Л. Д. Фаддеев, Замечания о расходимостях и размерной трансмутации в теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 2006, том 148, номер 1, 133–142

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/tmf2064

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 148, № 1
июль, 2006**

Л. Д. Фаддеев*

ЗАМЕЧАНИЯ О РАСХОДИМОСТЯХ И РАЗМЕРНОЙ ТРАНСМУТАЦИИ В ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Обсуждается специфика перенормировки заряда в теории Янга–Миллса. Показано, что значения бегущей константы связи при размерной регуляризации и импульсном обрезании совпадают. Размерная трансмутация интерпретируется как замена безразмерной константы связи на размерный инвариант уравнения группы перенормировок.

Ключевые слова: размерная трансмутация, уравнения группы перенормировок, размерная регуляризация, импульсное обрезание.

Ультрафиолетовые расходимости преследуют квантовую теорию поля с момента ее построения в начале 30-х годов прошлого века. Теория перенормировок привела к феноменальным успехам в квантовой электродинамике, но не принесла удовлетворения ее создателям. Возврат интереса к теории поля в виде теории Янга–Миллса поставил вопрос о расходимостях заново. Постепенно стало ясно, что расходимости не дискредитируют теорию, а наоборот, играют положительную роль, являясь эффективным средством нарушения конформной инвариантности классической теории. Размерная трансмутация (термин, введенный в работе [1]) при правильной интерпретации должна решить проблему массы в квантовой теории Янга–Миллса в четырехмерном пространстве-времени.

В этой статье я хочу изложить свою интерпретацию этого понятия. Большинство моих замечаний известно в той или иной мере, однако расстановка акцентов может оказаться полезной.

Для начала я разбираю элементарный пример из нерелятивистской квантовой механики, где размерная трансмутация легко объясняется и имеет четкую математическую интерпретацию.

Теория Янга–Миллса рассматривается в формализме фонового поля, где перенормировка заряда производится особенно просто и приводит к появлению бегущей константы связи $\alpha(\mu)$. Я приведу сравнение регуляризаций, основанных на введении импульса обрезания Λ и на изменении размерности пространства $4 \to 4-\epsilon$,

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: faddeev@pdmi.ras.ru

и покажу, что $\alpha(\mu)$ для них совпадают. Размерный параметр m появляется как инвариант уравнения группы перенормировок.

В заключении я сформулирую довольно спекулятивную гипотезу о том, как параметр m может войти в физические величины теории Янга–Миллса.

С большим удовольствием я посвящаю эту статью юбилею Юрия Викторовича Новожилова, чьи лекции по квантовой теории поля я слушал в студенческие годы более 50 лет назад.

1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим оператор Шредингера для нерелятивистской частицы в двумерном пространстве, которая взаимодействует с центром, сосредоточенным в начале координат,

$$H = -\Delta + \epsilon\delta^{(2)}(x) = H_0 + V.$$

Основным объектом теории рассеяния является резольвента $R(z) = (H - zI)^{-1}$, которая имеет структуру

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)T(z)R_0(z),$$

где $R_0(z) = (H_0 - zI)^{-1}$ и T-матрица $T(z)$ удовлетворяет уравнению [2]

$$T(z) = V - VR_0(z)T(z). \tag{1}$$

В импульсном пространстве потенциал V является интегральным оператором с ядром

$$V(p,p') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{i(p-p')x}V(x)\,d^2x;$$

в нашем примере имеем $V(p,p') = \epsilon$. Из уравнения (1) немедленно следует, что $T(p,p';z)$ также не зависит от p, p', $T(p,p';z) = t(z)$, и само интегральное уравнение сводится к алгебраическому соотношению

$$t(z) = \epsilon - \epsilon\int\frac{d^2p}{p^2-z}\,t(z), \tag{2}$$

в котором участвует расходящийся интеграл. Регуляризуем его введением импульса обрезания Λ. Имеем

$$\int_{|p|\leqslant\Lambda}\frac{d^2p}{p^2-z} = \pi\int_0^{\Lambda^2}\frac{dx}{x-z} = \pi\ln\frac{\Lambda^2}{-z},$$

где для логарифма как функции z рассматривается главная ветвь, так что правая часть равенства определена на плоскости z с разрезом по положительной полуоси, соответствующему непрерывному спектру.

Перепишем регуляризованное соотношение (2) в виде

$$\frac{1}{t(z)} = \frac{1}{\epsilon} + \pi\ln\frac{\Lambda^2}{-z} = \frac{1}{\epsilon} + \pi\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + \pi\ln\frac{m^2}{-z}$$

и, следуя парадигме теории перенормировок, идущей от Ландау и Вильсона, будем считать, что константа связи ϵ зависит от Λ. Положим

$$\frac{1}{\epsilon(\Lambda)} + \pi \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} = 0. \tag{3}$$

Ясно, что это может быть выполнено только при $\epsilon(\Lambda) < 0$, что соответствует притяжению. Перепишем (3) в виде

$$m = \Lambda \exp\left(\frac{1}{2\pi\epsilon}\right)$$

и будем считать, что $\epsilon(\Lambda) \to 0$ при $\Lambda \to \infty$ так, что величина m остается конечной. Новый параметр m входит в формулу для T-матрицы,

$$t(z) = \left(\pi \ln \frac{m^2}{-z}\right)^{-1},$$

в которой не осталось следа от затравочной константы связи ϵ. Мы видим, что $t(z)$ имеет простой полюс при $z = -m^2$.

Нетрудно проверить, что построенный через $T(z)$ оператор $R(z)$ действительно является резольвентой самосопряженного оператора, имеющего непрерывный спектр на положительной полуоси и дискретное собственное значение в точке $-m^2$. Как давно объяснено Березиным и мной в [3], этот оператор является самосопряженным расширением симметричного оператора, который определяется оператором Лапласа $-\Delta$ на функциях, исчезающих в начале координат. В [3] мы рассматривали "реалистический" случай трехмерного пространства вместо "искуственного" двумерного, который на самом деле гораздо более поучителен.

Действительно, формула (3) дает пример явления, которое в [1] названо размерной трансмутацией и связано с нарушением масштабной инвариантности. Поясним это подробнее. При преобразовании $x \to \lambda x$ оператор Лапласа $-\Delta$ и функция $\delta^2(x)$ преобразуются одинаково. Другими словами, они имеют размерность $[\mathrm{L}]^{-2}$, так что константа связи ϵ безразмерна. В то же время новый параметр m, входящий в резольвенту, имеет размерность, $m = [\mathrm{L}]^{-1}$, и фиксирует масштаб в операторе H. Можно сказать, что масштабная ковариантность оператора H нарушена. Причиной этого нарушения является расходимость в формуле (2), которая указывает на бессмысленность этого формального выражения при конечном ϵ. Только предельный переход, когда ϵ считается функцией импульса обрезания Λ и стремится к нулю, приводит к осмысленному результату.

Итак, мы убедились что расходимости могут играть положительную роль, приводя к интересным возможностям. Эта идея, все еще не овладевшая массами, уже разделяется многими специалистами, среди которых упомяну Джакива [4], 'т Хоофта [5] и Вильчека [6]. Особенно заманчива ее реализация в теории Янга–Миллса, где она должна привести к описанию массивных возбуждений.

2. ФОРМАЛИЗМ ФОНОВОГО ПОЛЯ ДЛЯ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Перенормировка заряда в теории Янга–Миллса особенно просто осуществляется в формализме фонового поля. Основным объектом этого формализма [7], является эффективное действие $W(\Phi^{\mathrm{ph}})$, представляющее сумму вакуумных одночастично-неприводимых диаграмм, которые получаются интегрированием функционала $e^{iS(\Phi)}$ после замены

$$\Phi = \Phi^{\mathrm{ph}} + \varphi.$$

Фоновое поле Φ^{ph} должно удовлетворять физическим граничным условиям и уравнению движения, которое его однозначно определяет по этим условиям. Это уравнение только в нулевом порядке по $\hbar$ совпадает с классическим и имеет квантовые поправки.

Формализм фонового поля лучше подходит для теории Янга–Миллса, чем более общепринятый формализм, использующий внешние источники и функции Грина, который плохо совместим с калибровочной инвариантностью. Для нас важно, что в формализме фонового поля единственной перенормировкой является перенормировка заряда [8].

Поскольку основные объекты формализма хорошо известны, я ограничусь лишь напоминанием формул, необходимых для пояснения обозначений.

Поле Янга–Миллса описывается 1-формой связности

$$A = A_\mu^a t_a \, dx^\mu$$

с кривизной

$$F = dA + A \wedge A,$$

где t^a – генераторы соответствующей компактной группы зарядов G с нормировкой $\mathrm{tr}(t^a t^b) = 2\delta^{ab}$ и tr – форма Киллинга.

Мы рассматриваем только четырехмерное пространство-время с плоской метрикой и будем для определенности использовать евклидову формулировку.

Классическое действие задается формулой

$$S = \frac{1}{4g^2} \int \mathrm{tr}\, F \wedge F^*,$$

где g^2 – константа связи, которая является единственным параметром, характеризующим теорию. В системе единиц $\hbar = 1$ и $c = 1$ этот параметр не имеет размерности, так как формы A и F безразмерны.

Сдвиг

$$A = A^{\mathrm{ph}} + ga$$

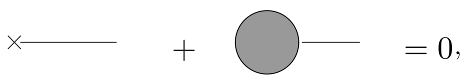
в континуальном интеграле приводит к диаграммной технике со следующими элементами: пропагаторами

G_1 $\qquad\qquad$ G_0

и вершинами

V_1 V_3 V_4 Ω

для векторных полей и духов. Вершины V_1, V_3 V_4 и Ω имеют порядок $1/g$, g, g^2, g, соответственно. Все эти элементы зависят от фонового поля A^{ph}. Коэффициентная функция в вершине V_1 совпадает с классическим уравнением движения. Квантовое уравнение движения для фонового поля может быть изображено как



где во втором слагаемом участвуют только одночастично-неприводимые диаграммы.

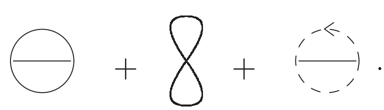
Интегрирование по a и духам приводит к разложению для эффективного действия

$$W(A^{\mathrm{ph}}) = \frac{1}{\alpha}W_{-1} + W_0 + \alpha W_1 + \alpha^2 W_2 + \cdots ,$$

где для последующего удобства введено обозначение $\alpha = g^2/(4\pi)$, а W_{-1} – классическое действие:

$$W_{-1} = \frac{1}{16\pi}\int \operatorname{tr} F \wedge F^*.$$

Далее, $W_0 = \ln\det M_0 - \frac{1}{2}\ln\det M_1$, где M_0 и M_1 – дифференциальные операторы, функциями Грина которых являются пропагаторы G_0 и G_1, а W_k даются суммой вакуумных одночастично-неприводимых диаграмм с $(k+1)$ петлями, например

$W_1 +$ 

Приведенное выражение содержит расходимости, к обсуждению которых мы переходим.

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ПЕРЕНОРМИРОВКА

Расходимости в формализме фонового поля обсуждались многими авторами (см., например, работы [9], [10]). Основной результат состоит в том, что расходящиеся вклады в W_0, W_1 имеют структуру

$$W_k = C_k W_{-1} + \text{конечная часть},$$

где C_k – расходящиеся константы. Для W_k при $k > 1$ структура расходимостей более сложная, однако все они также содержат расходящиеся слагаемые, пропорциональные W_{-1}. В результате эффективное действие приобретает вид

$$W(A^{\mathrm{ph}}) = \left(\frac{1}{\alpha} + C_0 + C_1\alpha + C_2\alpha^2 + \cdots\right)W_{-1}(A^{\mathrm{ph}}) + \cdots ,$$

и естественно назвать сумму слагаемых в скобке перенормированным зарядом:

$$\frac{1}{\alpha_{\mathrm{r}}} = \left(\frac{1}{\alpha} + C_0 + C_1\alpha + C_2\alpha^2 + \cdots\right).$$

Перенормируемость означает, что расходимости в многопетлевых диаграммах также комбинируются в множители типа $(\alpha_{\mathrm{r}})^m$, так что в эффективное действие, выраженное через α_{r},

$$W(A^{\mathrm{ph}}) = \frac{1}{\alpha_{\mathrm{r}}}W_{-1} + \widetilde{W}_0 + \alpha_{\mathrm{r}}\widetilde{W}_1 + \cdots ,$$

входят функционалы $\widetilde{W}_k$, не содержащие расходимостей.

Константы C_k после регуляризации зависят от соответствующих параметров – импульса обрезания Λ или дефекта размерности ϵ в случае размерной регуляризации. Рассмотрим эти две регуляризации последовательно.

Соображения размерности показывают, что в первом случае C_k являются полиномами по $\ln(\Lambda/\mu)$, где Λ – импульс обрезания, а μ – вспомогательная величина, необходимая для обезразмеривания Λ. Она возникает при регуляризации интеграла вида

$$\int_0 \frac{ds}{s} \sim \ln\frac{\Lambda}{\mu}$$

как верхний предел и имеет смысл инфракрасного обрезания. Ясно, что перенормированный заряд зависит от μ. Общие соображения (см. ниже) показывают, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_{\mathrm{r}}(\mu)} = \frac{1}{\alpha(\Lambda)} + c_0\ln\frac{\Lambda}{\mu} + c_1\ln\frac{\Lambda}{\mu}\alpha(\Lambda) +& \\ + \left(c_{21}\ln\frac{\Lambda}{\mu} + c_{22}\ln^2\frac{\Lambda}{\mu}\right)&\alpha^2(\Lambda) + \cdots ,\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$c_0 = -\frac{11}{3}\frac{K_2(G)}{2\pi}, \qquad c_1 = -\frac{17}{3}\left(\frac{K_2(G)}{2\pi}\right)^2.$$

Здесь $K_2(G)$ – нормировка оператора Казимира в присоединенном представлении, $K_2(G) = N$ для группы $SU(N)$.

Важнейшее свойство этой формулы состоит в том, что c_0, c_1 отрицательны. Именно это позволяет надеяться, что $\alpha_{\mathrm{r}}(\mu)$ определено в пределе $\Lambda \to \infty$, $\alpha(\Lambda) \to 0$.

В отличие от примера в разделе 1, мы не можем положить $\alpha_{\mathrm{r}}(\mu) = \infty$, так как старшие петли содержат расходимости, не пропорциональные W_{-1}.

Полагая в (4) $\Lambda = \mu$, убеждаемся что $\alpha_{\mathrm{r}}(\mu) = \alpha(\mu)$, и неперенормированная и перенормированная константы связи представляют собой значения одной и той же функции $\alpha(x)$ при $x = \Lambda$ и $x = \mu$.

Я должен сознаться, что удовлетворительного вычисления даже двухпетлевого вклада в этой регуляризации до сих пор нет. Так что утверждение о том, что имеет место формула (4), пока носит гипотетический характер, и мы сделали его, исходя из совместимости с ренормализационной группой, как это объяснено в следующем разделе.

В размерной регуляризации, которая использована в цитируемых выше работах [9], [10], получено разложение

$$W(A^{\mathrm{ph}}) = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{b_0}{\epsilon} + \frac{b_1}{\epsilon}\alpha + \frac{b_{21}}{\epsilon}\alpha^2 + \frac{b_{22}}{\epsilon^2}\alpha^2\right)W_{-1} + \cdots ,$$

где

$$b_0 = c_0, \qquad b_1 = \frac{c_1}{2}, \qquad b_{21} = \frac{c_{21}}{3},$$

и перенормированный заряд на первый взгляд не содержит параметра μ. Однако более детальное рассмотрение показывает, как эта зависимость появляется (ср. с [9]). В пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$ неперенормированный заряд имеет размерность, $\alpha = \alpha_0(\epsilon)\mu^\epsilon$, где α_0 – безразмерен, так что для перенормированного заряда $\tilde{\alpha}(\mu)$ получаем разложение

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}(\mu)} = \frac{1}{\alpha(\epsilon)} + \frac{b_0}{\epsilon}\mu^{-\epsilon} + \frac{b_1}{\epsilon}\alpha(\epsilon)\mu^{-2\epsilon} + \\ + \alpha^2(\epsilon)\mu^{-3\epsilon}\left(\frac{b_{21}}{\epsilon} + \frac{b_{22}}{\epsilon^2}\right) + \cdots , \tag{5}$$

и при $\epsilon \to 0$ зависимость от μ не пропадает. Как мы убедимся в следующем разделе, функции $\tilde{\alpha}(\mu)$ и $\alpha(\mu)$ совпадают.

4. РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА И РАЗМЕРНАЯ ТРАНСМУТАЦИЯ

Важнейшим следствием теории перенормировок является дифференциальное уравнение Гелл-Мана–Лоу, согласно которому бегущая константа связи $\alpha(\Lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Lambda\frac{d\alpha(\Lambda)}{d\Lambda} = \beta(\alpha(\Lambda)), \tag{6}$$

где правая часть не зависит от Λ явно. Это уравнение означает, что при изменении импульса обрезания мы можем так подогнать константу связи $\alpha(\Lambda)$, что физические результаты не зависят от Λ.

Дифференцированием по Λ убеждаемся, что формула (4) совместна с уравнением (6), если считать, что $\beta(\alpha)$ имеет разложение

$$\beta(\alpha) = \beta_1\alpha^2 + \beta_2\alpha^3 + \beta_3\alpha^4 + \cdots$$

и

$$\beta_1 = c_0, \qquad \beta_2 = c_1, \qquad \beta_3 = c_{21}, \qquad c_{22} = -\frac{1}{2}\beta_1\beta_2.$$

Конечно, перенормированный заряд $\alpha(\mu)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $\alpha(\Lambda)$. Это можно записать в виде соотношения

$$\int_{\alpha(\mu)}^{\alpha(\Lambda)} \frac{dx}{\beta(x)} = \ln\frac{\Lambda}{\mu}.$$

Покажем теперь, что $\tilde{\alpha}(\mu)$ совпадает с $\alpha(\mu)$. Дифференцируя (5), убеждаемся, что $\tilde{\alpha}(\mu)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu \frac{d\tilde{\alpha}(\mu)}{d\mu} = \beta(\tilde{\alpha}(\mu)),$$

если $b_0 = \beta_1$, $b_1 = \beta_2/2$, $b_{22} = -\beta_1\beta_2/6$. Именно эти значения для коэффициентов b_0, b_1, b_{22} были получены в [11], в чем можно убедиться после простого пересчета и исправления одной опечатки.

Таким образом, обе регуляризации приводят к одинаковому выражению для эффективного действия в виде разложения по бегущей константе связи $\alpha(\mu)$. Это разложение не содержит расходимостей.

Перейдем теперь к обсуждению размерной трансмутации. Параметр μ, входящий в бегущую константу связи, произволен. Физика не должна зависеть от выбора μ. Размерный параметр появляется как инвариант траектории группы перенормировок. Поясним это, следуя Полякову [12]. Нам придется сделать предположение о глобальном поведении β-функции. Будем считать, что она не меняет знак и $\int \frac{dx}{\beta(x)}$ сходится в окрестности бесконечности. Введем функцию $\theta(\alpha)$ соотношением

$$\theta(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{\beta(x)}.$$

Эта функция имеет отрицательные значения, ведет себя как $1/(\beta_1\alpha)$ при малых α и монотонно стремится к нулю при $\alpha \to \infty$. Соотношение

$$\int_{\alpha(\mu_1)}^{\alpha(\mu_2)} \frac{dx}{\beta(x)} = \ln\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

можно переписать как

$$\theta(\alpha(\mu_1)) - \theta(\alpha(\mu_1)) = \ln\frac{\mu_2}{m} - \ln\frac{\mu_1}{m}$$

или как

$$\theta(\alpha(\mu)) = -\ln\frac{\mu}{m}, \tag{7}$$

где m играет роль константы разделения. Переписав (7) в виде

$$m = \mu e^{\theta(\alpha(\mu))},$$

получаем m как инвариант ренормализационной группы. Это и есть размерный параметр, через который должно быть выражено эффективное действие. Поляков называет m^{-1} корреляционной длиной [12]. Заметим, что вследствие отрицательности функции θ мы имеем ограничение на μ: $\mu \geqslant m$.

Переписывая (7) в другом виде, получаем выражение для бегущей константы связи $\alpha(\mu)$:

$$\alpha(\mu) = \theta^{-1}\left(\ln\frac{m}{\mu}\right),$$

где $\theta^{-1}(x)$ – функция, обратная к $\theta(x)$. Она отображает отрицательную полуось на положительную полуось, при этом

$$\theta^{-1}(x) \sim \frac{1}{\beta_1 x}, \qquad x \to -\infty,$$
$$\theta^{-1}(x) \to \infty, \qquad x \to -0.$$

В примере из раздела 1 параметр m^2 играл роль энергии связи. Он естественно составил безразмерное отношение с параметром z, входящим в резольвенту. В теории Янга–Миллса этот параметр также должен войти в комбинации с размерной физической величиной.

Наиболее вероятно, что роль этой размерной величины будет играть плотность энергии вакуума, которая, в свою очередь, порождена нетривиальным конденсатом.

Приведем гипотетическую картину для этого явления. Вместе с Ниеми я в [13] обсуждаю замену переменных для полей Янга–Миллса $SU(2)$ и соответствующие струноподобные возбуждения (обобщение на случай $SU(3)$ см. в [14]). Для успеха нашей программы мы должны иметь конденсат для поля

$$\rho^2(x) = (A^1_\mu)^2 + (A^2_\mu)^2.$$

Положим $\langle\rho^2\rangle = H^2$. Обсуждению подобного конденсата размерности $[\mathrm{L}]^{-2}$ в последнее время посвящено много работ (см., например, [15] и приведенные там ссылки).

Гипотеза состоит в том, что плотность энергии задается минимумом функции типа той, что приведена в статье Саввиди [16]:

$$E(H) = -\frac{H^4}{\theta^{-1}(\ln\frac{H}{m})}.$$

Здесь в знаменателе стоит $\alpha(m^2/H)$. Функция $E(H)$ определена при $0 < H < m$, отрицательна и равна нулю при $H = 0$ и $H = m$. Физическое значение H определяется как положение ее минимума.

Конечно, последнее рассуждение пока чисто спекулятивное, и только дальнейшая работа покажет его перспективность.

На этом я заканчиваю замечания о размерной трансмутации в теории Янга–Миллса.

Благодарности. В процессе работы над этим текстом я имел стимулирующие беседы с моими молодыми сотрудниками Т. Болоховым и П. Мневым, а также с И. Арефьевой, Ф. Вильчеком, А. Владимировым, Р. Джакивом, Д. Дьяконовым, Д. Казаковым, А. Ниеми, А. Славновым и Г. 'т Хоофтом. Всем им я выражаю свою признательность.

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 05-01-00922), CRDF (грант RUM-1-2622-ST-04) и Программой РАН "Математические проблемы нелинейной динамики".

Список литературы

[1] S. Coleman, E. Weinberg, *Phys. Rev. D*, **7** (1973), 1888.
[2] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
[3] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *ДАН СССР*, **137** (1961), 1011.
[4] R. Jackiw, "What good are quantum field theory infinities", *Mathematical Physics* 2000, Int. Congress (London, 2000), eds. A. Fokas, A. Grigoryan, T. Kibbe, B. Zegarlinski, Imperial College Press, London, 2000, 101.
[5] G. 't Hooft, *Phys. Stat. Solidi* (*b*), **237**:1, 13; `hep-th/0208054`.
[6] F. Wilczek, "Four big questions with pretty good answers", *Fundamental Physics*: *Heisenberg and Beyond*, Werner Heisenberg Centennial Symposium "Developments in Modern Physics", eds. G. W. Buschhorn, J. Wess, Springer, Berlin, 2004, 79; `hep-ph/0201222`.
[7] G. 't. Hooft, *Nucl. Phys. B*, **62** (1973), 444; Б. Девитт, *Динамическая теория групп и полей*, Мир, М., 1987.
[8] Л. Д. Фаддеев, "Квантовая теория калибровочных полей", *Векторные мезоны и электромагнитные взаимодействия*, Тр. междунар. семинара (Дубна, 23–26 сентября 1969 г.), ред. А. М. Балдин, ОИЯИ, Дубна, 1969, 13.
[9] L. F. Abbot, *Nucl. Phys. B*, **185** (1982), 189.
[10] I. Jack, H. Osborn, *Nucl. Phys. B*, **207** (1982), 474.
[11] J. P. Bornsen, A. E. M. van de Ven, *Nucl. Phys. B*, **657** (2003), 257.
[12] А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, Ижевск, Удмуртск. Унив-т, 1999.
[13] L. D. Faddeev, A. Niemi, *Phys. Lett. B*, **525** (2002), 195.
[14] Л. Д. Фаддеев, Т. А. Болохов, *ТМФ*, **139**:2 (2004), 276.
[15] F. V. Gubarev, L. Stodolsky, V. I. Zakharov, *Phys. Rev. Lett.*, **86** (2001), 2220; K. I. Kondo, *Phys. Lett. B*, **514** (2001), 335; H. Verschelde, K. Knecht, K. Van Acoleyen, M. Vanderkelen, *Phys. Lett. B*, **516** (2001), 307; `hep-th/0105018`.
[16] G. K. Savvidy, *Phys. Lett. B*, **71** (1977), 133.

Поступила в редакцию 2.03.2006