Л. Д. Фаддеев, Дифференциально-геометрические структуры и квантовая теория поля, *Тр. МИАН СССР*, 1975, том 135, 218–223

Международная конференция
по математическим проблемам
квантовой теории поля и
квантовой статистики

Москва, I2-I7 декабря I972

International Conference on
Mathematical Problems of
Quantum Field Theory and
Quantum Statistics

Moskow, 12-17 December, 1972

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Л.Д.Фаддеев (СССР)

На этой конференции все мы являемся свидетелями возрождения квантовой теории поля. В частности, успехи конструктивного подхода к теоретико-полевым моделям наводят на следующую мысль: если мы так же быстро будем взбираться вверх по дереву Джаффе [I], как это было последнее время, то уже скоро нам придется стать перед проблемой, как работать в реальном четырехмерном пространстве-времени.

Здесь возможны два различных прогноза: а) подобно двумерному случаю мы научимся строить квантовую теорию для более или менее произвольной функции Лагранжа; б) окажется, что в четырехмерном случае мы сумеем работать с лагранжианами, содержащими только специального вида нелинейности, обусловливающие взаимодействие. Во втором варианте, который мне представляется более вероятным, допустимые лагранжианы должны отбираться на основе какого-нибудь общего принципа. Геометрическое происхождение соответствующих классических полей является подходящим кандидатом для такого принципа. В настоящем докладе мы обсудим конкретные возможности для реализации принципа геометричности при построении функций Лагранжа полей с нетривиальным взаимодействием.

Термин "геометричность" имеет довольно неопределенное содержание, каждый вкладывает в него свой собственный смысл. Опишем весьма определенную схему построения полей, "имеющих геометрическое происхождение" и их динамики. Наиболее экономно это можно сделать, используя терминологию теории расслоенных пространств [2]. При этом нам понадобятся лишь самые первоначальные понятия этой теории, не имеющие отношения к ее топологическому содержанию.

Для простоты будем пренебрегать гравитацией и считать, таким образом, что пространство-время линейно и имеет псевдоевклидову структуру пространства Минковского $M_4$ . Основным объектом, порождающим классические "геометрические" поля, является главное расслоенное пространство

$$E = M_4 \times (L \times G) \longrightarrow M_4$$

над $M_4$ . Здесь $L$ - группа Лоренца, а $G$ - компактная группа, отвечающая внутренним степеням свободы, которые мы будем называть обобщенными зарядами. Классические поля можно разбить на два типа:

а) сечения расслоения, ассоциированного с $E$ ;

б) инфинитезимальные связности в этом расслоении.

Приведем два типичных примера ассоциированных расслоений. Первый пример дает векторное расслоение, слоем которого является тензорное произведение пространства неприводимого конечномерного представления группы $L$ и пространства неприводимого унитарного представления группы $G$. Соответствующее сечение – поле $\psi$ – имеет определенный спин и обобщенный заряд и может быть названо линейным полем. Второй пример дает расслоение, слоем которого является компактное многообразие, на котором транзитивно действует группа $G$. Соответствующее сечение – поле $\chi$ – можно называть нелинейным. Совокупности полей первого типа соответствует произведение таких ассоциированных расслоений.

Задание фиксированного сечения $\sigma$ расслоения $\psi$ определяет репер в каждом слое линейного расслоения и выделенную точку в слое нелинейного расслоения. При этом конкретное линейное поле задается своими компонентами по отношению к этому реперу, а связности $A$ соответствует набор один-форм со значением в алгебре Ли группы $L \times G$. Таким образом, связность естественно разбивается на лоренцеву и зарядовую составляющие. Отсутствие гравитации означает, что лоренцева составляющая имеет нулевую кривизну. Мы можем выбрать сечение $\sigma$ так, чтобы эта составляющая тождественно исчезала. В дальнейшем мы будем всегда считать, что $\sigma$ выбрано именно таким образом, что связность $A$ имеет только зарядовую составляющую и задается набором один-форм со значением в алгебре Ли группы $G$.

При изменении $\sigma$ набор компонент поля $\psi$ и компоненты связности $A$ преобразуются известным образом. При нашем условии относительно $\sigma$ его изменение соответствует локальному действию группы $G$ в каждом слое. Вместо того, чтобы говорить об изменении $\sigma$, мы, как всегда, можем говорить о действии в множестве всех полей бесконечномерной группы

$$G^{\infty} = \prod_{x} G,$$

где произведение берется по всем точкам $x$ пространства Минковского $M_4$. Группа $G^{\infty}$ называется калибровочной группой. Ее элементами являются гладкие функции $\Omega(x)$ на $M_4$ со значениями в группе $G$, отличные от единицы лишь в компактной области. Действие группы $G^{\infty}$ описывается формулами

$$\chi(x) \to \Omega(x)\chi(x);$$

$$\psi(x) \to T(\Omega(x))\psi(x);$$

$$A(x) \to \Omega(x)A(x)\Omega^{-1}(x) + d\Omega(x)\Omega^{-1}(x),$$

где $T(g)$ – представление группы $G$, определяющее зарядовую часть слоя линейного поля $\psi$.

Принцип калибровочной инвариантности (или, как говорил Г.Вейль, принцип общей относительности в зарядовом пространстве) накладывает важное ограничение на динамику системы полей описанного типа. Этот принцип заключается в требовании, согласно которому совокупности полей, отличающиеся друг от друга преобразованием из группы $G^{\infty}$, объявляются физически эквивалентными. Другими словами, истинным набором полей является не множество $\mathfrak{M}$ всех сечений и связностей, а фактор-пространство

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}/G^{\infty}.$$

В частности, функция Лагранжа должна быть инвариантна по отношению к группе $G^{\infty}$ и поэтому является сингулярной, если ее рассматривать на всем множестве $\mathfrak{M}$.

Описанная схема уже входит как составная часть в арсенал современной теории поля, хотя ее изложение часто омрачается использованием бессмысленного языка "принципа компенсации". В физической литературе набор линейное поле - связность был введен Янгом и Миллсом [3], а сама связность носит название поля Янга-Миллса. Нелинейное поле типа $\chi$ появилось впервые в работе Вейнберга [4], где оно использовано как модель для $\pi$-мезонов и независимо в работе Сугавара [5], посвященной формулировке теории поля в терминах токов. Его геометрический смысл впоследствии был объяснен рядом авторов, например, [6, 7].

В настоящем докладе нам хотелось бы сформулировать утверждение, согласно которому только поля описанного выше типа существуют в природе (конечно, с соответствующим обобщением на случай гравитационного поля). Это очень сильное утверждение, и мы не знаем достаточно решающих аргументов в его пользу. Во всяком случае, этим утверждением можно руководствоваться как наводящим соображением для построения содержательных моделей в теории поля, и вторую половину доклада мы посвятим изложению примеров, которые это иллюстрируют.

В заключение же его первой половины сделаем замечание о квантовании описанных геометрических полей. Их квантовое описание отличается от классического лишь в том, что вместо определенного поля нам надо иметь дело с амплитудами вероятности для различных полей. Пространство-время при этом играет роль носителя этих полей и не меняет этой роли при переходе к квантовой теории. Все это связано с расслоенным характером пространства $E$, объединяющего пространственно-временные и "полевые" координаты. Если же фиксированная проекция такого объединенного пространства на пространство-время отсутствует, то при квантовании соответствующих теорий поля, которые можно себе представить на классическом уровне, с необходимостью должно быть квантовано и само пространство-время. Я считаю, что до сих пор мы не знаем даже на философском уровне, что можно понимать под квантованным пространством-временем, и поэтому такого понятия лучше избегать.

Перейдем теперь к описанию примеров. Первый пример представляет собой спинорная электродинамика - единственная пока теория поля, которая дает количественные предсказания, совпадающие с экспериментом. В этом случае мы имеем дело со спинорным полем $\psi$ и электромагнитным полем $A$. Эти поля естественно реализуют нашу схему, причем роль зарядовой группы играет группа вращений плоскости $G = O(2) (\cong U(1))$. Слой векторного расслоения, отвечающего полю $\psi$, имеет вид $T \otimes \mathbb{R}^2 \, (= \mathbb{C}^1)$, где $T$ - линейное четырехмерное пространство спинорного представления группы Лоренца. Электромагнитное поле $A$ является соответствующей связностью. При $U(I)$ - реализации группы $G$ такая связность определяется чисто мнимой один-формой на $M_4$, которая может быть идентифицирована с вектор-потенциалом электромагнитного поля

$$A = i A_{\mu} dx^{\mu}.$$

Элемент калибровочной группы $\Omega(x)$ при этом может быть записан в виде

$$\Omega(x) = exp\{ i\Lambda(x)\},$$

где $\Lambda(x)$ – гладкая финитная вещественная функция. В формулах действия калибровочной группы

$$\psi(x) \to exp\{i\Lambda(x)\}\psi(x), \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$$

мы узнаем хорошо знакомые формулы градиентного преобразования. Простейший инвариантный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2i}\left[\bar{\psi}\gamma_\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi}\gamma_\mu \psi\right],$$

где

$$\nabla_\mu \psi = (\partial_\mu + iA_\mu)\psi; \quad F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu),$$

как известно, лежит в основе квантовой электродинамики.

С чисто математической точки зрения группа O(2) является слишком элементарной. Кроме того, даже для описания единственного (электрического) заряда ее использовать вовсе не обязательно. Вторая группа ранга один, а именно $SU(2) \cong O(3)$ даже более естественно подходит для этой цели. Например, в O(3)-схеме в одном поле мы можем естественно объединить как заряженные, так и нейтральные компоненты. Посмотрим поэтому, что получается при обобщении электродинамики при замене группы O(2) на группу O(3).

В простейшем варианте такого обобщения мы имеем дело с линейным полем $\psi$, слой для которого имеет вид $T \otimes \mathbb{R}^3$, и связностью (полем Янга-Миллса $A_\mu$), т.е. один-формой $A_\mu dx^\mu$ со значениями в алгебре Ли группы O(3), которую можно отождествить также с $\mathbb{R}^3$. Лагранжиан, по форме совпадающий с выписанным выше в случае электродинамики, но где на этот раз

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A_\mu \wedge \psi; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu \wedge A_\nu$$

представляет собой простейшее, но мало интересное обобщение квантовой электродинамики.

Действительно, такое обобщение может приобрести физическое толкование, если мы отождествим три "зарядовые" компоненты поля $\psi$ с тремя лептонами – заряженными электроном и $\mu$-мезоном и нейтральным нейтрино. Описанная выше схема не может иметь отношения к природе, так как в ней взаимодействие всех трех компонент поля $\psi$ совершенно идентично. В то же время мы знаем, что взаимодействие заряженных лептонов между собой (в основном электромагнитное) и их взаимодействие с нейтрино (слабое) существенно различны. Наша схема, однако, позволяет включить в рассмотрение это различие инвариантным образом. Это можно сделать при помощи введения дополнительного поля. В качестве такого поля мы возьмем нелинейное поле $n(x)$ слоем для которого является сфера $S^2$ – единственное нетривиальное однородное многообразие группы O(3). Геометрический смысл этого поля состоит в том, что оно определяет одномерное нейтральное подпространство в зарядовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Итак, список полей рассматриваемой модели состоит из полей $\psi$, $A_\mu$, описанных выше, и поля $n(x)$, которое задается единичным вектором в $\mathbb{R}^3$. Существует много инвариантных функций Лагранжа, которые можно было бы построить из этих полей. Для выделения одной из них необходимо привлечь дополнительные соображения. Оказывается, что уже имеющиеся в нашем распределении объекты позволяют построить новые структуры. Так оператор $J$ действующий на линейное поле

$$J_\psi = (n, \gamma_5 \psi) n + n \wedge \psi, \qquad J^2 = -I,$$

определяет комплексную структуру в $T \otimes \mathbb{R}^3$ (мы считаем, что $\gamma_5^2 = -I$). Преобразование

$$\psi \to J\psi$$

является инвариантным обобщением $\gamma_5$ – преобразования Швингера [8] и Нишиджимы [9]. Потребуем, чтобы искомый лагранжиан был инвариантен по отношению к этому преобразованию. Это, конечно, выглядит как априорное требование, и было бы хорошо выяснить его геометрический смысл. Оно, однако, в существенном однозначно определяет функцию Лагранжа. Соответствующая формула обобщает лагранжиан, предложенный Швингером [8] и имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4e^2}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2i}(\bar{\psi}\gamma_\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi}\gamma_\mu \psi) + \frac{1}{2\lambda^2}(\nabla_\mu n)^2,$$

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A_\mu \wedge \psi + (\nabla_\mu n \wedge n)(n, \gamma_5 \psi) + n(\nabla_\mu n \wedge n, \gamma_5 \psi),$$

$$\nabla_\mu n = \partial_\mu n + A_\mu \wedge n .$$

Этот лагранжиан был предложен нами в [10, 11], где показано, в каком смысле его можно рассматривать как модель для описания объединенного электромагнитного и слабого взаимодействия лептонов. Список частиц в этой модели исчерпывается известными лептонами (электрон, $\mu$ -мезон и два нейтрино), фотоном и массивным заряженным векторным мезоном, переносящим слабое взаимодействие. Постоянные $e$ и $e\lambda$ при этом играют роль электромагнитного заряда и константы слабого взаимодействия.

Таким образом, разобранные примеры показывают, что пропагандируемые в этом докладе геометрические принципы являются сильным и в то же время гибким средством для отбора содержательных функций Лагранжа. Следующая задача – получение однозначных конечных выражений в квантовой теории, основанной на этих лагранжианах – значительно более трудна. Мы надеемся, однако, что "геометричность" предложенной схемы поможет при решении и этой задачи.

## Литература

1 A.J a f f e. Rev. Mod., Phys., 1969, 41, 576.

2 А.Л и х н е р о в и ч. "Теория связностей в целом и группы голономий", М., ИЛ, 1960.

3 C.N.Y a n g, R.M i l l s. Phys. Rev., 1954, 96, 191.

4 S.W e i n b e r g. Phys. Rev., Lett., 1967, 18, 188.
5 H.S u g a w a r a. Phys. Rev., 1968, 170, 1659.
6 K.M e e t z. J. Math. Phys., 1969, 10, 589.
7 А.А.С л а в н о в, Л.Д.Ф а д д е е в. ТМФ, 1971, 8, 297.
8 J.S c h w i n g e r. Ann. Phys., 1957, 2, 407.
9 K.N i s h i j i m a. Phys. Rev., 1957, 108, 907.
10 Л.Д.Ф а д д е е в. Препринт ЛОМИ (1972).
11 Л.Д.Ф а д д е е в, "Труды симпозиума по $\mu$-е проблеме" Москва (в печати).


## D i s c u s s i o n

QUESTION (Leutwyler H.): Why do you introduce a field for the preferred direction, which then becomes an uninteresting gauge degree of freedom? Do you not get the same theory if you let n be a constant and demand invariance only with respect to the subgroup that leaves invariant?

ANSWER: Indeed, we can fix up the direction n(x) using the gauge invariance, so that it will drop out from the Lagrangian which will remain invariant with respect to O(2) only. This Lagrangian will contain all physics of the original invariant one. However, you will not find the way to explain why it is natural. For instance, in the framework of reduced invariance there will not be room for the Yang-Mills type of interaction for vector fields. By the way, it is exactly this interaction that is absent in 1957 Schwinger's model.

QUESTION (Klauder J.): Let me rephase Prof. Leutwyler's question. What particle do you expect the field n(x) to correspond to?

ANSWER: The answer to your question depends on subsidiary conditions which fix up the choice of representatives in classes of equivalent fields, i.e. the gauge. In the gauge, Leutwyler asked about the field n(x) drops out from dynamics, so that there is no particle corresponding to it. In transverse gauge $\partial_\mu A_\mu = 0$ the field n(x) supplies the third polarization to the massive charged vector meson.

QUESTION (Segal I.): Isn't it possible that lepton mass originates in a second quantization effect, i.e. the bare mass is zero, but the physical vacuum produces a renormalization of mass.

ANSWER: I think it is quite possible. That is why I did not include the mass term for leptons into the Lagrangian proposed I would like to stress only that the invariance requires that the mass can be of the form, I have described.

QUESTION (Bialynicki-Birula I.): Why do you write the Lagrnagian for the n-field in the quadratic form? You could also have non-linear Lagrangians with minimal coupling and no higher derivatives.

ANSWER: I understant the principle of minimality in the following restrictive sense: we are to begin with Lorentz-invariant quadratic form for fields and substitute $\partial_\mu \to \nabla_\mu$ there.