А. Ю. Алексеев, Я. Мадайчик, Л. Д. Фаддеев, С. Л. Шаташвили, Вывод аномального коммутатора в формализме функционального интеграла, *ТМФ*, 1987, том 73, номер 2, 187–190

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 73, № 2
ноябрь, 1987

ВЫВОД АНОМАЛЬНОГО КОММУТАТОРА В ФОРМАЛИЗМЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Алексеев А. Ю., Мадайчик Я., Фаддеев Л. Д., Шаташвили С. Л.

Предложен простой способ вычисления аномального коммутатора в теории взаимодействующих киральных фермионов и поля Янга – Миллса.

В работе [1] (см. также [2]) предложена программа последовательного квантования аномальной теории взаимодействующих киральных фермионов и поля Янга – Миллса. В основе этой программы лежит утверждение о модификации в квантовом случае коммутационных соотношений связей – закона Гаусса – в гамильтоновой калибровке $A_0=0$. Именно, если $G^a(\mathbf{x})$ – компоненты связей, то классическое выражение для скобок Пуассона

$$\{G^a(\mathbf{x}),\, G^b(\mathbf{y})\}=-f^{abc}G^c(\mathbf{y})\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{1}$$

после замены скобок Пуассона на коммутатор приобретает в правой части слагаемое $\mathfrak{A}^{ab}(A;\,\mathbf{x},\,\mathbf{y})$, являющееся локальным функционалом поля Янга – Миллса A. Функционал

$$\mathfrak{A}(A;u,v)=\int\mathfrak{A}^{ab}(A;\mathbf{x},\mathbf{y})\,u^a(\mathbf{x})\,v^b(\mathbf{y})\,d^3x\,d^3y \tag{2}$$

реализует второй коцикл алгебры Ли группы калибровочных преобразований, что гарантирует выполнение тождеств Якоби для модифицированных коммутационных соотношений. К сожалению, вывод этих соотношений, предложенный в [1], содержал ошибку, отмеченную впервые одним из авторов (Я. М.). Тем не менее в литературе известны несколько альтернативных выводов [3–7] разной степени строгости, и сам факт реализуемости аномального коммутатора не вызывает сомнений. Вместе с этим корректна и программа квантования в ковариантных калибровках, изложенная в [1].

Эта программа сформулирована на языке континуального интеграла. Поэтому желательно для ее более согласованного обоснования иметь вывод аномального коммутатора на этом же языке. В настоящей заметке дается вариант такого вывода. Нам представляется, что наш вывод элементарнее вывода, данного в работе Фуджикавы [7].

Исходными пунктами вывода являются:

1. Формулировка континуального интеграла в калибровке $A_0=0$. Пусть $E_i=F_{0i}$ и A_i, ψ^+ и ψ – сопряженные канонические переменные. Тогда кон-

тинуальный интеграл имеет вид

$$\int e^{iS}\delta(A_0)\prod_x dE\,dA\,d\psi\,d\psi^+, \tag{3}$$

где S — калибровочно-инвариантное действие в формализме первого порядка

$$S=\frac{1}{4g^2}\operatorname{Tr}F_{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,A_\nu]-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\right)+ \tag{4}$$
$$+i\psi^+(\partial_0+A_0+\sigma(\partial+\mathbf{A}))\psi,$$

причем считается, что $F_{ik}=\partial_i A_k-\partial_k A_i+[A_i,A_k]=\varepsilon_{ikl}B_l$.

2. Закон преобразования фермионной меры при калибровочных преобразованиях. Как показал Фуджикава [8] (а также независимо Вергелес), мера $\prod_x d\psi d\psi^+$ при естественном определении зависит от A и при калибровочных преобразованиях $A\to A^g=g^{-1}Ag+g^{-1}dg$, $\psi\to\psi_g=g^{-1}\psi$, $\psi^+\to\psi_g^+=\psi^+g$ преобразуется следующим образом:

$$\prod_x d\psi_g\,d\psi_g^+|_{A^g}=e^{i\alpha(A,\,g)}\prod_x d\psi\,d\psi^+|_A. \tag{5}$$

Здесь $\alpha(A, g)$ — лагранжиан Весса — Зумино — локальный функционал полей A и g, удовлетворяющий естественному условию согласованности с групповым свойством калибровочных преобразований:

$$\delta\alpha=\alpha(A^g,h)-\alpha(A,gh)+\alpha(A,g)=0. \tag{6}$$

Явный вид функционала $\alpha(A, g)$ зависит от способа регуляризации. Мы возьмем в качестве $\alpha(A, g)$ наиболее общепринятое выражение

$$\alpha(A,g)=\frac{-i}{480\pi^3}\operatorname{tr}\int_{\Gamma^+}(dg\cdot g^{-1})^5- \tag{7}$$
$$-\frac{i}{48\pi^2}\int\operatorname{tr}[(A\,dA+dA\,A+A^3)\,dgg^{-1}-$$
$$-{}^1/_2 Adgg^{-1}Adgg^{-1}-A\,(dgg^{-1})^3],$$

где мы использовали удобную запись через дифференциальные формы $A=A_\mu^a\lambda^a dx^\mu$.

Закон Гаусса $G^a(x)$ представлен коэффициентом при A_0^a в действии S. Нам нужно построить коррелятор двух операторов $G(x)$. Естественно для этого использовать калибровочное преобразование в интеграле (3) с матрицей $g=e^u$ и собрать члены второго порядка по инфинитезимальному параметру u.

Для произвольного функционала от канонических переменных $Q(\mathbf{A},\mathbf{E},\psi,\psi^+)$ имеем

$$\langle Q\rangle=N^{-1}\int Qe^{iS}\delta(A_0)\prod_x dE\,dA\,d\psi\,d\psi^+= \tag{8}$$
$$=N^{-1}\int Q(\mathbf{A}^g,\mathbf{E}^g,\psi_g,\psi_g^+)\,e^{iS}\delta(A_0)\times$$
$$\times\exp\left\{-i\int(\partial_0 g\cdot g^{-1})^a G^a(x)\,d^4x+i\alpha(A,g)|_{A_0=-\partial_0 gg^{-1}}\right\}\times$$
$$\times\prod_x dE\,dA\,d\psi\,d\psi^+,$$

так что разность двух записанных интегралов исчезает при произвольных $g(x)$. В каждом порядке по $u(x)$ это соотношение дает определенные тождества Уорда – Славнова. Имеем

(9) $$\partial g g^{-1} = \partial u + {}^1/_2[u,\ \partial u] + \ldots .$$

Выпишем явно вклад второго порядка в $\alpha(A_0 = -\partial_0 g g^{-1},\ \mathbf{A},\ g)$:

(10) $$\alpha(-\partial_0 g \cdot g^{-1}, \mathbf{A}, g) = \frac{i}{48\pi^2}\operatorname{tr}\int dt \int \{(A\, dA + dA A + A^3) \times$$
$$\times (\partial_0 u + {}^1/_2[u, \partial_0 u]) + (2dA + A^2)(du\partial_0 u + \partial_0 u\, du) -$$
$$- 2A\partial_0 u A\, du - \partial_0 A\,[A, du + {}^1/_2[u, du]]\},$$

где мы явно разделили пространственное интегрирование и интеграл по t, так что дифференциальные формы в последнем выражении понимаются в трехмерном смысле. Слагаемые, содержащие $\partial_0 A_i$, должны быть объединены с членом $E_i^a \partial_0 A_i^a$ в действии S. Это приводит к замене

$$E_i^a \to E_i^a + \frac{i}{48\pi^2}\varepsilon_{ijk}\operatorname{tr}\lambda^a\{A_j, \partial_k g g^{-1}\}$$

во второй строке соотношения (8). Последнее модифицирует янг-миллсовский гамильтониан

$$H_{YM} \to \frac{1}{2}\left[\left(E_i^a + \frac{i}{48\pi^2}\varepsilon_{ijk}\operatorname{tr}\lambda^a\{A_j, \partial_k g g^{-1}\}\right)^2 + B_i^a B_i^a\right]$$

и вклад от $(\partial_0 g g^{-1})^a G^a$. После такой замены во втором порядке по u из (8) получаем тождество

(11) $$\frac{i^2}{2}\int d^4x\, d^4y \langle T\underset{\sim}{G}^a(x)\underset{\sim}{G}^b(y) Q\rangle \partial_0 u^a(x)\partial_0 u^b(y) -$$
$$- \frac{i}{2}\int d^4x f^{abc} u^a(x)\partial_0 u^b(x)\langle \underset{\sim}{G}^c(x) Q\rangle =$$
$$= \frac{1}{48\pi^2}\int dt \int \langle \operatorname{tr} dA\,(du\partial_0 u + \partial_0 u\, du) Q\rangle + \ldots,$$

где

(12) $$\underset{\sim}{G}^a = G - \frac{i}{48\pi^2}\varepsilon_{ijk}\operatorname{tr}\lambda^a(A_i\partial_j A_k + \partial_j A_k A_i + A_i A_j A_k)$$

и ... обозначает слагаемые, не содержащие $\partial_0 u$. Из тождества (11) непосредственно следует аномальный коммутатор. Для этого нужно воспользоваться исходной формулой метода Бьеркена – Джонсона – Лоу

$$\lim_{q_0\to\infty} q_0 \int dt' e^{iq_0(t'-t)}\langle\alpha|\, T A(\mathbf{x}, t') B(\mathbf{y}, t)\,|\beta\rangle =$$
$$= i\langle\alpha|\,[A(\mathbf{x}, t), B(\mathbf{y}, t)]\,|\beta\rangle.$$

Подействуем на соотношение (11) оператором

(13) $$\lim_{(p_0-q_0)\to\infty}\frac{p_0-q_0}{p_0 q_0}\int dx^0\, dy^0 e^{ip_0x_0 + iq_0y_0}\frac{\delta}{\delta u^a(x)}\frac{\delta}{\delta u^b(y)}.$$

При этом выживают только те члены в (11), которые содержат производные по времени от $u(x)$, и мы окончательно получаем

$$(14)\qquad [G^a(\mathbf{x}), G^b(\mathbf{y})] = if^{abc}G^c(\mathbf{y})\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \frac{1}{24\pi^2}\varepsilon_{ijk}\,\mathrm{tr}\,\partial_i A_j \{\lambda^a, \lambda^b\}\,\partial_k\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Если вернуться от оператора $\underset{\sim}{G}$ к G, то для закона Гаусса соотношение (14) дает аномальный коммутатор

$$(15)\qquad [G^a(\mathbf{x}), G^b(\mathbf{y})] = if^{abc}G^c(\mathbf{y})\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathfrak{A}^{ab}(A;\mathbf{x},\mathbf{y})$$

с ультралокальным 2-коциклом

$$(16)\qquad \mathfrak{A}^{ab}(A,\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{1}{48\pi^2}\varepsilon_{ijk}\,\mathrm{tr}\,([\lambda^a,\lambda^b](A_i\partial_j A_k + \partial_j A_k A_i + A_i A_j A_k) - \partial_i A_j \lambda^a A_k \lambda^b + \partial_i A_j \lambda^b A_k \lambda^a)\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

На этом вывод аномального коммутатора заканчивается. В следующей публикации мы используем развитые здесь методы для более подробного описания и обоснования нашей программы квантования аномальных моделей.

Литература

[1] *Faddeev L. D., Shatashvili S. L.* // Phys. Lett. 1986. V. 167B. P. 225–228.
[2] *Faddeev L. D.* // Supersymmetry and its aplications: Superstrings, Anomalies and Supergravity/eds. Gibbons G. W., Hawking S. W. Townsend. Cambridge: Univ. Press, 1986. P. 41–53.
[3] *Jo S.-G.* // Phys. Lett. B. 1985. V. 163B. P. 353–356.
[4] *Kobayashi M., Seo K., Sugamoto A.* // Nucl. Phys. 1986. V. B273. P. 607–620.
[5] *Sonoda H.* // Phys. Lett. B. 1985. V. 156B. P. 220–224; Nucl. Phys. 1986. V. B266. P. 410.
[6] *Niemi A., Semenoff G.* // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 1019–1021.
[7] *Fujikawa K.* // Phys. Lett. B. 1986. V. 171B. P. 424–429.
[8] *Fujikawa K.* // Phys. Rev. 1980. V. D21. P. 2848–2856.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26.VI.1987 г.

DERIVATION OF ANOMALOUS COMMUTATOR IN THE FUNCTIONAL INTEGRAL FORMALISM

Alekseev A. Yu., Madajczyk J., Faddeev L. D., Shatashvili S. L.

A simple method of calculation of anomalous commutator in the theory of interacting chiral fermion and Yang – Mills fields is given.