В. О. Тарасов, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Локальные гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке, *ТМФ*, 1983, том 57, номер 2, 163–181

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 57, № 2
ноябрь, 1983

ЛОКАЛЬНЫЕ ГАМИЛЬТОНИАНЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ КВАНТОВЫХ МОДЕЛЕЙ НА РЕШЕТКЕ

Тарасов В. О., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.

Предлагается общий способ построения локальных гамильтонианов для интегрируемых решеточных моделей. Для случая двумерного вспомогательного пространства осуществлена диагонализация введенных гамильтонианов. Подробно рассмотрен случай XXX-модели Гейзенберга и решеточной модели нелинейного уравнения Шредингера.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в работах [1—4] (см. также обзоры [5—8]) был предложен квантовый метод обратной задачи — новый метод интегрирования моделей квантовой теории поля и классической статистической физики в 1+1-измерениях. На его основе было осуществлено динамическое вычисление спектра масс и S-матриц ряда теоретико-полевых моделей. Важную роль в формулировке метода сыграли квантовая модель синус-Гордон (SG) [2], модель квантового нелинейного уравнения Шредингера (NS) [3], а также XYZ-модель Гейзенберга спинов $^1/_2$ [4] и ее более простой изотропный вариант — XXX-модель [9].

Особое место в формализме метода занимают модели на одномерной решетке. Такие модели естественно возникают при квантовании классических систем, скобки Пуассона которых связаны с компактными алгебрами Ли; с другой стороны, решеточные модели играют роль ультрафиолетовой регуляризации непрерывных моделей. Именно с этой целью в [10—12] были предложены дискретные интегрируемые варианты моделей SG и NS (модели LSG и LNS, соответственно). Они характеризуются тем, что сохраняют классическую и квантовую R-матрицы соответствующей непрерывной модели. Кроме того, в классическом случае данные рассеяния непрерывного и решеточного вариантов совпадают [13].

Однако в формализме квантового метода имеется ряд нерешенных технически важных вопросов. К ним относится задача о явном построении квантовых гамильтонианов в терминах исходных полевых операторов (квантовые тождества следов). Для непрерывной модели NS такое построение осуществляется с помощью нормального упорядочения [3, 14], однако к более сложным моделям этот способ уже не применим. В общем случае, чтобы не иметь дела с ультрафиолетовыми расходимостями, эту задачу следует формулировать для решеточных моделей. При этом естественно возникает требование локальности — гамильтониан должен описывать взаимодействие ближайших соседей на решетке.

В работе [12] был предложен регулярный способ получения локальных гамильтонианов в классическом случае. Однако в квантовом случае он приводит, вообще говоря, лишь к квазилокальным гамильтонианам. Они описывают взаимодействие всех соседей с интенсивностью, экспоненциально убывающей с расстоянием между узлами решетки. Именно так обстоит дело для модели LSG, для модели LNS гамильтониан из [12] описывает взаимодействие 8 соседей на решетке.

В настоящей работе предлагается общий способ построения локальных гамильтонианов интегрируемых решеточных моделей с двумерным вспомогательным пространством. Как известно, каждая такая модель ассоциирована с алгеброй Ли $\mathfrak{su}(2)$ или с ее деформациями — квадратичными алгебрами Склянина [15]. Поэтому все интегрируемые модели, связанные с такой алгеброй, параметризуются ее неприводимыми представлениями; конечномерным представлениям отвечают спиновые модели. Так, например, конечномерному неприводимому представлению $\mathfrak{su}(2)$ в $\mathbb{C}^{2s+1}$ соответствует XXX-модель спинов s. Для спиновых моделей в работах [7, 16, 17] был предложен способ построения локальных гамильтонианов, основанный на симметрическом умножении R-матриц (процедуре «размножения»). Здесь мы показываем, как этот способ можно распространить на бесконечномерный случай.

В качестве основного примера мы выбрали модель LNS, отвечающую бесконечномерному неприводимому представлению $\mathfrak{su}(2)$; приводятся явное выражение для ее гамильтониана и его собственные значения на бетевских векторах. Получение явных формул для локальных гамильтонианов XXZ-модели произвольных спинов и модели LSG наталкивается на непреодоленные пока технические трудности. Это связано с еще недостаточно хорошо развитой теорией представлений квадратичных алгебр Склянина. Однако можно доказать теорему существования для локального гамильтониана модели LSG и привести его предполагаемый вид.

План настоящей работы следующий. В разделе 1 мы напоминаем основные формулы квантового метода обратной задачи и излагаем общую схему построения локальных гамильтонианов. В разделе 2 эта схема иллюстрируется на известном примере XXX-модели спинов s. Третий раздел посвящен рассмотрению модели LNS. И, наконец, в разделе 4 мы кратко обсудим некоторые результаты по поводу XXZ-модели произвольных спинов и модели LSG. Кроме того, мы вынесли в приложение доказательства теорем о собственных значениях оператора квазиимпульса и локального гамильтониана.

В заключение авторы выражают благодарность Н. М. Боголюбову, А. Г. Изергину, В. Е. Корепину, П. П. Кулишу, Н. Ю. Решетихину и Е. К. Склянину за полезные обсуждения.

1. МАТРИЦА МОНОДРОМИИ И КВАНТОВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Здесь мы напомним основные формулы квантового метода обратной задачи для решеточных моделей. Обозначим через $\mathfrak{h}_n$ гильбертово пространство состояний в n-м узле решетки, в котором полевые операторы $\Psi_n{}^\alpha$ действуют неприводимым образом. Будем предполагать, что операторы $\Psi_n{}^\alpha$ коммутируют при разных n — свойство ультралокальности.

Тогда полное пространство состояний модели на решетке с N узлами имеет вид

$$(1.1)\qquad \mathfrak{H}_N=\prod_{n=1}^{N}\otimes\mathfrak{h}_n.$$

Основным локальным объектом метода является матрица-оператор $L_n(\lambda)$, представляющая собой матрицу во вспомогательном пространстве V, матричные элементы которой принадлежат кольцу, порожденному операторами $\Psi_n{}^\alpha$. Матрица $L_n(\lambda)$ — локальная матрица перехода — также зависит от спектрального параметра λ. Решающим обстоятельством для интегрируемости в квантовом случае является существование R-матрицы — матрицы в $V\otimes V$ с числовыми матричными элементами, обладающей следующим характеристическим свойством:

$$(1.2)\qquad R(\lambda-\mu)(L_n(\lambda)\otimes L_n(\mu))=(L_n(\mu)\otimes L_n(\lambda))R(\lambda-\mu)$$

— сплетающее свойство. Здесь тензорное произведение берется только по вспомогательному пространству V.

Глобальной характеристикой модели является матрица монодромии, определяемая упорядоченным произведением

$$(1.3)\qquad T_N(\lambda)=\prod_{n=1}^{\overleftarrow{N}}L_n(\lambda).$$

Из соотношения (1.2) и свойства ультралокальности следует, что

$$(1.4)\qquad R(\lambda-\mu)(T_N(\lambda)\otimes T_N(\mu))=(T_N(\mu)\otimes T_N(\lambda))R(\lambda-\mu).$$

Это равенство содержит всевозможные перестановочные соотношения матричных элементов $T_N(\lambda)$ и $T_N(\mu)$. В частности, из него получаем, что

$$(1.5)\qquad [\operatorname{tr}T_N(\lambda),\operatorname{tr}T_N(\mu)]=0,$$

где tr обозначает матричный след в V. Поэтому $\operatorname{tr}T_N(\lambda)$ можно рассматривать как производящую функцию квантовых интегралов движения. Однако, как и в классическом случае, интегралы $\operatorname{tr}T_N(\lambda)$ нелокально зависят от исходных операторов $\Psi_n{}^\alpha$, что делает неестественным их выбор в качестве гамильтонианов. Тем самым особый интерес представляет задача об извлечении из коммутативного семейства $\operatorname{tr}T_N(\lambda)$ серии локальных интегралов движения.

Наиболее просто эта задача решается для так называемых фундаментальных моделей. По определению фундаментальные модели обладают следующими характеристическими свойствами:

1) вспомогательное пространство V и квантовое пространство в узле совпадают (изоморфны) $\mathfrak{h}_n=V$. Поэтому $L_n(\lambda)$ можно рассматривать как матрицу $L(\lambda)$ в $V\otimes V$;

2) существует специальное значение $\lambda=\lambda_0$, при котором

$$(1.6)\qquad L(\lambda_0)=P,$$

где P — оператор перестановки в $V \otimes V$. Он характеризуется свойством

$$P(f \otimes g) = g \otimes f \tag{1.7}$$

для любых векторов f, g из V.

Построение локальных интегралов движения для фундаментальных моделей основано на следующем простом утверждении.

Теорема 1. *Операторы I_k, определяемые как*

$$I_k = \frac{1}{i} \frac{d^k}{d\lambda^k} \log \operatorname{tr} T_N(\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}, \qquad k=0, 1, \ldots, \tag{1.8}$$

являются интегралами движения, описывающими при $k>0$ взаимодействие $k+1$ ближайших соседей на решетке. При этом имеют место периодические граничные условия

$$\Psi_{n+N}^{\alpha} = \Psi_n^{\alpha}. \tag{1.9}$$

Интеграл $\exp(-iI_0)$ *совпадает с оператором циклического сдвига (квазиимпульса)* $\mathbf{P}_N$ *в* $\mathfrak{H}_N$, *характеризуемым свойством*

$$\mathbf{P}_N(f_1 \otimes \ldots \otimes f_N) = f_N \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_{N-1}, \tag{1.10}$$

где f_n — векторы из $\mathfrak{h}_n$.

Для частного случая XYZ-модели спинов $^1/_2$ эта теорема была сформулирована в [18]; приведенное там доказательство справедливо и в общем случае. Для оператора $\mathbf{H}=I_1$, который нас в основном и будет интересовать, доказательство проводится совсем просто. Имеем

$$\mathbf{H} = (\operatorname{tr} T_N(\lambda_0))^{-1} \frac{1}{i} \frac{d}{d\lambda} \operatorname{tr} T_N(\lambda)|_{\lambda=\lambda_0} = \sum_{n=1}^{N} H_{n,n+1}, \tag{1.11}$$

где в силу (1.6) оператор $H_{n,n+1}$ нетривиально действует только в $\mathfrak{h}_n \otimes \mathfrak{h}_{n+1}$ и как матрица в $V \otimes V$ совпадает с $-iP \dfrac{d}{d\lambda} L(\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}$. При этом периодические граничные условия проявляются в равенстве

$$H_{N,N+1} = H_{N,1}. \tag{1.12}$$

Перейдем теперь к рассмотрению нефундаментальных моделей, т. е. моделей, для которых нарушено свойство 1 (как правило, свойство 2 является следствием свойства 1). При этом мы ограничимся однородным случаем, когда все пространства $\mathfrak{h}_n$ изоморфны, $\mathfrak{h}_n = \mathfrak{h}$.

Более точно это означает, что

$$L_n(\lambda) = \pi_n L_1(\lambda) \pi_n^{-1}, \tag{1.13}$$

где π_n — оператор, отождествляющий пространство $\mathfrak{h}_n$ с $\mathfrak{h}_1$. Для получения локальных интегралов в этом случае оказывается полезным рассматривать аналог соотношения (1.2), в котором вспомогательное и квантовое пространства меняются ролями:

$$\mathbf{R}(\lambda-\mu)(\tilde{\tilde{L}}(\lambda)\tilde{L}(\mu)) = (\tilde{L}(\mu)\tilde{\tilde{L}}(\lambda))\mathbf{R}(\lambda-\mu). \tag{1.14}$$

Здесь $\tilde{L}(\mu)$ и $\tilde{\tilde{L}}(\lambda)$ обозначают матрицы в V, матричные элементы которых суть операторы в $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$, нетривиально действующие лишь в первом и втором сомножителях, соответственно, и совпадающие там с матричными элементами $L_n(\mu)$ и $L_n(\lambda)$. Произведение матриц $\tilde{\tilde{L}}(\lambda)$ и $\tilde{L}(\mu)$ в (1.14) понимается как произведение матриц в V. Величина $\mathbf{R}(\lambda)$, участвующая в (1.14), представляет собой оператор в $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$ и по отношению к матрицам в V является скаляром. Таким образом, $\mathbf{R}(\lambda)$ представляет собой R-матрицу по квантовому пространству. Будем предполагать, что она удовлетворяет естественному условию регулярности

(1.15) $\quad \mathbf{R}(0)=\mathbf{P},$

где $\mathbf{P}$ — оператор перестановки в $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$.

Оператор $\mathbf{R}(\lambda)$ (если он существует) позволяет по данной нефундаментальной модели регулярным образом построить фундаментальную модель. Роль локальной матрицы перехода играет оператор $\mathbf{R}_n(\lambda)$, представляющий собой $\mathbf{R}(\lambda)$ в пространстве $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}_n$. Пространство $\mathfrak{h}$ здесь выступает в качестве вспомогательного. Матрица монодромии определяется аналогично (1.3):

(1.16) $$\mathbf{T}_N(\lambda)=\overleftarrow{\prod_{n=1}^{N}}\mathbf{R}_n(\lambda),$$

где произведение понимается в пространстве $\mathfrak{h}$, и удовлетворяет сплетающему свойству (1.2) с R-матрицей $\mathbf{PR}(\lambda)$. Тем самым операторы $\mathrm{Sp}\,\mathbf{T}_N(\lambda)$, где Sp означает след в $\mathfrak{h}$, по-прежнему действуют в $\mathfrak{H}_N$ и образуют коммутативное семейство.

При этом семейства $\mathrm{Sp}\,\mathbf{T}_N(\mu)$ и $\mathrm{tr}\,T_N(\lambda)$ коммутируют, так что операторы $\mathrm{Sp}\,\mathbf{T}_N(\lambda)$ являются интегралами движения и для исходной модели. Для доказательства перепишем (1.14) в виде

(1.17) $$\tilde{L}(\lambda-\mu)\,(\tilde{\tilde{L}}_n(\lambda)\mathbf{R}_n(\mu))=(\mathbf{R}_n(\mu)\tilde{\tilde{L}}_n(\lambda))\,\tilde{L}(\lambda-\mu).$$

Перемножая эти равенства для всех n, получаем, что

(1.18) $$\tilde{L}(\lambda-\mu)\,(\tilde{\tilde{T}}_N(\lambda)\mathbf{T}_N(\mu))=(\mathbf{T}_N(\mu)\tilde{\tilde{T}}_N(\lambda))\,\tilde{L}(\lambda-\mu).$$

Предполагая, что при почти всех λ матрица $L(\lambda)$ обратима как матрица в V (что всегда выполняется для конкретных моделей), умножим (1.18) слева на $\tilde{L}^{-1}(\lambda-\mu)$ и возьмем от получившегося равенства след в $V\otimes\mathfrak{h}$. Мы получим, что

(1.19) $\quad [\mathrm{tr}\,T_N(\lambda),\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{T}_N(\mu)]=0.$

Согласно теореме 1 для матрицы монодромии $\mathbf{T}_N(\lambda)$ серия локальных интегралов с периодическими граничными условиями порождается операторами

(1.20) $$\mathbf{I}_k=\frac{1}{i}\frac{d^k}{d\lambda^k}\log\mathrm{Sp}\,\mathbf{T}_N(\lambda)\,|_{\lambda=0},\qquad k=1,2,\ldots.$$

Свойство (1.19) делает естественным рассмотрение оператора $\mathbf{H}=\mathbf{I}_1$ в качестве локального гамильтониана исходной нефундаментальной модели. Он описывает взаимодействие двух ближайших соседей на решетке.

Таким образом, наряду с обычной R-матрицей матрица $\mathbf{R}(\lambda)$ также является важным ингредиентом квантового метода обратной задачи. В общем случае неизвестна регулярная процедура ее построения по заданным матрицам $R(\lambda)$ и $L_n(\lambda)$. Однако для целого ряда спиновых моделей такое построение возможно и основано на введенной в работах [7, 16], а также В. А. Фатеевым, операции симметрического умножения R-матриц.

Рассмотрим теперь модели с двумерным вспомогательным пространством $V=\mathbb{C}^2$, где мы сможет конкретизировать сделанные выше общие утверждения.

Будем считать, что для модели существует локальный вакуум — вектор ω_n из $\mathfrak{h}_n$ такой, что

$$(1.21)\qquad L_n(\lambda)\,\omega_n=\begin{pmatrix} a(\lambda) & * \\ 0 & d(\lambda)\end{pmatrix}\omega_n,$$

где $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ — числовые функции. Вектор

$$(1.22)\qquad \Omega_N=\prod_{n=1}^{N}\otimes\,\omega_n$$

— порождающее состояние — обладает аналогичным свойством по отношению к $T_N(\lambda)$. Вводя ее матричные элементы

$$(1.23)\qquad T_N(\lambda)=\begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda)\end{pmatrix},$$

имеем

$$(1.24)\qquad A_N(\lambda)\,\Omega_N=a^N(\lambda)\,\Omega_N,\qquad D_N(\lambda)\,\Omega_N=d^N(\lambda)\,\Omega_N,\qquad C_N(\lambda)\,\Omega_N=0.$$

Кроме того, предположим, что в естественном базисе $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$, согласованном с (1.21), R-матрица представляется в виде

$$(1.25)\qquad R(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda) & c(\lambda) & 0 \\ 0 & c(\lambda) & b(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

где $b(\lambda)/c(\lambda)$ — нечетная функция.

Для моделей, обладающих этими свойствами, существует общая процедура [2, 4] для диагонализации коммутативного семейства $\operatorname{tr} T_N(\lambda)=$ $=A_N(\lambda)+D_N(\lambda)$ — алгебраический бете-анзац.

Теорема 2. *Векторы вида*

$$(1.26)\qquad \Psi_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)=B_N(\lambda_1)\ldots B_N(\lambda_l)\,\Omega_N,$$

где неравные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ удовлетворяют системе уравнений

$$(1.27)\qquad \frac{a^N(\lambda_j)}{d^N(\lambda_j)}=\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{l}\frac{c(\lambda_k-\lambda_j)}{c(\lambda_j-\lambda_k)},\qquad j=1,\ldots,l,$$

являются собственными для операторов $\operatorname{tr} T_N(\lambda)$ с собственными значениями

$$(1.28)\qquad a^N(\lambda)\prod_{k=1}^{l}\frac{1}{c(\lambda_k-\lambda)}+d^N(\lambda)\prod_{k=1}^{l}\frac{1}{c(\lambda-\lambda_k)}.$$

Доказательство см. в [2, 4]. Оно основывается на формулах (1.24) и перестановочных соотношениях

$$(1.29)\qquad [B_N(\lambda),\ B_N(\mu)]=0,$$
$$A_N(\lambda)B_N(\mu)=\frac{1}{c(\mu-\lambda)}B_N(\mu)A_N(\lambda)-\frac{b(\mu-\lambda)}{c(\mu-\lambda)}B_N(\lambda)A_N(\mu),$$
$$D_N(\lambda)B_N(\mu)=\frac{1}{c(\lambda-\mu)}B_N(\mu)D_N(\lambda)-\frac{b(\lambda-\mu)}{c(\lambda-\mu)}B_N(\lambda)D_N(\mu),$$

вытекающих из (1.2) и (1.25). Векторы $\Psi_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)$, участвующие в теореме 2, называются бетевскими векторами.

Для фундаментальных моделей оператор квазиимпульса $\mathbf{P}_N$ содержится в семействе $\operatorname{tr} T_N(\lambda)$, и в силу условия $d(\lambda_0)=0$ его собственные значения на бетевских векторах легко находятся из общей формулы (1.28). В случае однородных нефундаментальных моделей из общего соотношения

$$(1.30)\qquad \mathbf{P}_N L_n(\lambda)\mathbf{P}_N^{-1}=L_{n-1}(\lambda),$$

вытекающего из (1.13), следует, что $\mathbf{P}_N$ коммутирует с $\operatorname{tr} T_N(\lambda)$. Как показал В. Е. Корепин (частное сообщение), собственные значения $\mathbf{P}_N$ на бетевских векторах имеют тот же вид, что и в фундаментальном случае. Именно справедлива

Теорема 3. *Бетевские векторы являются собственными и для оператора* $\mathbf{P}_N$ *с собственными значениями* $\exp[ip(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)]$, *где*

$$(1.31)\qquad p(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)=\sum_{j=1}^{l}p(\lambda_j)\ (\operatorname{mod} 2\pi),$$

$$(1.32)\qquad e^{ip(\lambda)}=d(\lambda)/a(\lambda).$$

Доказательство см. в приложении.

Перейдем теперь к рассмотрению локальных интегралов движения. Используя общую конструкцию из [19], при весьма естественных предположениях можно доказать теорему существования и единственности для матрицы $\mathbf{R}(\lambda)$. Одним из таких предположений является условие нормировки

$$(1.33)\qquad \mathbf{R}(\lambda)\,\omega\otimes\omega=\omega\otimes\omega$$

(доказательство будет опубликовано отдельно в работе первого из авторов). Таким образом, с исходной моделью ассоциируется фундаментальная модель с матрицей монодромии $\mathbf{T}_N(\lambda)$. В силу (1.19) можно считать, что бетевские векторы являются собственными и для операторов $\operatorname{Sp}\mathbf{T}_N(\lambda)$, но соответствующие собственные значения устроены довольно сложно. Однако оказывается, что при переходе к локальным интегралам $\mathbf{I}_k$ эти выражения существенно упрощаются.

Теорема 4. *При условии* (1.33) *операторы* $\mathbf{I}_k$, $k=0, 1,\ldots, N-1$, *имеют аддитивный спектр. Бетевские векторы для них являются собственными:*

$$(1.34)\qquad \mathbf{I}_k\Psi_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)=\sum_{j=1}^{l}h_k(\lambda_j)\,\Psi_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_l),$$

где

$$(1.35)\qquad h_k(\lambda)=\frac{1}{i}\frac{d^k}{d\lambda^k}\log\frac{d(\lambda)}{a(\lambda)}.$$

Тем самым спектр операторов $\mathbf{I}_k$ допускает интерпретацию в терминах частиц. В частности, для оператора $\mathbf{H}$ одночастичное собственное значение имеет вид

$$(1.36)\qquad h(\lambda)=\frac{1}{i}\frac{d}{d\lambda}\log\frac{d(\lambda)}{a(\lambda)}.$$

Сравнивая его с (1.32), получаем закон дисперсии

$$(1.37)\qquad h(\lambda)=dp(\lambda)/d\lambda,$$

связывающий энергию и квазиимпульс частицы. Формула (1.37) является характерной для гамильтонианов, описывающих взаимодействие двух ближайших соседей. Для следующих локальных интегралов закон дисперсии имеет вид

$$(1.38)\qquad h_k(\lambda)=d^kp(\lambda)/d\lambda^k.$$

В приложении мы докажем теорему 4 для интересующего нас случая $k=1$.

На этом мы заканчиваем общее исследование локальных гамильтонианов и переходим к рассмотрению конкретных примеров.

2. XXX-МОДЕЛЬ ГЕЙЗЕНБЕРГА СПИНОВ s

Как отмечалось во введении, эта модель связана с неприводимым представлением алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ в $\mathbb{C}^{2s+1}$. Локальная матрица перехода модели имеет вид

$$(2.1)\qquad L_n(\lambda)=\lambda I\otimes I_n+i\sigma^a\otimes S_n^a=\begin{pmatrix}\lambda I_n+iS_n^3 & iS_n^- \\ iS_n^+ & \lambda I_n-iS_n^3\end{pmatrix},$$

$$S_n^{\pm}=S_n^1\pm iS_n^2.$$

Здесь S_n^a, $a=1, 2, 3$,— спиновые операторы, эрмитовы генераторы неприводимого представления $\mathfrak{su}(2)$ в $\mathfrak{h}_n=\mathbb{C}^{2s+1}$, I_n — единичная матрица в $\mathfrak{h}_n$ и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Для матрицы $L_n(\lambda)$ справедливо сплетающее свойство (1.2), где R-матрица имеет вид (1.25) и $b(\lambda)=i/(\lambda+i)$, $c(\lambda)=\lambda/(\lambda+i)$.

Локальным вакуумом является старший вектор ω_n представления $\mathfrak{su}(2)$ в $\mathfrak{h}_n$:

$$(2.2)\qquad S_n^+\omega_n=0,\qquad S_n^3\omega_n=s\omega_n,$$

так что

$$(2.3)\qquad a(\lambda)=\lambda+is,\qquad d(\lambda)=\lambda-is.$$

Матрица $\mathbf{R}(\lambda)$, удовлетворяющая (1.14), определяется с помощью симметрического произведения [7, 15—16]

$$(2.4)\qquad \mathbf{R}(\lambda)=\prod_{l=1}^{2s}(\lambda+il)^{-1}\mathcal{P}\prod_{l=1}^{2s}\otimes L(\lambda+i(l-s))\mathcal{P}$$

и представляет собой матрицу в $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$. Здесь тензорное произведение берется по вспомогательному пространству $\mathbb{C}^2$, а $\mathscr{P}$ обозначает симметризатор в $\prod_{l=1}^{2s}\otimes\mathbb{C}^2$. Используя технику разложения тензорных произведений представлений $\mathfrak{su}(2)$ на неприводимые (разложение Клебша — Гордана), матрицу $\mathbf{R}(\lambda)$ можно представить в виде [16]

$$\mathbf{R}(\lambda)=\sum_{l=0}^{2s}\prod_{k=l+1}^{2s}\frac{\lambda-ik}{\lambda+ik}\mathscr{P}_l. \tag{2.5}$$

Здесь $\mathscr{P}_l$ — проектор на неприводимое представление спина l в разложении тензорного произведения двух представлений $\mathfrak{su}(2)$ спина s. Вводя оператор $\boldsymbol{\sigma}$ в $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$:

$$\boldsymbol{\sigma}=S^a\otimes S^a=\mathbf{S}\otimes\mathbf{S}, \tag{2.6}$$

мы можем записать $\mathscr{P}_l$ в виде

$$\mathscr{P}_l=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{2s}\frac{\boldsymbol{\sigma}-x_j}{x_l-x_j}, \tag{2.7}$$

где $x_l=l(l+1)/2-s(s+1)$, $l=0,1,\ldots,2s$. Формулу (2.5) можно переписать в более инвариантном виде [16]:

$$\mathbf{R}(\lambda)=\frac{\Gamma(i\lambda-2s)\Gamma(i\lambda+2s+1)}{\Gamma(i\lambda-\mathbf{J})\Gamma(i\lambda+\mathbf{J}+1)}, \tag{2.8}$$

где оператор $\mathbf{J}$ определяется из уравнения

$$\mathbf{J}(\mathbf{J}+1)=2\boldsymbol{\sigma}+2s(s+1), \tag{2.9}$$

а $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Локальный гамильтониан модели определяется согласно (1.20) и имеет вид

$$\mathbf{H}^{(s)}_{\mathrm{XXX}}=\sum_{n=1}^{N}f_s(\boldsymbol{\sigma}_n),\qquad \boldsymbol{\sigma}_n=\mathbf{S}_n\mathbf{S}_{n+1}, \tag{2.10}$$

где $f_s(x)$ — следующий полином степени $2s$ [17]:

$$f_s(x)=2\sum_{l=0}^{2s}\sum_{k=l+1}^{2s}\frac{1}{k}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{2s}\frac{x-x_j}{x_l-x_j}. \tag{2.11}$$

Последняя формула немедленно следует из (2.5) и (2.7). Используя (2.8), $f_s(\boldsymbol{\sigma})$ также можно записать в виде

$$f_s(\sigma)=2\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2s+1)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\mathbf{J}+1)\right), \tag{2.12}$$

где штрих означает производную.

Выражение (2.10) показывает, что интегрируемое обобщение хорошо известного случая XXX-модели спинов $^1/_2$

$$\mathbf{H}^{(1/2)}_{\mathrm{XXX}}=-2\sum_{n=1}^{N}\left(\mathbf{S}_n\mathbf{S}_{n+1}-\frac{1}{4}\right) \tag{2.13}$$

на старшие спины является нетривиальным и стало возможным лишь благодаря квантовому методу обратной задачи.

Одночастичные собственные значения оператора квазиимпульса и гамильтониана легко вычисляются с помощью теоремы 4:

$$(2.14)\qquad p(\lambda)=\frac{1}{i}\log\frac{\lambda-is}{\lambda+is}(\operatorname{mod}2\pi),\quad h(\lambda)=\frac{dp(\lambda)}{d\lambda}=\frac{2s}{\lambda^2+s^2},$$

и совпадают с выражениями, полученными в [17].

В силу $\mathfrak{su}(2)$-симметрии модели операторы полного спина

$$(2.15)\qquad S^a=\sum_{n=1}^{N}S_n{}^a$$

коммутируют с $\operatorname{tr}T_N(\lambda)$. При этом оператор $Q_N=sN-S^3$ играет роль заряда, его собственные значения на бетевском векторе $\Psi_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)$ равны l (см. [9]).

В заключение рассмотрим квазиклассический предел XXX-модели. Для этого следует ввести постоянную Планка $\hbar$, заменить в (2.6) $\mathbf{S}$ на $\hbar^{-1}\mathbf{S}$ и считать, что $\hbar\to0$, $s\to\infty$, $\hbar s=c=\text{const}$. При таком пределе оператор $\boldsymbol{\sigma}$ переходит в $\hbar^{-2}\mathbf{s}_n\mathbf{s}_{n+1}$, где $\mathbf{s}_n$ — классические поля, удовлетворяющие условию $\mathbf{s}_n{}^2=c^2$. Используя формулу Стирлинга для $\Gamma(x)$ в виде

$$(2.16)\qquad \Gamma'/\Gamma(x)=\log x+O(1/x),\quad x\to+\infty,$$

получаем из (2.10), (2.12)

$$(2.17)\qquad \mathbf{H}_{XXX}^{(s)}\to\mathbf{H}_{cl}=-\sum_{n=1}^{N}\log\left(\frac{1+c^{-2}\mathbf{s}_n\mathbf{s}_{n+1}}{2}\right)$$

— классический гамильтониан интегрируемого изотропного решеточного магнетика Гейзенберга (см. [15]).

3. МОДЕЛЬ LNS

Эта модель связана с бесконечномерным неприводимым представлением $\mathfrak{su}(2)$. Локальная матрица перехода имеет вид [10, 12]

$$(3.1)\qquad L_n(\lambda)=\begin{pmatrix}1-\dfrac{i\lambda\Delta}{2}+\dfrac{\varkappa\Delta}{2}\psi_n{}^*\psi_n & -i\sqrt{\varkappa\Delta}\psi_n{}^*\rho_n\\ i\sqrt{\varkappa\Delta}\rho_n\psi_n & 1+\dfrac{i\lambda\Delta}{2}+\dfrac{\varkappa\Delta}{2}\psi_n{}^*\psi_n\end{pmatrix},$$

где Δ — шаг решетки, а $\varkappa$ — константа связи. Здесь $\psi_n{}^*$ и ψ_n — канонические операторы рождения и уничтожения в $\mathfrak{h}_n=\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^1)$

$$(3.2)\qquad [\psi_m,\psi_n{}^*]=\delta_{mn},$$

а

$$(3.3)\qquad \rho_n=\rho(\psi_n{}^*\psi_n),\quad \rho(x)=\left(1+\frac{\varkappa\Delta}{4}x\right)^{1/2}.$$

Для матрицы (3.1) справедливо сплетающее свойство (1.2) с R-матрицей вида (1.25), где $b(\lambda)=i\varkappa/(i\varkappa-\lambda)$, $c(\lambda)=\lambda/(\lambda-i\varkappa)$. Локальный вакуум определяется из условия

$$(3.4)\qquad \psi_n\omega_n=0$$

— фоковский вакуум, так что

$$a(\lambda)=1-\frac{i\lambda\Delta}{2},\quad d(\lambda)=1+\frac{i\lambda\Delta}{2}. \tag{3.5}$$

Операторы

$$\begin{aligned} S_n^1&=\frac{i}{\sqrt{\varkappa\Delta}}(\psi_n^*\rho_n+\rho_n\psi_n),\\ S_n^2&=\frac{1}{\sqrt{\varkappa\Delta}}(\rho_n\psi_n-\psi_n^*\rho_n),\\ S_n^3&=-\frac{2}{\varkappa\Delta}\left(1+\frac{\varkappa\Delta}{2}\psi_n^*\psi_n\right), \end{aligned} \tag{3.6}$$

участвующие в матричных элементах $L_n(\lambda)$, являются генераторами неприводимого представления $\mathfrak{su}(2)$ в $\mathfrak{h}_n$ спина

$$s=-2/\varkappa\Delta. \tag{3.7}$$

В физической литературе (3.6) называется представлением Хольштейна — Примакова [20]. При специальных значениях константы связи $\varkappa=-4/l\Delta$, где $l=1, 2, \ldots$, представление (3.6) становится приводимым в $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^1)$, и от него отщепляется неприводимое конечномерное представление в пространстве $\mathbb{C}^{l+1}$, которое и следует считать квантовым пространством в узле.

Формулы (2.1), (3.1) и (3.6) показывают, что модель LNS можно интерпретировать как XXX-модель произвольного, не обязательно полуцелого спина s [10]. Такая связь этих моделей не столь уж удивительна, поскольку в классическом непрерывном случае они являются калибровочно-эквивалентными [21]. Локальная матрица перехода XXX-модели дается формулой (2.1). Сравнивая (2.1), (3.1) и (3.6), получаем, что

$$L_n^{(\mathrm{NS})}(\lambda)=\frac{1}{is}\sigma_3 L_n^{(\mathrm{XXX})}\left(-\frac{\lambda}{\varkappa}\right), \tag{3.8}$$

где индексы NS и XXX указывают на модели. Перемножая (3.8), получаем

$$T_N^{(\mathrm{NS})}(\lambda)=(is)^{-N}\prod_{n=1}^{\overleftarrow{N}}\tilde{L}_n^{(\mathrm{XXX})}\left(-\frac{\lambda}{\varkappa}\right), \tag{3.9}$$

где

$$\tilde{L}_n^{(\mathrm{XXX})}(\lambda)=\sigma_3^{n-1}L_n^{(\mathrm{XXX})}(\lambda)\sigma_3^{n-1} \tag{3.10}$$

и длина решетки N предполагается четной. Заметим теперь, что

$$\sigma_3 L_n^{(\mathrm{XXX})}(\lambda)\sigma_3=u_n L_n^{(\mathrm{XXX})}(\lambda)u_n, \tag{3.11}$$

где умножение в правой части происходит по квантовому пространству и оператор

$$u_n=\exp(i\pi\psi_n^*\psi_n) \tag{3.12}$$

является инволютивным автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$. Он удовлетворяет условиям

$$(3.13)\qquad u_n S_n^{\pm} u_n = -S_n^{\pm}, \quad u_n S_n^3 u_n = S_n^3.$$

Поэтому соотношение (3.9) переписывается следующим образом:

$$(3.14)\qquad T_N^{(\mathrm{NS})}(\lambda) = (is)^{-N} U T_N^{(\mathrm{XXX})}\left(-\frac{\lambda}{\varkappa}\right) U,$$

где

$$(3.15)\qquad U = \prod_{n=1}^{N} u_n^{n-1}.$$

Формула (3.14) устанавливает унитарную эквивалентность рассматриваемых моделей. Тем самым задача о построении локальных интегралов модели LNS свелась к аналогичной задаче для XXX-модели. Для ее решения достаточно заметить, что основные результаты раздела 2, относящегося к конечномерным представлениям, справедливы и для бесконечномерного случая.

Именно для последнего случая матрица $\mathbf{R}(\lambda)$, теперь оператор в $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^1)\otimes\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^1)$, существует и по-прежнему дается формулами (2.6), (2.8) и (2.9). Действительно, сплетающее свойство (1.14) для $L^{(\mathrm{XXX})}(\lambda)$ эквивалентно равенствам

$$(3.16)\qquad [\mathbf{R}(\lambda), S^a\otimes I + I\otimes S^a] = 0, \quad a = 1, 2, 3,$$

$$(3.17)\qquad \frac{i\lambda}{2}[\mathbf{R}(\lambda), S^3\otimes I - I\otimes S^3] = $$

$$= \mathbf{R}(\lambda)(S^1\otimes S^2 - S^2\otimes S^1) + (S^1\otimes S^2 - S^2\otimes S^1)\mathbf{R}(\lambda).$$

Из соотношений (3.16) следует, что

$$(3.18)\qquad \mathbf{R}(\lambda) = f(\lambda, \mathbf{J}),$$

а равенство (3.17) приводит к функциональному уравнению для функции $f(\lambda, x)$:

$$(3.19)\qquad f(\lambda, x+1) = \frac{\lambda + i(x+1)}{\lambda - i(x+1)} f(\lambda, x).$$

Вместе с начальным условием $f(\lambda, 2s) = 1$, вытекающим из условия нормировки (1.33), это уравнение однозначно приводит к формуле (2.8).

Таким образом, серия локальных интегралов модели LNS имеет вид

$$(3.20)\qquad \mathbf{I}_k^{(\mathrm{NS})} = U\mathbf{I}_k^{(\mathrm{XXX})} U,$$

где $\mathbf{I}_k^{(\mathrm{XXX})}$ даются формулами (1.20). В частности,

$$(3.21)\qquad \mathbf{H}_N^{(\mathrm{NS})} = \mathbf{I}_1^{(\mathrm{NS})} = \sum_{n=1}^{N} f_s(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n),$$

где унитарное преобразование U сводится к замене $\boldsymbol{\sigma}_n$ на $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n$:

$$(3.22)\qquad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n = U\boldsymbol{\sigma}_n U = S_n^3 S_{n+1}^3 - S_n^2 S_{n+1}^2 - S_n^1 S_{n+1}^1,$$

а функция f_s по-прежнему дается формулой (2.12). Тем самым мы получили явное выражение для локального гамильтониана модели LNS.

В силу теорем 3 и 4 операторы $\mathbf{I}_k^{(NS)}$ имеют аддитивный спектр. В частности, одночастичные собственные значения операторов $-i\log \mathbf{P}_N^{(NS)}$ и $\mathbf{H}_N^{(NS)}$ имеют вид

$$(3.23)\qquad p_{NS}(\lambda)=\frac{1}{i}\log\frac{2+i\lambda\Delta}{2-i\lambda\Delta}=p_{XXX}\left(-\frac{\lambda}{\varkappa}\right)+\pi\,(\mathrm{mod}\,2\pi),$$

$$(3.24)\qquad h_{NS}(\lambda)=h_{XXX}\left(-\frac{\lambda}{\varkappa}\right)=-\frac{4\varkappa\Delta}{\lambda^2\Delta^2+4}.$$

При этом в качестве оператора заряда, числа частиц модели LNS, выступает, как и следовало ожидать, оператор

$$(3.25)\qquad \mathbf{Q}_N^{(NS)}=U\mathbf{Q}_N^{(XXX)}U=\sum_{n=1}^{N}\psi_n^*\psi_n.$$

В заключение рассмотрим непрерывный предел в модели LNS. Будем считать, что $\Delta\to 0$, $n\Delta\to x$, $N\Delta=\mathrm{const}$, и

$$(3.26)\qquad \psi_n\sim\Delta^{1/2}\psi(x),\qquad \psi_n^*\sim\Delta^{1/2}\psi^*(x),$$

так что

$$(3.27)\qquad [\psi(x),\psi^*(y)]=\delta(x-y).$$

При этом пределы операторных выражений понимаются в слабом смысле. Эффективно это означает, что нормально упорядоченный моном от ψ_n^*, ψ_n степени l имеет порядок малости $\Delta^{l/2}$. Для операторов числа частиц и квазиимпульса сразу получаем

$$(3.28)\qquad \mathbf{Q}_N^{(NS)}\to\int\psi^*(x)\psi(x)\,dx,$$

$$(3.29)\qquad \frac{1}{i\Delta}\log\mathbf{P}_N^{(NS)}\to i\int\frac{d\psi^*(x)}{dx}\psi(x)\,dx.$$

Для вывода последней формулы следует воспользоваться представлением

$$(3.30)\qquad \mathbf{P}_N^{(NS)}=:\exp\sum_{n=1}^{N}(\psi_{n-1}^*-\psi_n^*)\psi_n:,$$

где $\psi_0=\psi_N$, $\psi_0^*=\psi_N^*$, и символ : : означает нормальное упорядочение.

Рассмотрим теперь предел $\Delta\to 0$ в выражении для $\mathbf{H}_N^{(N}$. Из формул (2.6), (2.9), (3.3), (3.6) и (3.22) следует, что

$$(3.31)\qquad \tilde{\sigma}_n=s^2+O(1),\qquad \mathrm{J}=2s+1+O(\Delta).$$

Ограничиваясь первыми четырьмя членами формулы Стирлинга для $(\Gamma'/\Gamma)(x)$ при $x\to\infty$ и тремя старшими членами разложения $\log x$ при $x\to 1$, после несложных преобразований, основанных на (3.2), (3.3) и (3.6), получаем

$$(3.32)\qquad \mathbf{H}_N^{(NS)}=s^{-3}\sum_{n=1}^{N}\Big[\frac{s^2}{4}(\psi_{n+1}^*-\psi_n^*)(\psi_{n+1}-\psi_n)-$$

$$-\frac{s}{16}[(\psi_n^{*2}+\psi_{n+1}^*\psi_n^*+\psi_{n+1}^{*2})(\psi_n^2+\psi_{n+1}\psi_n+\psi_{n+1}^2)-$$

$$-\overset{*}{\psi}_{n+1}\psi_n{}^*\psi_{n+1}\psi_n\Big]-s^2\psi_n{}^*\psi_n+O(\Delta^2)\Bigg].$$

Отсюда следует, что при $\Delta\to 0$ существует предел

$$\mathbf{H}^{(\mathrm{NS})}_{N,\mathrm{reg}}=\frac{4}{\Delta^2}\left(\mathbf{Q}^{(\mathrm{NS})}_N-\frac{s}{2}\mathbf{H}^{(\mathrm{NS})}_N\right)\to \tag{3.33}$$

$$\to\int\left(\frac{d\psi^*(x)}{dx}\frac{d\psi(x)}{dx}+\varkappa\psi^*(x)\psi^*(x)\psi(x)\psi(x)\right)dx.$$

Таким образом, мы показали, как построенные интегралы переходят в непрерывном пределе в хорошо известные операторы числа частиц, импульса и гамильтониана квантовой модели NS [3]. Особенно просто предел $\Delta\to 0$ осуществляется в одночастичных собственных значениях (3.23) и (3.24):

$$\frac{1}{\Delta}p(\lambda)\to p_{\mathrm{cont}}(\lambda)=\lambda,\qquad h_{\mathrm{reg}}(\lambda)\to h_{\mathrm{cont}}(\lambda)=\lambda^2, \tag{3.34}$$

где

$$h_{\mathrm{reg}}(\lambda)=\frac{4}{\Delta^2}\left(1-\frac{s}{2}h(\lambda)\right). \tag{3.35}$$

На этом мы заканчиваем обсуждение модели LNS.

4. МОДЕЛЬ LSG И XXZ-МОДЕЛЬ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПИНА

Модель LSG была введена в работах [11, 12]. Ее локальная матрица перехода имеет вид

$$L_n^{(\mathrm{SG})}(\lambda)=4i\sqrt{r}\times \tag{4.1}$$

$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{\sin\gamma}{2}S_n{}^+ & \sin\lambda\cos\dfrac{\gamma}{2}S_n{}^0-\cos\lambda\sin\dfrac{\gamma}{2}S_n{}^3\\ -\sin\lambda\cos\dfrac{\gamma}{2}S_n{}^0-\cos\lambda\sin\dfrac{\gamma}{2}S_n{}^3 & -\dfrac{\sin\gamma}{2}S_n{}^-\end{pmatrix},$$

где операторы $S_n{}^a$ выражаются через унитарные операторы u_n и v_n, удовлетворяющие вейлевским перестановочным соотношениям

$$u_nv_n=e^{i\gamma}v_nu_n, \tag{4.2}$$

здесь $\gamma=\beta^2/8$, где $\beta>0$ — константа связи модели. Соответствующие формулы для $S_n{}^a$ имеют вид

$$S_n{}^0=\frac{1}{4\cos\dfrac{\gamma}{2}}(v_n+v_n{}^{-1}),\qquad S_n{}^3=\frac{1}{4i\sin\dfrac{\gamma}{2}}(v_n-v_n{}^{-1}), \tag{4.3}$$

$$S_n{}^\pm=S_n{}^1\pm iS_n{}^2=\pm\frac{1}{2i\sin\gamma\sqrt{r}}u_n{}^{\mp1}[1+r(v_n{}^2e^{\pm i\gamma}+v_n{}^{-2}e^{\mp i\gamma})]^{1/2},$$

здесь

$$r=(m\Delta/4)^2, \tag{4.4}$$

где m играет роль массы модели.

В случае, если $\gamma \neq 2\pi p/q$, где p и q — целые, квантовое пространство в узле $\mathfrak{h}_n$ может быть реализовано как $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^1/2\pi\mathbb{Z})$ — гильбертово пространство 2π-периодических функций. Для операторов u_n и v_n в $\mathfrak{h}_n$ имеются два неэквивалентных представления в виде операторов умножения и сдвига и соответственно наоборот. Если $\gamma=2\pi p/q$, где p и q взаимно просты, то $\mathfrak{h}_n=\mathbb{C}^q$ и операторы u_n, v_n являются образующими проективного представления $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ в $\mathbb{C}^q$.

Операторы S_n^a удовлетворяют замечательным перестановочным соотношениям

$$
\begin{aligned}
(4.5)\qquad &[S^0, S^\pm]=\pm J(S^3S^\pm+S^\pm S^3),\\
&[S^3, S^\pm]=\pm(S^0S^\pm+S^\pm S^0),\\
&[S^+, S^-]=2(S^0S^3+S^3S^0),\\
&[S^0, S^3]=0,
\end{aligned}
$$

где $J=-\operatorname{tg}^2(\gamma/2)$, и мы опустили зависимость от n. В более общей ситуации эти соотношения были введены в работе [15]. Ассоциативная алгебра, натянутая на образующие S^a, которые удовлетворяют условиям (4.5), получила название квадратичной алгебры Склянина. Она является деформацией универсальной обертывающей алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ и играет важную роль в классификации интегрируемых моделей.

Как и в случае $\mathfrak{su}(2)$, операторы S^a допускают конечномерную реализацию [22]. Именно, если

$$(4.6)\qquad r=-1/2\cos l\gamma,$$

то от представления (4.3) в $\mathfrak{h}$ отщепляется конечномерное неприводимое представление в ^{l}. При этом v следует представить как оператор сдвига и при четном l реализовать исходное пространство $\mathfrak{h}$ как пространство 2π-антипериодических функций.

Конечномерное представление квадратичной алгебры Склянина в $\mathbb{C}^l$ отвечает XXZ-модели спинов $s=(l-1)/2$. Ее локальная матрица перехода $L_n^{(XXZ)}(\lambda)$ получается из $L_n^{(SG)}(\lambda)$ умножением слева на $-i\sigma_2/(2\sqrt{r})$.

Для матриц $L_n^{(SG)}(\lambda)$ и $L_n^{(XXZ)}(\lambda)$ выполняется сплетающее свойство (1.2) с R-матрицей вида (1.25), где

$$(4.7)\qquad b(\lambda)=\frac{\sin\gamma}{\sin(\lambda+\gamma)},\qquad c(\lambda)=\frac{\sin\lambda}{\sin(\lambda+\gamma)}.$$

В силу общей теоремы, упомянутой в разделе 1, для этих моделей также существует и матрица $\mathbf{R}(\lambda)$ — R-матрица по квантовому пространству. Однако ее не удается пока представить в инвариантном виде типа (2.8), т. к. для этого требуется разработать теорию представлений для квадратичных алгебр Склянина, параллельную теории представлений алгебр Ли. Лишь в конечномерном случае XXZ-модели удается непосредственно вычислить матричные элементы $\mathbf{R}(\lambda)$ [22].

Тем не менее для получения общей информации о структуре $\mathbf{R}(\lambda)$ можно непосредственно использовать соотношение (1.14). Расписывая его по матричным элементам матриц $\tilde{\tilde{L}}(\lambda)$ и $\tilde{L}(\mu)$, получаем, что

$$[\mathbf{R}(\lambda), \boldsymbol{\sigma}(\lambda)] = [\mathbf{R}(\lambda), \boldsymbol{\tau}] = 0, \tag{4.8}$$

где коммутирующие операторы $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)$ и $\boldsymbol{\tau}$ имеют вид

$$\boldsymbol{\sigma}^{(SG)}(\lambda) = -S^1\otimes S^1 + S^2\otimes S^2 - \frac{\cos\lambda}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} S^3\otimes S^3, \tag{4.9}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(XXZ)}(\lambda) = S^1\otimes S^1 + S^2\otimes S^2 + \frac{\cos\lambda}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} S^3\otimes S^3,$$

и

$$\boldsymbol{\tau}^{(SG)} = S^0\otimes S^0 - JS^3\otimes S^3, \qquad \boldsymbol{\tau}^{(XXZ)} = S^0\otimes S^0 + JS^3\otimes S^3. \tag{4.10}$$

Поэтому естественно предположить, что $\mathbf{R}(\lambda)$ является функций от $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)$ и $\boldsymbol{\tau}$. Тем самым для локальных гамильтонианов имеем

$$\mathbf{H}_N^{(SG)} = \sum_{n=1}^{N} g_r^{(SG)}\left(\boldsymbol{\sigma}_n^{(SG)}, \boldsymbol{\tau}_n^{(SG)}\right), \tag{4.11}$$

$$\mathbf{H}_N^{(XXZ)} = \sum_{n=1}^{N} g_s^{(XXZ)}\left(\boldsymbol{\sigma}_n^{(XXZ)}, \boldsymbol{\tau}_n^{(XXZ)}\right), \tag{4.12}$$

где $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_n(0)$ и индекс n означает, что в (4.9) и (4.10) первые сомножители в тензорном произведении действуют в $\mathfrak{h}_n$, а вторые — в $\mathfrak{h}_{n+1}$, причем $\mathfrak{h}_{N+1} = \mathfrak{h}_1$.

Функции $g_r^{(SG)}$ и $g_s^{(XXZ)}$, участвующие в (4.11) и (4.12), характеризуют модели и подлежат определению. В квазиклассическом пределе $\gamma\to 0$, $s\gamma = \mathrm{const}$, $r = \mathrm{const}$ имеется свойство универсальности: функции $g_r^{(SG)}$ и $g_s^{(XXZ)}$ упрощаются и, как функция f_s из раздела 2, эффективно сводятся к логарифмам

$$g_r^{(SG)} \to -\frac{1}{\gamma\Delta}\log\left(r\gamma^2\boldsymbol{\sigma}_n^{(SG)} + (1+2r)\boldsymbol{\tau}_n^{(SG)}\right), \tag{4.13}$$

$$g_s^{(XXZ)} \to -\frac{1}{\gamma}\log\left(\frac{\gamma^2}{2}\boldsymbol{\sigma}_n^{(XXZ)} + (1-2\cos 2s\gamma)\boldsymbol{\tau}_n^{(XXZ)}\right). \tag{4.14}$$

Таким образом, мы получаем локальные гамильтонианы классических моделей LSG и XXZ-модели [15]. В непрерывном пределе $\Delta\to 0$ они переходят в хорошо известные выражения для гамильтонианов моделей SG и непрерывной XXZ-модели Гейзенберга.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы докажем теоремы 3 и 4 (последнюю для случая $k=1$). Введем в рассмотрение матрицы

$$T_{N-1}(\lambda,\mu) = \prod_{n=2}^{\overleftarrow{N-1}} L_n(\lambda)\, L_1(\lambda+\mu), \tag{П.1}$$

(П.2) $$T_N(\lambda,\mu)=L_N(\lambda-\mu)T_{N-1}(\lambda,\mu),\qquad \tilde T_N(\lambda,\mu)=T_{N-1}(\lambda,\mu)L_N(\lambda-\mu),$$

так что

(П.3) $$T_{N-1}(\lambda,0)=T_{N-1}(\lambda),\ T_N(\lambda,0)=T_N(\lambda),$$

а также положим $\tilde T_N(\lambda)=\tilde T_N(\lambda,0)$. Матричные элементы этих матриц будем обозначать, как и в (1.23), явно указывая аргументы λ и μ, индексы N или $N-1$ и тильду. Матричные элементы $L_N(\lambda)$ также будем обозначать, как в (1.23), опуская индекс N.

Основу доказательства составляет следующая общая лемма.

Л е м м а. *Имеют место равенства*

(П.4) $$\prod_{j=1}^{\overset{\curvearrowright}{l}} B_N(\lambda_j,\mu)\,\Omega_N=\sum_{\{\lambda_1,\ldots,\lambda_l\}=\Lambda_1\cup\Lambda_2} Z(\Lambda_1,\Lambda_2,\mu)\times$$
$$\times\prod_{\lambda_j\in\Lambda_1}B(\lambda_j-\mu)\prod_{\lambda_k\in\Lambda_2}B_{N-1}(\lambda_k,\mu)\,\Omega_N,$$

(П.5) $$\prod_{j=1}^{\overset{\curvearrowright}{l}} \tilde B_N(\lambda_j,\mu)\,\Omega_N=\sum_{\{\lambda_1,\ldots,\lambda_l\}=\Lambda_1\cup\Lambda_2} \tilde Z(\Lambda_1,\Lambda_2,\mu)\times$$
$$\times\prod_{\lambda_j\in\Lambda_1}B(\lambda_j-\mu)\prod_{\lambda_k\in\Lambda_2}B_{N-1}(\lambda_k,\mu)\,\Omega_N,$$

где сумма берется по всевозможным разбиениям чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ на два непересекающихся набора Λ_1 и Λ_2, а коэффициенты Z и $\tilde Z$ выглядят следующим образом:

(П.6) $$Z(\Lambda_1,\Lambda_2,\mu)=\prod_{\lambda_j\in\Lambda_1}\prod_{\lambda_k\in\Lambda_2}\frac{a(\lambda_k-\mu)\,d^{N-2}(\lambda_j)\,d(\lambda_j+\mu)}{c(\lambda_j-\lambda_k)},$$

(П.7) $$\tilde Z(\Lambda_1,\Lambda_2,\mu)=\prod_{\lambda_j\in\Lambda_1}\prod_{\lambda_k\in\Lambda_2}\frac{d(\lambda_k-\mu)\,a^{N-2}(\lambda_j)\,a(\lambda_j+\mu)}{c(\lambda_k-\lambda_j)}.$$

Если, кроме того, числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ удовлетворяют системе уравнений (1.27), *то*

(П.8) $$\prod_{j=1}^{l}\tilde B_N(\lambda_j)\,\Omega_N=\prod_{j=1}^{l}\frac{d(\lambda_j)}{a(\lambda_j)}B_N(\lambda_j)\,\Omega_N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в левые части равенств (П.4) и (П.5) следующие выражения для $B_N(\lambda,\mu)$ и $\tilde B_N(\lambda,\mu)$, вытекающие из (П.1) и (П.2):

(П.9) $$B_N(\lambda,\mu)=A(\lambda-\mu)B_{N-1}(\lambda,\mu)+B(\lambda-\mu)D_{N-1}(\lambda,\mu),$$

(П.10) $$\tilde B_N(\lambda,\mu)=A_{N-1}(\lambda,\mu)B(\lambda-\mu)+B_{N-1}(\lambda,\mu)D(\lambda-\mu).$$

Используя перестановочные соотношения (1.29) и коммутативность операторов $B(\lambda-\mu)$ и $B_{N-1}(\lambda,\mu)$ между собой и друг с другом при разных λ и одинаковых μ, пронесем в получившихся выражениях операторы $A(\lambda_j-\mu)$, $D_{N-1}(\lambda_j,\mu)$ и $A_{N-1}(\lambda_j,\mu)$, $D(\lambda_j-\mu)$ к вектору Ω_N и воспользуемся свойствами (1.21) и (1.24). Для доказательства представлений (П.4) и (П.5) нам осталось доказать, что при таком раскрытии левых частей этих равенств не возникают сомножители вида $B(\lambda_j-\mu)B_{N-1}(\lambda_j,\mu)$.

Заметим теперь, что в силу коммутативности операторов $B_N(\lambda,\mu)$ и $\tilde B_N(\lambda,\mu)$ левые части в (П.4) и (П.5) являются симметричными функциями от $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ — прием, используемый при доказательстве теоремы 2. Поэтому достаточно ограничиться случаем $j=l$.

Из формул (П.9) и (П.10) очевидным образом следует, что в левых частях в (П.4) и (П.5) произведение $B(\lambda_l-\mu)B_{N-1}(\lambda_l,\mu)$ не может возникнуть.

Для вычисления коэффициентов Z и $\tilde Z$ в силу указанной симметрии достаточно ограничиться случаем $\Lambda_1=\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, $\Lambda_2=\{\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_l\}$ и использовать только первые слагаемые в формулах (1.29). Таким образом приходим к выражениям (П.6) и (П.7). И, наконец, для доказательства (П.8) следует воспользоваться равенством

$$\text{(П.11)}\qquad \prod_{\lambda_j\in\Lambda_1}\frac{a^N(\lambda_j)}{d^N(\lambda_j)}=\prod_{\lambda_j\in\Lambda_1}\prod_{\lambda_k\in\Lambda_2}\frac{c(\lambda_k-\lambda_j)}{c(\lambda_j-\lambda_k)},$$

которое получается перемножением уравнений в системе (1.27). Отсюда и из (П.6) и (П.7) получаем

$$\text{(П.12)}\qquad \tilde{Z}(\Lambda_1, \Lambda_2, 0)=\prod_{j=1}^{l}\frac{d(\lambda_j)}{a(\lambda_j)}Z(\Lambda_1, \Lambda_2, 0),$$

что и завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 3. Из свойств (1.30) оператора квазиимпульса и (П.2) имеем

$$\text{(П.13)}\qquad \mathbf{P}_N T_N(\lambda)=\tilde{T}_N(\lambda)\mathbf{P}_N.$$

Учитывая, что

$$\text{(П.14)}\qquad \mathbf{P}_N\Omega_N=\Omega_N,$$

получаем

$$\text{(П.15)}\qquad \mathbf{P}_N\prod_{j=1}^{l}B_N(\lambda_j)\Omega_N=\prod_{j=1}^{l}\tilde{B}_N(\lambda_j)\Omega_N.$$

Вместе с (П.8) это завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 4 для случая $k=1$. В силу теоремы 1 оператор $\mathbf{H}=\mathbf{I}_1$ имеет вид

$$\text{(П.16)}\qquad \mathbf{H}=\sum_{n=1}^{N}H_{n,n+1}=\tilde{\mathbf{H}}+H_{N,1},$$

где

$$\text{(П.17)}\qquad H_{n,n+1}=\frac{1}{i}\mathbf{P}_{n,n+1}\frac{d}{d\lambda}\mathbf{R}_{n,n+1}(\lambda)\,|_{\lambda=0},$$

здесь $\mathbf{P}_{n,\,n+1}$ — оператор перестановки в $\mathfrak{h}_n\otimes\mathfrak{h}_{n+1}$, а $\mathbf{R}_{n,\,n+1}(\lambda)$ совпадает в этом пространстве с $\mathbf{R}(\lambda)$. Дифференцируя (1.14) по μ и полагая $\mu=\lambda$, получаем с учетом (П.17)

$$\text{(П.18)}\qquad [H_{n,n+1}, L_{n+1}(\lambda)L_n(\lambda)]=\frac{1}{i}(L_{n+1}(\lambda)L_n'(\lambda)-L_{n+1}'(\lambda)L_n(\lambda)),$$

где $H_{N,\,N+1}=H_{N,\,1}$, $L_{N+1}(\lambda)=L_1(\lambda)$, а штрих обозначает производную. Отсюда получаем коммутационные соотношения

$$\text{(П.19)}\qquad [\tilde{\mathbf{H}}, T_N(\lambda)]=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\mu}T_N(\lambda,\mu)\,|_{\mu=0},$$

$$\text{(П.20)}\qquad [H_{N,1}, \tilde{T}_N(\lambda)]=i\frac{\partial}{\partial\mu}\tilde{T}_N(\lambda,\mu)\,|_{\mu=0}.$$

Вспоминая формулы (П.3), приходим к нужным нам равенствам

$$\text{(П.21)}\qquad \left[\tilde{\mathbf{H}}, \prod_{j=1}^{l}B_N(\lambda_j)\right]=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\mu}\prod_{j=1}^{l}B_N(\lambda_j,\mu)\,|_{\mu=0},$$

$$\text{(П.22)}\qquad \left[H_{N,1}, \prod_{j=1}^{l}\tilde{B}_N(\lambda_j)\right]=i\frac{\partial}{\partial\mu}\prod_{j=1}^{l}\tilde{B}_N(\lambda_j,\mu)\,|_{\mu=0}.$$

Предположим теперь, что числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ удовлетворяют системе уравнений (1.27). Преобразуем левую часть (П.22) по лемме, применим (П.21) и (П.22) к вектору Ω_N и сложим получившиеся равенства. Поскольку в силу условия нормировки (1.33)

$$H_{n,\,n+1}\Omega_N=0, \tag{П.23}$$

то в результате мы получаем выражение для действия оператора **H** на бетевский вектор

$$\mathbf{H}\prod_{j=1}^{l} B_N(\lambda_j)\Omega_N = \tag{П.24}$$

$$=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\prod_{j=1}^{l} B_N(\lambda_j,\mu)-\prod_{j=1}^{l}\frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)}\tilde{B}_N(\lambda_j,\mu)\right)\Bigg|_{\mu=0}\Omega_N.$$

Правую часть получившегося равенства преобразуем с помощью леммы. Из (П.4)–(П.7) получаем, что она представляется в виде, аналогичном (П.4), но где числовые коэффициенты перед произведениями операторов $B(\lambda-\mu)$ и $B_{N-1}(\lambda,\mu)$ исчезают при $\mu=0$, так что только их и надо дифференцировать. В результате, используя (П.6)–(П.8), для правой части равенства (П.24) получаем искомое представление

$$\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{d'(\lambda_j)}{d(\lambda_j)}-\frac{a'(\lambda_j)}{a(\lambda_j)}\right]\prod_{j=1}^{l}B_N(\lambda_j)\Omega_N, \tag{П.25}$$

что и завершает доказательство.

Литература

[1] *Склянин Е. К., Фаддеев Л. Д.*— ДАН СССР, 1978, *243*, № 6, 1430–1433.
[2] *Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.*— ТМФ, 1979, *40*, № 2, 194–220.
[3] *Склянин Е. К.*— Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, *95*, 55–128.
[4] *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.*— УМН, 1979, *34*, № 5, 13–63.
[5] *Фаддеев Л. Д.* Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля. Препринт Р-2-79. Ленинград: ЛОМИ, 1979.
[6] *Изергин А. Г., Корепин В. Е.*— Физика ЭЧАЯ, 1982, *13*, № 3, № 3, 501—541.
[7] *Kulish P. P., Sklyanin E. K.*— Lect. Notes in Phys., 1982, *151*, 61–119.
[8] *Faddeev L.* Integrable Models in 1+1 dimensional quantum field theory. Preprint S.Ph.T/82/76. Saclay, 1982.
[9] *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.*— Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1981, *109*, 134–179.
[10] *Изергин А. Г., Корепин В. Е.*— ДАН СССР, 1981, *259*, № 1, 76–79.
[11] *Izergin A. G., Korepin V. E.*— Lett. Math. Phys., 1981, *5*, 199–205. *Изергин А. Г., Корепин В. Е.*— Вестн. ЛГУ, 1981, № 22, 84–87.
[12] *Izergin A. G., Korepin V. E.*— Nucl. Phys., 1982, *B205*, FS5, 401–413. *Изергин А. Г., Корепин В. Е.*— Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1982, *120*, 75–92.
[13] *Тарасов В. О.*— Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1982, *120*, 173–187.
[14] *Изергин А. Г., Корепин В. Е., Смирнов Ф. А.*— ТМФ, 1981, *48*, № 3, 319–323.
[15] *Склянин Е. К.*— Функц. анализ и его прилож., 1982, *16*, № 4, 27–34.
[16] *Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu., Sklyanin E. K.*— Lett. Math. Phys., 1981, *5*, № 5, 393–403.
[17] *Кулиш П. П.* Проблемы статистич. механики. Препринт Д17-81-758. Дубна: ОИЯИ, 1981, 147–158.
[18] *Lüsher M.*— Nucl. Phys., 1976, *B117*, 475–492.
[19] *Корепин В. Е.*— ДАН СССР, 1982, *265*, № 6, 1361–1364.
[20] *Holstein T., Primakoff H.*— Phys. Rev.. 1940, *58*, 1098.
[21] *Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А.*— ТМФ, 1979, *38*, № 1, 26–35.
[22] *Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю.*— Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1981, *101*, 101–111.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
15.IV.1983 г.

LOCAL HAMILTONIANS FOR INTEGRABLE QUANTUM MODELS ON THE LATTICE

Tarassov V. O., Takhtajan L. A., Faddeev L. D.

For integrable models on the lattice the general method of constructing the local Hamiltonians is proposed. For the case of the two-dimensional auxiliary space the diagonalization of the introduced Hamiltonians is performed. The examples of the XXX-Heisenberg model and the lattice nonlinear Schrödinger equation are considered.