А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, Л. Д. Фаддеев, Квантовые аномалии и коциклы на калибровочных группах, *Функц. анализ и его прил.*, 1984, том 18, выпуск 4, 64–72

Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 4, 64—72.

УДК 519.46

КВАНТОВЫЕ АНОМАЛИИ И КОЦИКЛЫ НА КАЛИБРОВОЧНЫХ ГРУППАХ

А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, Л. Д. Фаддеев

Интерес к коциклам на группах калибровочных преобразований вызван недавними работами физиков, в которых изучалось поведение регуляризованного определителя оператора Дирака с коэффициентами в векторном расслоении. Наивно можно было бы ожидать, что определитель инвариантен относительно калибровочных преобразований. В действительности это не так; этот факт получил название «квантовой аномалии».

Изучение трансформационных свойств детерминантов при калибровочных преобразованиях имело долгую историю [1—3]. В [4] впервые отмечено, что аномалию можно рассматривать как 1-коцикл на группе. Обозначим D_A оператор Дирака в расслоении со связностью A, и пусть g — калибровочное преобразование (автоморфизм расслоения, тождественный на базе). Пусть

$$e^{ic(A,\,g)} = \det D_{gA}\cdot(\det D_A)^{-1}.$$

Замечательный факт состоит в том, что коцикл $c\,(A, g)$ — в отличие от «пленки» $\log\det D_A$ — локальный функционал, т. е. зависит только от струй конечного порядка A и g.

В настоящей работе мы построим серию коциклов на группах калибровочных преобразований, коэффициенты которых — локальные функционалы от связностей. Некоторые маломерные коциклы были раньше построены в работе [4], а также в препринте одного из авторов [3], где обсуждаются их возможные физические применения. Соответствующие коциклы на алгебрах токов (т. е. алгебрах Ли калибровочных групп) построены (другим способом) в работах Стора [1] и Зумино [2].

Построение коциклов естественно связано с программой «формальной дифференциальной геометрии» И. М. Гельфанда [5]. Мы будем пользоваться введенным им вариационным комплексом связности [6], чтобы вычислить вариации коциклов по A. Восстановление самих коциклов по их вариационным производным наталкивается на препятствия (которые сами суть коциклы на калибровочной группе с тривиальными коэффициентами). В конечном счете эти препятствия связаны с дерамовскими когомологиями структурной группы. Поэтому формулы для коциклов содержат неоднозначные функционалы в смысле Новикова [7] (см. также [8]) и (при $n > 1$) первообразные с особенностями от замкнутых форм.

Построение коциклов состоит из двух характерных шагов: сначала мы строим дифференциальные формы на многообразии, удовлетворяющие уравнению коцикла по модулю точных форм; затем, интегрируя по замкнутым подмногообразиям, получаем уже настоящие коциклы. Полученные формулы обладают замечательным свойством локальности: они зависят только от сужения связности и калибровочных преобразований на подмногообразие. В итоге с универсальным характеристическим классом размерности $2p$ связывается серия коциклов, причем n-коцикл естественно спускается на многообразия размерности $2p - n - 1$.

В этой работе использован «наивный» аналитический язык: мы говорим о функционалах от связностей, дифференциальных формах на пространстве связностей и пр. Перевод на более строгий язык расслоений струй не представляет принципиальных трудностей.

Авторы благодарны И. М. Гельфанду, который обратил их внимание на работу [6].

1. Вариационный комплекс и разностные коциклы

Пусть M — гладкое многообразие, G — группа Ли, $P \to M$ — главное G-расслоение. Пусть $\mathfrak{A}$ — пространство связностей в расслоении P. Напомним, что $\mathfrak{A}$ — выпуклое множество в бесконечномерном линейном пространстве. Определим в пространстве $P \times \mathfrak{A}$ универсальную G-связность, полагая

$$\mathcal{A}\ (p,\ A) = A\ (p), \quad p \in P, \tag{1}$$

где $A\ (p)$ — форма связности в главном расслоении. Пусть Ω — комплекс внешних форм на $M \times \mathfrak{A}$ с дифференциалом $D = d + \delta$, где d — дифференциал вдоль M, δ — «вариационный» дифференциал вдоль $\mathfrak{A}$. В Ω имеется естественная биградуировка по степеням дифференциалов d, δ.

Кривизна связности (1) задается формулой

$$\mathcal{F}\ (p, A) = D\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = F_A\ (p) + \delta A\ (p), \tag{2}$$

где F_A — кривизна связности A.

Комплекс Ω называется вариационным комплексом связности [6]. Отметим связь вариационного комплекса с интуитивной идеей о равноправии пространственных координат и физических полей, неоднократно подчеркивавшейся А. С. Шварцем.

Пусть φ — инвариантный однородный полином степени N на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. С полиномом φ связана характеристическая форма на многообразии $M \times \mathfrak{A}$

$$\Phi = \varphi\ (\mathcal{F}) = \sum_i \Phi_i, \tag{3}$$

где Φ_i — форма на $M \times \mathfrak{A}$ бистепени $(2N - i,\ i)$. Из замкнутости Φ, $(d + \delta)\ \Phi = 0$, получаем равенства

$$\delta\Phi_i = -d\Phi_{i+1},\ d\Phi_0 = 0,\ \delta\Phi_N = 0 \tag{4}$$

(заметим, что Φ_0 — это обычная характеристическая форма связности A на M).

Пусть $A_0, \ldots, A_k$ — набор связностей, $\Delta_k = \Delta\ (A_0, \ldots, A_k)$ — k-мерный симплекс в $\mathfrak{A}$ с вершинами $A_0, \ldots, A_k$. Определена естественная операция интегрирования по слою π_Δ: $\Omega\ (M \times \Delta) \to \Omega\ (M)$. Из теоремы Стокса получаем

$$d \circ \pi_\Delta + \pi_\Delta \circ D = \pi_{\partial\Delta}, \tag{5}$$

где D — сужение дифференциала на $M \times \mathfrak{A}$ на подмногообразие $M \times \Delta$.

Применим конструкцию интегрирования по слою k характеристическим формам связностей. Пусть

$$c_k\ (A_0, \ldots, A_k) = \pi_{\Delta_k}\Phi = \int_{\Delta_k} \Phi_k. \tag{6}$$

Таким образом, $c_k\ (A_0, \ldots, A_k)$ — форма на многообразии M степени $2N - k$. Из (5) получаем, пользуясь замкнутостью Φ,

$$dc_k = \int_{\partial\Delta_k} \Phi_{k-1}. \tag{7}$$

Функционалы $c_k(A_0, \ldots, A_k)$ можно рассматривать как коцепи в пространстве связностей с коэффициентами в $\Omega(M)$. Определим кограничный оператор на таких коцепях стандартной формулой

$$\partial f(A_0, \ldots, A_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i f(A_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_{p+1}). \tag{8}$$

Тогда

$$\partial c_k = -dc_{k+1}. \tag{9}$$

Следуя Р. Ботту [9], будем называть последовательность форм c_k разностным коциклом. Заметим еще, что конструкция разностного коцикла обобщает конструкцию вторичных характеристических классов Черна — Саймонса [10].

2. Группа Aut P и когомологии групп

Пусть $\operatorname{Aut} P$ — группа автоморфизмов расслоения P. Подгруппа $G(P) \subset \operatorname{Aut} P$ автоморфизмов, тождественных на базе M, называется группой калибровочных преобразований. Тривиализация P (если она существует) задает изоморфизм $G(P)$ с группой G^M гладких функций на базе со значениями в структурной группе G. Имеет место точная последовательность $1 \to G(P) \to \operatorname{Aut} P \to \operatorname{Diff} M \to 1$.

Группа $\operatorname{Aut} P$ естественно действует в пространстве связностей $\mathfrak{A}$; тем самым определено действие на $P \times \mathfrak{A}$.

Лемма 1. *Универсальная связность $\mathcal{A}$ на $P \times \mathfrak{A}$ инвариантна относительно группы* $\operatorname{Aut} P$.

Следствие. *Характеристическая форма Φ инвариантна относительно действия* $\operatorname{Aut} P$ *на* $P \times \mathfrak{A}$.

Напомним основные определения, относящиеся к теории когомологий групп [11].

Пусть Γ — абстрактная группа, V — левый Γ-модуль. Пусть $F^0(\Gamma, V) = V$, $F^p(\Gamma, V) = C(\Gamma^p, V)$ — пространство функций на $\Gamma \times \ldots \times \Gamma$ ($p+1$ раз) со значениями в V. Действие группы Γ в F^p определим формулой

$$(g\alpha)(x_0, \ldots, x_p) = g(\alpha(g^{-1}x_1 g, \ldots, g^{-1}x/g)). \tag{10}$$

Дифференциал ∂, перестановочный с действием (10), задается формулой

$$\partial\alpha(x_1, \ldots, x_{p+1}) = x_1(\alpha(x_1, \ldots, x_{p+1})) + \\ + \sum (-1)^i \alpha(x_0, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{p+1}) + (-1)^{p+1}\alpha(x_0, \ldots, x_p). \tag{11}$$

Когомологии комплекса

$$0 \to V \xrightarrow{\partial} F^1 \xrightarrow{\partial} F^2 \to \ldots \tag{12}$$

называются абстрактными когомологиями группы Γ.

Замечание. Следуя принятому в этой статье «наивному» стилю изложения, мы не обсуждаем топологии на группах калибровочных преобразований. Разумеется, коциклы, которые мы будем рассматривать, задаются в действительности «достаточно хорошими» (но не обязательно непрерывными!) функционалами.

При комбинаторных вычислениях, которые проводятся ниже, удобна другая реализация комплекса (12). Пусть $A^p(\Gamma, V) = C(\Gamma^{p+1}, V)$ — то же пространство, что и выше, но с действием

$$(g\alpha)(x_0, \ldots, x_p) = g(\alpha(g^{-1}x_0, \ldots, g^{-1}x_p)). \tag{13}$$

Зададим дифференциал ∂: $A^p \to A^{p+1}$ стандартной симплициальной формулой

$$\partial\alpha\,(x_0, \ldots, x_{p+1}) = \sum (-1)^1 \alpha\,(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{p+1}). \tag{14}$$

при $p = -1$ $A^p = V$ и дифференциал ∂ сопоставляет элементу $v \in V$ постоянную функцию на Г, равную v.

Пусть $A^p(V)^\Gamma$ —пространства Г-инвариантных коцепей. Определим отображение $A^p\,(V)^\Gamma \to F^{p-1}\,(\Gamma,\ V)$ формулой

$$\alpha'\,(g_1, \ldots, g_p) = \alpha\,(1, g_1, g_1 g_2, \ldots, g_1 g_2, \ldots g_p). \tag{15}$$

Следующий факт хорошо известен

Лемма 2. *Отображение* (15) — *изоморфизм линейных пространств и* $\partial\alpha' = (\partial\alpha)'$.

Таким образом, комплекс (23) изоморфен комплексу

$$0 \to A^0\,(V)^\Gamma \to A^1\,(V)^\Gamma \to \ldots \tag{16}$$

3. Коциклы на групе Aut P

Мы определим серию коциклов a_k и коцепей c_k на группе Aut P. Ниже коциклы a_k встретятся нам как препятствия к исправлению коцепей c_k до коциклов (см. предложение 1). При $N = k = 2$ коциклы a_k рассматривались П. Вигманом и А. Поляковым.

Коциклы будут принимать значения в пространстве $\Omega\,(M)$ дифференциальных форм на M. Автоморфизмы расслоения P действуют в $\Omega\,(M)$ как диффеоморфизмы базы M.

Зафиксируем связность $B \in \mathfrak{A}$ и пусть Δ_k — симплекс в $\mathfrak{A}$ с вершинами $g_0 B, \ldots, g_k B$. Положим

$$a_k\,(g_0, \ldots, g_k) = \int\limits_{\Delta_k} \Phi_k. \tag{17}$$

В силу инвариантности формы Φ относительно Aut P, коцепи (17) Aut P-инвариантны относительно действия (13). Из определения дифференциала (14) получаем $\partial a_k = \int\limits_{\partial\Delta_{k+1}} \Phi_k$, откуда, пользуясь свойствами разностного коцикла (9), имеем

$$\partial a_k = -d a_{k+1}. \tag{18}$$

Предложение 1. *Пусть последовательность коцепей a_k обладает свойством* (18). *Тогда*

(i) *Если S — замкнутое подмногообразие размерности $2N - k$, то функционал*

$$a_k^S = \int\limits_S a_k \tag{19}$$

является коциклом.

(ii) *Если подмногообразия S, S' гомологичны, то коциклы a_k^S, $a_k^{S'}$ гомологичны.*

Из определения (17) вытекает свойство локальности коциклов a_k.

Предложение 2. *Если автоморфизмы $g_0, \ldots, g_k$ оставляют инвариантным подмногообразие S, то $a_k\,(g_0, \ldots, g_k)$ зависит только от сужения автоморфизмов $g_0, \ldots, g_k$ и связности B на S. Тем самым, формула* (19) *определяет коцикл на группе* Aut $P\,|_S$ *автоморфизмов расслоения P, ограниченного на S.*

Предложение 2 показывает, что достаточно рассматривать лишь формы a_k старшей размерности, т. е. такие, что $2N - k = \dim M$.

Теперь мы определим обещанные коцепи c_k на группе $\mathrm{Aut}\, P$. Коэффициенты коцепей c_k — локальные функционалы от связности $A \in \mathfrak{A}$ со значениями в $\Omega(M)$. Ниже будет показано, как подправить коцепи c_k, превратив их в коциклы $\mathrm{mod}\, d\Omega$. Как и выше, интегрирование по замкнутым подмногообразиям приводит к «настоящим» коциклам на группе $\mathrm{Aut}\, P$, коэффициенты которых — локальные функционалы от связности. При этом коцикл C_k определен на подмногообразиях размерности $2N - k - 1$. Фиксируем связность $B \in \mathfrak{A}$ пусть $\Delta_{k+1}(A)$ — симплекс в $\mathfrak{A}$ с вершинами A, $g_0B, \ldots, g_kB$. Положим

$$c_k(A, g_0, \ldots, g_k) = \int\limits_{\Delta_{k+1}(A)} \Phi. \tag{20}$$

Предложение 3.

$$\partial c_k = dc_{k+1} - a_{k+1}, \tag{21}$$

где препятствие a_{k+1} задается формулой (19) *с «затравочной» связностью B.*

Доказательство. Пусть $g_0, \ldots, g_{k+1} \in \mathrm{Aut}\, P$, $\Delta_{k+1} = \Delta(g_0B, \ldots, g_{k+1}B)$. Из определения (20) имеем

$$\partial c_k(A, g_0, \ldots, g_{k+1}) = -\int\limits_{\partial\Delta_{k+2}(A)\setminus\Delta_{k+1}} \Phi = d\int\limits_{\Delta_{k+2}(A)} \Phi - a_{k+1}. \square$$

Таким образом, функционалы c_k не являются коциклами $\mathrm{mod}\, d\Omega(M)$. Однако их вариация по A уже замкнута; в самом деле, из (20) получаем

$$\partial(\delta_A c_k) = d(\delta_A c_{k+1}). \tag{22}$$

Мы увидим, что вариация есть в действительности кограница. Напомним сначала формулу для вариации интеграла при смещении области вдоль векторного поля ξ

$$T_\xi \int\limits_\Omega \Phi = \int\limits_\Omega L_\xi \Phi = \int\limits_\Omega D i_\xi \Phi; \tag{23}$$

мы воспользовались D-замкнутостью формы Φ.

Предложение 4. *Пусть X — вариация связности A; продолжим ее до векторного поля $\xi(X)$ на симплексе Δ_{k+1}, полагая $\xi(X)(v) = \alpha X$, где $v = \alpha A + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i g_i B$, $\alpha + \sum\alpha_i = 1$,— точка симплекса $\Delta_{k+1}(A)$. Тогда*

$$i_X \delta_A c_k = d \int\limits_{\Delta_{k+1}(A)} i_{\xi(X)} \Phi - \partial \int\limits_{\Delta_k(A)} i_{\xi(X)} \Phi. \tag{24}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (23) и заметим, что $\int\limits_{\partial\Delta_{k+1}} i_{\xi(X)} \Phi = -\partial \int\limits_{\Delta_k(A)} i_{\xi(X)} \Phi$, поскольку векторное поле $\xi(X, v)$ обращается в нуль на грани, противоположной вершине A. $\square$

Коцепь c_k является первообразной от «вариации» (22); учитывая формулу (24), можно ожидать, что невязка a_{k+1} в уравнении коцикла (21) возникла из-за неудачного выбора «постоянной интегрирования».

Предложение 5. *Коциклы a_k являются препятствиями к исправлению коцепей c_k до коциклов: коцепь $b_k(g_0, \ldots, g_k)$, не зависящая от связности A, и такая, что*

$$\partial(c_k + b_k) = 0 \ (\mathrm{mod}\, d\Omega), \tag{25}$$

найдется в том и только в том случае, когда коцикл a_{k+1} когомологичен нулю.

Доказательство. $\partial (c_k + b_k) = 0 \pmod{d\Omega}$ тогда и только тогда, когда $a_{k+1} = -\partial b_k \pmod{d\Omega}$. $\square$

Ниже мы покажем, как для тривиальных расслоений построить добавки b_k на калибровочной группе $G(P) = G^M$.

Легко исследовать зависимость коцепей a_k, c_k от «затравочной» связности B.

Предложение 6. *$\delta_B a_k$ и $\delta_B c_k$ — точные коцепи* mod $d\Omega$.

Доказательство. Из формулы вариации (23) имеем, например,

$$i_X \delta_B a_k = d \int\limits_{\Delta_{k+1}} i_{\eta(X)} \Phi + \partial \int\limits_{\Delta_k} i_{\eta(X)} \Phi, \tag{26}$$

где векторное поле $\eta(X)$ на симплексе Δ_k определяется равенством $\eta(X)(v) = \sum\limits_i \alpha_i (g_i \cdot X)$, $v = \sum \alpha_i (g_i \cdot B) \in \Delta_k$. Формула для $\delta_B c_k$ совершенно аналогична.

Следствие. *Коциклы $a_k(B)$ и $a_k(B')$ когомологичны.*

4. Коциклы на алгебре Ли инфинитезимальных автоморфизмов aut P

Для получения инфинитезимальных аналогов коцепей a_k и c_k следует перейти к коцепям a_k' и c_k', исключив одну групповую переменную согласно (15), и затем продифференцировать вдоль векторных полей $X_1, \ldots, X_k \in \operatorname{aut} P$. В результате получим следующие кососимметрические формы на алгебре aut P:

$$\alpha_k (X_1, \ldots, X_k) = \varphi (F_B, \ldots, F_B, X_1 \cdot B, \ldots, X_K \cdot B) \tag{27}$$

и

$$\zeta_k (A; X_1, \ldots, X_k) = \int\limits_0^1 dt t^k \varphi (F_t, \ldots, F_t \wedge (B - A), X_1 \cdot B, \ldots, X_k \cdot B), \tag{28}$$

где F_t — кривизна связности $(1 - t) A + tB$, а $X \cdot B$ обозначает производную Ли связности B вдоль векторного поля $X \in \operatorname{aut} P$.

Дифференцируя равенства (21), получим

$$\partial \alpha_k = -d\alpha_{k+1}, \qquad \partial \zeta_k = d\zeta_{k+1} - \alpha_{k+1}, \tag{29}$$

где ∂ — дифференциал в пространстве форм на алгебре Ли aut P.

Если «затравочная» связность B плоская, $F_B = 0$, то $\alpha_k = 0$ при $k < N$ и

$$\alpha_N (X_1, \ldots, X_N) = \varphi (X_1 \cdot B, \ldots, X_N \cdot B), \tag{30}$$

так что $\alpha_N = d_\gamma$, где

$$\gamma (X_1, \ldots, X_N) = \sum (-1)^i \varphi (X_i, X_1 \cdot B, \ldots, \widehat{X_i \cdot B}, \ldots, X_N \cdot B). \tag{31}$$

Поэтому выполнены соотношения

$$\partial \zeta_k = d\zeta_{k+1}, \quad k < N - 1, \qquad \partial \zeta_{N-1} = -d\gamma. \tag{32}$$

Таким образом, справедливо

Предложение 7. *Если связность B плоская, то формулы* (28) *и* (31) *задают коциклы на алгебре* aut P.

Коцикл γ является обобщением известных коциклов Маурера — Картана и Вирасоро.

Расслоение называется плоским, если в нем существует плоская связность. Для произвольной связности B имеет место

Предложение 8. *Если расслоение P плоское, то формы α_k точны* $\operatorname{mod} d\Omega$.

Доказательство. Введем обозначение $Q_k(X_1, \ldots, X_k) = i_{X_1 \cdot B} \ldots i_{X_k \cdot B}\Phi_{k+1}$. Дифференцируя формулу для вариации (26), получим $\delta_B \alpha_k = dQ_k + \partial Q_{k-1}$. Пусть B_0 — плоская связность в расслоении P.

Поскольку $\alpha_k(B_0) = 0$ при $k < N$, выводим отсюда

$$\alpha_k = d\int_{B_0}^{B} Q_k + \partial \int_{B_0}^{B} Q_{k-1}.$$

При $k = N$ добавляется слагаемое $\alpha_N(B_0) = d\gamma$ (30).

Следствие. *Если B_0 — плоская связность, то формы*

$$\hat{\zeta}_k = \zeta_k + \int_{B_0}^{B} Q_k$$

являются коциклами $\operatorname{mod} d\Omega$ *на алгебре* $\operatorname{aut} P$.

5. Бикомплекс на группе G и исправление коцепей c_k

Предположим, что расслоение P тривиально и пусть B — нулевая связность относительно тривиализации $P = M \times G$. При этих условиях мы построим последовательность «постоянных интегрирования» b_k (см. (25)) на калибровочной группе $G^M \subset \operatorname{Aut} P$, дополняющих коцепи c_k до коциклов и обладающих свойством локальности. Функционалы b_k будут иметь разрывы, поскольку, вообще говоря, коциклы a_k не когомологичны нулю. В результате $C_k = c_k + b_k$ будут локальными, но разрывными коциклами на группе G^M.

Пусть $G^k = G \times \ldots \times G$ (k раз), i_p: $G^{k+1} \to G$ — проекция $i_p(g_0, \ldots, g_k) = g_p$. Обозначим ω форму Маурера — Картана на G и пусть $\omega_p = (i_p)^*\omega$. Пусть Δ_k — стандартный симплекс в $\mathbf{R}^{k+1}$. Для $t = (t_0, \ldots, t_p) \in \Delta_k$ положим $\omega(t) = \sum_{p=0}^{k} t_p \omega_p$, $\mathcal{F}(t) = D\omega(t) + \frac{1}{2}[\omega(t), \omega(t)]$, где $D = d + \delta$ — дифференциал на $G^{k+1} \times \Delta_k$. Пусть $\Omega(G^{k+1})_G$ — пространство базисных форм относительно диагонального действия G. Определим форму $\mathbf{a}_k \in \Omega(G^{k+1})_G$, положив

$$\mathbf{a}_k = \int_{\Delta_k} \varphi(\mathcal{F}(t)). \tag{33}$$

Пусть $g_0, \ldots, g_k \in G^M$. Тогда форма $a_k(g_0, \ldots, g_k) = (g_0, \ldots, g_k)_* \mathbf{a}_k$ совпадает с коциклом (17).

Зададим отображение π_p^k: $G^{k+1} \to G^k$ формулой $\pi_p^k(g_0, \ldots, g_k) = (g_0, \ldots, \hat{g}_p, \ldots, g_k)$. Определим кограничный оператор ∂: $\Omega(G^k) \to \Omega(G^{k+1})$, полагая $\partial a = \sum_p (-1)^p (\pi_p^k)_* a$; очевидно, $\partial^2 = 0$. Исходя из основной системы уравнений типа (18) для исправленных коциклов C_k, $\partial C_k = dC_{k+1}$, $C_k = c_k + b_k$, рассмотрим универсальную систему уравнений для форм $\mathbf{b}_k \in \Omega(G^{k+1})_G$

$$d\mathbf{b}_{k+1} = \partial \mathbf{b}_k - \mathbf{a}_{k+1}. \tag{34}$$

Здесь d — стандартный внешний дифференциал на группе G^{k+2}. Имеем $d\partial = \partial d$.

Предложение 9. (i) *Система* (34) *локально разрешима: если построены формы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$, то форма $\partial \mathbf{b}_k - \mathbf{a}_{k+1}$ замкнута.*

(ii) *Пусть $\mathbf{b}_k$, $\mathbf{b}_k'$ — два набора решений рекуррентной системы* (34).

Тогда найдутся такие формы $p_k \in \Omega\,(G^{k+1})_G$, *что*

$$\mathbf{b}_k - \mathbf{b}'_k = \partial p_{k-1} + dp_k. \tag{35}$$

Таким образом, неоднозначность в выборе первообразных вымирает через два шага.

Доказательство. (i) Предположим, что $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ удовлетворяют (34). Имеем $d\,(\partial \mathbf{b}_k - \mathbf{a}_{k+1}) = \partial d\mathbf{b}_k - d\mathbf{a}_{k+1} = -\partial \mathbf{a}_k - d\mathbf{a}_{k+1} = 0$ в силу соотношений (18) для форм $\mathbf{a}_k$. (ii) Действуя по индукции, получим из (34) $d\,(\mathbf{b}_{k+1} - \mathbf{b}'_{k+1}) = \partial\,(\mathbf{b}_k - \mathbf{b}'_k)$. Поскольку для $\mathbf{b}_k - \mathbf{b}'_k$ верно (35), имеем $d\,(\mathbf{b}_{k+1} - \mathbf{b}'_{k+1}) = d\,\partial p_k$, откуда $\mathbf{b}_{k+1} - \mathbf{b}'_{k+1} = \partial p_k + dp_{k+1}$.

Заметим, что цепочка уравнений (34) имеет длину $2N$, $N = \deg \Phi$, в то время как функционалы a_k исчезают при $k > N$. Таким образом, при $k \geqslant N$ формы $\mathbf{b}_k$ являются коциклами (с особенностями) на группе $G^{k+1} \bmod d\Omega\,(G^{k+1})$.

Предложение 10. *Пусть* $g_0, \ldots, g_k \in G^M$. *Положим* $b_k\,(g_0, \ldots, g_k) = (g_0, \ldots, g_k)_*\,\mathbf{b}_k$. *Тогда* $C_k = c_k + b_k$ — *коцикл на группе* $G^M \bmod d\Omega\,(M)$.

Интегрируя формы C_k по многообразию M (при этом $2N - k - 1 = \dim M$), получаем «настоящие» коциклы на калибровочной группе G^M.

6. Примеры

Для иллюстрации выпишем здесь простейшие коциклы, связанные со вторым классом Черна расслоения. Пусть $G = U\,(n)$, $\varphi\,(F) = \operatorname{tr} F \wedge F$. Коциклы C, a на группе G^M удобно выписывать, пользуясь реализацией (12) комплекса на группе. Имеем

$$c'_0\,(A) = \operatorname{tr}\,(F \wedge A) - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\,(A \wedge A \wedge A), \tag{36}$$
$$c'_1\,(A, g) = \operatorname{tr}\,(A \wedge \mathrm{dg}\, g^{-1}).$$

Пусть ω — форма Маурера—Картана на G. Из формулы (33) получим, исключая одну переменную согласно (15) $\mathbf{a}_1\,(g) = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\,(\omega \wedge \omega \wedge \omega)$, $a_2\,(g_1, g_2) = \operatorname{tr}\,(\omega_1 \wedge \operatorname{Ad} g_2\omega_2)$. Решая уравнения (34), зафиксируем первообразную $\mathbf{b}_1$ формы $\mathbf{a}_1$ на G и первообразную $\mathbf{b}_2$ формы $\partial \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2$ на $G \times G$. В результате получим коциклы C_1 и b_2 на калибровочной группе G^M, которые можно записать следующим образом. Пусть $\dim M_2 = 2$, $M_2 = \partial N_3$. Продолжим калибровочное преобразование g с M_2 на N_3. Тогда

$$\int_{M_2} C_1\,(A, g) = \int_{M_2} \operatorname{tr}\,(A \wedge \mathrm{dg}\, g^{-1}) + \frac{1}{3}\int_{N_3} \operatorname{tr}\,(\mathrm{dg}\, g^{-1} \wedge \mathrm{dg}\, g^{-1} \wedge \mathrm{dg}\, g^{-1}).$$

Пусть $\dim M_1 = 1$, $M_1 = \partial N_2$. Продолжим калибровочные преобразования g_1, g_2 с M_1 на N_2. Тогда

$$\int_M b_2\,(g_1, g_2) = \int_N (\partial b_1 - a_2) = \int_{N_2} \operatorname{tr}\,(\mathrm{d}g_1 g_1^{-1} \wedge g_2^{-1}\mathrm{d}g_2) + (g_1)^*\mathbf{b}_1 + (g_2)^*\mathbf{b}_1 - (g_1 g_2)^*\mathbf{b}_1.$$

Соответствующие коциклы на алгебре Ли задаются формулами

$$\zeta_1^{M_2}\,(A, X) = \int_{M_2} \operatorname{tr}\,(A \wedge X), \qquad \zeta_2^{M_1}\,(X, Y) = \int_{M_1} \operatorname{tr}\,(X \wedge dY).$$

Таким образом, коцикл b_2 — это «проинтегрированный» коцикл Маурера—Картана на алгебре токов.

Примечание при корректуре. Бикомплекс базисных форм на группах G^k, определенный в п. 5, совпадает с бикомплексом Де Рама для полусимплициальной модели классифицирующего пространства BG группы G (см., например, Dupont J. Curvature and characteristic classes.— Lect. Notes in Math., 1978, 640). Тем самым его когомологии посредством гомоморфизма Вейля отождествляются с алгеброй инвариантных полиномов на $\mathfrak{g}$: класс когомологий, отвечающий инвариантному полиному φ, представляется формой $\mathbf{a}(\varphi) = \Sigma \mathbf{a}_k$, где формы $\mathbf{a}_k$ определены в (33). Этот же класс когомологий определяет препятствие к решению системы (34), которая может быть записана в виде $D\mathbf{b} = \mathbf{a}(\varphi)$, $\mathbf{b} = \Sigma \mathbf{b}_k$, D — полный дифференциал в бикомплексе. Если класс, отвечающий полиному φ, целочисленный, то это уравнение разрешимо в коцепях mod $\mathbf{Z}$. Это замечание важно в связи с задачей о построении коциклов на G^M с коэффициентами в $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Пользуясь случаем, авторы благодарят О. Я. Виро и Н. В. Иванова за обсуждение топологических вопросов и указание на работу Дюпона.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Stora R.* Algebraic structure and topological origin of anomalies. Preprint LAPP—TH—94, 1983.
2. *Zumino B.* Chiral anomalies and differential geometry, Preprint LBL—16747, UCB.— PTH—83110, Berkeley, 1983.
3. *Фаддеев Л. Д.* Операторная аномалия для закона Гаусса. Препринт ЛОМИ. Р—5—84. Ленинград, ЛОМИ, 1984.
4. *Фаддеев Л. Д., Шаташвили С. Л.* Алгебраические и гамильтоновы методы в теории неабелевых аномалий.— ТМФ, 1984, т. 60, № 2, с. 206—217.
5. *Gel'fand I. M.* Cohomology of infinite Lie algebras. Some topics in integral geometry. Proc. Congr. Int. Math. Nice, 1970.
6. *Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В.* Комбинаторное вычисление характеристических классов I, II.— Функц. анализ, 1975, т. 9, вып. 2, с. 12—28; вып. 3, с. 5—26.
7. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса.— УМН, 1982, т. 37, вып. 5, с. 3—49.
8. *Witten E.* Non—abelian bosonization in two dimensions.— Comm. Math. Phys., 1984, v. 92, p. 455—472.
9. *Bott R.* Lectures on characteristic classes and foliations.— Lect Notes in Math., v. 279, 1972, p. 1—74.
10. *Chern S. S., Simons J.*, Characteristic forms and geometric invariants.— Ann. Math., 1974, v. 99, p. 48—69.
11. *Hochschild G., Mostow G. D.* Cohomology of groups III.— J. Math., 1962, v. 6, p. 367—401.

Ленинградское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию
14 июня 1984 г.