В. Е. Корепин, Л. Д. Фаддеев, Квантование солитонов, *ТМФ*, 1975, том 25, номер 2, 147–163

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 25, № 2
ноябрь, 1975

КВАНТОВАНИЕ СОЛИТОНОВ

В. Е. Корепин, Л. Д. Фаддеев

На примере уравнения Sine-Gordon рассматривается квантование частицеподобных решений. Показано, что квазиклассика является хорошим приближением при малой константе связи. Квантовые поправки вычисляются при помощи континуального интегрирования.

Уравнение Sine-Gordon определяет вполне интегрируемую гамильтонову систему. В работах [1—3] описана структура фазового пространства и основных наблюдаемых — гамильтониана и импульса. Полученные результаты позволяют утверждать на квазиклассическом уровне, что уравнению соответствует богатый спектр частиц. Помимо квантов, отвечающих рассматриваемому полю в линейном приближении, этот спектр содержит частицы, отвечающие частицеподобным решениям,— солитоны. В настоящей работе мы описываем квазиклассические характеристики этих частиц и вычисляем квантовые поправки к ним.

Обычно для вычисления функции Грина частицы необходимо знать волновой функционал частицы с определенным импульсом. Для частицеподобного решения его нелегко вычислить даже в квазиклассическом приближении, так как из классического решения мы знаем одновременно импульс и координату частицы, что противоречит принципу неопределенности Гейзенберга.

В настоящей работе предложен путь обхода этой трудности. Пользуясь опытом нерелятивистской квантовой механики, мы рассматриваем лишь асимптотику функции Грина при больших временах. В этом пределе зависимость от координаты частицеподобного решения выпадает.

В первом разделе описана классическая гамильтонова система, связанная с рассматриваемым уравнением. Второй раздел посвящен построению теории возмущений для функции Грина солитона. В третьем разделе рассматриваются перенормировки, возникающие при квантовании солитонов. В четвертом разделе вычисляется S-матрица рассеяния солитонов.

Краткое изложение результатов настоящей статьи в [19] содержит ряд ошибок, которые исправлены в настоящем тексте.

1. ОПИСАНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим в двумерном пространстве-времени киральное поле $\varkappa(x, t)=\exp\{iu(x, t)\}$. Наложим граничные условия: $\varkappa(x, t)\to 1$ при $|x|\to\infty$. Поле $\varkappa(x, t)$ меняется на единичной окружности, т. е. поля $u(x, t)$ и $u(x, t)+2\pi n$ неразличимы.

Система обладает сохраняющимся зарядом $Q=\frac{1}{2\pi}\{u(\infty, t)-u(-\infty, t)\}$, который принимает целочисленные значения. Соответствующий ток имеет вид $J^\mu=\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu u$. Его дивергенция равна нулю независимо от уравнений движения.

Лагранжиан этого поля задается формулой

$$\mathscr{L}=\frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left[{}^1/{}_2u_t^2-{}^1/{}_2u_x^2-m^2(1-\cos u)\right], \tag{1a}$$

здесь m — масса, γ — безразмерная константа связи. Мы пользуемся системой единиц $\hbar=c=1$.

Классическое уравнение имеет вид

$$\Box u+m^2\sin u=0. \tag{1б}$$

Гамильтонова система определяется скобками Пуассона:

$$\left\{\pi(x), u(y)\right\}=\delta(x-y),\ \pi(x)=\frac{1}{\gamma}u_t(x).$$

В [1—3] при помощи метода обратной задачи (см., например, обзор [14]) описано нелинейное каноническое преобразование от переменных поля к переменным типа действие — угол. В этих переменных фазовое пространство представляет собой произведение трех множеств.

Мы приведем список переменных, параметризующих эти множества и выпишем неисчезающие скобки Пуассона:

1) $0\leqslant\rho(p)<\infty$, $0\leqslant\varphi(p)<2\pi$; $\{\rho(p_1), \varphi(p_2)\}=\delta(p_1-p_2)$;

2) $-\infty<p_a<\infty$, $-\infty<q_a<\infty$; $\{p_{a_1}, q_{a_2}\}=\delta_{a_1a_2}$, $a=1,\ldots, A$;

3) $-\infty<\xi_b<\infty$, $-\infty<\eta_b<\infty$; $0\leqslant\alpha_b<2\pi$, $0\leqslant\beta_b<8\pi/\gamma$; $\{\eta_{b_1}, \xi_{b_2}\}=\delta_{b_1b_2}$; $\{\beta_{b_1}, \alpha_{b_2}\}=\delta_{b_1b_2}$; $b=1,\ldots, B$, здесь A и B — произвольные целые числа.

Полная энергия и импульс так выражаются через выписанные переменные:

$$P_0=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{p^2+m^2}\rho(p)\,dp+\sum_{a=1}^{A}\sqrt{p_a^2+M^2}+\sum_{b=1}^{B}\sqrt{\eta_b^2+(2M\sin\theta_b)^2},$$

$$P_1=\int_{-\infty}^{\infty}p\rho(p)\,dp+\sum_{a=1}^{A}p_a+\sum_{b=1}^{B}\eta_b,\ M=\frac{8m}{\gamma},\ \theta=\frac{\gamma}{16}\beta.$$

При квазиклассическом квантовании все канонические переменные превращаются в операторы, скобки Пуассона заменяются на коммутаторы. Переменным первого типа при квазиклассическом квантовании соответствует обычная скалярная частица массы m. Эти частицы мы будем называть основными. Их заряд равен нулю. Только они и получаются из (1) по теории возмущений.

Заметим, что переменные $\rho(p)$ и $\varphi(p)$ являются переменными типа модуль — фаза и $\rho(p)$ приобретает смысл плотности числа основных частиц. После квантования оператор $\rho(p)$ имеет собственные числа вида $\sum_i \delta(p-p_i)$. Собственные числа энергии и импульса приобретают вид $\sum_i \sqrt{p_i^2+m^2}$, $\sum_i p_i$, соответственно.

Переменные второго и третьего типов соответствуют локализованным решениям уравнения (1). Энергия этих частицеподобных решений сосредоточена в конечной области конфигурационного пространства. Переменным второго типа при квазиклассическом квантовании соответствуют частицы массы $M=8m/\gamma$ и заряда ± 1.

Следуя установившейся терминологии, будем их называть солитонами, т. е. так же, как и соответствующие им классические решения. Собственные числа операторов P_0 и P_1 на таких состояниях равны $\sum_{a=1}^{A} \sqrt{p_a^2+M^2}$ и $\sum_{a=1}^{A} p_a$. Выпишем явное решение уравнения (1) при $A=1$, $B=\rho=0$:

$$u_1(x,t|p,q_0\pm)=4\,\mathrm{arctg}\exp\left\{\pm m\frac{x-vt-q_0}{\sqrt{1-v^2}}\right\},\ p=\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{2}$$

Верхний знак соответствует солитонам положительного заряда, нижний — отрицательного. Переменные p_a, q_a имеют смысл импульсов и координат солитонов.

Переменным третьего типа в квазиклассике соответствуют двойные солитоны. Это частицы массы $2M\sin\theta_b$ и нулевого заряда. На таких состояниях операторы P_0 и P_1 имеют собственные значения

$$\sum_{b=1}^{B} \sqrt{\eta_b^2+(2M\sin\theta_b)^2}, \qquad \sum_{b=1}^{B} \eta_b.$$

Эти частицы обладают внутренней степенью свободы, которую описывают переменные β_b, α_b. Переменная η_b — импульс солитона, ξ_b — координата центра инерции. Решение, соответствующее $\rho=A=0$; $B=1$, имеет вид

$$4\,\mathrm{arctg}\left\{\mathrm{tg}\,\theta\frac{\cos[m\cos\theta(t\,\mathrm{ch}\,\psi-x\,\mathrm{sh}\,\psi)-\alpha_0]}{\mathrm{ch}[m\sin\theta((x-\xi_0)\,\mathrm{ch}\,\psi-t\,\mathrm{sh}\,\psi)]}\right\}, \tag{3}$$

где ψ вводится по формуле $\eta=2M\sin\theta\,\mathrm{sh}\,\psi$.

Отметим, что в случае двойного солитона мы имеем дело со своеобразным фазовым пространством: пара переменных α и β, описывающих внутреннее состояние двойного солитона, меняется в конечной области. Полная площадь этого фазового пространства, равная $16\pi^2/\gamma$ при квазиклассическом квантовании в единицах 2π, имеет смысл числа состояний N. Условие $16\pi^2/\gamma=2\pi N$, $N=8\pi/\gamma$ справедливо приближенно для больших N или малых γ. Величины α и β имеют конечное число значений, в первом приближении собственные значения β имеют вид $\beta_k=k$, $k=1,\ldots,N$; $k<8\pi/\gamma$. Другими словами, в квазиклассическом приближении массы двойных солитонов имеют конечное число значений $M_k=\frac{16m}{\gamma}\sin\frac{\gamma}{16}k$. Последняя формула справедлива, вообще говоря, при малых γ и больших k. Однако вследствие полной интегрируемости уравнения Sine — Gordon можно ожидать, что она имеет большую область применения и более того может быть вообще точна. В частности, предел M_1 при $\gamma\to 0$ дает значение $\lim\limits_{\to 0} M_1=m$, совпадающее с массой основной частицы. В недавнем препринте [20] Дашен, Хаслахер и Неве сделали предположение, что первое связанное состояние солитонов и основная частица совпадают во всех физических проявлениях. Аналогичный факт хорошо известен в случае нелинейного уравнения Шредингера [21, 22]. Ниже мы приведем еще несколько результатов, подтверждающих эту гипотезу.

Нам также понадобится решение, описывающее рассеяние двух солитонов. Выпишем его в явном виде. В случае одинаковых зарядов солитонов мы имеем

$$(4)\qquad u_2(x,t|p_1p_2q_1^0q_2^0++)=$$

$$=4\,\mathrm{arctg}\left[\mathrm{cth}\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\,\frac{\mathrm{ch}\dfrac{d_1-d_2}{2}}{\mathrm{sh}\left(\dfrac{d_1+d_2}{2}-\ln\mathrm{th}\dfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)}\right],$$

$$d_a=m\,\mathrm{ch}\,\psi_a(x-q_a^0)-m\,\mathrm{sh}\,\psi_a t,\qquad p_a=M\,\mathrm{sh}\,\psi_a.$$

В случае противоположных зарядов решение можно записать в виде

$$(5)\qquad u_2(x,t|p_1p_2q_1^0q_2^0+-)=$$

$$=4\,\mathrm{arctg}\left[\mathrm{cth}\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\,\frac{\mathrm{sh}\dfrac{d_1-d_2}{2}}{\mathrm{ch}\left(\dfrac{d_1+d_2}{2}-\ln\mathrm{th}\dfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)}\right].$$

Характерной чертой рассматриваемой системы является бесконечное число законов сохранения [4]. Их удобно описывать, отправляясь от законов сохранения для свободной системы $\Box u+m^2u=0$, которая (см. [9]) обладает бесконечным числом законов сохранения. Выпишем последние в явном виде:

$$P_{2n}=\int dx[{}^1/_2(\partial_t u_x^{(n)})^2+{}^1/_2(u_x^{(n+1)})^2+{}^1/_2m^2(u_x^{(n)})^2],$$

$$P_{2n+1}=\int dx[u_t u_x^{(2n+1)}],\quad n=0,1,\dots\,.$$

Законы сохранения для уравнения (1) получаются из выписанных прибавлением к плотностям членов, содержащих более высокие степени поля $u(x,t)$. Явный вид этих членов нам не понадобится. Наличие законов сохранения накладывает жесткие ограничения на динамику. Вариант приведенного ниже рассуждения был указан нам А. М. Поляковым.

Выразим законы сохранения уравнения (1) через in (out)-переменные. Предел при $t\to-\infty(\infty)$ будет совпадать со свободными законами. Это означает, что после взаимодействия остаются неизменными следующие суммы по всем частицам — солитонам, двойным солитонам и основным частицам:

$$\sum_a p_{a\,\mathrm{in}}^{2n+1}=\sum_a p_{a\,\mathrm{out}}^{2n+1},\qquad \sum_a (p_a^0 p_a^{2n})_{\mathrm{in}}=\sum_a (p_a^0 p_a^{2n})_{\mathrm{out}},$$

$$p_a^0=\sqrt{p_a^2+m_a^2},\quad n=0,1,\dots\,.$$

Разрешая эту систему уравнений, приходим к выводу, что число частиц каждого типа и их индивидуальные импульсы сохраняются после взаимодействия. Следовательно, S-матрица пропорциональна единичному оператору

$$\hat{S}=IS,\quad I=\operatorname{sym}\prod_{\alpha_i}\delta(p_{\mathrm{in}}^{i}-p_{\mathrm{out}}^{\alpha_i}). \tag{6}$$

Симметризация проводится по каждому типу частиц в отдельности в соответствии с их статистикой. Множитель S при I по модулю равен 1.

2. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим уточнение квазиклассического квантования. Для исследования квантовых поправок удобно использовать континуальный интеграл. Во-первых, в этом формализме мы сразу получаем сохранение заряда. Действительно, не существует непрерывной по времени траектории, соединяющей полевые конфигурации с различным зарядом Q (см. [10] о топологическом смысле этого утверждения). На разрывных же траекториях действие обращается в бесконечность, и их вклад в континуальный интеграл равен нулю. Во-вторых, континуальный интеграл позволяет развить теорию возмущений по константе связи γ, если воспользоваться методом стационарной фазы.

В этом и следующем разделах мы проиллюстрируем теорию возмущений на примере вычисления поправок к массе солитона, для вычисления которых можно использовать функцию Грина

$$G(p_1,t_1|p_2,t_2)=\int \Psi_{p_2}^*(u,t_2)\exp\left\{i\int_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}dt\right\}\Psi_{p_1}(u,t_1)\prod_{xt}du,$$

здесь $\Psi_p(u,t)$ — волновой функционал солитона с импульсом p в момент времени t. Мы, однако, не знаем явного вида $\Psi_p(u,t)$. Нельзя думать, что такой функционал просто связан с односолитонным классическим решением (2). Действительно, последнее содержит как импульс, так и координату солитона, а при квантовании вследствие принципа неопределенности информация об одной из этих наблюдаемых должна исчезнуть. Выход из указанной трудности подсказывает нерелятивистская квантовая механика одной частицы, в которой функция перехода $G(p_1, p_2)$ из состояния с определенным импульсом при $t=t_1$ в состояние с определенным импульсом при $t=t_2$ в главном порядке $T=t_2-t_1\to\infty$ получается из соответствующей функции перехода в координатном представлении $G(x_1, x_2)$ следующим образом. Необходимо положить $x_1=\dfrac{p_1}{m}t_1+x_1^0$, $x_2=\dfrac{p_2}{m}t_2+x_2^0$ и устремить $t_1\to-\infty$, $t_2\to+\infty$. Предел не зависит от x_1^0, x_2^0.

Поступим аналогично и в нашем случае. Функция Грина $G(p_1, t_1|p_2, t_2)$, описывающая переход из состояния «солитон с импульсом p_1 при $t=t_1$» в состояние «солитон с импульсом p_2 при $t=t_2$», в пределе $T\to\infty$ дается интегралом

$$(7)\qquad \int\exp\left\{i\int_{t_1} d^2x[\pi u_t-H]\right\}\prod_{xt} du\,d\pi,\qquad H=\frac{\gamma}{2}\pi^2+\frac{1}{2\gamma}u_x^2+\frac{m^2}{\gamma}V(u).$$

В (7) интегрирование ведется по полю $u(x, t)$ такому, что $u(x, t)=$ $=u_1(x, t|p_1, q_1^0)$ при $t=t_1$ и $u(x, t)=u_1(x, t|p_2, q_2^0)$ при $t=t_2$. Имея в виду общий характер рассуждений, мы пишем $V(u)$ вместо $1-\cos u$. Предел при $T\to\infty$ не зависит от q_1^0 и q_2^0. Вследствие сохранения импульса G должна быть пропорциональна $\delta(p_1-p_2)$:

$$(8)\qquad G(p_1, t_1|p_2, t_2)=\delta(p_1-p_2)F(p_1)$$

при $T\to\infty$. Убедимся в этом. Если $p_1\neq p_2$, то не существует классической траектории, имеющей заданные асимптотики, и $G=0$. Если $p_1=p_2$, то таких траекторий бесконечно много. Каждое односолитонное решение $u_1(x, t|$ $|p_1, q^0)$ при любом q^0 является такой траекторией. Действие на таких траекториях не зависит от q^0, и (7) пропорционально $\int dq^0=2\pi\delta(0)$. Указанное вырождение снимается, если перейти к подпространству с фиксированным полным импульсом. На языке континуального интеграла это можно сделать следующим образом (см. [5]). Рассмотрим произвольное дополнительное условие $\chi(u, \pi)$ такое, что $\{P_1, \chi\}\neq 0$, где P_1 — функционал полного импульса $P_1=\int\pi u_x dx$. Функция перехода между состояниями с импульсом p_1 дается интегралом

$$(9)\qquad \int\exp\left\{i\int_{t_1}^{t_2}[\pi u_t-H]\right\}\prod_t\delta(P_1-p_1)\,\delta(\chi)\,\{P_1, \chi\}\prod_{x,t}du\,d\pi.$$

Коэффициент F дается интегралом (9) при $u|_{t_1}=u_1(x, t|p_1, q_1^0)$, $u|_{t_2}=$ $=u_1(x, t|p_1, q_2^0)$ и при $T\to\infty$ не зависит от q_1^0, q_2^0, так что в дальнейшем положим $q_1^0=q_2^0=0$. Функция, задаваемая интегралом (9), лоренц-ковариантна и должна зависеть от T и p через комбинацию $M_q\sqrt{1-v^2}T=$ $=M_q^2T/\sqrt{p^2+M_q^2}$, где M_q — точная квантовая масса солитона. Мы проверили это утверждение по теории возмущений. Вычисления, приведенные ниже, сделаны в системе покоя $v=0$, где они существенно упрощаются. Положим в (9) $p=0$ и выберем в качестве дополнительного условия

$$(10)\qquad \chi=\int xH\,dx\Big/\int H\,dx.$$

Это условие удобно тем, что $\{P_1, \chi\}=1$. Сделаем в (9) замену переменных

$$(11)\qquad u=u_1(x)+\sqrt{\gamma}\,z(x, t),\quad \pi=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}w(x, t),\quad u_1(x)=u_1(x, t|00),$$

здесь функции z и w — отклонения от классической траектории. Ограничиваясь первыми двумя порядками по γ, имеем $F=F_{-1}\cdot F_0$, где

$$(12a)\qquad F_{-1}=\exp\{-iMT\},$$

$$F_0=\int \exp\left\{ i\int_{t_1}^{t_2} d^2x\,(wz_t-{}^1/_2w^2-{}^1/_2zKz)\right\}\prod_t \delta\left(\int_{-\infty}^{\infty} wu_{1x}(x)\,dx\right)\times$$

$$\times\,\delta\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\,(z_xu_{1x}+m^2V'(u_1)\,z)\,dx\right)\prod_x dz\,dw,$$

$$K=-\frac{d^2}{dx^2}+m^2V''(u_1(x)).$$

Преобразуем интеграл под второй δ-функцией:

$$\int x\,(z_xu_{1x}+m^2V'(u_1)\,z)\,dx=-\int zu_{1x}\,dx-\quad xz\,(u_{1xx}-m^2V'(u_1))\,dx.$$

Второе слагаемое в правой части обращается в нуль благодаря классическому уравнению. Окончательно имеем для F_0 выражение

$$\int \exp\left\{ i\int_{t_1}^{t_2} d^2x\,(z_tw-{}^1/_2w^2-{}^1/_2zKz)\right\}\times \tag{12б}$$

$$\times\prod_t \delta\left(\int wu_{1x}dx\right)\delta\left(\int zu_{1x}\,dx\right)\prod_x dz\,dw.$$

Заметим теперь, что $u_{1x}(x)$ — собственная функция K с нулевым собственным числом. Это общий факт, см. [8, 17]. Последний интеграл гауссов и равен

$$F_0=\exp\left\{-{}^1/_2\mathrm{Tr}'\ln\left(\frac{d^2}{dt^2}+K\right)\right\}. \tag{13}$$

Штрих означает, что вклад нулевого собственного значения в спектре не учитывается. Преобразуем $\mathrm{Tr}'\ln\left(\frac{d^2}{dt^2}+K\right)$. Для этого рассмотрим

$$L_\varepsilon=\mathrm{Tr}'\ln\left(\frac{d^2}{dt^2}+\varepsilon K\right),\quad F_0=\exp\{-{}^1/_2L_1\}.$$

Продифференцируем L_ε и получим

$$\frac{dL_\varepsilon}{d\varepsilon}=\mathrm{Tr}'\left(\frac{d^2}{dt^2}+\varepsilon K\right)^{-1}K=\mathrm{Tr}'\,\frac{e^{i\sqrt{\varepsilon K}(t-t')}}{2i\sqrt{\varepsilon K}}\cdot K.$$

Напомним, что K не зависит от t. Запишем выражение в правой части в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{e^{i\sqrt{\varepsilon K}\,(t-t')}}{2i\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{K}\,\Big|_{t=t'}=-\frac{i}{2\sqrt{\varepsilon}}\cdot T\cdot \mathrm{tr}'\sqrt{K}.$$

Проинтегрируем выражение в правой части по ε, положим $\varepsilon=1$ и получим

$$L_1=\mathrm{Tr}'\ln\left(\frac{d^2}{dt^2}+K\right)=-i\,\mathrm{tr}'\sqrt{K}\cdot T, \tag{14}$$

здесь tr' означает, что след берется лишь в x-пространстве, нуль в спектре K опускается. Преобразуем выражение в правой части (14) с помощью тождества следов для оператора Шредингера [6]:

$$\mathrm{tr}[W(K)-W(K_0)]=\frac{1}{2\pi i}\int d\lambda\,W'(\lambda)\ln\det S_\lambda+\mathrm{tr}_1, \tag{15}$$

здесь $K_0=-d^2/dx^2+m^2V''(0)$, W — произвольная функция, S_λ — матрица рассеяния оператора K, tr_1 — вклад от дискретного спектра. Мы не выписываем tr_1 явно, так как для $V(u)=1-\cos u$ дискретный спектр не дает вклада в tr'. Действительно, при таком потенциале

$$K=-\frac{d^2}{dx^2}+m^2-\frac{2m^2}{\mathrm{ch}^2 mx}. \tag{16}$$

Этот оператор имеет одно собственное число $\lambda=0$, вклад которого опускается. Непрерывный спектр K лежит на интервале $m^2<\lambda<\infty$. Потенциал в K безотражательный и S-матрица имеет вид

$$S=\begin{pmatrix} S_\lambda & 0 \\ 0 & S_\lambda \end{pmatrix}, \qquad S_\lambda=\frac{\sqrt{\lambda-m^2}+im}{\sqrt{\lambda-m^2}-im}$$

Вычислим F_0, используя (13), (14) и (15). После элементарных выкладок получим, что

$$F_0=\exp\left\{\frac{i}{2\pi^2}mD(0)T+i\frac{m}{\pi}T\right\}, \quad D(0)=\int\frac{d^2K}{k^2+m^2}. \tag{17}$$

Мы получили логарифмически расходящееся выражение, но на самом деле бесконечности устраняются. Напомним, что при квантовании основного поля в однопетлевом приближении также возникают выражения, пропорциональные $D(0)$. Эти бесконечности устраняются перенормировкой m^2. В разделе 3 показано, что эта же перенормировка устраняет расходимость в (17); после перенормировки оказывается, что

$$F_{-1}\cdot F_0=\exp\left\{-i\left(\frac{8m_r}{\gamma}-\frac{m_r}{\pi}+0(\gamma)\right)T\right\}.$$

Таким образом, масса солитона в однопетлевом приближении равна

$$M_q^0=8m_r/\gamma-m_r/\pi.$$

Для модели $\lambda\varphi^4$ аналогичная поправка вычислена в [15]. Заметим, что M_q^0 исчезает при $\gamma=8\pi$. Известно, что это значение γ критично для лагранжиана (1), см. [18, 13]. Дашен, Хаслахер и Неве предполагают, что эта формула точна. Для проверки этой гипотезы следует показать, что высшие поправки сводятся только к перенормировке. К сожалению, соответствующие вычисления весьма громоздки и мы их не проводим.

3. ПЕРЕНОРМИРОВКА

При подсчете квантовых поправок к различным величинам, характеризующим солитоны, возникают ультрафиолетовые расходимости (см., например, (17)). Мы должны вводить контрчлены в лагранжиан, для того чтобы их устранить. В том же порядке теории возмущений мы вынуждены вводить другие контрчлены. Они сокращают расходимости обычных диаграмм Фейнмана, возникающих при квантовании основного поля.

Первые и вторые контрчлены должны совпадать, иначе мы придем к противоречию. Докажем, что этого противоречия не возникает. Для этого рассмотрим производящий функционал S-матрицы основного поля [11]:

$$\int\exp\left\{\frac{i}{\gamma}\int d^2x[{}^1/{}_2(\partial_\mu u)^2-m^2V(u)]\right\}\prod_{xt}du, \tag{18}$$

здесь при $|t|\to\infty$ $u\to u_{\mathrm{as}}$, u_{as} — фиксированная асимптотика, $V''(0)=1$.

Рассмотрим также функцию распространения солитонов (в наивной формулировке)

$$(19)\qquad \int \exp\left\{\frac{i}{\gamma}\int_{t_1}^{t_2} d^2x\left[{}^1/{}_2(\partial_\mu u)^2-m^2V(u)\right]\right\}\prod_{xt} du,$$

здесь при $t=t_1, t_2$, $u=\sum_{a=1}^{A} u_1(x,t|p_a,q_a^0)$.

Будем вычислять оба интеграла методом стационарной фазы. Разложим показатель подынтегрального выражения (18) в ряд в окрестности u^{cl}, где

$$\Box u^{\mathrm{cl}}+m^2V'(u^{\mathrm{cl}})=0;\quad u^{\mathrm{cl}}\to u^{\mathrm{as}},\quad |t|\to\infty.$$

В (19) разложим действие в окрестности чисто солитонного решения u^{sol}. Оно удовлетворяет уравнению

$$\Box u^{\mathrm{sol}}+m^2V'(u^{\mathrm{sol}})=0;\quad u^{\mathrm{sol}}\to\sum_{a=1}^{A} u_1(x,t|p_a,q_a^0).$$

Оба выражения запишем в виде

$$(20)\qquad \exp\sum_{k=-1}^{\infty}\gamma^k g_k,$$

здесь g_k при $k\geqslant 0$ — сумма связных $k+1$-петлевых вакуумных графиков, в которых пропагаторы и вершины задаются соответственно выражениями:

$$(21)\qquad [\Box+m^2V''(u^{\mathrm{cl}})]\Delta_1=\delta^2(x-y),\quad V_k=\gamma^{k/2-1}\left.\frac{\delta^k\int d^2xV(u)}{\delta u^k}\right|_{u=u^{\mathrm{cl}}}$$

для (18) и

$$(22)\qquad [\Box+m^2V''(u^{\mathrm{cl}})]\Delta_2=\delta^2(x-y),\quad V_k=\gamma^{k/2-1}\left.\frac{\delta^k\int d^2xV(u)}{\delta u^k}\right|_{u=u^{\mathrm{sol}}}$$

для (19).

Из проведенной аналогии ясно, что если в l-м порядке теории возмущений в (18) возникает расходимость $i\gamma^l\ln\Lambda\int C(u^{\mathrm{cl}})d^2x$, то в (19) в этом же порядке возникает бесконечность $i\gamma^l\ln\Lambda\int C(u^{\mathrm{sol}})d^2x$. Обе бесконечности устраняются добавлением одного контрчлена $-\gamma^{l+1}\ln\Lambda\int d^2xC(u)$ в исходный лагранжиан.

Уточним сказанное на примере однопетлевого приближения. Интеграл (18) сводится в этом приближении к

$$(23)\qquad \exp\left\{-{}^1/{}_2\,\mathrm{Tr}\ln\left(\Box+m^2V''(u^{\mathrm{cl}})\right)\right\},$$

а (19) к

$$(24)\qquad \exp\left\{-{}^1/{}_2\,\mathrm{Tr}\ln\left(\Box+m^2V''(u^{\mathrm{sol}})\right)\right\}.$$

Ультрафиолетовая расходимость в (23) имеет вид

$$\exp\left\{-\frac{im^2}{8\pi^2}D(0)\int d^2x[V''(u^{\mathrm{cl}})-1]\right\},$$

а в (24) это

$$\exp\left\{-\frac{im^2}{8\pi^2}D(0)\int d^2x[V''(u^{\mathrm{sol}})-1]\right\}.$$

Бесконечности устраняются добавлением в исходной лагранжиан контрчлена

$$\frac{\gamma m^2}{8\pi^2}D(0)\int d^2x[V''(u)-1].$$

Легко показать, что при учете такого контрчлена в (17) F_0 обратится в $\exp\left\{i\frac{m}{\pi}T\right\}$.

Приведенные рассуждения имеют общий характер и могут быть применены к произвольной модели.

Отметим в заключение, что для уравнения «Sine-Gordon» все расходимости устраняются мультипликативной перенормировкой

$$m_r^2=m^2\exp\left\{\frac{\gamma}{8\pi^2}D(0)\right\},$$

см. также [7].

4. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ СОЛИТОНОВ

В этом разделе мы обсудим квазиклассическое приближение для S-матрицы солитонов и пути получения квантовых поправок к нему (см. [19]). Мы рассмотрим подробно случай двух простых солитонов, о более общих процессах скажем несколько слов в конце раздела. Квазиклассическое приближение можно сосчитать, отправляясь от известного описания рассеяния в классике. Последнее основано на знании точных решений классических уравнений, описывающих взаимодействие произвольного количества солитонов [4]. Результат в случае двух солитонов выглядит так.

1. Солитоны разных зарядов. Решение (5) при $|t|\to\infty$ имеет следующие асимптотики:

$$u_2(x,t|p_1p_2q_1^0q_2^0+-)=\begin{cases}u_1(x,t|p_1^-q_1^-+)+u_1(x,t|p_2^-q_2^--), & t\to-\infty;\\ u_1(x,t|p_1^+q_1^++)+u_1(x,t|p_2^+q_2^+-), & t\to\infty;\end{cases}\tag{25}$$

$$p_1^-=p_1^+,\ p_2^-=p_2^+,\ q_1^+=q_1^-+\frac{\partial}{\partial p_1^-}K(p_1^-,p_2^-),$$

$$q_2^+=q_2^-+\frac{\partial}{\partial p_2^-}K(p_1^-,p_2^-);$$

$$K(p_1,p_2)=K(\zeta)=i\frac{8}{\gamma}\int_0^\pi d\theta\ln\frac{\zeta e^{-i\theta}+1}{\zeta+e^{-i\theta}},\quad p_1^-=p_1,\quad p_2^-=p_2;$$

$$\zeta=\frac{s-2M^2+\sqrt{s(s-4M^2)}}{2M^2},\quad s=(p_1^0+p_2^0)^2-(p_1+p_2)^2;\quad s>4M^2.$$

Корни в последней формуле арифметические. Мы видим, что при столкновении солитонов они проходят друг сквозь друга и все рассеяние сводится к изменению их положений; более быстрый сдвигается вперед вдоль своего импульса. Это соответствует притяжению. Формула (25) представляет собой запись канонического преобразования, порожденного гамильтонианом $K(p_1, p_2)$.

2. Солитоны одинаковых зарядов. Решение (4) описывает столкновение одинаковых солитонов, после которого они упруго отражаются. В этом можно убедиться, рассматривая эволюцию решения. Если импульсы частиц различного знака, то решение (4) при $t\to-\infty$ имеет следующую асимптотику:

$$u_2(x, t\,|\,p_1p_2q_1^0q_2^0++)\to u_1(x, t\,|\,p_1^-q_1^-+)+u_1(x, t\,|\,p_2^-q_2^-+);$$
$$p_1^-=p_1,\quad p_2^-=p_2;$$

так что плотность энергии имеет два максимума: первый при $x\to-\infty$, второй при $x\to\infty$. С ростом времени они сближаются, останавливаются и разлетаются в обратную сторону. Асимптотика при $t\to\infty$ имеет вид

$$u_2(x, t\,|\,p_1p_2q_1^0q_2^0++)\to u_1(x, t\,|\,p_1^+q_1^++)+u_1(x, t\,|\,p_2^+q_2^++), \tag{26}$$

где $p_1^+=p_2^-$, $p_2^+=p_1^-$, $q_1^+=q_2^-+\partial K/\partial p_2^-$, $q_2^+=q_1^-+\partial K/\partial p_1^-$. $K(p_1^-, p_2^-)$ та же функция, что и в случае 1. При этом мы расставили номера у солитонов, учитывая, что после столкновения они отразились, а не прошли друг сквозь друга.

Квазиклассическая S-матрица возникает при квантовании описанных канонических преобразований. Соответствующие формулы имеют вид

$$\begin{gathered}S_{+-}^{\mathrm{cl}}(p_1^-, p_2^-, p_1^+, p_2^+)=\delta(p_1^--p_1^+)\,\delta(p_2^--p_2^+)\,S_-^{\mathrm{cl}}(s),\\ S_{++}^{\mathrm{cl}}(p_1^-, p_2^-, p_1^+, p_2^+)=\delta(p_1^--p_2^+)\,\delta(p_2^--p_1^+)\,S_+^{\mathrm{cl}}(s),\\ S_-^{\mathrm{cl}}(s)=\exp\{-iK(\zeta)+ic_1\},\qquad S_+^{\mathrm{cl}}(s)=\exp\{-iK(\zeta)+ic_2\},\end{gathered}\tag{27а}$$

где мы добавили константы интегрирования c_1 и c_2 к фазе $K(\zeta)$, нормированной условием $K(1)=0$.

Альтернативный способ вывода (27а) основан на общем определении S-матрицы [11] в терминах континуального интеграла по траекториям с классическими асимптотиками. В случае двух солитонов метод стационарной фазы сводится к подсчету асимптотики укороченного действия A между t_1 и t_2 на решениях (5) и (4) при $t_2-t_1\to\infty$. Вычисления, проведенные в системе центра масс, показывают, что

$$\begin{gathered}A[u_2(++)]=-K(\zeta)+2p\Delta q,\\ A[u_2(+-)]=-K(\zeta)+8\pi^2/\gamma+2p\Delta q,\\ \Delta q=v(t_2-t_1)+\frac{16}{\gamma}\frac{\sqrt{1-v^2}}{M}\ln\frac{1}{v},\qquad v=\frac{p}{\sqrt{p^2+M^2}}\end{gathered}\tag{27б}$$

здесь Δq — изменение координаты солитона за время t_2-t_1. Из опыта нерелятивистской квантовой механики следует, что последнее слагаемое в (27б) следует вычесть, остаток представляет собой фазу рассеяния. Сравнивая (27а) и (27б), мы убеждаемся, что $c_1=8\pi^2/\gamma$, $c_2=0$. Этот результат и его интерпретация впервые получены Джакивым и Ву [23].

Формула (25) дает возможность аналитически продолжить введенные $S_\pm(s)$ из физической области $s>4M^2$ в комплексную плоскость с разрезом по вещественной оси при $s>4M^2$, $s<0$. При этом $S_\pm(s)$ не будет вещественна в лакуне $0<s<4M^2$. Мы интерпретируем это как проявление накопления полюсов, соответствующих связанным состояниям солитонов. Действительно, число N связанных состояний стремится к бесконечности при $\gamma\to 0$. Высшие поправки должны привести к замене ложного разреза в лакуне конечным числом полюсов.

Отмеченное обстоятельство мешает непосредственной проверке кроссинга. Можно, однако, воспользоваться эрмитовой аналитичностью и записать условие кроссинга в виде

$$S_+(4M^2-s+i0)=S_-^*(s+i0). \tag{28}$$

Нетрудно убедиться, что эта формула действительно выполняется в нашем приближении. Указанное рассуждение впервые опубликовано Коулменом в приложении к [23].

Попробуем восстановить полную квантовую S-матрицу, исходя из ее квазиклассического выражения. В силу сказанного в разделе 3 учет квантовых поправок сводится к замене $S_-^{\mathrm{cl}}(s)$ функцией $S_-(s)$ вида

$$S_-(s)=S_-^{\mathrm{cl}}(s)\exp\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^k g_k(s), \tag{29}$$

здесь $g_k(s)$ — сумма $k+1$-петлевых связных вакуумных графиков перенормированной теории возмущений, которая строится аналогично теории возмущений (20)—(22). Отметим, что $\operatorname{Re} g_k(s)=0$ при $s<0$ и при $s>4M^2$.

Мы не смогли получить сколько-нибудь явных формул для квантовых поправок с помощью этой диаграммной техники, кроме исследования некоторых асимптотик (обещающий подход к этой задаче содержится в [20]). Посмотрим поэтому, нельзя ли сказать что-нибудь о квантовых поправках, исходя из общих требований аналитичности и унитарности. Квазиклассическая S-матрица обладает одним неудовлетворительным свойством — она не вещественна в лакуне; квантовые поправки, очевидно, должны исправить этот недостаток. Посмотрим внимательнее на выражение для $S_-^{\mathrm{cl}}(s)$ в лакуне. После замены переменной получим ($s=4M^2\cos^2\nu/2$, $0<\nu<\pi$)

$$S_-^{\mathrm{cl}}=\exp\left\{\frac{N}{\pi}\int_0^\pi d\theta\ln\frac{\zeta e^{-i\theta}+1}{\zeta+e^{-i\theta}}+iN\pi\right\}=$$
$$=\exp\left\{iN\nu+iN\pi+\frac{N}{\pi}\int_0^\pi d\theta\ln\left|\frac{\cos\frac{\theta-\nu}{2}}{\cos\frac{\theta+\nu}{2}}\right|\right\},\qquad N=\frac{8\pi}{\gamma}. \tag{30}$$

Первое слагаемое в показателе и дает нежелательную комплексность. Квантовые поправки не могут уничтожить, поскольку оно имеет порядок N (29). Итак, фаза квантовой матрицы рассеяния $S_-(s)$ представляет собой величину порядка N и $\operatorname{Im} S_-(s)=0$ (в лакуне). Это, по-видимому, означает, что в показателе степени $S_-(s)$ стоит функция $h(\nu)$, которая кусочно постоянна и имеет скачки, равные $i\pi$ в точках θ_k, число которых равно N. Пример такой функции $h(\nu)$ выглядит следующим образом: точки скачков расположены равномерно, $\theta_k=\pi k/N$, $h(0)=0$.

Так как в физической области $S_-(s)$ унитарна в любом порядке и имеет правильные аналитические свойства, то по заданной функции $h(\nu)$, $\ln S_-(s)$ восстанавливается однозначно с точностью до известного полиномиального произвола. Для приведенной $h(\nu)$ функция $S_-(s)$ имеет вид

$$S_-(s)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{N}\ln\frac{\zeta e^{-i\theta_k}+1}{\zeta+e^{-i\theta_k}}+i\pi N\right\},\ \theta_k=\pi k/N,\, k=1,\ldots;\, k<8\pi/\gamma.$$

Заметим, что сумма в показателе является интегральной для интеграла в формуле (30). Перепишем $S_-(s)$ в виде

$$S_-(s)=e^{iN\pi}\prod_{k=1}^{N}\frac{\zeta e^{-i\theta_k}+1}{\zeta+e^{-i\theta_k}}. \tag{31}$$

Она имеет полюса первого порядка в точках $s_k=4M^2\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}$, т. е. в точках, соответствующих массам двойных солитонов в квазиклассическом приближении. Заметим, что если бы функция $h(\nu)$ имела скачок $il\pi$ (l целое), то $S_-(s)$ имела бы полюс l-го порядка.

Мы не можем, конечно, гарантировать, что $S_-(s)$ сведется к описанной модификации функции $S_-^{\mathrm{cl}}(s)$, однако возможные кандидаты на роль функции $h(\nu)$ не могут слишком сильно отличаться от выбранного нами примера. Так, точки деления θ_k должны располагаться достаточно равномерно в интервале $[0, \pi]$. Мы предполагаем, что формула (31) точна для $\gamma=8\pi/N$, $N=2, 3, \ldots$.

Случай рассеяния A солитонов рассматривается аналогично. Классическое рассеяние A солитонов сводится к процессу последовательного рассеяния солитонов друг на друге [16, 4], и квазиклассическое выражение для S-матрицы имеет в случае солитонов одинакового заряда вид

$$\exp\left\{-\frac{i}{2}\int K(p_1, p_2)\frac{dp_1\,dp_2}{p_1^0p_2^0}:\rho(p_1)\rho(p_2):\right\},\quad \rho(p)=a^+(p)a(p),$$
$$[a(p_1, a^+(p_2)]=p_1^0\delta(p_1-p_2).$$

Аналогичная формула имеет место и для солитонов произвольных зарядов, S-матрица равна произведению попарных S-матриц.

Перейдем теперь к случаю рассеяния двойных солитонов. Соответствующее классическое решение в системе $\eta=0$ периодично по времени с периодом $2\pi/m\cos\theta$ [4]. Для начала вычислим функцию распространения двойного солитона в квазиклассическом приближении.

Поступая так же, как и в разделе 2 (см. (8)), получаем

$$G(p_1, t_1|p_2, t_2)=\delta(p_1-p_2)F_{-1}(p_1, \theta),$$

где

$$F_{-1}(p, \theta)=U(t_1, t_2, \theta, p)\exp\{-i2M\sin\theta\sqrt{1-v^2}\,T\},\ p=\frac{2M\sin\theta v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Явный вид U нам не нужен, отметим, что $|U|=1$ и в системе центра масс U квазипериодичен по t_1 и t_2:

$$U\left(t_1+\frac{2\pi}{m\cos\theta}, t_2, \theta, 0\right)=e^{i\varepsilon}U(t_1, t_2, \theta, 0),$$

где $\varepsilon=32\pi\theta/\gamma$.

Функция U не дает вклада в коэффициент при T и тем самым не модифицирует массу только в случае, если U точно периодично, т. е. если

(32) $\quad \varepsilon=2\pi k, \quad \theta_k=\gamma k/16.$

Заметим, что условие (32) эквивалентно квантованию периодических орбит Бора — Зоммерфельда. Мы получили еще одно подтверждение для квазиклассического спектра двойного солитона

$$M_k=\frac{16m}{\gamma}\sin\theta_k, \qquad \theta_k=\frac{\gamma}{16}k.$$

Перейдем теперь к выражению для S-матрицы и приведем без вывода квазиклассический ответ для рассеяния двойных солитонов с внутренними импульсами θ_k и θ_n:

(33)
$$\exp\left\{-i\left[K(\zeta e^{i(\theta_k-\theta_n)})+K(-\zeta e^{-i(\theta_k+\theta_n)})+K(-\zeta e^{i(\theta_k+\theta_n)})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+K(\zeta e^{i(\theta_n-\theta_k)})-\frac{16\pi^2}{\gamma}\right]\right\}$$

$$\left(=\exp\left\{2\frac{N}{\pi}\int_0^{\pi/N}d\theta\ln\frac{\zeta^2-1+2i\zeta\cdot\sin\theta}{\zeta^2-1-2i\zeta\cdot\sin\theta}\right\}\text{ при } k=n=1\right),$$

$$\zeta=\frac{s-M_k^2-M_n^2}{2M_kM_n}+\sqrt{\left(\frac{s-M_k^2-M_n^2}{2M_kM_n}\right)^2-1},$$

где K та же самая, что и в формуле (27).

Приведем также квазиклассическую матрицу рассеяния двойного солитона с внутренним импульсом θ_k и простого солитона:

(34)
$$\exp\left\{-iK(\zeta e^{i(\pi/2-\theta_k)})-iK(\zeta e^{i(\theta_k-\pi/2)})+i\frac{8\pi^2}{\gamma}\right\},$$

$$\zeta=\frac{s-M^2-M_k^2}{2MM_k}+\sqrt{\left(\frac{s-M^2-M_k^2}{2MM_k}\right)^2-1}.$$

В заключение рассмотрим рассеяние частицы основного поля на солитоне. Элемент S-матрицы пропорционален единичному оператору (6). Разрешая условие аналитичности и унитарности [12], получим для коэффициента при нем

(35) $$S=\frac{g(x)\sqrt{m^2-x}+1}{g(x)\sqrt{m^2-x}-1}, \qquad x=\left(\frac{s-m^2-M^2}{2M}\right)^2$$

здесь $g(x)$ разлагается по положительным степеням γ. Как функция своего аргумента $g(x)$ имеет вид

$$g(x)=R_0-\sum_n \frac{R_n}{e_n{}^2-x}, \qquad R_n>0.$$

Покажем, что в низшем порядке по γ, $g(x)$ равно $g=1/m$. Выражение для производящего функционала функции Грина имеет вид $\delta(p_{\rm in}^{\rm sol}-p_{\rm out}^{\rm sol})F$ (8) где

$$F=\int \exp\left\{i\int d^2x[\pi u_t-H]+\frac{i}{\gamma}\int d^2x\, j(x)\,(u-u_1)\right\}\times$$
$$\times\prod_t \delta(P_1)\,\delta(\chi)\,\{P_1,\chi\}\prod_x du\,d\pi.$$

Мы взяли неподвижный солитон. Считая интеграл методом стационарной фазы и учитывая лишь первый порядок, получим

$$F_{-1}=\exp\left\{i\int dt\,\mathscr{L}(u^{\rm cl})+\frac{i}{\gamma}\int d^2x\,(u^{\rm cl}-u_1)\,j(x)\right\},$$
$$\Box u^{\rm cl}+m^2\sin u^{\rm cl}=-j(x), \quad u^{\rm cl}(\infty,t)-u^{\rm cl}(-\infty,t)=2\pi.$$

Продифференцируем дважды по току и получим для функции Грина «солитон — основная частица» выражение

$$F_{-1}=\exp\{-iMT\}\,\Delta_2(x_1,t_1\,|\,x_2,t_2),$$

где

$$\left(\Box+m^2-\frac{2m^2}{\operatorname{ch}^2 mx}\right)\Delta_2=\delta(x-y)-\frac{1}{\gamma M}u_{1x}(x)\,u_{1y}(y),$$
$$\int u_{1x}(x)\,\Delta_2(x,y)\,dx=0.$$

Перейдем к S-матрице с помощью формул приведения и получим, что она равна

$$\hat S=I\frac{p+im}{p-im},$$

здесь p — импульс частицы. Отсюда непосредственно получается указанное выражение для $g(x)$.

Вернемся к гипотезе Дашена, Хаслахера, Неве о совпадении основной частицы с первым состоянием двойного солитона. В духе этой гипотезы должны совпадать: 1) S-матрица двух двойных солитонов с $\theta=\pi/2N$ и S-матрица двух основных частиц, 2) S-матрица солитона и двойного солитона с $\theta=\pi/2N$ и S-матрица солитона и основной частицы. Проверим это в низшем порядке по γ. Три из упомянутых S-матриц приведены выше, четвертая (две основных частицы) — в работе [7]. Проверка сводится к разложению выражений вида $K(-\zeta e^{-i\pi/N})$ по степеням $1/N=\gamma/8\pi$, например,

$$K(-\zeta e^{-i\pi/N})=K(-\zeta)-2i\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1}+O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Вычисляя (33) в низшем порядке по γ, получаем

$$1+i\frac{m^2\gamma}{2\sqrt{s(s-4m^2)}},$$

что, очевидно, совпадает с Борновским выражением для S-матрицы основных частиц. Выражение (34) в низшем порядке по γ равно

$$\frac{\sqrt{m^2-x}+m}{\sqrt{m^2-x}-m}$$

что совпадает с (35).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы надеемся, что нам удалось убедить читателя, что рассматриваемая одномерная нелинейная модель теории поля обладает рядом привлекательных свойств. Отметим некоторые из них.

1. Лагранжиан теории содержит только одно поле, но появляется целый спектр частиц. В приближении слабого взаимодействия солитоны — тяжелые частицы и сильно взаимодействуют.

2. Солитоны обладают квантовым числом, имеющим топологическую природу, которое может быть истолковано как заряд. Солитоны с одинаковым зарядом отталкиваются, с различным зарядом притягиваются.

3. В приближении слабого взаимодействия существует рецепт вычисления по теории возмущений. Квантовые поправки малы при малых константах взаимодействия, и весь неаналитический вклад в физические величины определяет квазиклассика.

Содержание этой работы многократно обсуждалось и корректировалось с нашими коллегами И. Я. Арефьевой, П. П. Кулишом, В. Н. Поповым и Л. А. Тахтаджяном. Мы выражаем им глубокую благодарность. Статья была частично переработана после научной командировки одного из авторов (Л. Д. Фаддеева) в США, где она обсуждалась с Р. Дашеном, Р. Джакивом, С. Коулменом, А. Неве и Б. Хаслахером.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
2 апреля 1975 г.

Литература

[1] Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тахтаджян. УМН, **29**, 249, 1974.
[2] В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. ДАН СССР, **219**, 1334, 1974.
[3] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. ТМФ, **21**, 160, 1974.
[4] Л. А. Тахтаджян. ЖЭТФ, **66**, 476, 1974.
[5] Л. Д. Фаддеев. ТМФ, **1**, 3, 1969.
[6] Л. Д. Фаддеев, В. С. Буслаев. ДАН СССР, **132**, 13, 1960.
[7] И. Я. Арефьева, В. Е. Корепин. Письма в ЖЭТФ, **20**, 680, 1974.
[8] J. Goldstone, R. Jackiv. Preprint 443, Mass. Inst. of Tech. Cambridge, Massachusetts, 1974.
[9] П. П. Кулиш. Препринт ИФВЭ, СТФ 74-155, Серпухов, 1974.
[10] D. Finkelstein. J. Math. Phys., **7**, 1216, 1966.
[11] И. Я. Арефьева, А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев. ТМФ, **21**, 311, 1974.
[12] L. Castillego, R. H. Dalits, F. J. Dyson. Phys. Rev., **101**, 453, 1956.
[13] S. Coleman. Preprint, Harvard University, 1974.
[14] Л. Д. Фаддеев. Современные проблемы математики, т. 3, М. ВИНИТИ, 1974.
[15] R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu. Phys. Rev., **D10**, 4114, 4130, 1974.
[16] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. ЖЭТФ, **61**, 118, 1971.

[17] R. Jackiv. Preprint 453, Mass. Inst. of Tech. Cambridge, Massachusetts, 1974.
[18] T. H. R. Skyrme. Proc. Roy. Soc., **A262**, 237, 1961.
[19] В. Е. Корепин, П. П. Кулиш, Л. Д. Фаддеев. Письма в ЖЭТФ, **21**, 302, 1975.
[20] R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu. Preprint C002220–37, Princeton, 1975.
[21] В. Е. Захаров, С. В. Манаков. ТМФ, **19**, 332, 1974.
[22] П. П. Кулиш, С. В. Манаков, Л. Д. Фаддеев. Препринт ИТФ-17, Черноголовка, 1975.
[23] R. Jackiv, G. Woo. Preprint 469, Mass. Inst. of Tech. Cambridge, Massachusetts, 1974.

QUANTIZATION OF SOLITONS

V. E. Korepin, L. D. Faddeev

The quantization of particle-like solutions is considered on the example of the Sine-Gordon equation. Quasi-classical approximation is shown to be good when the coupling constant is small. Quantum corrections are calculated with the aid of the functional integral.