ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 92, N°2
август, 1992

А. Ю. Волков, Л. Д. Фаддеев

КВАНТОВЫЙ МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НА ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Развит формализм квантового метода обратной задачи на решетке в пространстве-времени, имитирующей координаты светового конуса. Представление нулевой кривизны позволяет естественно ввести операторы сдвига вдоль координатных осей. Метод иллюстрируется на примере системы sine-Gordon.

ВВЕДЕНИЕ

Квантовый метод обратной задачи (КМОЗ), введенный в [1, 2], давал квантование гамильтонова подхода к теории солитонов [3]. Для регуляризации пространственная переменная x заменялась на дискретную переменную n, $x = n\Delta$, где Δ – постоянная решетки. В непрерывном пределе $\Delta \to 0$ физические величины (например, масса в модели sine-Gordon) возникали как комбинации Δ^{-1} и других примеров, реализуя идею размерной трансмутации. Время t играло лишь вспомогательную роль как параметр динамики, сопряженной с гамильтонианом. В свою очередь, программа построения локального гамильтониана представляла сложную задачу [4] и была решена лишь в принципе. Впрочем, для построения алгебраического бете-анзаца информация, полученная в [4], была достаточной.

Использование дискретной пространственной переменной и непрерывной временной переменной может вызывать неудовлетворение. Более естественным представляется использование дискретной параметризации и для времени t. Это значит, что вместо инфинитезимального гамильтониана H рассматривается сдвиг $U = \exp\{-iH\Delta\}$ на фиксированный момент времени Δ (естественно, что скорость света c используется для уравнения размерностей x и t). На первый взгляд оператор U представляется более сложным, чем H. Однако, как мы покажем в этой работе, это не так.

Дискретное пространство-время в классической теории солитонов рассматривалось многими авторами, см., например, [5–7]. В [7] содержится и ряд замечаний о квантовании.

Однако первое реальное приложение квантового метода обратной задачи к дискретному пространству-времени было дано в [8], где операторы сдвига вдоль направлений светового конуса $U_+ = \exp\{-i(H + P)\Delta\}$ и $U_- = \exp\{-i(P - H)\Delta\}$ были выражены через монодромию специальной неоднородной цепочки. Частный пример фермионной системы, проясняющий подход [8], был дан в [9].

В данной работе мы продолжаем общий подход [8]. Основной результат состоит в формулировке представления нулевой кривизны, из которого интерпретация сдвигов $U_{\pm}$, введенная в [8] несколько априорно, следует естественным образом. В свою очередь, представление нулевой кривизны дает явный вид квантовых уравнений движения.

В разделе 1 мы напоминаем необходимые сведения из метода обратной задачи. В разделе 2 дается представление нулевой кривизны. Иллюстрация метода на примере модели sine-Gordon дана в разделе 3.

Работа выполнена в рамках сотрудничества лаборатории методов теоретической физики С.-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова и Института теоретической физики Хельсинского университета. Мы выражаем Академии наук Финляндии благодарность за поддержку.

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КМОЗ

Основным объектом КМОЗ является локальный оператор перехода $L_n(\lambda)$, $n = 1, \ldots, N$, он же L-оператор или квантовый вариант оператора Лакса. Оператор $L_n(\lambda)$ представляет собой матрицу во вспомогательном пространстве $\mathcal{V}$; его матричные элементы $l_{i,j}(\lambda)$ являются операторами в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, ассоциированном с точкой решетки n, и зависят от комплексного параметра λ. Другими словами, $L_n(\lambda)$ есть оператор в $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{V}$, зависящий от λ. В силу однородности все пространства $\mathcal{H}_n$, $n = 1, \ldots, N$, изоморфны, $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}$.

Основное свойство оператора $L_n(\lambda)$ состоит в фундаментальном коммутационном соотношении

$$
\begin{aligned}
R(\lambda-\mu)L_n^1(\lambda)L_n^2(\mu) &= L_n^2(\mu)L_n^1(\lambda)R(\lambda-\mu); \\
L_n^1(\lambda)L_m^2(\mu) &= L_m^2(\lambda)L_n^1(\mu), \qquad m \neq n.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь все объекты понимаются как матрицы в пространстве $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$, при этом

$$
L_n^1(\lambda) = L_n(\lambda) \otimes I; \qquad L_n^2(\mu) = I \otimes L_n(\mu)
$$

и $R(\lambda-\mu)$ – квантовая R-матрица – представляет собой числовую матрицу в $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$, зависящую от $\lambda-\mu$. Конкретные примеры можно найти в многочисленных работах по КМОЗ, см., например, [10]. Модель sine-Gordon будет объяснена в разделе 3.

Оператор $L_n(\lambda)$ участвует в построении алгебраического анзаца Бете [1, 2]. Для этого вводится матрица монодромии

$$
T(\lambda) = L_N(\lambda)\cdots L_1(\lambda) \ .
$$

В частности, след матрицы монодромии по $\mathcal{V}$

$$
t(\lambda) = \mathrm{tr}_{\mathcal{V}}\, T(\lambda)
$$

задает производящую функцию для коммутирующих интегралов движения.

Как показано в [4], наряду с $L(\lambda)$ при построении локальных интегралов необходимо рассматривать фундаментальный L-оператор, который представляет собой оператор в $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}$, т.е. вспомогательное пространство для него совпадает с квантовым пространством $\mathcal{H}$. Удобно поэтому снабдить его вторым индексом, указывающим на это: $L_{n,f}(\lambda)$ (f от fundamental – фундаментальный) является оператором в $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_f$. Соответственно исходный оператор Лакса можно переобозначить как $L_{n,a}(\lambda)$ (a от auxillary – вспомогательный), и его матрица монодромии

$$T_a(\lambda) = L_{N,a}(\lambda) \cdots L_{1,a}(\lambda)$$

является оператором в $\mathcal{H}^N \otimes \mathcal{V}$, где

$$\mathcal{H}^N = \prod_n \otimes \mathcal{H}_n$$

есть гильбертово пространство цепочки.

Формула (1) в этих обозначениях переписывается следующим образом:

$$R_{a_1,a_2}(\lambda-\mu)L_{n,a_1}(\lambda)L_{n,a_2}(\mu) = L_{n,a_2}(\mu)L_{n,a_1}(\lambda)R_{a_1,a_2}(\lambda-\mu).$$

Фундаментальный L-оператор можно понимать как R-матрицу в аналогичной формуле, если мы поменяли роли квантового и вспомогательного пространств для оператора $L_{n,a}(\lambda)$. Имеет место соотношение

$$L_{n_1,n_2}(\lambda-\mu)L_{n_1,a}(\lambda)L_{n_2,a}(\mu) = L_{n_2,a}(\mu)L_{n_1,a}(\lambda)L_{n_1,n_2}(\lambda-\mu).$$

Как показано в [4], отсюда следует, что матрица монодромии

$$T_f(\lambda) = L_{N,f}(\lambda) \ldots L_{1,f}(\lambda)$$

также может использоваться для построения коммутирующих интегралов движения, т.к.

$$[\mathrm{tr}_a\, T_a(\lambda), \mathrm{tr}_f\, T_f(\lambda)] = 0$$

для любых λ и μ.

Как показано в [4], $L_{n,f}(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1) $$L_{n,f}(-\lambda) = \left(L_{n,f}(\lambda)\right)^{-1},$$

2) $$L_{n,f}(0) = P_{n,f},$$

где $P_{n,f}$ – оператор перестановки в $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_f$.

Эти свойства гарантируют локальность и самосопряженность интегралов движения, получающихся при разложении $\ln t_f(\lambda)$, где

$$t_f(\lambda) = \mathrm{tr}_f\, T_f(\lambda),$$

в окрестности $\lambda = 0$. В частности,

$$V = t_f(0)$$

играет роль сдвига по цепочке

$$V L_{n,a}(\lambda) = L_{n+1,a}(\lambda) V.$$

2. НУЛЕВАЯ КРИВИЗНА В НЕОДНОРОДНОЙ ЦЕПОЧКЕ

Основная идея в [8] (которая, в свою очередь, была стимулирована двуполюсным оператором Захарова – Михайлова [11]) состоит в рассмотрении матрицы монодромии неоднородной цепочки четной длины $2N$

$$\begin{aligned} T_a(\lambda,\omega) =& L_{2N,a}(\lambda+\omega)L_{2N-1,a}(\lambda-\omega)\cdots \\ & \cdots L_{2n,a}(\lambda+\omega)L_{2n-1,a}(\lambda-\omega)\cdots L_{2,a}(\lambda+\omega)L_{1,a}(\lambda-\omega)\ . \end{aligned}$$

При физической интерпретации два узла соответствуют одной ячейке, так что физический лаксов оператор имеет вид

$$\tilde{L}_n(\lambda) = L_{2n}(\lambda+\omega)L_{2n-1}(\lambda-\omega)\ .$$

Локальные фундаментальные коммутационные соотношения не меняются при сдвиге спектрального параметра, так что все свойства монодромии и ее следа из раздела 1 остаются в силе. В частности,

$$[t_a(\lambda,\omega), t_f(\lambda,\omega)] = 0,$$

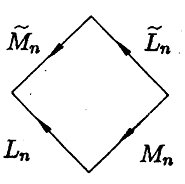
где

$$t_f(\lambda,\omega) = \mathrm{tr}_f\left(L_{2N,f}(\lambda+\omega)L_{2N-1,f}(\lambda-\omega)\cdots L_{2,f}(\lambda+\omega)L_{1,f}(\lambda-\omega)\right).$$

Однако теперь $t_f(\lambda,\omega)$ имеет две выделенные точки: $\lambda=\omega$ и $\lambda=-\omega$. Мы собираемся показать, что операторы

$$U_\pm = t_f(\lambda,\omega)|_{\lambda=\pm\omega}$$

играют роль операторов сдвига вдоль направлений светового конуса. Для этого мы введем обозначения, совместные с такой интерпретацией:



$$\begin{aligned} M_n(\lambda) =& L_{2n-1}(\lambda-\omega), \\ L_n(\lambda) =& L_{2n}(\lambda+\omega), \\ \tilde{M}_n(\lambda) =& U_-M_n(\lambda)U_-^{-1}, \\ \tilde{L}_n(\lambda) =& U_+^{-1}L_n(\lambda)U_+ \end{aligned}$$

(см. рис.), и покажем, что выполняются условия нулевой кривизны:

(2) $$L_n(\lambda)M_n(\lambda) = \tilde{M}_n(\lambda)\tilde{L}_n(\lambda)$$

для элементарного квадрата пространственно-временной решетки. Для доказательства рассмотрим монодромию с примесью:

(3) $$t_f(\xi;n,a,\lambda) = \mathrm{tr}_f\left(\cdots L_{2n,f}(\xi+\omega)L^{-1}_{f,a}(\lambda-\xi)L_{2n-1,f}(\xi-\omega)\right).$$

Здесь n означает узел, куда помещена примесь $L_{f,a}$, и a – соответствующее вспомогательное пространство. В силу соотношений из раздела 1 мы имеем

(4) $$[t_f(\xi;n,a,\lambda), t_f(\eta;n,a,\lambda)] = 0.$$

Теперь рассмотрим $t_f(\xi; n, a, \lambda)$ в выделенных точках $\xi = \pm\omega$. При $\xi = \omega$ оператор $L_{2n-1,f}$ справа от $L_{f,a}^{-1}$ в (3) становится перестановкой, так что

$$L_{f,a}^{-1}(\lambda-\omega)P_{2n-1,f} = P_{2n-1,f}L_{2n-1,a}^{-1}(\lambda-\omega)$$

и оператор $L_{2n-1,a}^{-1}(\lambda-\omega)$ коммутирует со всеми множителями, стоящими справа от него. Таким образом, мы имеем

$$t_f(\omega; n, a, \lambda) = U_+ L_{2n-1,a}^{-1}(\lambda-\omega).$$

Аналогично

$$t_f(-\omega; , n, a, \lambda) = L_{2n,a}^{-1}(\lambda+\omega)U_- \ .$$

Полагая в (4) $\xi = \omega$ и $\eta = -\omega$, получаем

$$U_+ L_{2n-1,a}^{-1}(\lambda-\omega)L_{2n,a}^{-1}(\lambda+\omega)U_- = L_{2n,a}^{-1}(\lambda+\omega)U_- U_+ L_{2n-1,a}^{-1}(\lambda-\omega),$$

что эквивалентно (2), если учесть, что U_+ и U_- коммутируют.

Мы должны отметить, что рассмотрение монодромии с примесью для вывода уравнений нулевой кривизны впервые использовалось в [12]. Вариант, предложенный в нашей работе, оказался удачно связанным с интерпретацией в координатах светового конуса.

Для U_+ и U_- мы имеем явные выражения

$$U_+ = V\prod_n f_{2n,2n-1}; \quad U_- = \prod f_{2n-1,2n}^{-1}V, \tag{5}$$

где $V = \mathrm{tr}_f\big(P_{2N,f}, P_{2N-1,f}, \ldots, P_{1,f}\big)$ - оператор сдвига на неоднородной цепочке,

$$f_{n_1,n_2} = P_{n_1,n_2}L_{n_1,n_2}(2\omega),$$

что дает достаточный контроль над этими динамическими величинами.

3. МОДЕЛЬ SINE-GORDON

В качестве оператора $L_n(\lambda)$ мы возьмем 2×2-матрицу

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} u_n & -e^{\lambda}v_n^{-1} \\ e^{\lambda}v_n & u_n^{-1}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

где динамические переменные u_n и v_n образуют пару Вейля

$$u_n v_n = e^{-i\gamma}v_n u_n,$$

γ играет роль константы связи. Этот оператор появился как "ультрафиолетовый" предел L-оператора Изергина - Корепина [13] и играет важную роль в теории моделей Лиувилля и Вольтерра, см. [14–16]. В [17] обсуждается его роль в формулировке модели Поттса.

"Физический оператор"

$$\begin{aligned}\tilde{L}_n(\lambda) =& L_{2n}(\lambda+\omega)L_{2n-1}(\lambda-\omega) = \\ =& \begin{pmatrix} u_{2n}u_{2n-1} - e^{2\lambda}v_{2n}^{-1}v_{2n-1} & -e^{\lambda}[e^{-\omega}u_{2n}v_{2n-1}^{-1} + e^{\omega}v_{2n}^{-1}u_{2n-1}^{-1}] \\ e^{\lambda}[e^{\omega}v_{2n}u_{2n-1} + e^{-\omega}u_{2n}^{-1}v_{2n-1}] & u_{2n}^{-1}u_{2n-1}^{-1} - e^{2\lambda}v_{2n}v_{2n-1}^{-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

превращается в оператор модели sine-Gordon

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\Pi_n} + m^2 e^{i(\Pi_n - 2\Phi_n)} & m\left(e^{-\lambda-\Phi_n} - e^{\lambda+\Phi_n}\right) \\ m\left(e^{\lambda-\Phi_n} - e^{-\lambda+\Phi_n}\right) & e^{-i\Pi_n} + m^2 e^{i(-\Pi_n + 2\Phi_n)} \end{pmatrix}$$

(сходный, но несколько отличный от оператора Изергина – Корепина) после отождествления

$$\Pi_n = \varphi_{2n} - \pi_{2n-1}; \quad \Phi_n = \varphi_{2n} - \varphi_{2n-1}, \quad m = e^{-\omega} \ ,$$

где

$$u_n = e^{i\pi_n}, \qquad v_n = e^{-i\varphi_n},$$

наложения связи

$$\pi_{2n} + \pi_{2n-1} + \varphi_{2n} - \varphi_{2n-1} = 0$$

и домножения на матрицу $e^{-\lambda-\omega}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ справа.

Альтернативное введение физического оператора

$$\widehat{L}_n(\lambda) = L_{2n+1}(\lambda - \omega) L_{2n}(\lambda + \omega)$$

приводит ко второй связи

$$\pi_{2n+1} + \pi_{2n} + \varphi_{2n+1} - \varphi_{2n} = 0;$$

в результате число физических переменных Π, Φ оказывается равным половине числа переменных π, φ.

Фундаментальный оператор $L_{n,f}(\lambda)$, соответствующий оператору $L_{n,a}(\lambda)$ из (6), был построен в [16], см. также [18]. Он дается выражением

$$L_{n,f} = P_{n,f} f(w_{n,f}, \lambda),$$

где

$$w_{n,f} = u_n^{-1} u_f^{-1} v_n^{-1} v_f,$$

а функция f определяется из функционального уравнения

$$f(e^{i\gamma}w,\lambda) / f(e^{-i\gamma}w,\lambda) = \frac{1+\lambda w}{\lambda + w} \ . \tag{7}$$

Если константа связи γ имеет вид

$$\gamma = \frac{2\omega}{2q+1} \ ,$$

где q – целое число, так что

$$\left(e^{i\gamma}\right)^{2q+1} = 1 \ ,$$

то это уравнение имеет явное решение

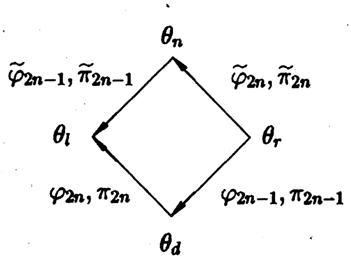
$$f(w,\lambda) = \sum_{j=-q}^{q} l_j(\lambda) w^j, \quad l_j(\lambda) = \prod_{k=1}^{j} \left(\frac{\lambda e^{i\gamma(1-k)} - e^{i\gamma(k-1)}}{\lambda e^{i\gamma k} - e^{-i\gamma k}} \right) \ ,$$

впервые предложенное в [19] в связи с моделью Поттса. Отметим, что комбинация $w_{2n,2n-1}$ зависит только от переменной Φ_n, так что динамические операторы U_+ и U_- зависят лишь от физических переменных Φ_n и Π_n.

Посмотрим теперь, как выглядит квантовое уравнение движения. Для этого естественно воспользоваться уравнением нулевой кривизны. Рассмотрим элементарный квадрат решетки (см. рис.), снабдим стороны каноническими переменными φ_{2n}, π_{2n} для L_n, φ_{2n-1}, π_{2n-1} для M_n и соответственно для $\tilde{L}_n$ и $\tilde{M}_n$. Уравнение (2) приводит к тривиальным соотношениям

$$\tilde{\pi}_{2n} + \tilde{\pi}_{2n+1} = \pi_{2n} + \pi_{2n-1}, \qquad \tilde{\varphi}_{2n} - \tilde{\varphi}_{2n-1} = \varphi_{2n-1} - \varphi_{2n},$$

которые решаются переходом к переменным θ, заданным в вершинах d, l, u и r:



$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_{2n} &= \theta_u + \theta_r; \\
\tilde{\pi}_{2n-1} &= \theta_l - \theta_u; \\
\tilde{\varphi}_{2n} &= \theta_r - \theta_u; \\
\tilde{\varphi}_{2n-1} &= -(\theta_l + \theta_u);
\end{aligned}$$

$$\pi_{2n} = \theta_l + \theta_d; \qquad \pi_{2n-1} = -\theta_d + \theta_r;$$
$$\varphi_{2n} = -\theta_l + \theta_d; \qquad \varphi_{2n-1} = \theta_d + \theta_r.$$

Нетривиальные соотношения с учетом инволюции $\varphi^* = \varphi$, $\pi^* = \pi$ сводятся к одному уравнению

$$e^{\omega} e^{i(\theta_l - 2\theta_u + \theta_r)} + e^{-\omega} e^{i(-\theta_l - 2\theta_u - \theta_r)} = e^{-\omega} e^{i(\theta_l + 2\theta_d + \theta_r)} + e^{\omega} e^{i(-\theta_l + 2\theta_d - \theta_r)},$$

которое и дает уравнение sine-Gordon на решетке в терминах переменной θ. В классическом пределе это уравнение приобретает вид

$$e^{-\omega} \sin(\theta_l + \theta_d + \theta_u + \theta_r) = e^{\omega} \sin(\theta_l + \theta_r - \theta_u - \theta_d)$$

и совпадает с уравнением Хироты [5].

Естественно, что оно может быть получено и как соотношение типа

$$\tilde{\varphi}_{2n} = U_+^{-1} \varphi_{2n} U_+; \qquad \tilde{\pi}_{2n} = U_+^{-1} \pi_{2n} U_+;$$
$$\tilde{\varphi}_{2n-1} = U_- \varphi_{2n-1} U_-^{-1}; \qquad \tilde{\pi}_{2n-1} = U_- \pi_{2n-1} U_+^{-1},$$

если мы используем выражение типа (5) для $U_\pm$ и функциональное уравнение (7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, как в рамках неоднородной цепочки естественно возникает интерпретация решетки со светоподобными направлениями и получили достаточно контролируемое выражение для операторов динамического сдвига $U_\pm$ и явный вид уравнений движения. Интересной задачей является перенос наших соображений на неультралокальный случай.

Список литературы

[1] *Склянин Е.К., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* // ТМФ. 1979. Т. 40. № 2. С. 194–220.
[2] *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* // УМН. 1979. Т. 34. С. 13.
[3] *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
[4] *Тарасов В.О., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* // ТМФ. 1983. Т. 57. № 2. С. 163–181.
[5] *Hirota R.* // J.Phys.Soc.Japan. 1977. V. 43. P. 2079.
[6] *Papageorgiou V.G., Nijhoff F.W., Capel H.W.* // Phys.Lett.A. 1990. V. 147. P. 106.
[7] *Nijhoff F.W., Papageorgiou V.G., Capel H.W.* // Quantum Groups / Ed. P.Kulish, Springer, 1992.
[8] *Faddeev L.D., Reshetikhin N.Yu.* // Ann.Phys. 1986. V. 167. P. 227.
[9] *Destri C., De Vega H.J.* // Nucl.Phys. 1987. V. B290. P. 363.
[10] *Faddeev L.D.* Fields and Particles / Ed. H.Mitter, W.Schweiger. Springer. 1990.
[11] *Захаров В.Е., Михайлов А.В.* // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. С. 1654.
[12] *Склянин Е.К.* // Зап.науч.семин. ЛОМИ. 1980. Т. 95. С. 53.
[13] *Izergin A.G., Korepin V.E.* // Lett.Math.Phys. 1981. V. 5. P. 199.
[14] *Gervais J.-L.* // Phys.Lett. 1985. V. B160. P. 279.
[15] *Волков А.Ю.* // ТМФ. 1988. Т. 74. № 1. С. 135 – 139.
[16] *Volkov A.Yu.* Preprint TPT. Helsinki, 1992.
[17] *Bazhanov V.V., Stroganov Yu.G.* // J.Stat.Phys. 1990. V. 51. P. 799.
[18] *Волков А.Ю.*; Дис. канд. физ.-матем. наук. Л.: ЛОМИ, 1987.
[19] *Fateev V., Zamolodchikov A.B.* // Phys.Lett. 1982. V. 92A. P. 37.

С.-Петербургское отделение
Математического института им.В.А.Стеклова
Российской академии наук

Поступила в редакцию
3.VI.1992 г.

A.Yu.Volkov, L.D.Faddeev

QUANTUM INVERSE SCATTERING METHOD ON SPACE-TIME LATTICE

The quantum inverse scattering method is developed on the space-time lattice imitating light-cone coordinates. Zero curvature representation enables to introduce naturally the operators of shift along the coordinate axises. The method is illustrated on the example of sine-Gordon equation.