Т. А. Болохов, Л. Д. Фаддеев, Инфракрасные переменные для $SU(3)$ поля Янга–Миллса, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 2, 276–290

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/tmf51

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 139, № 2
май, 2004

Т. А. Болохов*, Л. Д. Фаддеев*

ИНФРАКРАСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ДЛЯ $SU(3)$ ПОЛЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Самодуальная параметризация $SU(2)$ поля Янга–Миллса, предложенная Ниеми и Фаддеевым для описания инфракрасного предела теории, обобщается на случай калибровочной группы $SU(3)$. Показано, что простая дуальность калибровочного поля $SU(2)$ не переносится буквально на старший ранг. Алгебраические структуры, возникающие в лагранжиане для новых компактных переменных, интерпретируются в терминах произведения групп $SU(2)^{\otimes 3}$.

Ключевые слова: поле Янга–Миллса, компактные переменные, дуальность, струноподобные солитоны, формы Кириллова, максимальная абелева калибровка.

1. ВВЕДЕНИЕ

В серии работ [1]–[3] Ниеми и Фаддеев рассматривали варианты замены независимых переменных для теории Янга–Миллса, при которых использовались полевые величины с компактными значениями. В случае группы $SU(2)$ такой переменной является поле $\mathbf{n}(x)$ со значениями на двумерной сфере S^2. Вариант, предложенный в работах [1], [2], был основан на использовании связности Чо [4] для калибровочной группы $SU(2)$ и ее обобщения на старшие ранги. Вариант замены переменных из работы [3], развитый для случая $SU(2)$, существенно отличется от предыдущего и, как сейчас нам представляется, более адекватно описывает теорию в инфракрасном пределе.

В этой работе мы рассматриваем обобщение второго подхода на случай калибровочной группы $SU(3)$. Перенос нашего предложения на ранг более двух не представляет принципиальных трудностей, и мы ограничиваемся примером группы $SU(3)$, для того чтобы не перегружать явные формулы.

При заменах переменных, предложенных в работах [1]–[3], поле $\mathbf{n}$ возникает в лагранжиане Янга–Миллса посредством структур

$$
\begin{aligned}
e_2 &= (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \\
e_4 &= (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}, \mathbf{n})^2.
\end{aligned}
$$

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: timur@pdmi.ras.ru, faddeev@pdmi.ras.ru

Как показано в работах [5]–[7], лагранжиан

$$\mathcal{L} = a(\partial_\mu \mathbf{n})^2 + b(\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}, \mathbf{n})^2 \tag{1}$$

допускает решения в виде стационарных струноподобных солитонов.

Основным стимулом работ [1]–[3] была гипотеза о том, что такие возбуждения остаются и в полной теории Янга–Миллса. С этой точки зрения естественно посмотреть, как поле $\mathbf{n}(x)$ и структура $ae_2 + be_4$ обобщаются на старший ранг.

В варианте работы [3] появились два набора переменных типа $\mathbf{n}(x)$, которые мы назвали “электрическими” и “магнитными”. Оба набора переменных вошли в лагранжиан Янга–Миллса сходным образом, что позволило авторам говорить о новой дуальности. Как мы покажем здесь, простая дуальность калибровочного поля $SU(2)$ не переносится буквально на старший ранг. Лагранжиан “электрических” переменных образует более сложное выражение по сравнению с “магнитными”, и, кроме того, появляется дополнительная угловая “электрическая” переменная, для которой нет соответствующей “магнитной” величины. Более подробно этот вопрос будет обсуждаться ниже после написания явных формул.

В разделе 2 при помощи техники максимальной абелевой калибровки [8] воспроизводятся результаты работы [3]. В разделе 3 приводится описание параметризации $SU(3)$ поля Янга–Миллса. Раздел 4 дает алгебраическую интерпретацию обобщения модельного лагранжиана (1).

В работе приняты следующие обозначения. Греческие индексы μ, ν, λ отвечают координатам пространства-времени, латинские индексы k, l обозначают пространственные координаты, индексы a, b, c нумеруют весовые векторы алгебры $su(3)$. По повторяющимся внутренним индексам производится суммирование, при этом некоторые знаки сумм указаны явно. Квадраты и квадраты модулей выражений считаются содержащими повторяющиеся индексы, в частности

$$a_\mu b_\mu \equiv -a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$
$$|a_\mu b_\nu - c_\mu d_\nu|^2 \equiv \sum_{\mu,\nu} (a_\mu b_\nu - c_\mu d_\nu)(\bar{a}_\mu \bar{b}_\nu - \bar{c}_\mu \bar{d}_\nu).$$

2. ЛАГРАНЖИАН $SU(2)$ ПОЛЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Здесь мы приведем основные результаты и выводы статьи [3] в виде, удобном для дальнейшего обобщения.

Лагранжиан поля Янга–Миллса инвариантен по отношению к преобразованиям некоммутативной калибровочной группы. В этой группе можно выбрать абелеву подгруппу, порождаемую экспонентами элементов (с коэффициентами, зависящими от координат) подалгебры Картана соответствующей алгебры Ли. Калибровочные преобразования, производимые такой подгруппой, будем называть абелевыми преобразованиями.

В статье [3] лагранжиан $SU(2)$ теории Янга–Миллса выражается через величины, инвариантные относительно абелевых преобразований. При определенном выборе новых переменных получающийся лагранжиан содержит в себе выражение, сходное с модельным лагранжианом (1). Напомним эту технику, с тем чтобы далее обобщить ее на случай группы $SU(3)$.

Пусть $A_\mu(x)$ – поле Янга–Миллса, $\mu = 0,1,2,3$; $A_\mu(x) \in su(2)$. В качестве базиса алгебры $su(2)$ естественно выбрать матрицы

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица σ_3 образует базис подалгебры Картана алгебры $su(2)$ и, как было определено выше, участвует в абелевых преобразованиях:

$$A_\mu \to e^{i\beta'\sigma_3} A_\mu e^{-i\beta'\sigma_3} - \partial_\mu \beta' \sigma_3. \tag{2}$$

Разложим поле A_μ на картанову компоненту A^3_μ и комплексную компоненту B_μ, отвечающую корневому вектору:

$$A_\mu = A^3_\mu \sigma_3 + B_\mu \sigma_+ + \overline{B}_\mu \sigma_-.$$

Это разложение соответствует максимальной абелевой калибровке, которая часто используется в решеточных моделях [8]. По отношению к абелевым преобразованиям (2) компонента B_μ ведет себя как заряженное поле:

$$B_\mu \to e^{2i\beta'} B_\mu,$$

а A^3_μ – как абелево калибровочное поле:

$$A^3_\mu \to A^3_\mu - \partial_\mu \beta'.$$

В переменных A^3_μ, B_μ лагранжиан $SU(2)$ поля Янга–Миллса выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\operatorname{tr}\bigl([\partial_\mu + iA_\mu, \partial_\nu + iA_\nu]\bigr)^2 = \\ &= \bigl((\partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu) + i(B_\mu \overline{B}_\nu - \overline{B}_\mu B_\nu)\bigr)^2 + \nabla_\mu B_\nu \overline{\nabla}_\mu \overline{B}_\nu - \nabla_\mu B_\nu \overline{\nabla}_\nu \overline{B}_\mu, \end{aligned} \tag{3}$$

где ∇_μ – действие абелевой части ковариантной производной, т.е.

$$\nabla_\mu B = (\partial_\mu + 2iA^3_\mu)B.$$

Путем добавления к лагранжиану фиксирующих калибровку слагаемых $|\nabla_\mu B_\mu|^2$ можно избавиться от "нежелательных" перекрестных членов $\nabla_\mu B_\nu \overline{\nabla}_\nu \overline{B}_\mu$, в результате чего лагранжиан (3) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{L}_{\mathrm{g}} = \int \mathcal{L} + |\nabla_\mu B_\mu|^2 = \int \bigl((\partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu)^2 - (B_\mu \overline{B}_\nu - \overline{B}_\mu B_\nu)^2 + \\ + 4i(\partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu)(B_\mu \overline{B}_\nu - \overline{B}_\mu B_\nu) + |\nabla_\mu B_\nu|^2\bigr). \end{aligned} \tag{4}$$

Мы ввели здесь знаки интеграла, так как данное равенство использует интегрирование по частям.

Комбинация

$$J_\mu = \frac{i}{2\rho^2}(\partial_\mu \overline{B}_\nu B_\nu - \partial_\mu B_\nu \overline{B}_\nu),$$

где $\rho^2 = B_\nu \overline{B}_\nu$, при абелевых преобразованиях (2) ведет себя как $-2A^3_\mu$, следовательно, замена

$$C_\mu = A^3_\mu + \frac{1}{2} J_\mu \tag{5}$$

позволяет избавиться от абелево-неинвариантного поля A^3_μ. В терминах переменных C_μ, J_μ последнее слагаемое в выражении (4) переписывается следующим образом:

$$|\nabla_\mu B_\nu|^2 = |\partial_\mu B_\nu|^2 - \rho^2 J^2_\mu + 4\rho^2 C^2_\mu. \tag{6}$$

В случае общего положения векторы $B_\mu, \overline{B}_\mu$ определяют двумерную плоскость в четырехмерном пространстве-времени. Пусть комплексные векторы $\mathbf{e}_\mu$, $\bar{\mathbf{e}}_\mu$ образуют базис в этой плоскости, т.е. подчиняются условиям

$$\mathbf{e}_\mu, \bar{\mathbf{e}}_\mu : \quad \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\mu = 0, \quad \mathbf{e}_\mu \bar{\mathbf{e}}_\mu = 1. \tag{7}$$

Тогда с помощью введенной ранее плотности ρ для вектора B_μ можно записать следующее разложение:

$$B_\mu = \rho(\cos\alpha\, e^{i\beta + i\gamma}\mathbf{e}_\mu + \sin\alpha\, e^{i\beta - i\gamma}\bar{\mathbf{e}}_\mu). \tag{8}$$

Единственной абелево-неинвариантной величиной здесь является угол β: преобразование (2) добавляет к нему слагаемое $2\beta'$.

Разложение (8) определено с точностью до поворота базиса $\mathbf{e}_\mu$, $\bar{\mathbf{e}}_\mu$:

$$\begin{gathered} \gamma \to \gamma + \gamma', \\ \mathbf{e}_\mu \to e^{-i\gamma'}\mathbf{e}_\mu, \end{gathered} \tag{9}$$

с которым связано еще одно $U(1)$-калибровочное поле

$$\Gamma_\mu = i\mathbf{e}_\nu \partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu.$$

Нетрудно проверить, что преобразование (9) не меняет сумму $\partial_\mu \gamma + \Gamma_\mu$.

Переменные α, γ являются углами Эйлера для вектора $\mathbf{t}$, принимающего значение на единичной сфере S^2:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sin(2\alpha)\cos(2\gamma) \\ \sin(2\alpha)\sin(2\gamma) \\ \cos(2\alpha) \end{pmatrix}, \quad t_+ = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\, e^{2i\gamma}, \quad t_- = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\, e^{-2i\gamma}.$$

Действие преобразований (9) на вектор $\mathbf{t}$ приводит к повороту этого вектора вокруг третьей оси координат. Поле Γ_μ позволяет сконструировать производную вектора $\mathbf{t}$, которая будет ковариантна по отношению к такому повороту:

$$(\nabla_\mu \mathbf{t})_k = \sum_l (\delta^{kl}\partial_\mu - 2\varepsilon^{kl3}\Gamma_\mu) t_l.$$

Таким образом, абелево-инвариантные компактные переменные, входящие в величину B_μ, делятся на две части: вектор на двумерной сфере $\mathbf{t}$ (углы α, γ) и пару сопряженных комплексных векторов единичной длины $\mathbf{e}_\mu, \bar{\mathbf{e}}_\mu$. Так же, как и в работе [3], мы будем называть первые переменные "электрическими", а вторые – "магнитными".

Запишем правую часть выражения (6) через новые переменные:

$$\begin{aligned}|\nabla_\mu B_\nu|^2 &= (\partial_\mu\rho)^2 + \rho^2\big(|\partial_\mu \mathbf{e}_\nu|^2 + t_+(\partial_\mu \mathbf{e}_\nu)^2 + t_-(\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu)^2\big) + \\ &+ \rho^2\big((\partial_\mu\alpha)^2 + (\partial_\mu\beta)^2 + (\partial_\mu\gamma)^2 + 2\cos(2\alpha)\partial_\mu\beta\partial_\mu\gamma\big) + 2\rho^2\Gamma_\mu(\cos(2\alpha)\partial_\mu\beta + \partial_\mu\gamma) - \\ &- \rho^2\big(\cos(2\alpha)(\partial_\mu\gamma + \Gamma_\mu) + \partial_\mu\beta\big)^2 + 4\rho^2 C_\mu^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь первые две строки получены из слагаемого $|\partial_\mu B_\nu|^2$ правой части выражения (6). Так как левая часть инвариантна по отношению к абелевым преобразованиям, то все слагаемые, содержащие угол β, сокращаются; после добавления и вычитания $\rho^2\Gamma_\mu^2$ получим

$$\begin{aligned}|\nabla_\mu B_\nu|^2 &= (\partial_\mu\rho)^2 + \rho^2\big(|\partial_\mu \mathbf{e}_\nu|^2 + t_+(\partial_\mu \mathbf{e}_\nu)^2 + t_-(\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu)^2 - \Gamma_\mu^2\big) + \\ &+ \rho^2\big((\partial_\mu\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha(\partial_\mu\gamma + \Gamma_\mu)^2\big) + 4\rho^2 C_\mu^2.\end{aligned}$$

Можно убедиться, что предпоследнее слагаемое в этом выражении равняется в точности $(1/4)\rho^2(\nabla_\mu \mathbf{t})^2$ и, следовательно,

$$|\nabla_\mu B_\nu|^2 = (\partial_\mu\rho)^2 + \rho^2\left(|\partial_\mu \mathbf{e}_\nu|^2 - \Gamma_\mu^2 + t_+(\partial_\mu \mathbf{e}_\nu)^2 + t_-(\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu)^2 + \frac{1}{4}(\nabla_\mu \mathbf{t})^2 + 4C_\mu^2\right). \tag{11}$$

Теперь, воспользовавшись соотношением

$$H_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu = \frac{1}{2}(\mathbf{t}, \nabla_\mu \mathbf{t} \times \nabla_\nu \mathbf{t}) + t_3(\partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu),$$

а также подстановками (5) и (8), получим для лагранжиана (4) следующую формулу:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{g}} &= \left(E_{\mu\nu} + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\right)^2 + 2G_{\mu\nu}(H_{\mu\nu} + 2E_{\mu\nu}) + \frac{1}{4}\rho^2(\nabla_\mu \mathbf{t})^2 + \\ &+ \rho^2\big(|\partial_\mu \mathbf{e}_\nu|^2 - \Gamma_\mu^2 + t_+(\partial_\mu \mathbf{e}_\nu)^2 + t_-(\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu)^2\big) + (\partial_\mu\rho)^2 + \rho^4 t_3^2 + 4\rho^2 C_\mu^2,\end{aligned} \tag{12}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}E_{\mu\nu} &= \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu, \\ G_{\mu\nu} &= i\rho^2 t_3(\mathbf{e}_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu - \mathbf{e}_\nu \bar{\mathbf{e}}_\mu).\end{aligned}$$

Для лагранжиана $\mathcal{L}_{\rm g}$ можно рассмотреть разложение по производным, считая переменную $\mathbf{t}$ “быстрой”, а $\mathbf{e}_\mu$ – “медленной”. Выражение (12) порождает эффективный лагранжиан

$$\left(\partial_\mu C_\nu^3 - \partial_\nu C_\mu^3 + \frac{1}{4}(\mathbf{t}, \partial_\mu \mathbf{t} \times \partial_\nu \mathbf{t})\right)^2 + \frac{1}{4}\rho^2(\partial_\mu \mathbf{t})^2 + 4\rho^2 C_\mu^2 + V(t), \tag{13}$$

который представляет собой модельную структуру (1), взаимодействующую с массивным векторным полем C_μ.

Дуальность между переменными $\mathbf{t}$ и $\mathbf{e}_\mu$ проявляется при переходе к гамильтонову формализму. Функционал энергии для статических конфигураций зависит только от двух из четырех параметров, входящих в комплексный вектор $\mathbf{e}_\mu$, которые могут быть представлены в виде вектора $\mathbf{m}$, принимающего значения на сфере S^2. Таким образом, в функционал энергии входят слагаемые

$$\begin{aligned} |\partial_k \mathbf{e}_l|^2 - \Gamma_k^2 &= (\partial_k \mathbf{m})^2, \\ \partial_k \Gamma_l - \partial_l \Gamma_k &= (\partial_k \mathbf{m} \times \partial_l \mathbf{m}, \mathbf{m}), \end{aligned}$$

и в первом порядке разложения по производным “медленного” поля $\mathbf{t}$ гамильтониан для вектора $\mathbf{m}$ имеет такой же вид, как и гамильтониан, полученный из лагранжиана (13). Точные формулы для переменных $\mathbf{m}$ приведены в статье [3].

3. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ $SU(3)$ ПОЛЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Применим технику, описанную в предыдущем разделе, к лагранжиану $SU(3)$ поля Янга–Миллса. Выберем следующий базис алгебры Ли $su(3)$:

$$\begin{gathered} \lambda_1^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_1^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{14}$$

Данный базис отличается от традиционного базиса Гелл-Манна измененной нормировкой и переставленными местами матрицами λ_2^+ и λ_2^-. Такое изменение позволяет получить более простые коммутационные соотношения для генераторов λ^+ и λ^-:

$$\begin{gathered} \{\lambda_a^\pm, \lambda_b^\pm\} = \pm\varepsilon^{abc}\lambda_c^\mp, \\ \{\lambda_a^+, \lambda_b^-\} = 0, \quad a \neq b, \\ \{\lambda_1^+, \lambda_1^-\} = \lambda_3, \\ \{\lambda_2^+, \lambda_2^-\} = -\frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{3}{2}\lambda_8, \\ \{\lambda_3^+, \lambda_3^-\} = -\frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{3}{2}\lambda_8. \end{gathered}$$

Матрицы λ_3 и λ_8 образуют базис подалгебры Картана алгебры $su(3)$ и удовлетворяют нормировочным условиям

$$\operatorname{tr}\lambda_3\lambda_3 = 2, \qquad \operatorname{tr}\lambda_3\lambda_8 = 0, \qquad \operatorname{tr}\lambda_8\lambda_8 = \frac{2}{3}.$$

Матрицы $\lambda^{+,-}_{1,2,3}$, соответствующие корневым векторам данной алгебры, имеют нормировку

$$\operatorname{tr}\lambda^+_a\lambda^+_b = 0, \qquad \operatorname{tr}\lambda^-_a\lambda^-_b = 0, \qquad \operatorname{tr}\lambda^+_a\lambda^-_b = \delta_{ab}.$$

Как генераторы подалгебры Картана, матрицы λ_3, λ_8 порождают абелевы преобразования:

$$A_\mu \to e^{i\omega'_3\lambda_3 + i\omega'_8\lambda_8} A_\mu e^{-i\omega'_3\lambda_3 - i\omega'_8\lambda_8} - \partial_\mu\omega'_3\lambda_3 - \partial_\mu\omega'_8\lambda_8. \tag{15}$$

Разложим $SU(3)$ поле Янга–Миллса по базису, состоящему из генераторов (14):

$$A_\mu = A^3_\mu\lambda_3 + A^8_\mu\lambda_8 + B^1_\mu\lambda^+_1 + \overline{B}^1_\mu\lambda^-_1 + B^2_\mu\lambda^+_2 + \overline{B}^2_\mu\lambda^-_2 + B^3_\mu\lambda^+_3 + \overline{B}^3_\mu\lambda^-_3.$$

По отношению к преобразованиям (15) коэффициенты A^3_μ и A^8_μ ведут себя как абелевы калибровочные поля:

$$A^{3,8}_\mu \to A^{3,8}_\mu - \partial_\mu\omega'_{3,8}, \tag{16}$$

а $B^{1,2,3}_\mu$ – как заряженные векторные поля:

$$\begin{aligned} B^1_\mu &\to e^{2i\omega'_3} B^1_\mu, \\ B^2_\mu &\to e^{-i\omega'_3 - i\omega'_8} B^2_\mu, \\ B^3_\mu &\to e^{-i\omega'_3 + i\omega'_8} B^3_\mu. \end{aligned} \tag{17}$$

Правила преобразования векторов B_μ позволяют вычислить действие абелевой части ковариантной производной:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu B^1_\nu &= (\partial_\mu + 2iA^3_\mu)B^1_\nu, \\ \nabla_\mu B^2_\nu &= (\partial_\mu - iA^3_\mu - iA^8_\mu)B^2_\nu, \\ \nabla_\mu B^3_\nu &= (\partial_\mu - iA^3_\mu + iA^8_\mu)B^3_\nu. \end{aligned} \tag{18}$$

С помощью этой производной можно записать лагранжиан $SU(3)$ поля Янга–Миллса в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\operatorname{tr}\big([\partial_\mu + iA_\mu, \partial_\nu + iA_\nu]\big)^2 = \\ &= 2\Big(\partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu + i(B^1_\mu\overline{B}^1_\nu - B^1_\nu\overline{B}^1_\mu) - \\ &\quad - \frac{i}{2}(B^2_\mu\overline{B}^2_\nu - B^2_\nu\overline{B}^2_\mu) - \frac{i}{2}(B^3_\mu\overline{B}^3_\nu - B^3_\nu\overline{B}^3_\mu)\Big)^2 + \\ &\quad + \frac{2}{3}\Big(\partial_\mu A^8_\nu - \partial_\nu A^8_\mu - \frac{3i}{2}(B^2_\mu\overline{B}^2_\nu - B^2_\nu\overline{B}^2_\mu) + \frac{3i}{2}(B^3_\mu\overline{B}^3_\nu - B^3_\nu\overline{B}^3_\mu)\Big)^2 + \\ &\quad + 4\sum_{a=1,2,3}|\nabla_\mu B^a_\nu + i\varepsilon^{abc}\overline{B}^b_\mu\overline{B}^c_\nu|^2 - 4\sum_{a=1,2,3}\nabla_\mu B^a_\nu\overline{\nabla}_\nu\overline{B}^a_\mu. \end{aligned} \tag{19}$$

“Неудобные” перекрестные члены $\nabla_\mu B^a_\nu \overline{\nabla}_\nu \overline{B}^a_\mu$ в последнем члене после добавления к лагранжиану фиксирующих калибровку слагаемых

$$4 \sum_{j=1,2,3} \operatorname{tr} |\nabla_\mu B^j_\mu|^2$$

превращаются в выражение

$$\begin{aligned} &2i(\partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu)\big(2(B^1_\mu \overline{B}^1_\nu - B^1_\nu \overline{B}^1_\mu) - (B^2_\mu \overline{B}^2_\nu - B^2_\nu \overline{B}^2_\mu) - (B^3_\mu \overline{B}^3_\nu - B^3_\nu \overline{B}^3_\mu)\big) + \\ &\quad + 2i(\partial_\mu A^8_\nu - \partial_\nu A^8_\mu)\big((B^3_\mu \overline{B}^3_\nu - B^3_\nu \overline{B}^3_\mu) - (B^2_\mu \overline{B}^2_\nu - B^2_\nu \overline{B}^2_\mu)\big), \end{aligned} \tag{20}$$

в результате чего перекрестные слагаемые в первых трех строках лагранжиана (19) удваиваются.

Величины $(\partial_\mu A^{3,8}_\nu - \partial_\nu A^{3,8}_\mu)$ и $B^a_\mu \overline{B}^a_\nu$ в соответствии с формулами (16), (17) инвариантны по отношению к абелевым преобразованиям. Явно неинвариантными являются поля $A^{3,8}_\mu$ и производные $\partial_\mu B^a_\nu$, появляющиеся в последней строке лагранжиана (19).

Рассмотрим слагаемые

$$|\nabla_\mu B^1_\nu|^2 + |\nabla_\mu B^2_\nu|^2 + |\nabla_\mu B^3_\nu|^2, \tag{21}$$

которые содержат форму, квадратичную по полям A^3_μ, A^8_μ. После раскрытия действия ковариантной производной (18) и введения обозначений

$$\rho^2_a \equiv B^a_\nu \overline{B}^a_\nu, \tag{22}$$

$$J^a_\mu \equiv \frac{i}{2\rho^2_a}(\partial_\mu \overline{B}^a_\nu B^a_\nu - \partial_\mu B^a_\nu \overline{B}^a_\nu) \tag{23}$$

эти слагаемые переписываются в следующем виде:

$$\sum_{a=1,2,3} |\partial_\mu B^a_\nu|^2 + \sum_{r,s=3,8} \Omega_{rs} A^r_\mu A^s_\mu + 2 \sum_{\substack{r=3,8 \\ a=1,2,3}} P_{ra} A^r_\mu J^a_\mu,$$

где матрицы Ω, P имеют вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 4\rho^2_1 + \rho^2_2 + \rho^2_3 & \rho^2_2 - \rho^2_3 \\ \rho^2_2 - \rho^2_3 & \rho^2_2 + \rho^2_3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2\rho^2_1 & -\rho^2_2 & -\rho^2_3 \\ 0 & -\rho^2_2 & \rho^2_3 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Определитель матрицы Ω равен $4(\rho^2_1\rho^2_2 + \rho^2_1\rho^2_3 + \rho^2_2\rho^2_3)$, при положительных плотностях ρ^2_a эта матрица обратима, тогда выражение (21) можно преобразовать к виду

$$\sum_{a=1,2,3} |\partial_\mu B^a_\nu|^2 + \sum_{r,s=3,8} \Omega_{rs}(A_\mu + \Omega^{-1} P J_\mu)^r (A_\mu + \Omega^{-1} P J_\mu)^s - \sum_{a,b} J^a_\mu (P\Omega^{-1}P)_{ab} J^b_\mu. \tag{25}$$

Данное преобразование позволяет ввести вместо полей A^3_μ, A^8_μ абелево-инвариантные переменные

$$\begin{aligned} C^3_\mu &= A^3_\mu + (\Omega^{-1}PJ_\mu)^3 = A^3_\mu + \frac{1}{2}\biggl(J^1_\mu - \tilde\rho^2_1 \sum_a J^a_\mu\biggr), \\ C^8_\mu &= A^8_\mu + (\Omega^{-1}PJ_\mu)^8 = A^8_\mu + \frac{1}{2}\biggl(J^3_\mu - \tilde\rho^2_3 \sum_k J^k_\mu\biggr) - \frac{1}{2}\biggl(J^2_\mu - \tilde\rho^2_2 \sum_a J^a_\mu\biggr), \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\tilde\rho^2_a = \frac{\prod_{b\neq a}\rho^2_b}{\rho^2_1\rho^2_2 + \rho^2_1\rho^2_3 + \rho^2_2\rho^2_3}.$$

Комбинация

$$I_\mu = J^1_\mu + J^2_\mu + J^3_\mu,$$

которая появляется в определении переменных C^3_μ, C^8_μ, как следует из формул (17) и (23), инвариантна относительно абелевых преобразований.

Квадратичная форма по J^a_μ в выражении (25) имеет вид

$$\sum_{a,b} J^a_\mu (P\Omega^{-1}P)_{ab} J^b_\mu = \sum_a \rho^2_a (J^a_\mu)^2 - \tilde\rho^2_1\rho^2_1 I^2_\mu$$

и вместе с остальными слагаемыми суммы (21) дает вклад

$$\sum_{a=1,2,3}\bigl(|\partial_\mu B^a_\nu|^2 - \rho^2_a (J^a_\mu)^2\bigr) + \tilde\rho^2_1\rho^2_1 I^2_\mu + \sum_{r,s}\Omega_{rs}C^r_\mu C^s_\mu. \tag{27}$$

Здесь можно отметить, что первая и последняя суммы являются прямыми аналогами правой части выражения (6) в случае калибровочной группы $SU(2)$. Появление второго слагаемого – квадрата инвариантного тока I_μ – является особенностью группы старшего ранга.

Так как произведения $\tilde\rho^2_a\rho^2_a$ для любого a равны отношению симметричных форм третьей s_3 и второй s_2 степени по ρ^2_a, то далее естественно ввести обозначение

$$\frac{s_3}{s_2} = \frac{\rho^2_1\rho^2_2\rho^2_3}{\rho^2_1\rho^2_2 + \rho^2_1\rho^2_3 + \rho^2_2\rho^2_3} = \rho^2_1\tilde\rho^2_1 = \rho^2_2\tilde\rho^2_2 = \rho^2_3\tilde\rho^2_3.$$

Произведем разделение векторов B^a_μ на “электрическую” (α_a, γ_a) и “магнитную” $(\mathbf{e}^a_\mu, \bar{\mathbf{e}}^a_\mu)$ составляющие, таким же образом, как это было сделано для случая группы $SU(2)$ (8):

$$\begin{gathered} B^a_\mu = \rho_a(\cos\alpha_a\, e^{i\beta_a + i\gamma_a}\mathbf{e}^a_\mu + \sin\alpha_a\, e^{i\beta_a - i\gamma_a}\bar{\mathbf{e}}^a_\mu), \\ \mathbf{e}^a_\mu\mathbf{e}^a_\mu = 0, \qquad \mathbf{e}^a_\mu\bar{\mathbf{e}}^a_\mu = 1. \end{gathered} \tag{28}$$

Если в выражениях для углов β_a выделить параметры ω_3, ω_8, которые изменяются при преобразованиях (15):

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2\omega_3 + \omega, \\ \beta_2 &= -\omega_3 - \omega_8 + \omega, \\ \beta_3 &= -\omega_3 + \omega_8 + \omega, \end{aligned} \tag{29}$$

и подставить поля B^a_μ в сумму (27), то полученный результат будет содержать только абелево-инвариантную величину ω. Действительно, если ввести три поля, принимающих значение на единичной сфере S^2

$$\mathbf{t}^a = \begin{pmatrix} \sin(2\alpha_a)\cos 2\gamma_a \\ \sin(2\alpha_a)\sin 2\gamma_a \\ \cos(2\alpha_a) \end{pmatrix},$$

а также векторные поля

$$\Gamma^a_\mu = i\mathbf{e}^a_\nu \partial_\mu \bar{\mathbf{e}}^a_\nu,$$

то в соответствии с формулой (11) слагаемые (27) принимают вид

$$\sum_{a=1,2,3}\left((\partial_\mu\rho_a)^2 + \rho_a^2\left(|\partial_\mu \mathbf{e}^a_\nu|^2 - (\Gamma^a_\mu)^2 + t^a_+(\partial_\mu \mathbf{e}^a_\nu)^2 + t^a_-(\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}^a_\nu)^2\right) + \frac{1}{4}\rho_a^2(\nabla_\mu \mathbf{t}^a)^2\right) + \\ + \frac{s_3}{s_2}\left(\sum_{a=1,2,3}\cos(2\alpha_a)(\partial_\mu\gamma_a + \Gamma^a_\mu) + 3\partial_\mu\omega\right)^2 + \sum_{r,s}\Omega_{rs}C^r_\mu C^s_\mu \tag{30}$$

и, таким образом, не содержат ω_3, ω_8. Оставшийся угловой параметр ω мы будем далее относить к “электрическим” переменным.

При подстановке полей $A^r_\mu,\ r = 3, 8$, выраженных с помощью замены (26) через переменные C^r_μ и $J^a_\mu,\ a = 1, 2, 3$, в тензоры напряженности $\partial_\mu A^r_\nu - \partial_\nu A^r_\mu$ возникают выражения

$$H^a_{\mu\nu} = \partial_\mu(J^a_\nu - \tilde{\rho}_a^2 I_\nu) - \partial_\nu(J^a_\mu - \tilde{\rho}_a^2 I_\mu).$$

Тензоры $H^a_{\mu\nu}$ не зависят от углов ω_3, ω_8, это следует из явного вида токов J^a_μ:

$$J^a_\mu = \cos(2\alpha_a)(\partial_\mu\gamma_a + C^a_\mu) + \partial_\mu\beta_a. \tag{31}$$

С помощью тензоров $H^a_{\mu\nu}$ первые три строки лагранжиана (19), а также слагаемые, фиксирующие калибровку, можно переписать в инвариантных переменных:

$$\frac{1}{3}\sum_a (H^a_{\mu\nu})^2 + 2(E^3_{\mu\nu})^2 + \frac{2}{3}(E^8_{\mu\nu})^2 + 2E^3_{\mu\nu}H^1_{\mu\nu} + \\ + 2(H^1_{\mu\nu} - 2E^3_{\mu\nu})(G^2_{\mu\nu} + G^3_{\mu\nu} - 2G^1_{\mu\nu}) + \frac{2}{3}E^8_{\mu\nu}(H^3_{\mu\nu} - H^2_{\mu\nu}) + \\ + 2(H^3_{\mu\nu} - H^2_{\mu\nu} + 2E^8_{\mu\nu})(G^3_{\mu\nu} - G^2_{\mu\nu}) + 3\sum_a (G^a_{\mu\nu})^2 - \left(\sum_a G^a_{\mu\nu}\right)^2. \tag{32}$$

Здесь использовано обозначение $G^a_{\mu\nu}$ для γ-инвариантных тензоров:

$$G^a_{\mu\nu} = i\rho_a^2 t^a_3(\mathbf{e}^a_\mu \bar{\mathbf{e}}^a_\nu - \bar{\mathbf{e}}^a_\mu \mathbf{e}^a_\nu), \qquad a = 1, 2, 3,$$

и $E^r_{\mu\nu}$ для тензоров напряженности полей C^r_μ:

$$E^r_{\mu\nu} = \partial_\mu C^r_\nu - \partial_\nu C^r_\mu, \qquad r = 3, 8.$$

Кроме уже рассмотренных слагаемых (21), последняя строка лагранжиана (19) содержит выражения

$$4\sum_a |\varepsilon^{abc}B_\mu^b B_\nu^c|^2 - 4i\sum_{a,b,c}\varepsilon^{abc}(\nabla_\mu B_\nu^a B_\mu^b B_\nu^c - \overline{\nabla}_\mu \overline{B}_\nu^a \overline{B}_\mu^b \overline{B}_\nu^c).$$

В результате замены переменных (26) они переписываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}12\varepsilon^{1bc}C_\mu^3(B_\nu^1 B_\mu^b B_\nu^c + \text{к.с.}) - 4\varepsilon^{2bc}C_\mu^8(B_\nu^2 B_\mu^b B_\nu^c + \text{к.с.}) + 4\varepsilon^{3bc}C_\mu^8(B_\nu^3 B_\mu^b B_\nu^c + \text{к.с.}) -\\ - 4i\varepsilon^{abc}\big(\partial_\mu + i(J_\mu^a - \tilde{\rho}_a^2 I_\mu)\big)B_\nu^a B_\mu^b B_\nu^c + 4i\varepsilon^{abc}\big(\partial_\mu - i(J_\mu^a - \tilde{\rho}_a^2 I_\mu)\big)\overline{B}_\nu^a \overline{B}_\mu^b \overline{B}_\nu^c +\\ + 4\sum_a |\varepsilon^{abc}B_\mu^b B_\nu^c|^2.\end{aligned} \tag{33}$$

Инвариантность слагаемых вида $B_\mu^1 B_\nu^2 B_\lambda^3$, $\overline{B}_\mu^1 \overline{B}_\nu^2 \overline{B}_\lambda^3$, $|\varepsilon^{abc}B_\mu^b B_\nu^c|^2$ следует непосредственно из формул (17). Воспользовавшись определением токов J_μ^a (23), можно сделать вывод, что выражения $(\partial_\mu + iJ_\mu^a)B_\nu^a$ при абелевых преобразованиях ведут себя так же, как векторы B_ν^a, а значит, слагаемые

$$\varepsilon^{abc}\big(\partial_\mu + i(J_\mu^a - \tilde{\rho}_a^2 I_\mu)\big)B_\nu^a B_\mu^b B_\nu^c \tag{34}$$

абелево-инвариантны.

При подстановке переменных α_a, γ_a, $\mathbf{e}_\mu^a$, $\bar{\mathbf{e}}_\mu^a$ в величины B_μ^a, J_μ^a слагаемые (34) дают добавки M_μ^a, $\mathbf{T}_\mu^a$, $S_{\mu\nu}^a$, N_μ к выражению (21). Формула (30) приобретает вид

$$\begin{aligned}\sum_{a=1,2,3}\Bigg((\partial_\mu\rho_a + M_\mu^a)^2 - (M_\mu^a)^2 + \rho_a^2\Bigg(|\partial_\mu \mathbf{e}_\nu^a|^2 - (C_\mu^a)^2 + t_+^a(\partial_\mu \mathbf{e}_\nu^a + S_{\mu\nu}^a)^2 +\\ + t_-^a(\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu^a + \overline{S}_{\mu\nu}^a)^2 - (S_{\mu\nu}^a)^2 - (\overline{S}_{\mu\nu}^a)^2 + \frac14(\nabla_\mu \mathbf{t}^a + \mathbf{T}_\mu^a)^2 - \frac14(\mathbf{T}_\mu^a)^2\Bigg)\Bigg) +\\ + \frac{s_3}{s_2}(I_\mu - N_\mu)^2 - \frac{s_3}{s_2}N_\mu^2 + \sum_{r,s}\Omega_{rs}C_\mu^r C_\mu^s.\end{aligned} \tag{35}$$

Тензоры M_μ^a, $S_{\mu\nu}^a$, $\mathbf{T}_\mu^a$ и вектор N_μ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}N_\mu &= \frac12\sum_{a,b,c}\varepsilon^{abc}\rho_a^{-2}(B_\nu^a B_\nu^c B_\mu^b + \overline{B}_\nu^a \overline{B}_\nu^c \overline{B}_\mu^b),\\ M_\mu^a &= \sum_{b,c}\frac{\varepsilon^{abc}}{2i\rho_a}(B_\nu^a B_\nu^c B_\mu^b - \overline{B}_\nu^a \overline{B}_\nu^c \overline{B}_\mu^b),\\ S_{\mu\nu}^a &= \frac{i}{4}\varepsilon^{abc}e^{i\gamma_a}\big((\sin\alpha_a)^{-1}B_\nu^b B_\mu^c - (\cos\alpha_a)^{-1}\overline{B}_\nu^b \overline{B}_\mu^c\big),\\ (T_\mu^a)_1 &= \cos(2\alpha_a)\cos 2\gamma_a \operatorname{Im}\Phi_\mu^a + \sin 2\gamma_a \operatorname{Re}\Phi_\mu^a,\\ (T_\mu^a)_2 &= \cos(2\alpha_a)\sin 2\gamma_a \operatorname{Im}\Phi_\mu^a - \cos 2\gamma_a \operatorname{Re}\Phi_\mu^a,\\ (T_\mu^a)_3 &= \sin(2\alpha_a)\operatorname{Im}\Phi_\mu^a,\end{aligned}$$

где Φ^a_μ – это комплексные величины

$$\Phi^a_\mu = \varepsilon^{abc}(\sin\alpha_a\, e^{i\gamma_a}\mathbf{e}^a_\nu - \cos\alpha_a\, e^{-i\gamma_a}\bar{\mathbf{e}}^a_\nu)B^c_\nu B^b_\mu.$$

Произведение $e^{i\gamma_a}\mathbf{e}^a_\mu$ и функция Φ^a_μ инвариантны относительно поворота базиса $(\mathbf{e}^a_\mu, \bar{\mathbf{e}}^a_\mu)$ (9), следовательно, вектор $\mathbf{T}^a_\mu$, так же как и производная $\nabla_\mu\mathbf{t}^a$, ковариантен относительно данного поворота, и их сумма, появляющаяся в формуле (35), является корректно определенной величиной.

Просуммировав формулы (32), (33), (35), можно переписать лагранжиан $SU(3)$ поля Янга–Миллса в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\sum_a (H^a_{\mu\nu})^2 + 2(E^3_{\mu\nu})^2 + \frac{2}{3}(E^8_{\mu\nu})^2 + 2E^3_{\mu\nu}H^1_{\mu\nu} + \\
&\quad + 2(H^1_{\mu\nu} - 2E^3_{\mu\nu})(G^2_{\mu\nu} + G^3_{\mu\nu} - 2G^1_{\mu\nu}) + \frac{2}{3}E^8_{\mu\nu}(H^3_{\mu\nu} - H^2_{\mu\nu}) + \\
&\quad + 2(H^3_{\mu\nu} - H^2_{\mu\nu} + 2E^8_{\mu\nu})(G^3_{\mu\nu} - G^2_{\mu\nu}) + 3\sum_a (G^a_{\mu\nu})^2 - \Big(\sum_a G^a_{\mu\nu}\Big)^2 + \\
&\quad + \sum_{a=1,2,3} 4\Big((\partial_\mu\rho_a + M^a_\mu)^2 - (M^a_\mu)^2 + \rho_a^2\big(|\partial_\mu\mathbf{e}^a_\nu|^2 - (\Gamma^a_\mu)^2 + t^a_+(\partial_\mu\mathbf{e}^a_\nu + S^a_{\mu\nu})^2 + \\
&\quad + t^a_-(\partial_\mu\bar{\mathbf{e}}^a_\nu + \overline{S}^a_{\mu\nu})^2 - (S^a_{\mu\nu})^2 - (\overline{S}^a_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{4}(\nabla_\mu\mathbf{t}^a + \mathbf{T}^a_\mu)^2 - \frac{1}{4}(\mathbf{T}^a_\mu)^2\big)\Big) + \\
&\quad + 4\frac{s_3}{s_2}(I_\mu - N_\mu)^2 - \frac{s_3}{s_2}N_\mu^2 + 4\sum_a |\varepsilon^{abc}B^b_\mu B^c_\nu|^2 + \sum_{r,s}\Omega_{rs}C^r_\mu C^s_\mu + \\
&\quad + 12\varepsilon^{1bc}C^3_\mu(B^1_\nu B^b_\mu B^c_\nu + \text{к.с.}) - 4\varepsilon^{2bc}C^8_\mu(B^2_\nu B^b_\mu B^c_\nu + \text{к.с.}) + \\
&\quad + 4\varepsilon^{3bc}C^8_\mu(B^3_\nu B^b_\mu B^c_\nu + \text{к.с.}).
\end{aligned} \tag{36}$$

Здесь последние пять строк получены из последней строки лагранжиана (19), а первые три – соответственно из первых трех строк этого лагранжиана и вклада калибровочных слагаемых (20).

Лагранжиан (19), в отличие от лагранжиана $SU(2)$ поля Янга–Миллса (4), неинвариантен относительно преобразования $B^a_\mu \to -B^a_\mu$. Вследствие этого в формулу (36) наряду с функциями двойного угла входят также выражения $\sin\alpha_a$, $\cos\alpha_a$.

4. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Обобщение модельной структуры (1) для "электрических" переменных, содержащихся в лагранжиане (36), выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{e}} = \frac{1}{12}\bigg(&\sum_a\Big((\mathbf{t}^a, \partial_\mu\mathbf{t}^a \times \partial_\nu\mathbf{t}^a) - \tilde\rho_a^2\sum_b(\mathbf{t}^b, \partial_\mu\mathbf{t}^b \times \partial_\nu\mathbf{t}^b)\Big)^2 + \\
&+ \sum_a \rho_a^2(\partial_\mu\mathbf{t}^a)^2 + \frac{s_3}{s_2}\Big(\sum_a \cos(2\alpha_a)\partial_\mu\gamma_a + 3\partial_\mu\omega\Big)^2 + V(\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \mathbf{t}^3)\bigg).
\end{aligned} \tag{37}$$

Слагаемые $\cos(2\alpha_a)\,\partial_\mu\gamma_a$ здесь являются функциями векторов $\mathbf{t}^a$:

$$\cos(2\alpha)\,\partial_\mu\gamma = \frac{(\partial_\mu\mathbf{t}\times\mathbf{t})_3 t_3}{4\bigl(1-(t_3)^2\bigr)}.$$

Такой лагранжиан может быть получен из выражения (36), например, при разложении по производным, если считать векторы $\mathbf{e}^a_\mu$ медленно меняющимися и некоррелирующими между собой величинами.

Лагранжиан (37) может быть записан через объекты, связанные с произведением групп $\bigl(SU(2)\bigr)^{\otimes 3}$. Пусть

$$R_\mu = R^1_\mu + R^2_\mu + R^3_\mu$$

– это правая форма Морера–Картана, а каждая из трех форм $R^{1,2,3}_\mu$ построена следующим образом:

$$R^a_\mu = g_a^{-1}\partial_\mu g_a, \qquad g_a = e^{-i\gamma_a\sigma^a_3}e^{-i\alpha_a\sigma^a_2}e^{i\omega\sigma^a_3}, \qquad g_a\in\bigl(SU(2)\bigr)^{\otimes 3}.$$

Пусть h_1, h_+, h_- – векторы из подалгебры Картана алгебры $\bigl(su(2)\bigr)^3$:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{s_3}{s_2}(\sigma^1_3+\sigma^2_3+\sigma^3_3),\\ h_\pm &= \frac{\rho_1^2(c_\pm+d_\pm)\sigma^1_3-\rho_2^2c_\pm\sigma^2_3-\rho_3^2d_\pm\sigma^3_3}{\sqrt{2}\,(s_1^2-3s_2)^{1/4}\bigl(s_2(c_\pm+d_\pm)\bigr)^{1/2}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= \rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2,\\ c_\pm &= \rho_3^4-\rho_1^2\rho_2^2\pm\rho_3^2\sqrt{s_1^2-3s_2}\,,\\ d_\pm &= \rho_2^4-\rho_1^2\rho_3^2\pm\rho_2^2\sqrt{s_1^2-3s_2}\,, \end{aligned}$$

а s_2 и s_3 – это определенные ранее симметричные формы второй и третьей степени квадратов плотностей ρ_a. В случае общего положения ($\rho_2\neq\rho_3$) векторы h_1, h_+, h_- образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения

$$\langle x,y\rangle = \operatorname{tr}\sum_a(\sigma^a_3)^2\rho_a^{-2}xy.$$

Тогда квадратичные слагаемые лагранжиана (37) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_a\rho_a^2(\partial_\mu\mathbf{t}^a)^2+\frac{s_3}{s_2}\biggl(\sum_a\cos(2\alpha_a)\partial_\mu\gamma_a-3\partial_\mu\omega\biggr)^2 = -\sum_{a=1,+,-}\operatorname{tr}[R_\mu,h_a]^2-(\operatorname{tr}h_1R_\mu)^2.$$

Здесь возникает 1-форма

$$F = \operatorname{tr}(h_1R_\mu)\,dx^\mu = \biggl(\frac{s_3}{s_2}\biggr)^{1/2}\biggl(\sum_a\cos(2\alpha_a)\partial_\mu\gamma_a-3\partial_\mu\omega\biggr)dx^\mu, \tag{38}$$

которая является первообразной (прообраза) 2-формы Кириллова

$$K_1 = \mathrm{tr}\big(h_1[R_\mu, R_\nu]\big)\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \mathrm{d}F.$$

Две другие формы Кириллова,

$$K_\pm = \mathrm{tr}\big(h_\pm[R_\mu, R_\nu]\big)\, dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

участвуют в построении членов старшей степени по производным $\mathbf{t}^a$:

$$\frac{1}{12}\sum_a\bigg((\mathbf{t}^a, \partial_\mu\mathbf{t}^a \times \partial_\nu\mathbf{t}^a) - \tilde{\rho}_a^2\sum_b(\mathbf{t}^b, \partial_\mu\mathbf{t}^b \times \partial_\nu\mathbf{t}^b)\bigg)^2 = \xi_+K_+ \wedge K_+{}^* + \xi_-K_- \wedge K_-{}^*,$$

где

$$\xi_\pm = -\frac{s_1 \pm \sqrt{s_1^2 - 3s_2}}{6s_2}.$$

Таким образом, в терминах форм Морера–Картана лагранжиан (37) переписывается в следующем виде:

$$\mathcal{L}_\mathrm{e} = \xi_+\big(\mathrm{tr}\, h_+[R_\mu, R_\nu]\big)^2 + \xi_-\big(\mathrm{tr}\, h_-[R_\mu, R_\nu]\big)^2 - \mathrm{tr}[R_\mu, h_a]^2 - (\mathrm{tr}\, h_1 R_\mu)^2. \qquad (39)$$

Интерпретация первых двух слагаемых как квадратов двух форм Кириллова $K_\pm$, а последнего как квадрата первообразной третьей формы K_3 подразумевает возможность добавления к первообразной произвольной замкнутой 1-формы. Этой степени свободы и отвечает 1-форма $\partial_\mu\omega$, которая входит в выражение (38) для формы F. Таким образом, появление слагаемого $(s_3/s_2)I^2$ и седьмой "электрической" переменной ω в лагранжиане (36) имеет естественную алгебраическую интерпретацию в терминах форм Кириллова.

Прямое обобщение модельного лагранжиана (1), предложенное в работах [2], строится аналогично построению лагранжиана (39), но использует для членов старшей степени по производным динамических переменных формы Кириллова группы $SU(3)$, а не произведения групп $\big(SU(2)\big)^{\otimes 3}$.

"Магнитные" переменные входят в лагранжиан (36) более простым образом. При переходе к гамильтонову формализму и разложении по производным медленно меняющихся и не коррелирующих между собой "электрических" переменных α_a, γ_a "магнитные" переменные $\mathbf{m}_a$ разделяются, и для каждой из них получается гамильтониан вида

$$\eta(\partial_k\mathbf{m} \times \partial_l\mathbf{m}, \mathbf{m})^2 + \varrho(\partial_k\mathbf{m})^2 + \varkappa\bigg(\frac{(\partial_k\mathbf{m} \times \mathbf{m})_3 m_3}{1 - (m_3)^2}\bigg)^2.$$

Эти выражения, хотя и отличаются от гамильтониана, соответствующего модельной структуре (1), наличием последнего слагаемого, но тем не менее сохраняют его основные свойства. Возможность появления этого слагаемого в гамильтонианах, обладающих устойчивыми струноподобными решениями, обсуждается в работе [9].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенное обобщение самодуальной параметризации поля Янга–Миллса позволяет выразить лагранжиан $SU(3)$ теории через три нейтральных скалярных поля ρ_a, два массивных векторных поля, три комплексных вектора единичной длины $\mathbf{e}_\mu^a$, имеющих "магнитную" интерпретацию, и семь "электрических" переменных $\alpha_a, \gamma_a, \omega$. "Магнитные" переменные входят в лагранжиан более простым способом, что вместе с появлением седьмой "электрической" переменной ω приводит к нарушению "электромагнитной" дуальности, имеющей место в лагранжиане $SU(2)$ поля Янга–Миллса. Функционал энергии для "магнитных" переменных разделяется на три экземпляра модификации гамильтониана "магнитных" переменных случая $SU(2)$. Переменные, имеющие "электрическую" интерпретацию, не порождают аналог лагранжиана (1) для вектора $\mathbf{n}$, принимающего значения в факторпространстве $SU(3)/\big(U(1)\big)^2$, а образуют более сложное выражение, основанное на формах Кириллова произведения групп $\big(SU(2)\big)^{\otimes 3}$.

Техника, описанная в этой статье, допускает обобщение на случай калибровочной группы $SU(N)$. Алгебра Ли $su(N)$ имеет подалгебру Картана размерности $r = N-1$ и $d = 1/2(N(N-1))$ корневых векторов. Соответственно лагранжиан $SU(N)$ поля Янга–Миллса будет зависеть от d наборов, состоящих из нейтральных скалярных полей ρ, "электрических" переменных α, γ и комплексных "магнитных" векторов $\mathbf{e}_\mu$. Кроме того, в лагранжиан войдут $d-r$ инвариантных токов I_μ, зависящих от дополнительных "электрических" переменных ω. Абстрактная схема такого обобщения предложена в статье [10].

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00085).

Список литературы

[1] *L. D. Faddeev, A. J. Niemi.* Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 1624.
[2] *L. D. Faddeev, A. J. Niemi.* Phys. Lett. B. 1999. V. 449. P. 214; V. 464. P. 90.
[3] *L. D. Faddeev, A. Niemi.* Phys. Lett. B. 2002. V. 525. P. 195.
[4] *Y. M. Cho.* Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 1080; 1981. V. 23. P. 2415; Phys. Rev. Lett. 1980. V. 44. P. 1115.
[5] *L. D. Faddeev, A. J. Niemi.* Nature. 1997. V. 387. P. 58.
[6] *J. Hietarinta, P. Salo.* Phys. Lett. B. 1999. V. 451. P. 60.
[7] *R. Battye, P. M. Sutcliffe.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 4798.
[8] *G. 't Hooft.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 190. P. 455; 1978. V. 138. P. 1; *A. M. Polyakov.* Nucl. Phys. B. 1977. V. 120. P. 429.
[9] *S. Nasir, A. J. Niemi.* Field theories from bundles of strings. hep-th/0106009.
[10] *Т. А. Болохов.* Зап. научн. семин. ПОМИ. 2003. Т. 291. С. 35.

Поступила в редакцию 3.VI.2003 г.