



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Алексеев, Л. Д. Фаддеев, Инволюция и динамика в системе “ $q$ -деформированный волчок”,  
*Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1992, том 200, 3–16

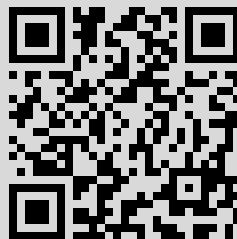
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 195.218.150.2

6 июля 2017 г., 15:20:05



ИНВОЛЮЦИЯ И ДИНАМИКА В СИСТЕМЕ "  $q$ -ДЕФОРМИРОВАННЫЙ ВОЛЧОК"

Посвящается юбилею Ольги Александровны Ладыженской

Год назад мы ввели в рассмотрение квантовую динамическую систему  $(T^*G)_q$ , представляющую собой деформацию квантового волчка [1]. В недеформированном случае фазовое пространство шарового волчка представляет собой кокасательное расслоение группы вращений  $T^*G$  (в простейшем случае  $G = SU(2)$ ). Одновременно то же самое фазовое пространство описывает материальную точку, для которой группа  $G$  является конфигурационным пространством. После квантования пространство состояний  $\mathcal{H}$  рассматриваемой динамической системы может быть естественно реализовано в квадратично-интегрируемых функциях на группе  $L^2(G)$ . В пространстве  $L^2(G)$  действует регулярное представление группы  $G$ . Таким образом, волчок является естественной динамической системой, тесно связанной с теорией представлений.

После деформации группа  $G$  заменяется на соответствующую квантовую группу [2]. Параметр деформации играет важную роль в теории (например, размерность пространства состояний существенно зависит от его значений) и традиционно обозначается  $q$ . Введение  $(T^*G)_q$  стимулировалось проблемой построения дифференциального исчисления на квантовых группах [3-6]. Неожиданно эта же система возникла в модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена в конформной теории поля [7-9]. В результате удалось существенно прояснить роль квантовых групп в конформной теории поля.

Все построения в [1] велись в комплексной ситуации как для координат на группе, так и для параметра деформации. Для приложений в первую очередь интересен случай, когда группа компактна, а  $q$  принимает значения на единичной окружности на комплексной плоскости, так что  $qq^* = 1$ . Таким образом, при  $|q| = 1$  возникает задача построения антиинволюции в алгебре наблюдаемых на  $(T^*G)_q$ , которая редуцирует ее к вещественной форме. Вещественная форма в классическом пределе  $q \rightarrow 1$  должна совпадать с алгеброй наблюдаемых на  $T^*K$ , где  $K$  - компактная форма группы  $G$ . Именно такую антиинволюцию мы построим в этой статье. Кроме того, мы воспользуемся случаем и предъядвим

динамическую систему на  $(T^*G)_q$ , которая является наиболее точным аналогом шарового волчка в деформированной ситуации.

Следуя традиции, мы будем писать формулы, которые можно использовать для любой группы  $G$ , и проиллюстрируем их на примере группы  $SL(2)$ .

В § 1 мы приведем основные сведения, касающиеся  $(T^*G)_q$ , следуя [1]. В § 2 мы введем и обсудим антиинволюцию, соответствующую в классическом пределе выделению компактной форме группы. В § 3 будет описана динамика шарового волчка не квантовой группе.

### § 1. Алгебра наблюдаемых на $(T^*G)_q$ .

Пусть  $G$  - классическая простая группа Ли,  $q$  - комплексный параметр,  $R_+(q)$  - соответствующая  $R$ -матрица [10] в фундаментальном представлении  $V$ . В случае  $G = SL(2)$  фундаментальное представление двумерно  $V = \mathbb{C}^2$  и  $R$ -матрица  $4 \times 4$ . В естественном базисе в  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$   $R$ -матрица имеет вид

$$R_+(q) = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ & q^{-1/2} & q^{1/2}q^{-3/2} & 0 \\ 0 & & q^{-1/2} & 0 \\ & & & q^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Мы опускаем аргумент  $q$  в обозначении  $R$ -матрицы. Далее предполагается, что все  $R$ -матрицы вычисляются при одном и том же значении  $q$ , которое входит как параметр в определение теории  $(T^*G)_q$ .

Наряду с  $R_+$  полезно рассмотреть еще одну  $R$ -матрицу

$$R_- = P(R_+)^{-1}P, \quad (2)$$

где  $P$  - перестановка в тензорном произведении  $V \otimes V$  ( $Pa \otimes b = b \otimes a$ ).

"Координаты" в  $(T^*G)_q$  или, более точно, образующие алгебры функций на некоммутативном многообразии  $(T^*G)_q$  можно объединить в матрицы  $g$  и  $\Omega_{\pm}$ . Матрица  $g$  является квантовым аналогом группового элемента. Ее матричные элементы - координаты на базисе расслоения. Матрицы  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$  выбираются верхнетреугольной и нижнетреугольной соответственно, причем их

диагональные части  $\omega_+$  и  $\omega_-$  обратны друг другу  $\omega_+ \omega_- = \omega_- \omega_+ = I$ . Матричные элементы  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$  служат координатами в слое квантового расслоения  $(T^*G)_q$ .

В простейшем случае  $G = SL(2)$  можно записать  $g$  и  $\Omega_{\pm}$  в компонентах:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det_q g = ad - qbc = 1;$$

$$\Omega_+ = \begin{pmatrix} K^{1/2} & (q^{3/2} - q^{-1/2})X_+ \\ 0 & K^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad \Omega_- = \begin{pmatrix} K^{-1/2} & 0 \\ -(q^{1/2} - q^{-3/2})X_- & K^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матричные элементы  $\Omega_{\pm}$  выражаются через образующие квантовой алгебры  $sl_q(2)$   $K, X_+, X_-$  [10]. Отсылая читателя за дальнейшими подробностями к работам [1, 10], выпишем перестановочные соотношения для матричных элементов  $g, \Omega_{\pm}$ . Они образуют квадратичную алгебру, которую удобно записать в следующем виде [1]:

$$R g^1 g^2 = g^2 g^1 R, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} R \Omega_+^1 \Omega_+^2 &= \Omega_+^2 \Omega_+^1 R, \\ R \Omega_-^1 \Omega_-^2 &= \Omega_-^2 \Omega_-^1 R, \\ R_+ \Omega_+^1 \Omega_-^2 &= \Omega_-^2 \Omega_+^1 R_+, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} R_+ \Omega_+^1 g^2 &= g^2 \Omega_+^1, \\ R_- \Omega_-^1 g^2 &= g^2 \Omega_-^1. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь использованы обозначения [10], позволяющие записать в виде одной формулы перестановочные соотношения всех матричных элементов двух матриц между собой. Именно, для любой матрицы  $A$ , действующей в пространстве  $V$ , можно построить матрицы

$$A^1 = A \otimes I, \quad A^2 = I \otimes A$$

в пространстве  $V \otimes V$ . Тогда формулы (4-6) можно понимать как равенства для матриц, действующих в  $V \otimes V$ , с учетом операторного порядка сомножителей (например, в левой части (6) матричные элементы  $\Omega_{\pm}$  стоят слева от матричных элементов  $g$ ,

а в правой части - наоборот).

В первых трех соотношениях в качестве матрицы  $R$  может быть использована как  $R_+$ , так и  $R_-$ . В четвертом обязательно использовать  $R_+$ . В качестве альтернативы выпишем соотношение

$$R_- \Omega_- \Omega_+^2 = \Omega_+^2 \Omega_-^1 R_-,$$

которое получается из (5) после умножения слева и справа на  $\rho$ . При этом надо воспользоваться соотношением

$$\rho A^1 \rho = A^2$$

и равенством (2).

Легко проверить, что вид матриц  $q, \Omega_{\pm}$  (3) (треугольность  $\Omega_{\pm}$  и равенство 1  $q$ -детерминанта матрицы  $q$ ) согласован с соотношениями (4-6).

Подалгебры в алгебре функций на  $(T^*G)_q$ , натянутые на матричные элементы  $q$  и  $\Omega_{\pm}$  соответственно, являются алгебрами Хопфа. Алгебра, натянутая на матричные элементы  $q$ , известна как алгебра функций на квантовой группе  $\text{Funk}_q(G)$ , а алгебра, натянутая на матричные элементы матриц  $\Omega_{\pm}$ , как квантовая универсальная обертывающая  $U_q(\mathcal{G})$ , где  $\mathcal{G}$  - алгебра Ли, соответствующая группе  $G$ . Копроизведение в этих алгебрах Хопфа задается однотипными простыми формулами [10]:

$$\begin{aligned} \Delta q^{ik} &= \sum_j q^{ij} q^{jk}, \\ \Delta \Omega_{\pm}^{ik} &= \sum_j \Omega_{\pm}^{ij} \Omega_{\pm}^{jk}. \end{aligned} \quad (7)$$

Полная алгебра функций на  $(T^*G)_q$  не имеет структуры алгебры Хопфа.

Как впервые отмечено [II], удобно использовать матрицу

$$\Omega = \Omega_+ \Omega_-^{-1}, \quad (8)$$

где  $\Omega_-^{-1}$  - антипод матрицы  $\Omega_-$ . В случае  $G = SL(2)$  матрица  $\Omega_-^{-1}$  имеет вид

$$\Omega_-^{-1} = \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ (q^{3/2} - q^{-1/2})X_- & K^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Перестановочные соотношения для  $\Omega_{\pm}$  и  $q$  можно переписать через  $\Omega$  следующим образом

$$\Omega'(R_-)^{-1}\Omega^2 R_- = R_+^{-1}\Omega^2 R_+\Omega' \quad (9)$$

и

$$R_- q^1 \Omega^2 = \Omega^2 R_+ q^1. \quad (10)$$

Рассмотрим классический предел соотношений (9-10). Положим

$$q = e^{i\hbar\gamma}, \quad (11)$$

где  $\gamma$  - параметр деформации, а  $\hbar$  - постоянная Планка, отвечающая за переход от классической механики к квантовой. Обычно полагают  $\hbar = 1$ , однако, нам по методическим соображениям удобно сохранить  $\hbar$  как независимую константу в теории. При малых  $\gamma$   $R$ -матрицы  $R_+$  и  $R_-$  могут быть разложены в ряд по  $\gamma$ :

$$R_{\pm} = I \pm i\hbar\gamma v_{\pm} + \dots, \quad (12)$$

где  $v_{\pm}$  - классические  $v$ -матрицы. Например, в случае  $G=SL(2)$

$$v_+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & & -\frac{1}{2} & 0 \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$v_- = -\rho v_- \rho = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & & \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Разность классических  $v$ -матриц

$$C = v_+ - v_- \quad (14)$$

совпадает с тензорным оператором Казимира для алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Например, когда  $\mathfrak{g} = sl(2)$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & 2 & \\ & 2 & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \sum_{a=1}^3 \sigma^a \otimes \sigma^a, \quad (15)$$

где  $\sigma^a$  - матрицы Паули.

В классическом пределе  $\hbar \rightarrow 0$  положим

$$\Omega = I + \hbar \omega + \dots \quad (16)$$

Тогда, полагая  $\hbar = 0$ , имеем для матриц  $q$  и  $\omega$  следующий набор соотношений

$$\begin{aligned} q^1 q^2 &= q^2 q^1; \\ \omega^1 \omega^2 - \omega^2 \omega^1 &= -i\hbar [C, \omega^2]; \\ q^1 \omega^2 - \omega^2 q^1 &= i\hbar C q^1. \end{aligned} \quad (17)$$

Полагая  $\hbar \rightarrow 0$ , получим скобки Пуассона для матричных элементов матриц  $q$  и  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \{q^1, q^2\} &= 0, \\ \{\omega^1, \omega^2\} &= \frac{1}{2} [C, \omega^1 - \omega^2], \\ [\omega^1, q^2] &= -C q^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Несложно проверить, что скобки Пуассона (18) совпадают с канонической пуассоновой структурой на многообразии  $T^*G$ , где  $q$  - групповой элемент, а  $\omega$  - правинвариантный момент, выбранный в качестве координаты в слое.

На этом мы заканчиваем короткий обзор основных свойств модели  $(T^*G)_q$  и переходим к содержательной части работы.

## § 2. Антиинволюция для $(T^*G)_q$ .

Будем считать, что параметр  $q$  удовлетворяет соотношению

$$q q^* = 1. \quad (19)$$

В этом случае  $R$ -матрицы  $R_+$  и  $R_-$  оказываются эрмитовски сопряженными друг для друга

$$(R_+)^* = R_- . \quad (20)$$

Легко ввести операцию  $*$  для матриц  $\Omega_{\pm}$ , совместную с соотношениями (5). Именно, можно положить

$$\Omega_+^* = \Omega_- , \quad \Omega_-^* = \Omega_+ . \quad (21)$$

В терминах образующих квантовой алгебры имеем  $q$ -аналог  $SU(2)$ -инволюции:

$$K^* = K^{-1} , \quad X_+^* = X_- , \quad X_-^* = X_+ . \quad (22)$$

В классическом пределе (16) формулы (21) переходят в следующее соотношение

$$\omega_+^* = \omega_- , \quad \omega_-^* = \omega_+ . \quad (23)$$

Для полной матрицы

$$\omega = \omega_+ - \omega_-$$

получаем условие антиэрмитовости

$$\omega^* = -\omega . \quad (24)$$

Условие (24) выделяет компактную форму алгебры  $\mathcal{G}$ . Выясняется, что аналогичное условие в групповом варианте

$$g^* = g^{-1} \quad (25)$$

не согласовано с соотношением (4) и его нельзя использовать в определении антиинволюции для  $(T^*G)_q$ . Описанию выхода из сложившейся ситуации и построению  $g^*$  и посвящен остаток настоящего параграфа.

Для того, чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо ввести несколько новых объектов. Удобно рассмотреть наряду с правоинвариантным моментом  $\Omega_L$ , генерирующим левые сдвиги на группе, левоинвариантный момент  $\Omega_R$ , генерирующий правые сдвиги.  $\Omega_R$  выражается через  $\Omega_L$  при помощи простой формулы

$$\Omega_R = g^{-1} \Omega_L g . \quad (26)$$



Легко проверить, что  $\Omega_R$  и  $\Omega_L$  коммутируют

$$\Omega_L^1 \Omega_R^2 = \Omega_R^2 \Omega_L^1. \quad (27)$$

По аналогии с  $\Omega_L$  факторизуем  $\Omega_R$  в произведение верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц с равными диагональными частями

$$\Omega_R = \Sigma_+ \Sigma_-^{-1}, \quad (28)$$

так что

$$q^{-1} \Omega_{\pm} = \Sigma_{\pm} h. \quad (29)$$

Координаты  $\Sigma_{\pm}$  и  $h$  дают альтернативную параметризацию на  $(T^*G)_q$ . В классическом пределе  $q \rightarrow 0$  матрицы  $\Omega_{\pm}$  и  $\Sigma_{\pm}$  стремятся к  $I$ , и мы получаем

$$q^{-1} = h. \quad (30)$$

Искомая антиинволюция имеет вид

$$q^* = h. \quad (31)$$

Оказывается, что в таком виде она согласована с базисными соотношениями (4-6). Заметим, что компоненты правого момента  $\Omega_R$

$$\Sigma_{\pm} = q^{-1} \Omega_{\pm} h^{-1} \quad (32)$$

ведут себя аналогично компонентам левого момента:

$$\Sigma_+^* = \Sigma_-^{-1}, \quad \Sigma_-^* = \Sigma_+ \quad (33)$$

(сравните с формулой (21)).

Соотношения (21) и (30) задают в алгебре функций на  $(T^*G)_q$  антиинволюцию, согласованную с соотношениями (4-6). Это обстоятельство позволяет нам сказать, что построен  $q$ -аналог кокасательного расслоения компактной группы (в простейшем случае группы  $SU(2)$ ) при  $|q|=1$ . Заметим, что в этих условиях  $q$ -аналог самой компактной группы не определен, так как инволюция (25) не согласована с соотношением (4). Более точно,  $q^*$  и  $q^{-1}$ , как легко убедиться, имеют различные перестановочные соотношения и не могут быть приравнены без возникновения противоречий. Таким

образом, основной вывод состоит в том, что, несмотря на отсутствие  $q$ -аналогов компактных групп при  $|q|=1$ , можно успешно строить  $q$ -аналоги их кокасательных расслоений, что является, в известной мере, адекватной заменой.

В заключении этого параграфа приведем набор соотношений для возникших объектов  $\Sigma_{\pm}$  и  $h$ :

$$R_{\pm} h^1 h^2 = h^2 h^1 R_{\pm};$$

$$\Sigma_+^1 \Sigma_+^2 R_{\pm} = R_{\pm} \Sigma_+^2 \Sigma_+^1,$$

$$\Sigma_-^1 \Sigma_-^2 R_{\pm} = R_{\pm} \Sigma_-^2 \Sigma_-^1,$$

$$\Sigma_+^1 \Sigma_-^2 R_+ = R_+ \Sigma_-^2 \Sigma_+^1;$$

$$h^1 \Sigma_+^2 = \Sigma_+^2 R_- h^1,$$

$$h^1 \Sigma_-^2 = \Sigma_-^2 R_+ h^1,$$

$$\Omega^1 \Sigma^2 = \Sigma^2 \Omega^1;$$

$$g^1 R_- \Sigma_+^2 = \Sigma_+^2 g^1,$$

$$g^1 R_+ \Sigma_-^2 = \Sigma_-^2 g^1;$$

$$h^1 \Omega_+^2 = \Omega_+^2 h^1 R_-,$$

$$h^1 \Omega_-^2 = \Omega_-^2 h^1 R_+.$$

Предлагаем заинтересованному читателю в качестве полезного упражнения проверить непротиворечивость этой системы соотношений и ее согласованность с базисными соотношениями (4-6).

### § 3. Динамика на $(T^*G)_q$

Мы начнем с напоминания, как устроена динамика в недеформированном случае. Классический изотропный волчок задается функцией Лагранжа

$$\begin{aligned} L &= \text{Tr}(\omega_L \dot{q} \dot{q}^{-1} - \frac{1}{2} \omega_L^2) = \\ &= \text{Tr}(\omega_R \dot{q}^{-1} \dot{q} - \frac{1}{2} \omega_L^2), \end{aligned} \quad (34)$$

где  $q$  — групповой элемент, а  $\omega_L$  и  $\omega_R$  — левый и правый моменты соответственно, причем

$$\omega_R = \dot{q}^{-1} \omega_L \dot{q}. \quad (35)$$

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{q} = \omega_L \dot{q}, \quad \dot{\omega}_L = 0 \quad (36)$$

или

$$\dot{q} = q \omega_R, \quad \dot{\omega}_R = 0. \quad (36)$$

Решение уравнений (36) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \omega_L(t) &= \omega_L(0) = \omega_L, \\ q(t) &= e^{\omega_L t} q(0) \end{aligned} \quad (37)$$

и задает отображение  $(q(0), \omega(0)) \rightarrow (q(t), \omega(t))$ , сохраняющее пуассонову структуру на  $T^*G$ .

Мы хотели бы построить аналог такого отображения для деформированного случая. Такой аналог действительно существует, однако, временную переменную  $t$  нельзя естественным образом сделать непрерывной. Она оказывается дискретной и принимает, скажем, целые значения  $t = 0, 1, 2, \dots$ , а наша динамическая система превращается в каскад. Значения переменных  $q(t)$  и  $\Omega(t)$  задаются формулами

$$\begin{aligned} \Omega(n) &= \Omega(0), \\ q(n) &= \Omega^n q(0). \end{aligned} \quad (38)$$

Основное свойство преобразований (38) – сохранение соотношений (4), (9), (10). Достаточно проверить, что это свойство выполняется при  $n = 1$ . Проведем эти несложные вычисления

$$\begin{aligned}
 \Omega^1 q^1 \Omega^2 q^2 &= && \text{(по формуле (10))} \\
 = \Omega^1 (R_-)^{-1} \Omega^2 R_+ q^1 q^2 &= && \text{(по формулам (4) и (9))} \\
 = R_+^{-1} \Omega^2 R_+ \Omega^1 R_-^{-1} q^2 q^1 R_+ &= && \text{(используя (10))} \\
 = R_+^{-1} \Omega^2 R_+ R_+^{-1} q^2 \Omega^1 q^1 R_+ &= \\
 = R_+^{-1} \Omega^2 q^2 \Omega^1 q^1 R_+, &
 \end{aligned}$$

что совпадает с соотношением (4):

$$R_+ \Omega^1 q^1 \Omega^2 q^2 = \Omega^2 q^2 \Omega^1 q^1 R_+.$$

Далее рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
 R_- \Omega^1 q^1 \Omega^2 &= && \text{(используя (10))} \\
 = R_- \Omega^1 R_-^{-1} \Omega^2 R_+ q^1 &= && \text{(по формуле (9))} \\
 = \Omega^2 R_+ \Omega^1 R_+^{-1} R_+ q^1 &= \\
 = \Omega^2 R_+ \Omega^1 q^1, &
 \end{aligned}$$

что воспроизводит формулу (10).

Таким образом, мы проверили базисные соотношения для  $n=1$ . По индукции то же справедливо для любого натурального  $n$ .

Заметим еще одно важное свойство дискретной эволюции (38). Именно, она согласована с инволюцией, предложенной в предыдущем параграфе. Это означает, что если мы начинаем с  $\Omega_{\pm}(0)$  и  $q(0)$ , таких что

$$\Omega_+^*(0) = \Omega_-(0), \quad q^*(0) = h(0),$$

то  $\Omega_{\pm}$  и  $q$  будут удовлетворять этим соотношениям и в любой момент времени  $t = n$ . Проверим это утверждение. Во-первых,

$$\Omega_{\pm}(n) = \Omega_{\pm}(0)$$

и, следовательно, соотношения для  $\Omega_{\pm}(n)$  выполняются автоматически.

Соотношения для  $g$  снова будем проверять только для  $n=1$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \bar{g}^{-1}(1)\Omega_{+} &= \sum_{+}(1)h(1), \\ \bar{g}^{-1}(1)\Omega_{-} &= \sum_{-}(1)h(1). \end{aligned} \quad (39)$$

Используя соотношения (8), (29) и (38), легко вычислить  $\sum_{\pm}(1)$  и  $h(1)$ . Они равны

$$\sum_{\pm}(1) = \sum_{\pm}(0), \quad h(1) = h(0)\Omega_{+}^{-1}\Omega_{-}. \quad (40)$$

Теперь остается проверить, как связаны  $g(1)$  и  $h(1)$ . Подставляя (38) и (40), получаем

$$\begin{aligned} g^{*}(1) &= g^{*}(0)\Omega^{*} = h(0)(\Omega_{+}\Omega_{-}^{-1})^{*} = \\ &= h(0)\Omega_{-}^{*-1}\Omega_{+}^{*} = h(0)\Omega_{+}^{-1}\Omega_{-} = h(1). \end{aligned} \quad (41)$$

Таким образом, построенная дискретная эволюция (38) является естественным аналогом непрерывной эволюции (37). Она сохраняет перестановочные соотношения алгебры  $(T^{*}G)_q$  и согласована с инволюцией, выделяющей компактную форму.

На этом мы заканчиваем основную часть и переходим к обсуждению приложений и перспектив.

### Заключение

Настоящая работа может иметь значение для нескольких актуальных направлений, связанных с теорией квантовых групп. Мы обсудим две возможности, которые, как нам кажется, представляют наибольший интерес.

I. Как было показано в § 3, можно естественным образом ввести на  $(T^{*}G)_q$  дискретную эволюцию, так что время  $t$  принимает целые значения. В то же время вводить  $g(t)$  при произвольном  $t$ , или, что то же самое, дробные степени  $\Omega$ , не представляется естественным. Другими словами, деформация тесно связана с дискретностью параметров однопараметрических групп автоморфизмов.

Опуская здесь дискуссию о возможном значении для физических приложений, перепишем формулу (38) при  $t=1$  в виде

$$\Omega = g(1)g(0)^{-1}. \quad (42)$$

Эта формула является  $q$ -аналогом классической формулы

$$\omega = dg \cdot g^{-1}$$

для формы Мауреры-Картана на группе  $G$ . Здесь мы подходим к проблеме построения дифференциала на квантовой группе, которая обсуждается многими авторами [3-6]. Нам представляется, что тот факт, что "дифференциал" (42) не является наивно инфинитиземальным, еще не понят. Так, в последней своей работе [6] В.Зумино использует объект

$$\chi = \Omega - I,$$

который, конечно, в классическом пределе  $\hbar \rightarrow 0$  после соответствующей перенормировки переходит в  $\omega$ , но не является естественным в деформированном случае. Соответственно, как неоднократно заявлял один из авторов (ЛДФ) (например, на семинаре "Quantum Groups" Международного Математического института им.Эйлера осенью 1990 г.) он скептически относится к построению дифференциала на квантовой группе с наивным правилом Лейбница.

Мы надеемся вернуться к вопросу о применении развитой нами техники к дифференциальному исчислению на квантовых группах в следующей публикации.

2. Наиболее интересным для физических приложений является система  $(T^*G)_q$ , когда параметр  $q$  выбирается равным корню из 1,  $q^N = 1$ . Например,  $q = e^{2\pi i/N}$ . В этом случае алгебра  $\mathcal{G}_q$  имеет лишь конечное количество неприводимых представлений, тесная тензорных произведений для которых тесно связана с такой областью современной математической физики, как рациональная конформная теория поля (РКТП). Следуя аналогии с недеформированной ситуацией, можно предположить, что алгебра  $(T^*G)_q$  может быть представлена в  $q$ -аналоге регулярного представления  $U_q(\mathcal{G})$ . Есть основания полагать, что при  $q$ , равном корню из 1, регулярное представление оказывается конечномерным. Таким образом, интересная задача состоит в явном построении конечномерного  $*$ -представления алгебры  $(T^*G)_q$ . Свойства такого представления будут моделировать на конечномерном примере основные характерные свойства РКТП и в существенном объяснять их [7, 8].

## Литература

1. A l e k s e e v A.Yu., F a d d e e v L.D. CMP 141, 1991, pp.413-422.
2. D r i n f e l d V. Quantum Groups, Proc. ICM-86, Berkeley, California, USA, 1986, 1987, pp.798-820.
3. W o r o n o w i c z S.L. Differential calculus on compact on matrix pseudogroups, CMP 122, 1989, p.125.
4. W e s s J., Z u m i n o B. Nucl.Phys.B (Proc.Suppl.) 18B, 1990, pp.302-312.
5. M a n i n Yu.I. Quantum groups and non-commutative de Rahm complex, Bonn preprint MPI/91-47, 1991.
6. Z u m i n o B. Lecture given at Leipzig, 1991.
7. A l e k s e e v A.Yu., F a d d e e v L.D., S e m e n o v - T i a n - S h a n s k y M.A., V o l k o v A. The unravelling of the quantum group structure in the WZNW theory, preprint CERN-TH-5981/91, 1991.
8. A l e k s e e v A., F a d d e e v L., S e m e n o v - T i a n - S h a n s k y M. Hidden quantum groups inside Kac-Moody algebra, LOMI preprint E-5-91, 1991, to be published in CMP.
9. F a d d e e v L.D. Quantum symmetry in conformal field theory by hamiltonian methods, lectures given at Cargese, summer 1991.
10. Ф а д д е е в Л.Д., Р е ш е т и х и н Н.Ю., Т а х т а д - ж я н Л.А. Алгебра и Анализ, т.1, в.1, 1989, с.178-206.
11. R e s h e t i k h i n N.Yu., S e m e n o v - T i a n - S h a n s k y M.A. Lett.Math.Phys. 19, 1990.

A.Yu.Alekseev, L.D.Faddeev. An involution and dynamics for the  $q$ -deformed quantum top.

An involution in the phase space of the  $q$ -deformed quantum top is constructed which singles out a  $q$ -analogue of its compact form and a dynamics compatible with this involution is proposed which initiates the motion of the classical spherical top.