) эквивалентно равенству

$$R(u)+R(v)=R\left(\frac{v}{1+u}\right)+R\left(\frac{uv}{1+u+v}\right)+R\left(\frac{u}{1+v}\right). \tag{7}$$

Аргументы, участвующие здесь,

$$x_1=u,\quad x_2=v,\quad x_3=\frac{1+v}{u},\quad x_4=\frac{1+u+v}{uv},\quad x_5=\frac{1+u}{v},$$

являются решением Y-системы A_2

$$x_ix_{i+2}=1+x_{i+1}, \tag{8}$$

которая имеет период 5,

$$x_{i+5}=x_i.$$

Таким образом, (7) можно записать в виде

$$R(x_1)+R(x_2)=R\left(\frac{1}{x_5}\right)+R\left(\frac{1}{x_4}\right)+R\left(\frac{1}{x_3}\right). \tag{9}$$

Квантовый аналог системы (8) имеет вид

$$X_iX_{i+2}=1+qX_{i+1}, \tag{10}$$

и если

$$X_1=U,\quad X_2=V,\quad UV=q^2VU,$$

то

$$\begin{aligned} X_3 &= U^{-1}(1+qV), \\ X_4 &= U^{-1}(q^{-1}+U+V)V^{-1}, \\ X_5 &= (1+qU)V^{-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Квантовая формула Волкова имеет вид

$$e(X_1)e(X_2) = e(X_5^{-1})e(X_4^{-1})e(X_3^{-1}). \tag{12}$$

Мы видим замечательную аналогию между формулами (9) и (12).

Рассуждения Волкова основаны на действиях с формальными рядами. Для погружения его вывода в рамки гильбертова пространства возникает препятствие. Инволюция

$$U^* = U, \quad V^* = V$$

требует условия $|q| = 1$, в то время как исходные формулы (1), (2) не определены для рационального $\ln q/(i\pi)$.

Для преодоления этой трудности я в работе [7] предложил заменить функцию $e(u)$ на ее модулярный аналог

$$\Phi(u) = \frac{\prod(1+q^{2n+1}u)}{\prod(1+\tilde{q}^{2n+1}\tilde{u})},$$

где

$$q = e^{i\pi\tau}, \quad \tilde{q} = e^{-i\pi/\tau}, \quad \tilde{u} = u^{1/\tau}.$$

В этой работе мы покажем, что формула (12) верна при замене $e(u)$ на $\Phi(u)$, и дадим ее вывод, основанный на решении Y-системы (10).

Пусть

$$\gamma(z) = \exp\left\{-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itz}}{\sin\omega t \sin\omega' t}\,\frac{dt}{t}\right\}, \tag{13}$$

где контур интегрирования обходит сингулярность при $t = 0$ сверху. Здесь, следуя Волкову [8], мы используем обозначения времен Вейерштрасса ω, ω' для периодов решетки с образующими 1 и τ,

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}, \quad \omega\omega' = -\frac{1}{4}\,.$$

Интеграл в (13) имеет смысл для ω и ω' из верхней полуплоскости, положительному τ отвечают чисто мнимые ω, ω'. Нетрудно проверить, что

$$\Phi(e^{-i\pi z/\omega}) = \gamma(z). \tag{14}$$

Формулу (14) примем за определение модулярного квантового дилогарифма. Функция $\gamma(z)$, так же как и $e(u)$, хорошо известна в анализе. Среди многочисленных ее названий есть термин «двойная Γ-функция Барнса» [9]. Ее свойства, включающие некоммутативные версии, подробно описаны в статье Волкова [8] и в ряде работ Кашаева ([10], [11]). Я ввел ее в [6] для описания дуальности в дискретной группе Гейзенберга–Вейля, а в [7] использовал для определения модулярного дубля для квантовой группы $SL_q(2)$, где она заменяет q-экспоненту в определении универсальной R-матрицы Дринфельда [12]. В работах [13], [14] она используется для описания эволюционного оператора для квантовых интегрируемых систем на дискретном пространстве-времени, а в [16] дано определение фундаментальной R-матрицы для XXZ модели произвольного спина. Дальнейшие ее приложения, в том числе и в математике, приведены во введении работы [5].

Перечислим свойства функции $\gamma(z)$, которые будут использоваться в дальнейшем.

1. Функциональное уравнение

$$\frac{\gamma(z+\omega')}{\gamma(z-\omega')} = 1 + e^{-i\pi z/\omega}. \tag{15}$$

Заметим, что справедливо аналогичное свойство при взаимной замене ω и ω', но нам оно не будет нужно.

2. Формула обращения

$$\gamma(z)\gamma(-z) = e^{i\beta}e^{i\pi z^2}, \quad \beta = \frac{\pi}{12}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right). \tag{16}$$

3. Унитарность

$$\overline{\gamma(z)} = \frac{1}{\gamma(z)}$$

при $\tau > 0$ и вещественных z.

4. Квазиклассическая асимптотика

$$\gamma(z) \sim \exp\left\{\frac{1}{2\pi i\tau}E(e^{-i\pi z/\omega})\right\}. \tag{17}$$

Из формулы (15) следует соотношение

$$\frac{\Phi(qu)}{\Phi(q^{-1}u)} = \frac{1}{1+u}\,. \tag{18}$$

Теперь мы можем переходить к построению эволюционного оператора для квантовой A_2 системы. Реализуем операторы U и V на плотной области определения в $L_2(\mathbb{R})$ формулами

$$Uf(z) = e^{-i\pi z/\omega}f(z),$$
$$Vf(z) = f(z+2\omega').$$

Мы встречаем здесь умножение на неограниченную функцию и сдвиг в комплексную плоскость. Область определения $\mathscr{D}$ операторов U и V должна разрешать такое действие. Достаточно считать, что $\mathscr{D}$ содержит целые функции от z, убывающие в направлениях, параллельных вещественной оси, как e^{-z^2}. При $\tau > 0$ операторы U и V неотрицательны и существенно самосопряженные. То же справедливо для операторов X_3, X_4, X_5 из (11).

Введем оператор Φ,

$$\Phi f(z) = \Phi(e^{-i\pi z/\omega})f(z) = \gamma(z)f(z),$$

и преобразование Фурье

$$Ff(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi izt}f(t)\,dt.$$

Заметим, что

$$UF = FV,$$
$$VF = FU^{-1},$$
$$V\Phi(U) = \Phi(U)(1 + q^{-1}U)V.$$

Последнее свойство следует из функционального уравнения (18). Теперь нетрудно видеть, что

$$X_{i+1} = S^{-1} X_i S, \tag{19}$$

где унитарный оператор S дается формулой

$$S = \Phi F \tag{20}$$

Периодичность $i \equiv i + 5$ будет обеспечена, если

$$S^5 = e^{i\alpha} I. \tag{21}$$

Покажем, что это действительно так. Пусть $S^5(x, y)$ — ядро оператора S^5, рассматриваемого как интегральный оператор. По определению

$$S^5(x, y) = \gamma(x) \int \exp\{-2\pi i(xt_1 + t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_4 + t_4y)\} \\ \times \gamma(t_1)\gamma(t_2)\gamma(t_3)\gamma(t_4)\, dt_1\, dt_2\, dt_3\, dt_4 = \int M(x, z) e^{2\pi i z(x-y)} dz,$$

где

$$M(x, z) = \int \exp\{-2\pi i(xt_1 + t_1t_2 + t_2t_3 + t_3z + xz)\} \\ \times \gamma(t_1)\gamma(t_2)\gamma(t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3\, \gamma(x)\gamma(z). \tag{22}$$

Подобные интегралы в [8], [10], [15] интерпретированы как непрерывные аналоги биномиальных соотношений Рамануджана, и из приведенных там явных формул следует, что $M(x, z)$ не зависит от x и z и

$$M(x, z) = e^{i\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}\left(\tau + \frac{1}{\tau} + 1\right). \tag{23}$$

Мы видим, что

$$S^5(x, y) = e^{i\alpha}\delta(x - y).$$

Заметим теперь, что в силу формулы обращения (16) мы можем дать альтернативную форму для оператора эволюции

$$S = e^{i\beta}\hat{\Phi}^{-1} G, \quad \beta = \frac{\pi}{12}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right), \tag{24}$$

где

$$\hat{\Phi} f(z) = \Phi(e^{i\pi z/\omega}) f(z) = \gamma(-z) f(z)$$

и

$$G = e^{i\pi z^2} F.$$

Легко проверить, что

$$G^3 = e^{i\pi/4} F^2. \tag{25}$$

Мы имеем теперь все средства для доказательства формулы Волкова в виде

$$\Phi(X_1)\Phi(X_2) = \Phi(X_5^{-1})\Phi(X_4^{-1})\Phi(X_3^{-1}). \tag{26}$$

Используя действие (19) оператора S, перепишем это соотношение в виде

$$\Phi S^{-1}\Phi S = S^{-4}\hat{\Phi}S^4 S^{-3}\hat{\Phi}S^3 S^{-2}\hat{\Phi}S^2$$

или вследствие определений (20) и (24)

$$\Phi F^{-1} = S^{-4}G^3 e^{3i\beta} = e^{-i\alpha+3i\beta}\Phi F G^3,$$

и это равенство справедливо вследствие определения α и β в (23), (24), формулы (25) и тождества

$$F^4 = I.$$

Итак, мы доказали основной результат (26) и убедились, что он эквивалентен формуле (21).

В заключение убедимся, что формула (23) дает классическое тождество для дилогарифма Роджерса. Мы перейдем к квазиклассическому вычислению в формуле (22). Используя асимптотику (17) и оставляя в экспоненте подынтегрального выражения только коэффициенты при $1/(2\pi i\tau)$, мы получаем интеграл

$$M(x,y) \sim \int \exp\biggl\{\frac{1}{2\pi i\tau}\sum_{i=1}^{5}(E(e^{p_i}) + p_i p_{i+1})\biggr\}dp_3\,dp_4\,dp_5,$$

где

$$p_1 = -\frac{i\pi x}{\omega}$$

и аналогично возникают аргументы $p_2,\ldots,p_5$ из y, t_1, t_2, t_3, а $p_6 = p_1$. Используя соотношение

$$\frac{d}{dp}E(e^p) = -\ln(1+e^p),$$

получаем уравнения стационарной фазы

$$\begin{aligned}\ln(1+e^{p_3}) &= p_2 + p_4,\\ \ln(1+e^{p_4}) &= p_3 + p_5,\\ \ln(1+e^{p_5}) &= p_4 + p_1,\end{aligned}$$

которые совпадают с тремя уравнениями Y-системы для $x_i = e^{p_i}$, выражающие x_3, x_4 и x_5 через $x_1 = x$ и $x_2 = y$.

Теперь, переписывая сумму $\sum_i p_i p_{i+1}$ в виде $\sum_i \frac{1}{2}p_i(p_{i-1}+p_{i+1})$, получаем квазиклассический результат

$$\sum E(x_i) + \frac{1}{2}\ln x_i \ln(1+x_i) = -\frac{\pi^2}{2} = -3\,\frac{\pi^2}{6},$$

что приводит к формуле (9), если учесть, что

$$R(x) = -E(x) - \frac{1}{2}\ln x\ln(1+x) \quad \text{и} \quad \frac{\pi^2}{6} - R(x) = R\biggl(\frac{1}{x}\biggr).$$

Мы явно видим, как происходит замена эйлерова дилогарифма на дилогарифм Роджерса.

Большинство результатов в этой работе в той или иной мере возникли при обсуждении с А. Ю. Волковым и Р. М. Кашаевым. В литературе, посвященной использованию квантового дилогарифма, можно найти некоторые из приведенных здесь результатов, см., например, [17], [18]. Здесь я просто собрал их в одну из возможных последовательных логических схем. Я благодарен Волкову и Кашаеву за их участие в обсуждениях. Работа дозрела и была написана в прекрасных условиях, созданных мне в Греции профессорами Котсиолисом, Саввиди и Зупанасом. Всем им я приношу глубокую благодарность.

Литература

[1] A. Yu. Volkov, *Pentagon identity revisited*, Int. Math. Res. Notices (2011); doi:10.1093/imrn/rnr200; `http://arxiv.org/abs/1104.2267`.

[2] M. P. Schützenberger, *Une interprétation de certaines solutions de l'équation fonctionnelle* $F(x+y) = F(x)F(y)$, C. R. Acad. Sci. Paris, **236** (1953), 352–353.

[3] L. D. Faddeev, A. Y. Volkov, *Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice*, Phys. Lett. B, **315** (1993), 311–318; `http://arxiv.org/abs/hep-th/9307048`.

[4] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, *Quantum dilogarithm*, Modern. Phys. Lett. A, **9**:5 (1994), 427–434; `http://arxiv.org/abs/hep-th/9310070`.

[5] R. Kashaev, T. Nakanishi, *Classical and quantum dilogarithm identities*, `http://arxiv.org/abs/1104.4630`.

[6] L. D. Faddeev, *Discrete Heisenberg–Weyl group and modular group*, Lett. Math. Phys., **34**:3 (1995), 249–254.

[7] L. D. Faddeev, *Modular double of quantum group*, Math. Phys. Stud., **21** (2000), 149–156; `http://arxiv.org/abs/math/9912078`.

[8] A. Yu. Volkov, *Noncommutative hypergeometry*, `http://arxiv.org/abs/math/0312084`.

[9] E. W. Barnes, *The genesis of the double gamma function*, Proc. London Math. Soc., **31** (1899), 358–381.

[10] R. M. Kashaev, *Liouville central charge in quantum Teichmuller theory*, `http://arxiv.org/abs/hep-th/9811203`.

[11] R. M. Kashaev, *Quantization of Teichmueller spaces and the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys., **43**:2 (1998), 105–115.

[12] В. Г. Дринфельд, *Квантовые группы*, Зап. научн. семин. ЛОМИ, **155** (1986), 19–49.

[13] L. Faddeev, A. Yu. Volkov, *Hirota equation as an example of integrable symplectic map*, Lett. Math. Phys., **32**:2 (1994), 125–135; `http://arxiv.org/abs/hep-th/9405087`.

[14] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, A. Y. Volkov, *Strongly coupled quantum discrete Liouville theory.* 1. *Algebraic approach and duality*, Comm. Math. Phys., **219**:1 (2001), 199–219; `http://arxiv.org/abs/hep-th/0006156`.

[15] B. Ponsot, J. Teschner, *Clebsch–Gordan and Racah–Wigner coefficients for a continuous series of representations of* $U_q(sl(2,R))$, Comm. Math. Phys., **224**:3 (2001), 613–655; `http://arxiv.org/abs/math.QA/0007097`.

[16] А. Ю. Волков, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи на дискретном пространстве-времени*, ТМФ, **92**:2 (1992), 207–214; preprint HU-TFT-93-30.

[17] L. Chekhov, V. Fock, *Quantum Teichmüller spaces*, `http://arxiv.org/abs/math.QA/9908165`.

[18] A. B. Goncharov, *The pentagon relation for the quantum dilogarithm and quantized* $M_{0,5}$, `http://arxiv.org/abs/0706.4054v2`.

Санкт-Петербургское отделение
Математического Института
им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: faddeev@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
17 октября 2011 г.