Л. Д. Фаддеев, Новые динамические переменные теории тяготения Эйнштейна, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 3, 323–335

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/tmf6614

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 166, № 3
март, 2011**

 Л. Д. Фаддеев*

НОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Описан альтернативный формализм теории тяготения Эйнштейна. Роль динамических переменных играет набор из десяти векторных полей f_μ^A, $A = 1,\ldots,10$. Метрика является композитной переменной, $g_{\mu\nu} = f_\mu^A f_\nu^A$. Предложенная схема может дать дальнейшее развитие теории тяготения, в котором теория Эйнштейна будет играть роль эффективной теории, и константа Ньютона появится посредством введения аномальной функции Грина.

Ключевые слова: теория тяготения Эйнштейна, векторные поля, гамильтонова формулировка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория тяготения Эйнштейна [1] является величайшим достижением теоретической физики XX века. Ее создание из априорных принципов, опередившее экспериментальное подтверждение, представляет собой триумф теоретического подхода к изучению природы. Геометрические конструкции, лежащие в основе ее формулировки, замечательно иллюстрируют роль математики в описании фундаментальных законов физики.

Теория тяготения появилась как классическая теория поля; во время ее появления другим примером была только электродинамика. Создание квантовой механики и достаточно успешная формулировка квантовой электродинамики, а также появление других квантовых теоретико-полевых построений поставили задачу квантования теории тяготения. Начиная с фундаментальной работы Дирака [2] проблеме квантования гравитации было посвящено множество подходов и предложений. Мы сейчас знаем гамильтонову интерпретацию теории Эйнштейна и ее формальное квантование в рамках формализма континуального интеграла (см. работу [3] и приведенную в ней литературу). Однако результат все еще неудовлетворителен, и проблема квантования не решена. Техническая трудность состоит в том, что соответствующая теория возмущений неперенормируема. В процессе перенормировки появляются контрчлены, не входящие в классический лагранжиан. Формальной

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: faddeev@pdmi.ras.ru

причиной этого является тот факт, что константа связи (постоянная Ньютона) имеет размерность длины, $[\kappa] = [\mathrm{L}]$, и высшие степени разложения по κ могут иметь коэффициенты с высшими производными от фундаментальных полей. Это обстоятельство отличает теорию тяготения Эйнштейна от электродинамики и теории Янга–Миллса, в которых константы связи безразмерны, расходимости логарифмические и количество безразмерных контрчленов конечно.

Схожная трудность, существовавшая в четырехфермионной теории слабых взаимодействий, была решена в теории Вайнберга–Салама [4], [5], где вместо размерной константы связи фигурирует поле Хиггса. Естественно, что аналогичные попытки предпринимались и в теории тяготения (см. обзор [6]), однако вполне удовлетворительной схемы все еще нет.

Настоящая работа представляет собой еще одну попытку найти новую схему, в которую теория Эйнштейна входила бы как эффективная теория. Имея в виду успех теории Вайнберга–Салама, я решил искать формулировку теории тяготения в терминах векторных полей. Пример такой формулировки уже существует. Он основан на теории погружения, согласно которой метрика четырехмерного пространства интерпретируется как индуцированная метрика при вложении этого пространства в десятимерное пространство:

$$g_{\mu\nu} = f_\mu^A f_\nu^A, \qquad f_\mu = \partial_\mu f^A,$$

где f^A, $A = 1, \dots, 10$, – координаты погружения. Работы [7], [8] дают достаточно полную информацию об этом подходе.

Однако уравнения движения в этой теории отличаются от уравнений Гильберта–Эйнштейна. Действительно,

$$\delta S = \delta\biggl(\int \sqrt{g}\, R\, d^4x\biggr) = \int \delta g_{\mu\nu} G^{\mu\nu}\, d^4x = -2 \int \partial_\nu (G^{\mu\nu} \partial_\mu f^A) \delta f^A\, d^4x,$$

так что соответствующее уравнение движения содержит производные тензора Риччи $G^{\mu\nu}$. Это обстоятельство послужило поводом к разочарованию в этом подходе для авторов работы [7], в то время как авторы работы [8] приводят основательные аргументы в его поддержку.

Мне очень понравились главные формулы теории погружения, и я решил их модифицировать, считая f_μ^A независимыми векторными полями, а не градиентами скаляров. Это должно было помочь избежать лишних производных. Получившийся формализм описан в заметках [9], [10]. Окончательный результат состоит в том, что возникшая схема эквивалентна теории Эйнштейна. Поэтому возникает естественный вопрос, зачем делать такую переформулировку? Мой ответ состоит в том, что новая схема может стать более естественным отправным пунктом для поиска более фундаментальной теории.

В разделе 2 настоящей статьи приводятся необходимые сведения из дифференциальной геометрии. В разделе 3 выписаны уравнения движения и обсуждается их эквивалентность уравнениям Гильберта–Эйнштейна. Раздел 4 содержит гамильтонову редукцию основного лагранжиана. В разделе 5 обсуждаются возможные направления обобщения теории тяготения Эйнштейна.

2. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

На протяжении всей работы я буду использовать евклидову сигнатуру, отличая пространство и время только в обозначениях для координат $x^\mu = (x^0, x^k)$. Это позволит мне не загружать формулы лишними знаками минус. Переход к псевдоевклидовой структуре происходит почти автоматически.

Пусть M^4 – четырехмерное пространство с локальными координатами x^μ, $\mu = 0,1,2,3$. Динамические переменные составляют набор ковариантных векторных полей $f_\mu^A(x)$, $A = 1,\dots,D$, где D – достаточно большое число. В дальнейшем окажется, что следует взять $D = 10$.

Инфинитезимальные преобразования координат $\delta x^\mu = \epsilon^\mu(x)$ действуют на f_μ^A обычным образом:

$$\delta f_\mu^A = -\partial_\mu \epsilon^\lambda f_\lambda^A - \epsilon^\lambda \partial_\lambda f_\mu^A.$$

Матрица Грама $g_{\mu\nu} = f_\mu^A f_\nu^A$ задает метрику на M^4, а такой объект, как

$$\Omega^\alpha_{\beta\mu} = f^{\alpha A} \partial_\mu f_\beta^A = g^{\alpha\sigma} \Omega_{\sigma,\beta\mu} = g^{\alpha\sigma} f_\sigma^A \partial_\mu f_\beta^A,$$

где, как всегда, $f^{\alpha A} = g^{\alpha\beta} f_\beta^A$, $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta$, определяет линейную связность. Действительно, при координатных преобразованиях матрица $g_{\mu\nu}$ преобразуется как ковариантный тензор, а в вариацию $\Omega^\alpha_{\beta\mu}$, помимо обычных тензорных слагаемых, входит вторая производная от ϵ^α:

$$\delta \Omega^\alpha_{\beta\mu} = \dots + \partial_\mu \partial_\beta \epsilon^\alpha.$$

Связность $\Omega^\alpha_{\beta\mu}$ совместима с метрикой $g_{\mu\nu}$, поскольку

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= \partial_\lambda f_\mu^A f_\nu^A + f_\mu^A \partial_\lambda f_\nu^A - \Omega^\sigma_{\mu\lambda} g_{\sigma\nu} - \Omega^\sigma_{\nu\lambda} g_{\mu\sigma} = \\ &= \partial_\lambda f_\mu^A f_\nu^A + f_\mu^A \partial_\lambda f_\nu^A - \partial_\lambda f_\mu^A f^{\sigma A} g_{\sigma\nu} - \partial_\lambda f_\nu^A f^{\sigma A} g_{\mu\sigma} = 0,\end{aligned}$$

однако она не является римановой, и кручение

$$T_{\alpha[\mu,\nu]} = \Omega_{\alpha,\mu\nu} - \Omega_{\alpha,\nu\mu}$$

отлично от нуля. Риманова связность $\Gamma_{\alpha,\beta\mu}$ выражается через $\Omega_{\alpha,\beta\mu}$ следующим образом:

$$\Gamma_{\alpha,\beta\mu} = \frac{1}{2}(\Omega_{\alpha,\beta\mu} + \Omega_{\alpha,\mu\beta}) + \frac{1}{2}(\Omega_{\mu,\alpha\beta} - \Omega_{\mu,\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(\Omega_{\beta,\alpha\mu} - \Omega_{\beta,\mu\alpha}),$$

так что Γ и Ω совпадают только при условии, что кручение T исчезает.

Вычислим тензор кривизны $S^\alpha_{\beta,\mu\nu}$ связности $\Omega^\alpha_{\beta\mu}$. Имеем по определению

$$\begin{aligned}S^\alpha_{\beta,\mu\nu} &= \partial_\mu \Omega^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Omega^\alpha_{\beta\mu} + \Omega^\alpha_{\sigma\mu}\Omega^\sigma_{\beta\nu} - \Omega^\alpha_{\sigma\nu}\Omega^\sigma_{\beta\mu} = \\ &= \partial_\mu (f^{\alpha A} \partial_\nu f_\beta^A) - \partial_\nu (f^{\alpha A} \partial_\mu f_\beta^A) + f^{\alpha A} \partial_\mu f_\sigma^A f^{\sigma B} \partial_\nu f_\beta^B - f^{\alpha A} \partial_\nu f_\sigma^A f^{\sigma B} \partial_\mu f_\beta^B.\end{aligned}$$

Вторые производные сокращаются; используя элементарное равенство

$$f^{\alpha A} \partial_\mu f_\sigma^A = -\partial_\mu f^{\alpha A} f_\sigma^A,$$

которое следует из условия ортонормированности $f_\mu^A f^{\nu A} = \delta_\mu^\nu$, мы можем переписать $S^\alpha_{\beta,\mu\nu}$ следующим образом:

$$S^\alpha_{\beta,\mu\nu} = \Pi^{AB}(\partial_\mu f^{\alpha A}\partial_\nu f^B_\beta - \partial_\nu f^{\alpha A}\partial_\mu f^B_\beta),$$

где $\Pi^{AB} = \delta^{AB} - f^A_\sigma f^{\sigma B}$ есть проектор на $(D-4)$-мерное подпространство в $\mathbb{R}^D$, ортогональное f^A_μ, рассматриваемым как векторы в $\mathbb{R}^D$:

$$\Pi^{AB} f^A_\mu = 0 = \Pi^{AB} f^{\mu A}.$$

В дальнейшем я буду называть Π^{AB} вертикальным проектором.

Хотя выражение $S^\alpha_{\beta,\mu\nu}$ содержит только локальные производные, оно общековариантно. Действительно, нековариантные слагаемые в $\partial_\mu f^A_\alpha$ пропорциональны f^A_α и обращаются в ноль при действии на них вертикального проектора. Это же соображение позволяет элементарно опустить верхний индекс в $S^\alpha_{\beta,\mu\nu}$, так что

$$S_{\alpha\beta,\mu\nu} = g_{\alpha\sigma} S^\sigma_{\beta,\mu\nu} = \Pi^{AB}(\partial_\mu f^A_\alpha \partial_\nu f^B_\beta - \partial_\nu f^A_\alpha \partial_\mu f^B_\beta).$$

Теперь мы можем дать явно ковариантную запись для тензора кривизны. Введем тензор

$$b^A_{\alpha\mu} = \nabla_\mu f^A_\alpha = \partial_\mu f^A_\alpha - \Omega^\beta_{\alpha\mu} f^A_\beta = \partial_\mu f^A_\alpha - f^{\beta B}\partial_\mu f^B_\alpha f^A_\beta = \Pi^{AB}\partial_\mu f^B_\alpha.$$

Используя свойство проектора $\Pi^{AB} = \Pi^{AC}\Pi^{CB}$, мы можем записать $S_{\alpha\beta,\mu\nu}$ следующим образом:

$$S_{\alpha\beta,\mu\nu} = b^A_{\alpha\mu} b^A_{\beta\nu} - b^A_{\alpha\nu} b^A_{\beta\mu},$$

откуда очевидно вытекает свойство антисимметрии при перестановках $\alpha \leftrightarrow \beta$ и $\mu \leftrightarrow \nu$. Однако симметрии по отношению к перестановке $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\mu\nu)$ нет. Заметим, впрочем, что для вычисления вариации использование локальных производных более удобно.

Объекты $\Omega^\alpha_{\beta\mu}$ и $b^A_{\beta\mu}$ являются горизонтальной и вертикальной проекциями производной $\partial_\mu f^A_\beta$,

$$\partial_\mu f^A_\beta = \Omega^\sigma_{\beta\mu} f^A_\sigma + b^A_{\beta\mu}.$$

Функция Лагранжа задается через скалярную кривизну S,

$$\mathcal{L} = \sqrt{g}\, S = \sqrt{g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} S_{\alpha\beta,\mu\nu} = \sqrt{g}\, \Pi^{AB}(\partial_\mu f^{\mu A}\partial_\nu f^{\nu B} - \partial_\nu f^{\mu A}\partial_\mu f^{\nu B}),$$

и представляет собой квадратичную форму от первых производных контравариантных компонент полей f^A_μ.

Приведенные формулы схожи с формулой Гаусса, выражающей тензор кривизны подмногообразия через вторую квадратичную форму, однако тензор второй формы $b^A_{\alpha\mu}$ в нашем случае не симметричен.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В лагранжиане $\mathcal{L}$, приведенном выше, в качестве динамических переменных взяты контравариантные поля $f^{\mu A}$. Запишем вариацию действия в следующем виде:

$$\delta \int \mathcal{L}\, d^4x = \int \Sigma^A_\alpha \delta f^{\alpha A}\, d^4x.$$

Здесь Σ^A_α дает нам набор ковариантных векторных полей. С помощью прямых вычислений получаем следующее выражение для этих полей:

$$\Sigma^C_\alpha = \sqrt{g}\,(2Q^{ABC}_\mu S^{\mu AB}_\alpha - Q^{ABC}_\alpha S^{AB}),$$

где

$$\begin{aligned} Q^{ABC}_\mu &= \Pi^{AB} f^C_\mu + \Pi^{AC} f^B_\mu + \Pi^{BC} f^A_\mu, \\ S^{\mu AB}_\alpha &= \partial_\alpha f^{\mu A} \partial_\nu f^{\nu B} - \partial_\nu f^{\mu A} \partial_\alpha f^{\nu B}, \\ S^{AB} &= \partial_\mu f^{\mu A} \partial_\nu f^{\nu B} - \partial_\nu f^{\mu A} \partial_\mu f^{\nu B}. \end{aligned}$$

Объект $S^{\mu AB}_\alpha$ не ковариантен, но его вклад в Σ^A_α ковариантен благодаря коэффициенту Q^{ABC}_μ.

Рассмотрим в отдельности вертикальную и горизонтальную части Σ^A_α:

$$\Sigma^A_\alpha = 2\sqrt{g}\,(f^{\mu A} H_{\alpha\mu} + \Pi^{AB} V^B_\alpha).$$

Вертикальная часть V^A_α имеет такой явный вид:

$$V^A_\alpha = \sqrt{g}\,\big((\Pi^{AC} f^B_\mu + \Pi^{AB} f^C_\mu) S^{\mu BC}_\alpha - \Pi^{AC} f^B_\alpha S^{BC}\big).$$

При выводе этого соотношения мы использовали симметрию тензора Q^{ABC}_μ. С учетом определений $\Omega^\alpha_{\beta\mu}$ и $b^A_{\beta\mu}$ мы можем переписать V^A_α следующим образом:

$$V^A_\alpha = b^{\beta A}_\beta (\Omega^\mu_{\mu\alpha} - \Omega^\mu_{\alpha\mu}) + b^{\beta A}_\alpha (\Omega^\mu_{\beta\mu} - \Omega^\mu_{\mu\beta}) + b^{\beta A}_\sigma (\Omega^\sigma_{\alpha\beta} - \Omega^\sigma_{\beta\alpha}).$$

Мы видим, что это выражение представляет собой линейную комбинацию компонент тензора кручения связности $\Omega^\alpha_{\beta\mu}$.

Индекс A в системе уравнений $V^A_\alpha = 0$ эффективно пробегает $D-4$ значений, так что всего мы имеем $4(D-4)$ вертикальных уравнений движения. С другой стороны, мы имеем $4 \cdot 6 = 24$ компонент кручения. При $D = 10$ эти два числа совпадают, и вертикальная система уравнений становится линейной системой для $T^\alpha_{[\mu,\nu]}$ с квадратной (24×24)-матрицей, составленной из коэффициентов $b^A_{\beta\mu}$. Записать определитель этой матрицы в аналитическом виде все еще является задачей, недоступной для компьютеров. Однако численный эксперимент, проведенный С. Пастоном, показал, что при выборе случайных значений для коэффициентов $b^A_{\beta\mu}$ этот определитель не равен нулю. В результате я предлагаю положить $D = 10$ и считать, что вертикальные уравнения движения эквивалентны исчезновению кручения: $T^\alpha_{[\mu,\nu]} = 0$.

Теперь перейдем к горизонтальной части уравнений движения

$$H_{\alpha\mu} = \sqrt{g}\,\Pi^{BC}\left(S^{BC}_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} S^{BC}\right),$$

которая означает исчезновение тензора Риччи,

$$S_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} S = 0,$$

где $S_{\alpha\mu} = g^{\nu\beta} S_{\alpha\beta,\mu\nu}$. Как мы видели выше, связности $\Omega^\alpha_{\beta\mu}$ и $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ при исчезновении кручения совпадают, таким образом, тензор $S_{\alpha\mu}$ становится симметричным, 6 уравнений из 16 горизонтальных уравнений выполняются тривиально, а остальные 10 совпадают с уравнениями Гильберта–Эйнштейна.

Мы видим, что действительно наш подход дает еще одну формулировку теории тяготения Эйнштейна.

В заключение этого раздела подчеркнем, что в наши уравнения движения входят только первые производные векторных полей f^A_α. На первый взгляд, это противоречит утверждаемой нами эквивалентности. Действительно, уравнения Гильберта–Эйнштейна представляют собой систему уравнений второго порядка для метрики $g_{\mu\nu}$. Выход из этого парадокса дает следующее утверждение: риманов тензор кривизны $R_{\alpha\beta,\mu\nu}$ содержит вторые производные только через компоненты кручения $T^\alpha_{[\mu,\nu]}$. Действительно, вторые производные от $g_{\mu\nu}$ входят в $R_{\alpha\beta,\mu\nu}$ линейно в комбинации

$$A_{\alpha\beta,\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\beta g_{\nu\alpha} + \partial_\nu\partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{\nu\beta} - \partial_\nu\partial_\beta g_{\mu\alpha}.$$

Рассмотрим выражение

$$B_{\alpha\beta,\mu\nu} = \partial_\mu\bigl(T_{\alpha[\beta,\nu]} + T_{\nu[\beta,\alpha]} - T_{\beta[\alpha\nu]}\bigr) - \partial_\nu\bigl(T_{\alpha[\beta,\mu]} + T_{\mu[\beta,\alpha]} - T_{\beta[\alpha\mu]}\bigr).$$

Прямой проверкой можно убедиться, что сумма $A_{\alpha\beta,\mu\nu} + B_{\alpha\beta,\mu\nu}$ не содержит вторых производных от f^A_μ, что и доказывает приведенное выше утверждение.

4. $(3+1)$-РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

В этом разделе мы перепишем основные формулы, используя явное выделение одной из четырех координат $x^\mu = (x^0, x^k)$, $k = 1,2,3$. В случае лоренцевой сигнатуры это означает отделение времени x^0 от пространственных координат x^k. В евклидовой формулировке, которой мы следуем в этой работе, такое выделение одной координаты имеет более условный характер, однако, как я уже упомянул выше, переход к лоренцевой сигнатуре является почти автоматическим.

Итак, мы имеем набор динамических переменных f^A_0, f^A_k, $k = 1,2,3$. По отношению к трехмерным координатным преобразованиям, полученным из четырехмерных $\epsilon^\mu(x)$ при ограничениях $\epsilon^0(x) = 0$, $\partial_0\epsilon^i(x) = 0$, эти переменные дают набор ковариантных векторов $\delta f^A_k = -\partial_k\epsilon^l f^A_l - \epsilon^l\partial_l f^A_k$ и скаляров $\delta f^A_0 = -\epsilon^l\partial_l f^A_0$. Введем трехмерную метрику $\gamma_{ik} = f^A_i f^A_k$; пусть γ^{ik} – соответствующий контравариантный тензор, $\gamma^{ik}\gamma_{ln} = \delta^i_n$. Компоненты g^{ik} четырехмерной метрики и ее определитель выглядят так:

$$g^{ik} = \gamma^{ik} + \frac{g^{0i}g^{0k}}{g^{00}}, \qquad g = \frac{\gamma}{g^{00}},$$

где $\gamma = \det\gamma_{ik}$.

Далее мы увидим, что вместо f^A_0 удобнее использовать соответствующее контравариантное поле $f^{0A} = g^{00}f^A_0 + g^{0k}f^A_k$ и считать динамическими переменными набор f^A_k, g^{0k}, g^{00} и f^{0A}. Полное число компонент в этом наборе равно 44, однако они удовлетворяют четырем связям $g^{00} = f^{0A}f^{0A}$, $f^{0A}f^A_k = 0$, так что число независимых переменных равно 40.

Запишем функцию Лагранжа в виде

$$\sqrt{g}\,S = \Sigma + \mathcal{H},$$

где в Σ собраны члены с производной по x^0, а $\mathcal{H}$ этих производных не содержит. Замечательно, что производные по x^0 входят в Σ линейно,

$$\Sigma = 2\sqrt{g}\,\Pi^{AB}g^{\mu l}(\partial_l f^A_\mu\partial_0 f^{0B} - \partial_l f^{0A}\partial_0 f^B_\mu),$$

и $\mathcal{H}$ представляет собой квадратичную форму от пространственных производных,

$$\mathcal{H} = \sqrt{g}\, g^{k\sigma} g^{l\rho}(\partial_k f^A_\sigma \partial_l f^B_\rho - \partial_l f^A_\sigma \partial_k f^B_\rho).$$

Мы можем интерпретировать Σ как 1-форму при подстановке $\partial_0 f^A_\mu \to df^A_\mu$. Тогда функция Лагранжа приобретает канонический вид: 1-форма + 0-форма dt. Общий подход к приведению таких лагранжианов к обобщенному гамильтонову виду описан в работе [11] (см. также [12]). Мы применим этот подход к нашему примеру. Как показано в [11], при таком приведении можно использовать уравнения движения, не содержащие производных по времени. В нашем случае такими уравнениями являются соотношения

$$\Omega^0_{mn} = \Omega^0_{nm}, \qquad \Omega^i_{mn} = \Omega^i_{nm}.$$

Итак, приступим к приведению, начиная с 1-формы Σ. Запишем ее более подробно:

$$\Sigma = 2\sqrt{g}\,\Pi^{AB}\biggl[\biggl(\gamma^{ml} + \frac{g^{0m}g^{0l}}{g^{00}}\biggr)(\partial_l f^A_m \partial_0 f^{0B} - \partial_l f^{0A}\partial_0 f^B_m) + \\ + g^{0l}(\partial_l f^A_0 \partial_0 f^{0B} - \partial_l f^{0A}\partial_0 f^B_0)\biggr].$$

Мы видим, что коэффициенты при g^{0l} содержат комбинации

$$\frac{g^{0m}}{g^{00}}\,\partial_l f^A_m + \partial_l f^A_0 = \frac{1}{g^{00}}\,\partial_l f^{0A} - \frac{1}{g^{00}}(\partial_l g^{0m} f^A_m + \partial_l g^{00} f^A_0),$$
$$\frac{g^{0m}}{g^{00}}\,\partial_0 f^A_m + \partial_0 f^A_0 = \frac{1}{g^{00}}\,\partial_0 f^{0A} - \frac{1}{g^{00}}(\partial_0 g^{0m} f^A_m + \partial_0 g^{00} f^A_0),$$

и вторые слагаемые в правых частях обращаются в ноль при действии на них проектора Π^{AB}. В результате мы приходим к удовлетворительному выражению

$$\Sigma = 2\sqrt{g}\,\Pi^{AB}\gamma^{kl}(\partial_l f^A_k \partial_0 f^{0B} - \partial_l f^{0A}\partial_0 f^B_k).$$

Перейдем теперь к 0-форме $\mathcal{H}$. Разделим сумму по ρ и σ на четыре в соответствии с разделением

$$(\sigma, \rho) = (0,0), (m,0), (0,n), (m,n).$$

Слагаемое $(0,0)$ исчезает вследствие антисимметрии. Слагаемые $(m,0)$ и $(0,n)$ после замены значков суммирования совпадают и дают

$$Q_1 = 2\sqrt{g}\,\Pi^{AB}\gamma^{ln}g^{k0}(\partial_k f^A_0 \partial_l f^B_n - \partial_l f^A_0 \partial_k f^B_n).$$

Наконец, слагаемое (m,n) можно записать в виде

$$Q_2 = \sqrt{g}\,\Pi^{AB}g^{km}g^{ln}S^{AB}_{kl,mn},$$

где

$$S^{AB}_{kl,mn} = \partial_k f^A_m \partial_l f^B_n - \partial_k f^A_n \partial_l f^B_m.$$

Выражая g^{km} через γ^{km}, g^{k0}, g^{0m}, мы получаем $Q_2 = Q_3 + Q_4$, где

$$Q_3 = \sqrt{g}\,\Pi^{AB}\gamma^{km}\gamma^{ln}S^{AB}_{kl,mn}, \qquad Q_4 = 2\sqrt{g}\,\frac{g^{0k}}{g^{00}}\gamma^{ln}g^{0m}S^{AB}_{kl,mn}.$$

Собирая вместе Q_1 и Q_4 и используя свойство проектора Π^{AB}, уже объясненное выше, мы имеем

$$Q_1 + Q_4 = 2\sqrt{g}\,\frac{g^{0k}}{g^{00}}\Pi^{AB}\gamma^{ln}(\partial_k f^{0A}\partial_l f_n^B - \partial_l f^{0A}\partial_k f_n^B).$$

Итак, мы получили

$$\mathcal{H} = T_0 + T_1, \qquad T_1 = Q_1 + Q_4, \quad T_0 = Q_3.$$

В формулы, как и в Σ, входят проектор Π^{AB} и переменные f_k^A, f^{0A}, g^{i0}, g^{0n} и g^{00}.

Теперь мы должны преобразовать проектор. Имеем

$$\begin{aligned}\Pi^{AB} &= \delta^{AB} - g^{\mu\nu}f_\mu^A f_\nu^B = \\ &= \delta^{AB} - g^{ik}f_i^A f_k^B - g^{i0}f_i^A f_0^B - g^{0k}f_0^A f_k^B - g^{00}f_0^A f_0^B = \\ &= \delta^{AB} - \gamma^{ik}f_i^A f_k^B - \left(\frac{g^{0i}g^{0k}}{g^{00}}f_i^A f_k^B + g^{0k}f_0^A f_k^B + g^{i0}f_i^A f_0^B + f_0^A f_0^B g^{00}\right).\end{aligned}$$

Два первых слагаемых в правой части определяют семимерный вертикальный проектор. Остальные слагаемые можно переписать в виде

$$\frac{1}{g^{00}}(g^{0i}f_i^A + g^{00}f_0^A)(g^{0k}f_k^B + g^{00}f_0^B) = \frac{1}{g^{00}}f^{0A}f^{0B},$$

так что окончательно получаем

$$\Pi^{AB} = \delta^{AB} - \gamma^{ik}f_i^A f_k^B - \frac{1}{g^{00}}f^{0A}f^{0B}.$$

Последнее слагаемое здесь дает одномерный проектор в силу условия нормировки для f^{0A}.

Итак, мы выразили Σ и $\mathcal{H}$ через выбранный набор динамических переменных. Подставим теперь последнее выражение для проектора Π^{AB} в Σ и $\mathcal{H}$. Начнем с Σ и рассмотрим по очереди три выражения, соответствующие трем слагаемым в проекторе Π^{AB}. Первое имеет вид

$$\Sigma_1 = 2\sqrt{g}\,\gamma^{kl}\big(\partial_l f_k^A\partial_0 f^{0A} - \partial_l f^{0A}\partial_0 f_k^A\big).$$

Запишем множитель в круглых скобках как

$$\partial_0(\partial_l f_k^A f^{0A}) - \partial_l(\partial_0 f_k^A f^{0A}) = \partial_0\Omega^0_{kl} - \partial_l\Omega^0_{k0}.$$

Получаем

$$\Sigma_1 = 2\sqrt{g}\,\gamma^{kl}\big(\partial_0\Omega^0_{kl} - \partial_l\Omega^0_{k0}\big).$$

Первое слагаемое здесь имеет форму, почти совпадающую с формой Дарбу.

Перейдем ко второму вкладу в Σ:

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= -2\sqrt{g}\,\gamma^{kl}\gamma^{mn}\big[(f^A_m\partial_l f^A_k)\big(f^B_n\partial_0 f^{0B}\big) - (f^A_m\partial_l f^{0A})(f^B_n\partial_0 f^B_k)\big] = \\ &= 2\sqrt{g}\,\gamma^{kl}\gamma^{mn}\big(\omega_{m,kl}\Omega^0_{n0} - (f^B_n\partial_0 f^B_k)\Omega^0_{ml}\big).\end{aligned}$$

Здесь я использовал ортогональность f^A_k и f^A_0,

$$f^B_n\partial_0 f^{0B} = -\partial_0 f^B_n f^{0B} = -\Omega^0_{n0}, \qquad f^A_m\partial_l f^{0A} = -\partial_l f^A_m f^{0A} = -\Omega^0_{ml},$$

и ввел трехмерную связность $\omega_{m,kl} = f^A_m\partial_l f^A_k$.

Наконец, последний вклад в Σ имеет вид

$$\Sigma_3 = -\sqrt{g}\,\gamma^{kl}\frac{1}{g^{00}}(\Omega^0_{kl}\partial_0 g^{00} - \partial_l g^{00}\Omega^0_{k0}).$$

Я использовал здесь соотношения

$$f^{0A}\partial_0 f^{0A} = \frac{1}{2}\partial_0 g^{00}, \qquad f^{0A}\partial_l f^{0A} = \frac{1}{2}\partial_l g^{00}.$$

Соберем слагаемые, содержащие Ω^0_{k0}. Пусть

$$\Lambda = 2\sqrt{g}\,\gamma^{kl}\left(-\partial_l\Omega^0_{k0} + \omega^m_{kl}\Omega^0_{m0} + \frac{1}{2}\frac{\partial_l g^{00}}{g^{00}}\Omega^0_{k0}\right);$$

сравним это выражение с

$$\begin{aligned}\partial_l\big(\sqrt{g}\,\gamma^{kl}\Omega^0_{k0}\big) &= \partial_l\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{g^{00}}}\gamma^{kl}\Omega^0_{k0}\right) = \\ &= \sqrt{g}\left(\omega^m_{ml} - \frac{1}{2}\frac{\partial_l g^{00}}{g^{00}}\right)\gamma^{kl}\Omega^0_{k0} + \sqrt{g}\,\partial_l\gamma^{kl}\Omega^0_{k0} + \sqrt{g}\,\gamma^{kl}\partial_l\Omega^0_{k0}.\end{aligned}$$

Связность ω^k_{ml} совместна с метрикой γ_{ik}, так что

$$\partial_l\gamma^{kl} + \omega^k_{ml}\gamma^{ml} + \omega^l_{ml}\gamma^{mk} = 0.$$

В результате мы получаем

$$\Lambda = -2\partial_l\big(\sqrt{g}\,\gamma^{kl}\Omega^0_{k0}\big) + 2\sqrt{g}\,\gamma^{kl}\Omega^0_{k0}(\omega^m_{ml} - \omega^m_{lm}).$$

Последнее слагаемое исчезает в силу упомянутых выше уравнений движения. Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned}\Omega^m_{ik} &= f^{mA}\partial_k f^A_i = g^{m\sigma} f^A_\sigma\partial_k f^A_i = \\ &= \left(\gamma^{mn} + \frac{g^{m0}g^{n0}}{g^{00}}\right) f^A_n\partial_k f^A_i + g^{m0} f^A_0 f^A_i = \omega^m_{ik} + \frac{g^{m0}}{g^{00}}\Omega^0_{ik},\end{aligned}$$

и ω^m_{ik} симметрично по отношению к перестановке $i \leftrightarrow k$ вместе с Ω^m_{ik} и Ω^0_{ik}.

Итак, мы получили, что Λ представляет собой выражение типа дивергенции и может быть опущено в действии.

Теперь рассмотрим первое слагаемое в Σ_2. В силу симметрии Ω^0_{kl} мы можем записать

$$\gamma^{kl}\gamma^{mn}\Omega^0_{ml}(f^A_n\partial_0 f^A_k) = \frac{1}{2}\gamma^{kl}\gamma^{mn}(f^A_n\partial_0 f^A_k + f^A_k\partial_0 f^A_n)\Omega^0_{ml} = -\frac{1}{2}\partial_0\gamma^{ml}\Omega^0_{ml}.$$

В результате всех этих преобразований мы получаем

$$\Sigma = \sqrt{g}\left(2\gamma^{kl}\partial_0\Omega_{kl} + \partial_0\gamma^{kl}\Omega^0_{kl} - \gamma^{kl}\Omega_{kl}\frac{\partial_0 g^{00}}{g^{00}}\right) = q^{kl}\partial_0\Pi_{kl} + \partial_0\bigl(\sqrt{g}\,\gamma^{kl}\Omega_{kl}\bigr),$$

где

$$q^{kl} = \gamma\gamma^{kl}, \qquad \Pi_{kl} = \frac{1}{\sqrt{\gamma g^{00}}}\Omega^0_{kl}.$$

Полную производную по x^0 можно исключить из действия. Таким образом, 1-форма Σ получает явно канонический вид:

$$\Sigma = q^{ik}\,d\Pi_{ik}$$

с каноническими переменными q^{ik} и Π_{ik}. Их конформные веса, равные $+1$ для q^{ik} и $-1/2$ для Π_{ik}, естественно связаны с нормировкой δ-функции. Эти канонические пары впервые появились в работе [13]. В работах [2] и [14] использовались другие веса.

Теперь перейдем к 0-форме $\mathcal{H}$. Начнем с выражения для T_1,

$$T_1 = 2\sqrt{g}\,\frac{g^{k0}}{g^{00}}\Pi^{AB}\gamma^{lm}(\partial_k f^{0A}\partial_l f^B_m - \partial_l f^{0A}\partial_k f^B_m),$$

и опять рассмотрим три вклада в соответствии с представлением проектора Π^{AB}. В первом слагаемом используем равенства

$$\partial_k f^{0A}\partial_l f^A_m - \partial_l f^{0A}\partial_k f^A_m = \partial_k(f^{0A}\partial_l f^A_m) - \partial_l(f^{0A}\partial_k f^A_m) = \partial_k\Omega^0_{ml} - \partial_l\Omega^0_{mk},$$

во втором получим

$$-\gamma^{pq}\bigl[(f^A_p\partial_k f^{0A})(f^B_q\partial_l f^B_m) - (f^A_p\partial_l f^{0A})(f^B_q\partial_k f^B_m)\bigr] = \omega^p_{ml}\Omega^0_{pk} - \omega^p_{mk}\Omega^0_{pl},$$

а третье дает

$$-\frac{1}{g^{00}}\bigl[(f^{0A}\partial_k f^{0A})(f^{0B}\partial_l f^B_m) - (f^{0A}\partial_l f^{0A})(f^{0B}\partial_k f^B_m)\bigr] = -\frac{1}{2}\frac{\partial_k g^{00}}{g^{00}}\Omega^0_{ml} + \frac{1}{2}\frac{\partial_l g^{00}}{g^{00}}\Omega^0_{mk}.$$

Собрав все слагаемые вместе, имеем

$$T_1 = 2\frac{g^{k0}}{g^{00}}\sqrt{g}\,\gamma^{lm}\left[\partial_k\Omega^0_{ml} - \partial_l\Omega^0_{mk} - \frac{1}{2}\frac{\partial_k g^{00}}{g^{00}}\Omega^0_{ml} + \frac{1}{2}\frac{\partial_l g^{00}}{g^{00}}\Omega^0_{mk} + \omega^p_{ml}\Omega^0_{pk} + \omega^p_{mn}\Omega^0_{pl}\right].$$

Используя симметрию ω^p_{ml} и Ω^0_{pl}, запишем T_1 в виде $T_1 = \lambda^k\mathcal{H}_k$, где введены множители Лагранжа $\lambda^k = g^{0k}/g^{00}$ и связи

$$\mathcal{H}_k = 2\bigl[\nabla_k(q^{ml}\Pi_{ml}) - \nabla_l(q^{ml}\Pi_{mk})\bigr].$$

Здесь использованы трехмерные ковариантные производные

$$\nabla_k T^l_m = \partial_k T^l_m + \omega^l_{mk} T^n_m - \omega^n_{mk} T^l_n.$$

Теперь перейдем к T_0. Трехмерный проектор ${}^3\Pi^{AB}$, участвующий в Π^{AB}, дает вклад

$$\sqrt{g}\,\gamma^{km}\gamma^{ln}\,{}^3\Pi^{AB} S^{AB}_{kl,mn} = \sqrt{g}\,S^{(3)},$$

где $S^{(3)}$ – скалярная кривизна метрики γ_{ik} и связности ω^m_{nl}. Последнее слагаемое в Π^{AB} дает

$$-\frac{f^{0A} f^{0B}}{g^{00}} S^{AB}_{kl,mn} = -\frac{1}{g^{00}}(\Omega^0_{mk}\Omega^0_{nl} - \Omega^0_{nk}\Omega^0_{ml}).$$

Собирая все слагаемые вместе, получаем

$$T_0 = \lambda^0 \mathcal{H}_0,$$

где множитель Лагранжа λ^0 дается выражением

$$\lambda^0 = \frac{\sqrt{g}}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g^{00}}\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}\,g^{00}},$$

а связь $\mathcal{H}_0$ выглядит следующим образом:

$$\mathcal{H}_0 = \gamma S^{(3)} - q^{km} q^{ln} (\Pi_{km}\Pi_{ln} - \Pi_{lm}\Pi_{kn}).$$

Итак, мы выразили действие через динамические переменные q^{ik}, Π_{ik} и множители Лагранжа λ^0, λ^k. Другими словами, из 40 динамических компонент f^A_α у нас осталось 16, а именно 6 канонических пар и четыре множителя Лагранжа, и действие имеет вид

$$A = \int d^3x \int (q^{ik}\Pi_{ik} + \lambda^0 \mathcal{H}_0 + \lambda^k \mathcal{H}_k)\, dt,$$

эквивалентный формулам из работ [2] и [14].

5. $O(6)$-СИММЕТРИЯ

Здесь я приведу предварительное обсуждение возможного обобщения теории Эйнштейна путем введения новых полей. Естественная идея состоит в использовании вертикального пространства, дополняющего в $\mathbb{R}^{10}$ базис, образованный полями f^A_μ. Пусть e^A_a, $a = 1, \ldots, 6$, – ортонормированная система векторов, ортогональных векторам f^A_μ:

$$f^A_\mu e^A_a = 0, \qquad e^A_a e^A_b = \delta_{ab}.$$

Будем считать набор e^A_a скалярами по отношению к координатным преобразованиям $\delta e^A_a = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda e^A_a$. Тогда соотношения ортогональности ковариантны. Они также инвариантны по отношению к локальным вращениям $e^A_a \to O_{ab} e^A_b$, $f^A_\mu \to f^A_\mu$, где O_{ab} – ортогональные матрицы, образующие группу $O(6)$.

Проектор Π^{AB} записывается как $\Pi^{AB} = e^A_a e^B_a$, что позволяет переписать основной лагранжиан $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L} = \sqrt{g}\,\big(f^{\mu A} f^{\nu B} - f^{\nu A} f^{\mu B}\big)\partial_\mu e^A_a \partial_\nu e^B_a,$$

напоминающем сигма-модель. Производные $\partial_\mu e_a^A$ здесь можно заменить на $O(6)$-ковариантные, если ввести связность $\Gamma_{\mu,ab} = \partial_\mu e_a^A e_b^A$. Действительно,

$$\nabla_\mu^\Gamma e_a^A = \partial_\mu e_a^A - \Gamma_{\mu,ab} e_b^A = \partial_\mu e_a^B (\delta^{AB} - e_b^A e_b^B) = \partial_\mu e_a^B f^{\sigma B} f_\sigma^A$$

и, таким образом,

$$f^{\nu A} \nabla_\mu^\Gamma e_a^A = f^{\nu A} \partial_\mu e_a^A.$$

Следующий естественный шаг – введение набора скалярных полей X^A таких, что $\delta X^A = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda X^A$, и соответствующих горизонтальных и вертикальных компонент – векторного поля $Y_\mu = X^A f_\mu^A$ и набора скаляров $Z_a = e_a^A X^a$. Найдем их ковариантные производные:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu Y_\nu &= \partial_\mu (f_\nu^A X^A) - f^{\beta B} \partial_\mu f_\nu^B f_\beta^A X^A = f_\nu^A \partial_\mu X^A + \partial_\mu f_\nu^B (\delta^{AB} - f^{\beta B} f_\rho^A) X^A = \\ &= f_\nu^A \partial_\mu X^A + \Pi^{AB} \partial_\mu f_\nu^B X^A = f_\nu^A \partial_\mu X^A + b_{\nu\mu}^A X^A.\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\nabla_\mu^\Gamma Z_a &= \partial_\mu Z_a - \Gamma_{\mu,ab} Z_b = e_a^A \partial_\mu X^A + \partial_\mu e_a^A (\delta^{AB} - \Pi^{AB}) X^B = \\ &= e_a^A (\partial_\mu X^A - b_\mu^{\sigma A} Y_\sigma).\end{aligned}$$

Заметим, что в членах без производных от X^A участвует вертикальная компонента $\Pi^{AB} X^B$ в $\nabla_\mu Y_\nu$ и горизонтальныя компонента Y_ν в $\nabla_\mu^\Gamma Z_a$. Оба этих слагаемых содержат тензор $b_{\nu\mu}^A$. Вклад в ковариантную комбинацию

$$\sqrt{g}\,\bigl(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}\bigr) \nabla_\mu Y_\alpha \nabla_\nu Y_\beta,$$

не содержащий производных от X^A, имеет вид

$$\sqrt{g}\,\bigl(b_\mu^{\mu A} b_\nu^{\nu B} - b_\mu^{\nu A} b_\nu^{\mu B}\bigr) X^A X^B,$$

и мы получим гравитационное действие, если предположим, что у нас есть аномальная функция Грина

$$\langle X^A X^B \rangle = \frac{1}{\kappa^2} \Pi^{AB}.$$

Конечно, в настоящее время это замечание есть всего лишь спекуляция. Дальнейшая работа должна показать, насколько эта идея или ее модификация имеют смысл. На этом замечании о такой перспективе я закончу данную работу.

Благодарности. Я хочу поблагодарить В. Франке и в особенности С. Пастона за критическое обсуждение этой работы и С. Дезера за моральную поддержку. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00638, 09-01-93108-НЦНИЛ) и Программы президиума РАН “Математические проблемы нелинейной динамики”.

Список литературы

[1] A. Einstein, *Ann. Phys.*, **354**:7 (1916), 769–822; **14**:Suppl. 1 (2005), 517–571.
[2] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A*, **246**:1246 (1958), 333–343.
[3] Л. Д. Фаддеев, В. Н. Попов, *УФН*, **111** (1973), 427–450.

[4] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:21 (1967), 1264–1266.

[5] A. Salam, "Weak and Electromagnetic Interactions", *Elementary Particle Theory*, Proc. Nobel Symposium (Lerum, Sweden, 1968), ed. N. Svartholm, Almquist and Wiksell, Stockholm, 1968, 367–377.

[6] S. L. Adler, *Rev. Modern Phys.*, **54**:3 (1982), 729–766.

[7] S. Deser, F. A. E. Pirani, D. C. Robinson, *Phys. Rev. D*, **14**:12 (1976), 3301–3303.

[8] С. А. Пастон, В. А. Франке, *ТМФ*, **153**:2 (2007), 271–288, arXiv: 0711.0576.

[9] L. D. Faddeev, *New variables for the Einstein theory of gravitation*, arXiv: 0911.0282.

[10] L. D. Faddeev, $3+1$ *decomposition in the new action for the Einstein theory of gravitation*, arXiv: 1003.2311.

[11] L. D. Faddeev, R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:17 (1988), 1692–1694.

[12] Л. Д. Фаддеев, *УФН*, **136**:3 (1982), 435–457.

[13] J. S. Schwinger, *Phys. Rev.*, **130**:3 (1963), 1253–1258.

[14] R. L. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *Phys. Rev.*, **117**:6 (1960), 1595–1602.

Поступила в редакцию 6.09.2010