Л. Д. Фаддеев, Дискретная серия представлений для модулярного дубля квантовой группы $U_q(\mathrm{sl}(2,\mathbb{R}))$, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, том 42, выпуск 4, 98–104

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/faa2927

Функциональный анализ и его приложения
2008, т. 42, вып. 4, с. 98–104

УДК 517.98+512.54

Дискретная серия представлений для модулярного дубля квантовой группы $U_q(\mathrm{sl}(2,\mathbb{R}))$

© 2008. Л. Д. Фаддеев*

Дорогому Израилю Моисеевичу Гельфанду

§1. Введение

Модулярный дубль квантовой группы $U_q(\mathrm{sl}(2))$ — это, грубо говоря, тензорное произведение двух квантовых групп с параметрами деформации $q = e^{i\pi\tau}$ и $\tilde{q} = e^{i\pi/\tau}$. Этот объект, предложенный мной в [1], был открыт в результате поиска регуляризации универсальной R-матрицы для корней из 1. Его значение для конформной теории поля, в особенности с некомпактными полевыми переменными (например, модели Лиувилля), довольно очевидно. В серии работ [2]–[5] использовалась непрерывная серия унитарных представлений модулярного дубля некомпактной вещественной формы $U_q(\mathrm{sl}(2,\mathbb{R}))$, параметризованная положительным числом — спином. Было показано, что эти представления не разлагаются в тензорные произведения дуальных факторов.

Представления были построены для двух интервалов параметра деформации:

режим I: $\tau > 0$, $|q| = |\tilde{q}| = 1$;

режим II: $|\tau| = 1$, $\bar{q} = \tilde{q}$.

В этой работе мы предъявим еще одну серию представлений, которая существует только для режима II. Эта серия параметризуется двумя целыми числами $n = 1, 2, \ldots,$ $m = 1, \ldots, n$.

Во втором параграфе мы напоминаем известные результаты, упомянутые выше, а в третьем описываем новые представления.

Я благодарен П. П. Кулишу и М. А. Семенову-Тян-Шанскому за важные замечания.

§2. Разминка — непрерывная серия

Набор генераторов модулярного дубля для $U_q(\mathrm{sl}(2))$ состоит из двух троек E, F, K и $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{K}$, удовлетворяющих соотношениям

$$KE = q^2 EK, \tag{1}$$

$$KF = q^{-2} FK, \tag{2}$$

$$EF - FE = \frac{1}{q - q^{-1}}(K - K^{-1}) \tag{3}$$

*Работа частично поддержана грантом РФФИ 08-01-00638 и программой «Математические проблемы нелинейной динамики» Президиума РАН.

с комплексным параметром $q = e^{i\pi\tau}$ и аналогичным соотношениям для $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{K}$ с параметром $\tilde{q} = e^{i\pi/\tau}$.

Отметим, что мы используем дуальный параметр $1/\tau$ вместо более традиционного $-1/\tau$. Эта подмена не принципиальна и обусловлена только соображениями удобства.

Генераторы E, F, K коммутируют с генераторами $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{K}$. Мы будем использовать выражение для этих генераторов через более простые переменные — по аналогии с переменными Гельфанда–Кириллова для некомпактной универсальной обертывающей алгебры $U(\mathrm{sl}(2))$. Пусть u, v — пара Вейля с соотношением $uv = q^2 vu$ и Z — центральный элемент. Тогда

$$E = i\,\frac{v + u^{-1}Z}{q - q^{-1}}, \quad F = i\,\frac{u + v^{-1}Z^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad K = q^{-1}uv$$

удовлетворяют соотношениям (1)–(3). Традиционный центральный элемент

$$C = qK + q^{-1}K^{-1} + (q - q^{-1})^2 FE$$

выражается через Z следующим образом:

$$C = -(Z + Z^{-1}).$$

В [3]–[5] использовалась аналогичная и эквивалентная параметризация.

Дуальные генераторы выражаются аналогичным образом через $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\widetilde{Z}$, где

$$\tilde{u} = u^{1/\tau}, \quad \tilde{v} = v^{1/\tau}, \quad \widetilde{Z} = Z^{1/\tau}.$$

Тот факт, что E, F, K коммутируют с $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{K}$, обеспечивается формулой Эйлера $e^{2\pi i} = 1$. Представления [3], [4] реализованы в $L_2(\mathbb{R})$, где пара Вейля действует как умножение и сдвиг. Нам удобно использовать вейерштрассовы параметры ω, ω' вместо τ,

$$\omega\omega' = -\frac{1}{4}, \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega};$$

переход к дуальному параметру $1/\tau$ соответствует перестановке ω и ω'.

Операторы u, v действуют на элемент $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, из $L_2(\mathbb{R})$ следующим образом:

$$uf(x) = e^{-i\pi x/\omega} f(x), \tag{4}$$

$$vf(x) = f(x + 2\omega'). \tag{5}$$

Сдвиг $x \mapsto x + 2\omega'$ уводит нас с вещественной оси, и функция $e^{-i\pi x/\omega}$ неограничена при вещественных x; таким образом, мы должны указать область определения для u и v. Будем считать, что плотная область определения состоит из целых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{C}$, быстро убывающих вдоль контуров, параллельных вещественной оси. Эта область содержит функции вида $f(x) = e^{-x^2}P(x)$, где $P(x)$ — полином.

При таком соглашении легко сосчитать оператор, сопряженный с v по отношению к обычному скалярному произведению в $L_2(\mathbb{R})$

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx. \tag{6}$$

Действительно,

$$(f, vg) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x + 2\omega')\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x) g(x + 2\omega')\, dx$$
$$= \int_{-\infty+2\omega'}^{\infty+2\omega'} \bar{f}(x - 2\omega') g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x - \overline{2\omega'})} g(x)\, dx = (v^* f, g),$$

где $v^* f(x) = f(x - \overline{2\omega'})$. В этой выкладке мы обозначили через $\bar{f}(x)$ аналитическую функцию от x, коэффициенты которой при разложении по степеням x комплексно сопряжены коэффициентам для f.

Мы можем теперь ввести вещественную форму для нашей алгебры. Для этого есть две возможности выбора τ, которые мы назовем режимом I и режимом II.

Режим I: τ — положительное число, ω и ω' чисто мнимые,

$$\bar{\omega} = -\omega, \quad \bar{\omega}' = -\omega'.$$

Операторы u, v и $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ эрмитовы и положительно определенные,

$$u^* = u, \quad v^* = v, \quad \tilde{u}^* = \tilde{u}, \quad \tilde{v}^* = \tilde{v}.$$

Это же верно и для E, F, K и $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{K}$, если Z эрмитов. В неприводимом представлении Z и $\widetilde{Z}$ являются вещественными числами. Мы задаем их как

$$Z = e^{i\pi a/\omega}, \quad \widetilde{Z} = e^{i\pi a/\omega'}, \tag{7}$$

где a — вещественный параметр — спин. В [3]–[5] приведены все необходимые математические детали.

Режим II: $|\tau| = 1$,

$$\bar{\omega} = -\omega'.$$

Операторы u, v эрмитово сопряжены к $\tilde{u}$, $\tilde{v}$,

$$u^* = \tilde{u}, \quad v^* = \tilde{v},$$

и то же верно для чисел Z и $\widetilde{Z}$, если мы используем параметризацию (7) с вещественным a.

Заметим, что третий параметр Вейерштрасса

$$\omega'' = \omega + \omega'$$

является чисто мнимым в обоих режимах.

На этом мы закончим напоминание известных вещей. Ясно, что скалярное произведение (6) использовано исчерпывающим образом. В следующем параграфе мы рассмотрим другую возможность.

§ 3. Дискретная серия

Мы будем использовать другое скалярное произведение для функций f, на которые действуют вейлевские операторы. Теперь это аналитические функции $f(z)$ и действие операторов u, v, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ такое же, как в (4), (5), с заменой $x \mapsto z$. Скалярное произведение дается формулой

$$\langle f, g \rangle = \int_D \overline{f(z)} S(\bar{z}, z) g(z)\, \frac{dz\, d\bar{z}}{2\pi i}, \tag{8}$$

где интегрирование ведется по некоторой области D на комплексной плоскости. Ядро $S(\bar{z}, z)$ должно быть положительным.

Мы найдем такое ядро и, тем самым, представление в режиме II для дискретных значений спина a, а именно $a = -n\omega''$, где n — положительное число. Такой спин — чисто мнимое число, и условие вещественности представления, в частности, требует соотношения

$$\widetilde{Z} = Z^{-1}.$$

Начнем с соотношения

$$\widetilde{K}^* = K.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{K} f, g\rangle &= \int \overline{\tilde{q}^{-1} e^{-i\pi z/\omega'} f(z+2\omega)} S(\bar{z}, z) g(z)\, \frac{dz\, d\bar{z}}{2\pi i} \\ &= q \int \bar{f}(\bar{z} - 2\omega') S(\bar{z}, z) e^{-i\pi\bar{z}/\omega} g(z)\, \frac{dz\, d\bar{z}}{2\pi i} \\ &= q^{-1} \int \overline{f(z)} S(\bar{z} + 2\omega', z) e^{-i\pi\bar{z}/\omega} g(z)\, \frac{dz\, d\bar{z}}{2\pi i}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\langle f, Kg\rangle &= \int \overline{f(z)} S(\bar{z}, z) q^{-1} e^{-i\pi z/\omega} g(z + 2\omega')\, \frac{dz\, d\bar{z}}{2\pi i} \\ &= q \int \overline{f(z)} S(\bar{z}, z - 2\omega') e^{-i\pi z/\omega} g(z)\, \frac{dz\, d\bar{z}}{2\pi i}\,.\end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$qS(\bar{z}, z - 2\omega') e^{-i\pi z/\omega} = q^{-1} S(\bar{z} + 2\omega', z) e^{-i\pi\bar{z}/\omega},$$

которое удовлетворяется, если $S(\bar{z}, z)$ представляется в виде

$$S(\bar{z}, z) = \exp i\pi(z^2 - \bar{z}^2)\Phi(\bar{z} - z). \tag{9}$$

Обратимся теперь к условию $E^* = \widetilde{E}$. Мы имеем

$$\begin{aligned}\langle f, Eg\rangle &= \frac{i}{q - q^{-1}} \int \overline{f(z)} S(\bar{z}, z)(g(z + 2\omega') + Ze^{i\pi z/\omega} g(z))\, \frac{dz\, d\bar{z}}{2\pi i} \\ &= \frac{i}{q - q^{-1}} \int \overline{f(z)} (S(\bar{z}, z - 2\omega') + ZS(\bar{z}, z) e^{i\pi z/\omega}) g(z)\, \frac{dz\, d\bar{z}}{2\pi i}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(\widetilde{E} f, g) &= \int \overline{\frac{i}{\tilde{q} - \tilde{q}^{-1}} (f(z + 2\omega) + Ze^{i\pi z/\omega'} f(z))} S(\bar{z}, z) g(z)\, \frac{dz\, d\bar{z}}{2\pi i} \\ &= \frac{i}{q - q^{-1}} \int \overline{f(z)} (S(\bar{z} + 2\omega', z) + \overline{\widetilde{Z}} S(\bar{z}, z) e^{i\pi\bar{z}/\omega}) g(z)\, \frac{dz\, d\bar{z}}{2\pi i},\end{aligned}$$

что приводит к уравнению

$$S(\bar{z}, z - 2\omega') + Ze^{i\pi z/\omega} S(\bar{z}, z) = S(\bar{z} + 2\omega', z) + Z^{-1} e^{i\pi\bar{z}/\omega} S(\bar{z}, z).$$

Используя (9), приходим к уравнению для $\Phi(t)$, $t = \bar{z} - z$,

$$(q^{-1} e^{-i\pi t/\omega} - q)\Phi(t + 2\omega') = (Z^{-1} - Ze^{-i\pi t/\omega})\Phi(t).$$

Подставляя $Z = e^{-i\pi a/\omega}$ (замена знака будет полезна ниже) и замечая, что $q = e^{i\pi\omega'/\omega} = -e^{i\pi\omega''/\omega}$, мы можем переписать последнее уравнение в виде

$$\frac{\Phi(t+2\omega')}{\Phi(t)} = \frac{\sin\pi\frac{t+2a}{2\omega}}{\sin\pi\frac{t+2\omega''}{2\omega}}\,. \tag{10}$$

Условие

$$(\widetilde{F}f, g) = (f, Fg)$$

приводит к такому же уравнению. Условия

$$(Ef, g) = (f, \tilde{E}g), \quad (Ff, g) = (f, \widetilde{F}g)$$

приводят к аналогичному уравнению с перестановкой ω и ω':

$$\frac{\Phi(t+2\omega)}{\Phi(t)} = \frac{\sin\pi\frac{t+2a}{2\omega'}}{\sin\pi\frac{t+2\omega''}{2\omega'}}\,. \tag{11}$$

Уравнения (10) и (11) фиксируют $\Phi(t)$ однозначно с точностью до постоянного множителя.

Мы будем искать решение $\Phi(t)$, положительное при мнимом t. Легко проверить, что для дискретных значений спина a,

$$a = n\omega'', \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

таковы решения $\Phi(t) = 1$ при $n = 1$ и

$$\Phi(t) = \prod_{m=1}^{n-1} \sin\pi\,\frac{t+2m\omega''}{2\omega'}\,\sin\pi\,\frac{t+2m\omega''}{2\omega}, \qquad n = 2, 3, \ldots\,. \tag{13}$$

Для мнимых t это выражение может быть переписано как

$$\Phi(t) = \prod_{m=1}^{n-1} \left|\sin\pi\,\frac{t+2m\omega''}{2\omega'}\right|^2$$

и, таким образом, явно неотрицательно.

Линии нулей функции Φ

$$t = -2m\omega''$$

делят всю комплексную плоскость на n частей: две полуплоскости $y < \mu$ и $y > \mu n$ и $n-2$ полос конечной ширины

$$\mu m < y < \mu(m+1), \qquad m = 1, \ldots n-2,$$

где

$$y = \frac{z-\overline{z}}{2i}, \qquad \mu = \frac{\omega''}{i}\,.$$

Каждую из этих частей мы возьмем в качестве области интегрирования в (8). Следует думать, что соответствующие представления неэквивалентны. Если это так, то мы имеем серию представлений, параметризованных дискретным спином из (12) и дополнительным числом $m = 1, \ldots, n-1$. Оставляем это утверждение в виде гипотезы.

Для общего значения мнимого спина a решение уравнений (10) и (11) можно выразить через «некомпактный квантовый дилогарифм», ясно описанный в [7] и уже зарекомендовавший себя как важнейший объект конформной теории поля и квантовой теории Тейхмюллера [8], [9]. Эта функция $\gamma(\zeta)$ определяется дуальными функциональными уравнениями

$$\frac{\gamma(\zeta+\omega')}{\gamma(\zeta-\omega')} = 1 + e^{-i\pi\zeta/\omega}, \tag{14}$$

$$\frac{\gamma(\zeta+\omega)}{\gamma(\zeta-\omega)} = 1 + e^{-i\pi\zeta/\omega'}. \tag{15}$$

Решение $\Phi(t)$ может быть явно записано как

$$\Phi(t) = e^{2\pi i(a+\omega'')}\,\frac{\gamma(t-\omega''+2a)}{\gamma(t+\omega'')}\,. \tag{16}$$

При $a = n\omega''$ (16) сводится к (13) при помощи соотношения

$$\frac{\gamma(\zeta+\omega'')}{\gamma(\zeta-\omega'')} = -4e^{2\pi i\zeta\omega''}\sin\frac{\pi\zeta}{2\omega'}\sin\frac{\pi\zeta}{2\omega},$$

которое следует из (14), (15). Я считаю, что (16) имеет положительные значения при мнимых t только при $a = n\omega''$.

Стоит заметить связь параметров n и m с нулями функции $\gamma(z)$ на верхней полуплоскости, которые даются формулой

$$z_{p,q} = \omega'' + 2p\omega + 2q\omega',$$

где p, q — целые неотрицательные числа. Ясно, что на каждом уровне $\operatorname{Im} z = n\omega''$ мы имеем n нулей в полном соответствии с числом представлений. Это заставляет нас думать о деформированной формуле Планшереля. Мы оставляем это для дальнейшей работы.

§ 4. Заключение

Представления, найденные здесь, имеют смысл только в режиме II. Действительно, если мы повторим вычисление для режима I, то получим то же уравнение для $\Phi(t)$, однако аргументы синусов станут вещественными при мнимом t и $\Phi(t)$ будет иметь бесконечное число нулей.

Я считаю, что режим II интереснее, чем режим I, как математически, так и в физических приложениях. Действительно, в режиме II числа ω, ω' образуют решетку в $\mathbb{C}$, в то время как в режиме I они вырожденно лежат на мнимой оси. В модели Лиувилля центральный заряд алгебры Вирасоро задается формулой

$$C = 1 + 6\Big(\tau + \frac{1}{\tau} + 2\Big)$$

(см. [9], [10]), так что $c > 25$ в режиме I и $1 < c < 25$ в режиме II. Именно последний интервал интересен для приложения модели Лиувилля к некритической струне Полякова [11]. Найденные здесь представления открывают возможности для поиска квантования квантовой модели Лиувилля, которое отличается от простого продолжения формул, полученных при $c > 25$ [12]. Отметим еще одно обстоятельство. В недеформированном случае дискретную серию имеет только группа $SL(2,\mathbb{R})$, но не ее алгебра Ли. В нашем случае алгебра $U_q(sl(2,\mathbb{R}))$ соответствует деформированной алгебре Ли, которая, таким образом, похожа более на группу Ли, чем на ее инфинитезимальную алгебру.

Литература

[1] L. D. Faddeev, *Modular double of a quantum group*, in: Math. Phys. Studies, vol. 21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, 149–156.

[2] A. G. Bytsko, J. Teschner, *Quantization of models non-compact quantum group symmetry*: *modular XXZ magnet and lattice sinh-Gordon model*, J. Phys. A: Math. Gen., **39**:41 (2006), 12927–12981.

[3] B. Ponsot, J. Teschner, *Clebsch–Gordan and Racah–Wigner coefficients for a continuous series of representations of* $U_q(\mathrm{sl}(2,\mathbb{R}))$, Comm. Math. Phys., **224**:3 (2001), 613–655.

[4] S. Kharchev, D. Lebedev, M. Semenov-Tian-Shansky, *Unitary representations of* $U_q(\mathrm{sl}_2(\mathbb{R}))$, *the modular double*, *and the multiparticle* q*-deformed Toda chains*, Comm. Math. Phys., **225**:3 (2002), 573–609.

[5] K. Schmüdgen, *Operator representation of* $U_q(\mathrm{sl}(2))$, Lett. Math. Phys., **37**:2 (1996), 211–222.

[6] A. Yu. Volkov, *Noncommutative hypergeometry*, Comm. Math. Phys., **258**:2 (2005), 257–273.

[7] R. M. Kashaev, *Quantization of Teichmüller spaces and the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys., **43**:2 (1998), 105–115.

[8] В. В. Фок, Л. О. Чехов, *Квантовые пространства Тейхмюллера*, ТМФ, **120**:3 (1999), 511–528.

[9] J.-L. Gervais, A. Neveu, *The dual string spectrum in Polyakov's quantization*, I, Nucl. Phys. B, **199**:1 (1982), 59–76.

[10] T. L. Curtright, C. B. Thorn, *Conformally invariant quantization of the Liouville theory*, Phys. Rev. Lett., **48**:19 (1982), 1309–1313.

[11] A. M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. B, **103**:3 (1981), 207–210.

[12] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov, *Integrable structure of conformal field theory*, *quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz*, Comm. Math. Phys., **177**:2 (1996), 381; `http://arxiv.org/abs/hep-th/9412229`.

Санкт-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: faddeev@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
28 мая 2008 г.