Л. Д. Фаддеев, К теории устойчивости стационарных плоскопараллельных течений идеальной жидкости, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1971, том 21, 164–172

Л.Д.Фаддеев

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Настоящая статья представляет собой изложение моего доклада на семинаре О.А.Ладыженской по гидродинамической устойчивости, который я сделал в марте 1971 г. В нем шла речь о спектральной задаче, возникающей в теории устойчивости плоско-параллельных стационарных течений идеальной жидкости. Мое внимание к этой задаче привлек В.И.Арнольд, и содержание статьи возникло в нашей переписке. Точнее, здесь приводятся мои, к сожалению неполные, ответы на его вопросы. Ответственность за эти ответы, конечно, полностью лежит на мне. Я благодарен В.И.Арнольду за стимулирующую переписку.

I. Постановка задачи.

Мы будем исследовать спектр линейного уравнения, возникающего при линеаризации уравнения Эйлера гидродинамики идеальной жидкости в окрестности заданной функции. Формулировка этой задачи будет отличаться от общепринятого уравнения Орра-Зоммерфельда (см. [I]), и поэтому я начну с краткого ее вывода.

Рассмотрим двумерное уравнение Эйлера для функции тока

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \{\Delta\psi, \psi\} = 0 , \qquad (\mathrm{I})$$

где

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial g}{\partial \xi}.$$

Будем считать, что это уравнение задано в прямоугольной области

$0 \leq \eta \leq 1$, $-\mathcal{D} \leq \xi \leq \mathcal{D}$, где а) $\mathcal{D} = \infty$; б) $\mathcal{D} = \pi$,

и что решения удовлетворяют определенным граничным условиям. Условия по ξ : ограниченность при $|\xi| \to \infty$ в случае а) и периодичность $\psi(\xi + 2\pi, \eta) = \psi(\xi, \eta)$ в случае б). По переменной η можно использовать произвольные "самосопряженные" условия, например, нулевые $\psi(\xi, 0) = \psi(\xi, 1) = 0$ или периодические $\psi(\xi, \eta + 1) = \psi(\xi, \eta)$.

Пусть $\varphi(\eta)$ - заданная гладкая функция, описывающая исследуемое на устойчивость стационарное плоско-параллельное течение, созданное внешними силами. Уравнение (I), линеаризованное в окрестности этой функции, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + \frac{\partial}{\partial \xi}\Delta u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} u \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} = 0.$$

Наша задача - исследовать соответствующую спектральную задачу

$$\lambda \Delta u = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot v'' - \frac{\partial}{\partial \xi}\Delta u \cdot v, \tag{2}$$

где мы ввели стандартное обозначение

$$v(\eta) = \frac{d\varphi(\eta)}{d\eta} = \varphi'(\eta)$$

для функции $v(\eta)$, которая называется профилем заданного течения. Признаком неустойчивости является существование собственных значений λ с положительной вещественной частью.

Переменные в уравнении (2) разделяются и собственные функции можно искать в виде

$$u(\xi,\eta) = e^{ik\xi}\, u(\eta, k),$$

где $-\infty < k < \infty$ в случае а), и в случае б) числа k - целые. Спектральная задача при этом переходит в следующую

$$\lambda(u'' - k^2 u) = ik\left[u v'' - (u'' - k^2 u) v\right], \tag{3}$$

откуда после переобозначений

$$\lambda = -ik\omega, \qquad u'' - k^2 u = f$$

приходим к ее окончательной формулировке

$$Af \equiv v(x) f(x) + v''(x) \int_0^1 G(x, y; k^2) f(y)\, dy = \omega f(x). \tag{4}$$

Здесь $G(x,y,k^2)$ - функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) G(x, y; k^2) = \delta(x-y)$$

с соответствующими краевыми условиями, и для удобства здесь и ниже мы используем обозначения x, y, z для переменных, родственных с η.

Переход от уравнения (3) к интегральному уравнению (4) при всей его тривиальности является очень удобным. Действительно, для спектральной задачи, записанной в форме (4), очевидно присутствие непрерывного спектра. В то же время, непрерывный спектр в дифференциальном уравнении (3) часто пропускают, что приводит к недоумениям и парадоксам, особенно в случае, когда другой спектр отсутствует (см.[I], последний абзац стр. I5I и §§ 8.3, 8.4). В дифференциальной формулировке, собственные функции $u(x,x_0)$ непрерывного спектра даются функцией Грина уравнения Орра-Зоммерфельда

$$R''(x,y;\mu) - k^2 R(x,y;\mu) - \frac{v''(x)}{v(x)-\mu} R(x,y;\mu) = \delta(x-y)$$

при $y = x_0$ и $\mu = v(x_0) + i0$. На это обстоятельство специально обратил внимание Кэйс [2]. Вопросы Арнольда были сформулированы сразу в терминах оператора A.

В нашей формулировке признаком неустойчивости является появление собственных значений с положительной мнимой частью. Вследствие вещественности оператора A его спектр симметричен относительно вещественной оси, так что комплексные собственные значения появляются комплексно-сопряженными парами.

2. Общие свойства оператора A и его спектра.

Оператор A входит в общий класс операторов, называемых в спектральной теории моделью Фридрихса [3], [4]. Запишем его в виде

$$A = A_0 + A_1 ,$$

где

$$A_0 f(x) = v(x) f(x) -$$

оператор умножения на вещественную функцию, самосопряженный в $\mathcal{L}_2(0,1)$, а A_1 - несамосопряженный интегральный оператор

$$A_1 f(x) = v''(x) \cdot \int_0^1 G(x,y;k^2) f(y)\,dy.$$

Оператор A_0 имеет абсолютно-непрерывный спектр. Его собственные функции можно выбрать в виде δ-функций

$$f_0(x,x_0) = \delta(x-x_0) .$$

Соответствующие собственные значения $\omega = v(x_0), 0 \le x_0 \le 1$, пробегают интервал $\mathcal{J}$ значений функции $v(x)$. Общие результаты [3], [4] позволяют утверждать, что оператор A имеет тот же непрерывный спектр, что A_0, и, кроме того, возможно еще и дискретный спектр точки накопления которого могут лежать только на $\mathcal{J}$.

Если $v''(x) \neq 0$, то оператор A_1 симметризуем и наша спектральная задача сводится к самосопряженной. В этом случае спектр оператора A вещественен, что соответствует устойчивости. Изменение знака $v''(x)$ - существование точки перегиба профиля - является, таким образом, необходимым условием неустойчивости. Этот результат хорошо известен в гидродинамике под названием теоремы

Релея.

Исследование спектра, приводящее к сформулированному выше утверждению, основано на интегральном уравнении для его резольвенты. Если искать оператор

$$\Gamma(\mu) = (A - \mu I)^{-1}$$

как интегральный оператор с ядром вида

$$\Gamma(x,y;\mu) = \frac{\delta(x-y)}{v(x)-\mu} - \frac{1}{v(x)-\mu} v''(x) T(x,y;\mu) \frac{1}{v(y)-\mu}, \qquad (5)$$

то для ядра $T(x,y;\mu)$ будет выполнено следующее интегральное уравнение

$$T(x,y;\mu) = G(x,y;k^2) - \int_0^1 G(x,z;k^2) \frac{v''(z)}{v(z)-\mu} T(z,y;\mu) dz. \qquad (6)$$

Это уравнение типа Фредгольма, и особенности решения $T(x,y;\mu)$, а вместе с ним и резольвенты $\Gamma(x,y;\mu)$, помимо явно указанных в (5), находятся в таких μ, при которых имеются нетривиальные решения однородного уравнения

$$-\varphi(x) = \int_0^1 G(x,y;k^2) \frac{v''(y)}{v(y)-\mu} \varphi(y) dy \equiv M(\mu)\varphi(x). \qquad (7)$$

Будем называть такие μ особыми точками уравнения (6). Для любого неособого $\omega + i0$ из интервала $\mathcal{J}$ формула

$$f(x,x_0) = \delta(x-x_0) - \frac{v''(x)}{v(x)-v(x_0)-i0} T(x,x_0;v(x_0)+i0), \quad v(x_0)=\omega$$

дает явное выражение для собственной функции непрерывного спектра оператора A, соответствующей собственной функции $f_0(x, x_0)$ оператора A_0. Именно эти функции часто не принимают во внимание, в то время как они составляют основную часть собственных функций оператора A.

Возвращаясь от f к u, мы видим, что формулы

$$u(x,x_0) = -T(x,x_0;v(x_0)+i0), \quad \lambda = -ikv(x_0)$$

дают явное выражение для собственных функций и соответствующих собственных значений в постановке (3) спектральной задачи. Это согласуется с цитированным выше утверждением Кейса, так как уравнение (6) для ядра $T(x,y;\mu)$ можно интерпретировать как интегральные уравнения для функции Грина $R(x,y;\mu)$.

Более точно, оператор $M(\mu)$ является вполне непрерывным в банаховом пространстве B_α, которое получается при замыкании множества гладких функций в гельдеровской норме с показателем α, $0<\alpha<1$, аналитически зависящим от μ, меняющегося на комплексной плоскости S_J с купюрой по интервалу J. Предельные значения при $\mu \to \omega \pm i0$, $\omega \in J$ для оператора $M(\mu)$ существуют при всех ω, для которых $v'(x) \neq 0$, где $v(x)=\omega$. В окрестности критических ω оператор $M(\mu)$ имеет особенность типа $(\mu-\omega)^{-1/2}$, причем $\lim\limits_{\mu\to\omega}(\omega-\mu)^{1/2} M(\mu)$ конечномерен. При больших μ оператор $M(\mu)$ мал.

Общие теоремы об аналитических вполне непрерывных операторах позволяют утверждать, что множество особых точек μ дискретно и может иметь точки накопления только на J. Нетрудно убедиться, что особые точки вне J являются собственными значениями оператора A. Этим и заканчивается доказательство сформулированного выше утверждения о структуре спектра оператора A.

3. Исследование дискретного спектра.

Дальнейшее исследование уравнения (7) в ряде случаев дает значительно более детальную характеристику дискретного спектра. При больших k^2 оператор $M(\mu)$ мал, и уравнение (7) не имеет нетривиальных решений. Будем следить за появлением таких решений при уменьшении k^2. Вследствие аналитичности $M(\mu)$ особые точки могут впервые появиться только на купюре J. Поэтому нам следует в первую очередь рассмотреть существование нетривиальных решений при $\mu=\omega\pm i0$, $\omega\in J$.

Пусть $\mu=\omega+i0$ - особая точка и $\varphi(x)$ - соответствующее решение уравнения (7) из B_α. Умножим уравнение (7) на $v''(x)\overline{\varphi(x)}(v(x)-\omega+i0)^{-1}$ и проинтегрируем результат по x. Вследствие самосопряженности $G(x,y;k^2)$ мы получим справа вещественное число. Таким образом мы получаем соотношение

$$\operatorname{Im}\int_0^1 |\varphi(x)|^2 \frac{v''(x)}{v(x)-\omega+i0}\,dx=0$$

или

$$\sum_i |\varphi(x_i)|^2 \cdot \frac{v''(x_i)}{|v'(x_i)|}=0, \tag{8}$$

где сумма берется по всем решениям уравнения $v(x)=\omega$. Если $v''(x)$ не меняет знак, то из последнего равенства следует, что

$\varphi(x_i)=0$, так что функция $\varphi(x)(v(x)-\omega-i0)^{-1}$ имеет только слабые особенности. Из уравнения (7) следует, что такая $\varphi(x)$ на самом деле гладкая, и, дифференцируя это уравнение, мы получаем, что $\varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Орра-Зоммерфельда

$$L\varphi(x) \equiv -\varphi''(x)+k^2\varphi(x)+\frac{v''(x)}{v(x)-\omega}\varphi(x)=0. \tag{9}$$

Покажем, что $\varphi\equiv 0$. Действительно, для нашего φ, которое можно считать вещественным, квадратичная форма оператора L может быть записана в виде

$$(L\varphi,\varphi)=\int_0^1\left[\left(\varphi'-\frac{v'}{v-\omega}\varphi\right)^2+k^2\varphi^2\right]dx=0.$$

При выводе мы используем интегрирование по частям

$$\int_0^1\frac{v''}{v-\omega}\varphi^2dx=\int_0^1\left[\frac{v'^2}{(v-\omega)^2}\varphi^2-2\frac{v'}{v-\omega}\varphi\varphi'\right]dx,$$

которое имеет смысл для произвольных гладких функций $\varphi(x)$, исчезающих при $v(x)=\omega$. Мы видим, что квадратичная форма $(L\varphi,\varphi)$ положительна на таких φ, а, следовательно, наше решение тождественно исчезает.

Таким образом, мы получили уточнение теоремы Релея: если профиль не имеет точек перегиба, то спектр абсолютно непрерывен.

Случай, когда $v''(x)$ меняет знак, сравнительно нетрудно полностью разобрать, если а) функция $v(x)$ монотонна; б) функция $v''(x)$ имеет только один нуль, скажем в точке $x=a$. Эти два условия явно или неявно считаются выполненными в большинстве исследований (ср. [I]). Мы приведем исследование этого случая, уточняя и дополняя рассуждения и результаты Толмиена, изложенные в [I].

В рассматриваемом случае соотношение (8) содержит одно слагаемое

$$|\varphi(x_1)|^2\cdot v''(x_1)=0\,; \quad v(x_1)=\omega$$

Если $x_1\neq a$, то $\varphi(x_1)=0$, и приведенные выше рассуждения приводят к тому, что $\varphi(x)\equiv 0$. Пусть теперь $x_1=a$. Функция

$$q(x)=\frac{v''(x)}{v(x)-v(a)}$$

при наших предположениях является гладкой и не меняет знак. Уравнение Орра-Зоммерфельда (9) может иметь нетривиальное решение только если оператор Штурма-Лиувилля

$$l\varphi=-\varphi''+q(x)\varphi$$

имеет отрицательный дискретный спектр. Для этого необходимо, чтобы $q(x)$ была отрицательна и достаточно велика. Заметим, что отрицательный спектр оператора ℓ может содержать не более одного собственного значения. Действительно, как мы уже убедились выше, квадратичная форма оператора ℓ на функциях, исчезающих в точке $x=a$, имеет вид

$$(\ell\varphi,\varphi)=\int_0^1\left(\varphi'-\frac{v'}{v-\omega}\varphi\right)^2 dx\,,\qquad \omega=v(a)$$

и, таким образом, неотрицательна. Сужение оператора ℓ на множество функций, исчезающих в $x=a$, дает симметричный оператор с индексом дефекта (I.I). Наше утверждение следует теперь из общей теоремы М.Г.Крейна о самосопряженных расширениях неотрицательных симметрических операторов с конечными индексами дефекта (см., например, [5], стр. I43).

Будем теперь считать, что оператор ℓ имеет отрицательное собственное значение и обозначим его через $-\varkappa^2$, а соответствующую нормированную собственную функцию через $\chi(x)$. При изменении k^2 от ∞ до $\varkappa^2$ оператор $M(\mu)$ не имеет ни одной особой точки. При $k^2=\varkappa^2$ такая особая точка возникает при $\mu=v(a)\pm i0$. При дальнейшем уменьшении k^2 особых точек, лежащих на $\mathcal{J}$, быть не может. Это означает, что при уменьшении k^2, начиная от $\varkappa^2$, особые точки "срываются" с $\mathcal{J}$ в комплексную плоскость. Покажем это более точно. Достаточно посчитать

$$\operatorname{Im}\frac{d\mu^\pm}{dk^2}\bigg|_{k^2=\varkappa^2}=b^\pm$$

и показать, что они имеют нужный знак. Это нетрудно сделать, используя общие формулы теории возмущений. Проще при этом посчитать $dk_\pm^2/d\mu\,\big|_{\mu=v(a)\pm i0}$. Участвующие здесь функции $\mu^\pm(k^2)$ и $k_\pm^2(\mu)$ такие, что

$$\mu^\pm(\varkappa^2)=v(a)\pm i0,\quad k_\pm^2(v(a)\pm i0)=\varkappa^2,$$

можно считать определенными при помощи уравнения

$$\Delta(\mu,k^2)=0, \tag{I0}$$

заданного на $S_{\mathcal{J}}\times K$, где K – комплексная плоскость переменной k^2. Функция $\Delta(\mu,k^2)$ является подходящим "определителем" оператора Орра-Зоммерфельда

$$\ell\varphi=-\varphi''+\frac{v''}{v-\mu}\varphi.$$

Например, при нулевых граничных условиях

$$\Delta(\mu,k^2)=\varphi(1,\mu,k^2),$$

где $\varphi(x,\mu,k^2)$ – решение уравнения $\ell\varphi=-k^2\varphi$, удовлетворяющее условиям

$$\varphi(0,\mu,k^2)=0\ ; \quad \varphi'(0,\mu,k^2)=1.$$

Это решение является целой функцией k^2 и аналитически зависит от μ на S_J. Точки $\mu=v(a)\pm i0$, $k^2=\varkappa^2$ являются решениями уравнения (10), и теорема о неявной функции определяет наши функции $\mu^{\pm}(k^2)$ и $k^2_{\pm}(\mu)$. При этом $k^2_{\pm}(\mu)$ является собственным значением оператора ℓ, $\operatorname{Im}\mu \gtrless 0$, так что

$$\frac{dk^2_{\pm}}{d\mu}\bigg|_{\mu=v(a)\pm i0}=\int_0^1 \chi^2\frac{v''}{(v-\mu)^2}\,dx\bigg|_{\mu=v(a)\pm i0}=\int_0^1 q(x)\chi^2(x)\frac{1}{v(x)-v(a)\mp i0}\,dx$$

Отсюда

$$\operatorname{Im}\frac{dk^2_{\pm}}{d\mu}\bigg|_{\mu=v(a)\pm i0}=\pm\pi\,\frac{\chi^2(a)q(a)}{|v'(a)|}.$$

Замечая, что

$$\operatorname{sygn}\operatorname{Im}\frac{dk^2_{\pm}}{d\mu}=-\operatorname{sygn}\frac{d\mu^{\pm}}{dk^2}\bigg|_{k^2=\varkappa^2}$$

и вспоминая, что $q(a)<0$, получаем нужное утверждение:

$$b^+>0\ ; \quad b^-<0.$$

Таким образом, в рассмотренном случае спектр оператора A выглядит следующим образом: при $k^2>\varkappa^2$ спектр однократный, абсолютно непрерывный и заполняющий интервал J; при $k^2<\varkappa^2$, кроме такого же непрерывного спектра, оператор A имеет одну пару комплексно сопряженных простых собственных значений.

Посмотрим в заключение, что можно сказать о дискретном спектре при ослаблении ограничений на профиль. Случай, когда профиль имеет несколько точек перегиба $x=a_1,\dots,a_m$ можно рассмотреть аналогичным образом. При этом дискретный спектр, так же как и выше, может зарождаться только в точках перегиба, точнее, при $\omega=\omega_i$, где $i=1,\dots,m$. В зависимости от знака функции

$$q_i(x)=v''(x)/(v(x)-v(a_i))$$

при $x=a_i$ точка перегиба будет "отталкивающей" $(q(a_i)<0)$ или "притягивающей" $(q(a_i)>0)$. При уменьшении k^2, начиная с ∞, комплексные собственные значения будут срываться с отталкивающих точек и поглощаться притягивающими. При любых k^2 полная кратность дискретного спектра не может превышать $\frac{m}{2}+1$.

Значительно более серьезным ограничением является монотонность $v(x)$. Для немонотонных профилей спектр оператора A_0 приобретает кратность, а условие (8) содержит несколько слагаемых, Мне не удалось получить сколь-нибудь детальные результаты в этом случае. Ясно только, что "срыв" собственных значений будет происходить уже не в точках перегиба профиля.

ЛИТЕРАТУРА

I Линь-Цзя-цзяо, "Теория гидродинамической устойчивости",ИИЛ, Москва, I958.

2 Кэйс , "Гидродинамическая устойчивость как задача с начальными данными", в сборнике "Гидродинамическая устойчивость", "Мир", Москва, I964, стр. 37-46.

3 K.O.Friedrichs, "On the perturbations of continuous spectra" Comm. Pure Appl.Math. I, 36I-406,I948.

4 Л.Д.Фаддеев, "О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра",Труды МИАН, 73, стр. 292-3I3, I964.

5 М.А.Наймарк, "Линейные дифференциальные операторы", ГИТТЛ, Москва, I954.