Л. Д. Фаддеев, Коциклы группы токов и квантовая теория полей Янга–Миллса, *УМН*, 1985, том 40, выпуск 4(244), 117–120

1985 г. июль — август *т. 40, вып. 4(244)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

КОЦИКЛЫ ГРУППЫ ТОКОВ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ ЯНГА — МИЛЛСА

Л. Д. Фаддеев (Ленинград, СССР)

Последнее время топологические соображения и конструкции активно проникают в квантовую теорию поля. Характерными примерами являются топологические заряды солитонов и инстантонов (см., например, обзор [1]) и понятие неоднозначного действия магнитного монополя или киральных полей (см. [2]). В настоящей работе будет приведен еще один пример величины, имеющей топологическое происхождение и интересной для квантовой теории поля. Именно, будет построен 2-коцикл группы токов и предложено его приложение для корректного квантования системы безмассовых киральных фермионов, взаимодействующих с полем Янга — Миллса.

Пусть заданы гладкое компактное многообразие M и компактная группа Ли G. Группой токов называют группу C функций $g(x)$ на M со значениями в G. Иногда используют обозначения $C = G^M$, или $C = \prod_{x \in M} G$. Алгебра Ли группы C составлена из функций $\alpha(x)$ на M со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ группы G.

В физике группа токов используется двояко.

1. Набор функций $g(x)$ рассматривается как поле — так называемое главное киральное поле.

2. C действует как группа преобразований на множестве связностей, т. е. на полях Янга — Миллса. Именно в этом смысле она будет обсуждаться ниже.

Рассмотрим тривиальное расслоение $M \times G \to M$ и будем задавать связности как 1-формы $A(x)$ на M со значениями в $\mathfrak{G}$. Группа C действует в множестве $\mathfrak{A}$ всех связностей по формуле

$$(1) \qquad A \to A^g = gAg^{-1} + dgg^{-1},$$

где форма Маурера — Картана dgg^{-1} есть 1-форма на M со значениями в $\mathfrak{G}$. Будем считать, что M допускает спиновую структуру, и рассмотрим комплекснозначные спинорные функции $\psi(x)$, $\psi^*(x)$ на M со значениями в пространстве линейного унитарного представления Γ группы G. Группа C действует в множестве таких функций естественным образом:

$$(2) \qquad \psi \to \Gamma(g)\psi, \quad \psi^* \to \psi^*\Gamma^*(g).$$

С физической точки зрения ψ и A задают поле материи, обладающее зарядами, порожденными группой G, и поле Янга — Миллса, переносящее взаимодействие этих зарядов [3]. Можно различить два действия группы C, имеющие непосредственный физический смысл:

1. Кинематическое действие; $\dim M = 4$. Поля ψ, ψ^* и A заданы на всем пространстве-времени и служат объектами вариационного принципа или континуального интеграла.

2. Гамильтоново действие; $\dim M = 3$. Именно этот случай рассматривается в дальнейшем. Поля A и ψ, ψ^* играют роль начальных условий для уравнений движения. Соответствующее фазовое пространство содержит еще поле Π, канонически сопряженное «координате» A. Это поле представляет собой 2-форму, принимающую значение в $\mathfrak{G}$; группа C действует на Π однородно:

$$\Pi \to g\Pi g^{-1}. \tag{3}$$

Инфинитезимально действие (1), (2) и (3) производится набором величин

$$G(\alpha) = \int\limits_M (\operatorname{tr} \alpha D\Pi + \psi^* \Gamma(\alpha)\psi\, d\mu), \tag{4}$$

где α — элемент алгебры Ли группы C, tr означает форму Киллинга, D — ковариантный дифференциал и $d\mu$ — 3-форма объема, согласованная со спиновой структурой. Имеют место «коммутационные» соотношения

$$\{G(\alpha),\ G(\beta)\} = G([\alpha,\ \beta]). \tag{5}$$

Они немедленно следуют из фундаментальных скобок Пуассона

$$\{\psi_A^a(x),\ \psi_B^{*b}(y)\} = i\delta^{ab}\delta_{AB}\delta(x-y), \tag{6}$$

$$\{A_i^a(x),\ \Pi_{jk}^b(y)\} = \delta^{ab}\varepsilon_{ijk}\delta(x-y), \tag{7}$$

которые мы записали, введя явно все индексы: A, B — спинорные, i, j, k — координатные и a, b — групповые. Антисимметричный тензор ε_{ijk} согласован со спиновой структурой. Невыписанные скобки Пуассона тривиальны.

При квантовании величины ψ, ψ^*, A, Π становятся операторами, реализующими коммутационные соотношения, которые получаются из (6), (7) формальной заменой скобок Пуассона на коммутаторы для полей Янга — Миллса и антикоммутаторы для спиноров. При этом в величинах типа (4) следует «упорядочить» операторные множители.

Опыт, накопленный на многочисленных примерах, показывает, что соотношения типа (5) при этом иногда модифицируются; в правой части может появиться инфинитезимальный 2-коцикл $\theta(\alpha, \beta)$, который может иметь скалярные или операторные значения. Другими словами, в квантовой теории может реализоваться расширение алгебры Ли, которая гамильтоновым образом действовала в соответствующей классической теории.

Основной результат доклада можно сформулировать следующим образом: алгебра Ли группы токов на сфере S^3 имеет 2-коцикл со значениями в коммутативной группе функционалов от A:

$$\theta(A;\ \alpha,\ \beta) = \int \operatorname{tr} A(d\alpha\, d\beta + d\beta\, d\alpha), \tag{8}$$

где для определенности 1-формы A, $d\alpha$, $d\beta$ берутся в присоединенном представлении.

Таким образом, имеется потенциальная возможность, что в квантовой теории коммутационные соотношения для величин $G(\alpha)$ при их надлежащем операторном упорядочении будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\hbar}{i}[G(\alpha),\ G(\beta)] = G([\alpha,\ \beta]) + \theta(A;\ \alpha,\ \beta), \tag{9}$$

или, при явном введении индексов,

$$\frac{\hbar}{i}[G^a(x),\ G^b(y)] = f^{abc}G^c(x)\,\delta(x-y) + d^{abc}\varepsilon_{ijk}\partial_i A_j^c \partial_k \delta(x-y), \tag{10}$$

где f^{abc} — структурные постоянные группы G и $d^{abc} = \operatorname{tr} t^a(t^b t^c + t^c t^b)$, t^a — генераторы алгебры $\mathfrak{G}$.

Поиски такого упорядочения ведутся в настоящее время. Если оно будет найдено, то возникнет новый подход к квантованию теории киральных фермионов, взаимодействующих с полем Янга — Миллса, которая по настоящее время считается несамосогласованной вследствие так называемых «аномалий» [4].

Процедура построения коцикла θ и его группового аналога, основанная на процедуре спуска, описана в моей работе [5] и не будет здесь обсуждаться (см. также [6]). Более общий подход и обсуждение топологических препятствий к построению групповых коциклов содержится в работе [7]. Математическим источником этих работ являются работы С. Черна [8], Р. Ботта [9] и И. М. Гельфанда с сотрудниками [10], посвященные разностным комплексам и вторичным характеристическим классам. Непосредственным стимулом для моей работы послужили работы Б. Зумино [11] и Р. Стора [12], посвященные дифференциально-геометрическому подходу к проблеме аномалий.

В заключение опишем гипотетическую картину, которая должна быть реализована при корректном квантовании формулы (4) и соотношений (9). Напомним, что при построении реализации (анти)перестановочных соотношений, соответствующих скобкам Пуассона (6) в пространстве Фока, основную роль играет разложение гильбертова пространства H функций ψ, ψ^* (одночастичного пространства) в прямую сумму $H = H_+ \oplus H_-$, соответствующую выбору частиц и античастиц. Для свободных фермионов это разложение соответствует собственным подпространствам оператора Дирака с положительными и отрицательными собственными значениями. В присутствии поля Янга — Миллса это разложение естественно делать аналогичным образом по отношению к оператору Дирака, включающему это поле. Пространство Фока при этом станет явно зависеть от A. В результате возникнет расслоенное пространство P, базой которого является множество $\mathfrak{A}$ всех полей Янга — Миллса, а слоем — пространство Фока Φ для фермионов. Сечения этого расслоения играют роль волновых функций расширенной квантовой теории и образуют пространство состояний K. Операторы $G(\alpha)$ задают в P связность, определенную только вдоль орбит действия группы C на поля A. Коцикл θ определяет кривизну этой связности. Унитарное представление расширенной группы C, определяемое операторами $G(\alpha)$, действует в K очень приводимо. Если надеяться, что, подобно группе Гейзенберга, эта группа имеет лишь одно неприводимое представление V, то K представляется в виде

$$K = V \otimes K_0.$$

Пространство K_0 в этом случае будет играть роль физического пространства состояний.

Программа реализации этой картины представляется реальной, но требует времени.

В период после того, как настоящий доклад был сделан, появилось много публикаций по затронутой в нем теме. Препринты Б. Зумино [13] и Р. Джакива [14], [15] содержат более подробное, чем в работе автора [5], изложение элементарной когомологической теории коциклов и их интерпретации. Работы Сонга [16] и Го и др. [17] близки работе [7], содержат аналогичную процедуру построения вторичных классов Черна и устанавливают их связь с групповыми коциклами. В препринте М. Кобаяши и А. Сугамото [18] скептически оценивается возможность реализации описанной выше физической программы. Однако исходным пунктом этой работы является диаграммная техника, которая основана на обычном квантовании без коцикла. Наконец, совсем недавний препринт Г. Сигала [19] содержит топологическую реализацию нашей программы. В нем имее ся также ссылка на неопубликованную работу И. Зингера и И. Френкеля, в которой дается другой подход к этой задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Coleman S. Clasical lumps and their quantum descendents.— In: New phenomena in subnuclear physics/ed. Zichichi.— New York: Plenum Press, 1977.

[2] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса.— УМН, 1982, т. 37, вып. 5, с. 3—49.

[3] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.

[4] Трейман С., Джакив Р., Гросс Д. Лекции по алгебре токов.— М.: Атомиздат, 1977.

[5] Faddeev L. D. Operator anomaly for the Gauss law.— Phys. Lett., 1984, v. 145B, № 1, 2, p. 81—84.

[6] Фаддеев Л. Д., Шаташвили С. Л. Алгебраические и гамильтоновы методы в теории неабелевых аномалий.— ТМФ, 1984, т. 60, № 2, с. 206—217.

[7] Рейман А. Г., Семёнов-Тян-Шанский М. А., Фаддеев Л. Д. Квантовые аномалии и коциклы на калибровочных группах.— Функцион. анализ и его прил., 1984, т. 18, № 4, с. 64—72.

[8] Chern S. S. Complex manifolds without potential theory, Appendix.— New York: Springer, 1979.

[9] Bott R. Lectures on characteristic classes and foliations.— Lect. Notes in Math., 1972, v. 279, p. 1—74.

[10] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В. Комбинаторные вычисления характеристических классов I, II.— Функцион. анализ и его прил., 1975, т. 9, № 2, с. 12—28; т. 9, № 3, с. 5—26.

[11] Zumino B. Chiral anomalies and differential geometry.— In: Relativity, groups and topology II.— Les Houches, 1983, p. 1293; ed. B.S. de Witt and R. Stora, North Holland, 1984.

[12] Stora R. Algebraic structure and topological origin of anomalies.— Preprint LAAP-TH-94, Annecy, 1983 (Seminar given at the Cargese Institute of Theoretical Physics, 1983).

[13] Zumino B. Cohomology of gauge groups: cocycles and Schwinger terms.— Preprint NSF-ITP-84-150, Santa Barbara, 1984.

[14] Jackiw R. Chern — Simons terms and cocycles in physics and mathematics.— Preprint CTP-1230, Boston, MIT, 1984.

[15] Jackiw R. Chern — Simons terms and their descendents in physical theory.— In: Topology in fields theory.— Preprint CTP-1231, Boston, MIT, 1984, p. 3—12.

[16] Song X. C. High order Cartan's homotopy formulae and the algebraic approach to anomalies.— Preprint BNL 35450, Brookhaven, 1985.

[17] Guo H. Y., Hou B. Y., Wang S. K., Wu K. Anomaly, cohomology and Chern — Simons cochain.— Preprint AS-ITP-84-039, Beijing, 1984.

[18] Kobayashi M., Sugamoto A. Does Faddeev's anomaly exist in Gauss law constraints.— Preprint KEK-TH 103, Ibaraki, 1985.

[19] Segal G. Faddeev's anomaly in Gauss's law.— Oxford preprint, 1985.