Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. Д. Фаддеев, Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов, *ТМФ*, 1969, том 1, номер 1, 3–18

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 195.218.150.2
30 июня 2017 г., 14:53:24

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том I, № 1
октябрь
1969

ИНТЕГРАЛ ФЕЙНМАНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЛАГРАНЖИАНОВ

Л. Д. Фаддеев

Получено обобщение континуального интеграла Фейнмана, приспособленное для квантования механической системы, описываемой сингулярным лагранжианом. В качестве приложения рассматривается квантование поля Янга — Миллса.

Квантование классических механических систем при помощи интеграла Фейнмана [1] не имеет, к сожалению, до сих пор той популярности, какой оно заслуживает. По нашему мнению, оно представляет собой наиболее удобный из известных методов квантования, применимый к ситуациям, где общепринятое каноническое квантование сталкивается с трудностями. В этой статье мы постараемся это показать на примере механической системы, лагранжиан $L(q, \dot{q})$ которой сингулярен в том смысле, что обычные соотношения

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i}$$

не разрешимы относительно $\dot{q}$. В общем виде такие системы были рассмотрены Дираком [2, 3]. Он разработал для них обобщенную гамильтонову формулировку и обсуждал применение последней для квантования. Однако в подходе Дирака, в особенности в приложении к гравитационному полю [4, 5], возникает ряд трудностей. Так, нетривиальной является проблема упорядочения операторных множителей, существенная для проверки согласованности связей [6]. Далее, фазовое пространство нелинейно, и спектр обобщенных координат не совпадает с обычным спектром канонических переменных (ср. [7]). Наконец, формулировка в случае теории поля не является релятивистски ковариантной, что затрудняет борьбу с бесконечностями.

Мы собираемся показать, что перечисленные трудности не возникают при квантовании методом интеграла Фейнмана и не имеют тем самым принципиальный характер. Конечно, характерные для релятивистской теории поля бесконечности остаются и при этом подходе, так что проблема перенормировки остается.

Основное предложение работы мы формулируем в терминах механической системы с конечным числом степеней свободы. Это делает рассуждения и выводы короче и обозримее. Кроме того, яснее становится их общий характер. Переход к теории поля проводится обычным образом.

Наиболее интересные примеры систем с сингулярными лагранжианами дает теория поля. Все поля, имеющие тот или иной геометрический

смысл — электромагнитное поле, поле Янга — Миллса и поле тяготения Эйнштейна[1] описываются сингулярными лагранжианами. Полученные в работе общие формулы иллюстрируются на примере поля Янга — Миллса. Приложения к гравитационному полю будут описаны отдельно.

1. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА ИНТЕГРАЛА ФЕЙНМАНА

В своей первой работе 1948 г. [1] Фейнман ввел и исследовал континуальный интеграл по траекториям в конфигурационном пространстве механической системы. Более удобную и общую форму дает полученное Фейнманом в 1951 г. [9] выражение для континуального интеграла, в котором интегрирование ведется по траекториям в фазовом пространстве. Статья [9] мало известна и в дальнейшем описанную в ней форму континуального интеграла переоткрывали несколько раз (см., например, [10] и [11]).

Интеграл Фейнмана дает выражение для матричного элемента перехода, которое строится в терминах классических характеристик системы. Пусть $q = (q^1, \ldots, q^n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — канонические координаты и импульсы; $H(q, p)$ — функция Гамильтона. Тогда

$$\left\langle q'' \left| \exp\left\{-\frac{i}{h} H(t''-t')\right\} \right| q' \right\rangle =$$

$$= \int \exp\left\{\frac{i}{h}\int_{t'}^{t''}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - H(q,p)\right)dt\right\}\prod_{i,t}\frac{dp_i(t)\,dq^i(t)}{(2\pi h)^n}. \qquad (1)$$

В экспоненте справа стоит классическое действие (см., например, [12]), сосчитанное для траектории $q(t)$, $p(t)$, $t' \leqslant t \leqslant t''$, соединяющей поверхности $q = q'$ и $q = q''$ в фазовом пространстве.

К сожалению, до сих пор не разработано общее внутреннее определение интегралов вида (1). В литературе обычно ссылаются на предельную процедуру, при которой траектории $q(t)$ и $p(t)$ заменяются кусочно линейными и кусочно постоянными, соответственно, и интеграл становится конечномерным. Этот подход подробно описан в [11], где можно найти также доказательство унитарности и вывод уравнения Шредингера.

Для приложений к теории поля интереснее другое использование континуального интеграла. Во-первых, здесь важна прежде всего формула для S-матрицы, когда интервал времени в (1) бесконечен, $-\infty < t < \infty$ и траектории $q(t)$ имеют определенную асимптотику при $t \to \pm\infty$. Во вторых, функция Гамильтона $H(q, p)$ имеет вид

$$H = H_0 + gH_{\text{int}},$$

где H_0 — квадратичная форма, а H_{int} — форма выше второй степени по переменным поля; g — малый параметр. При разложении по степеням g воз-

---

[1] Говоря о «геометрическом смысле» перечисленных полей, мы имеем в виду, что все они являются связностями в некотором векторном расслоении (см., например, общее определение [8]).

никают интегралы вида

$$\int \exp\left\{\frac{i}{h}\left[\sum_i p_i\dot{q}^i - \sum_{i,k}(A^{ik}p_ip_k + B_i{}^kq^ip_k + C_{ik}q^iq^k)\right]dt\right\} \times$$
$$\times Q[q(t), p(t)]\prod_{i,t}\frac{dp_i(t)\,dq^i(t)}{(2\pi h)^n}$$

где A^{ik}, $B_i{}^k$, C_{ik} — постоянные матрицы; Q — полином по $q(t)$ и $p(t)$. Эти интегралы гауссовы и берутся в явном виде. Получающиеся при этом выражения естественно описываются диаграммами Фейнмана. Таким образом, континуальный интеграл Фейнмана является производящим выражением для диаграмм Фейнмана.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний относительно канонической инвариантности выражения (1). При канонических преобразованиях

$$\delta q^i = \frac{\partial\Phi}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = -\frac{\partial\Phi}{\partial q^i}$$

мера $\Pi dp\,dq$ не меняется, в функции Гамильтона проводится замена переменных и

$$\delta\int_{t'}^{t''}\sum_i p_i dq^i = \left(\sum_i p_i\frac{\partial\Phi}{\partial p_i} - \Phi\right)\Bigg|_{t=t'}^{t=t''}.$$

Таким образом, подынтегральное выражение для интеграла в новых переменных отличается только для t в концах интервала. В случае линейного канонического преобразования, когда Φ — квадратичная форма, можно показать, что такое изменение эквивалентно унитарному преобразованию. Мне не известен вывод аналогичного свойства для общего канонического преобразования, хотя вполне возможно, что оно имеет место. Трудность связана, конечно, с самим определением интеграла (1).

В случае теории поля интересные канонические преобразования линеаризуются асимптотически при $t \to \pm\infty$. В этом смысле мы можем утверждать, что запись матричных элементов S-матрицы в виде континуального интеграла вида (1) канонически инвариантна.

2. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО СИСТЕМЫ С СИНГУЛЯРНЫМ ЛАГРАНЖИАНОМ

Мы приведем здесь необходимые сведения о гамильтоновой формулировке уравнений движения для систем с сингулярным лагранжианом. Кроме упомянутой выше основной статьи Дирака [2], многие из этих сведений можно найти в работах Бергмана и его сотрудников (см., например, [13, 14] и цитированную там литературу). Мы излагаем результаты в удобной для нас форме и приводим некоторые пояснения, которые, как мы надеемся, помогут не обращаться к оригинальным статьям.

В интересующем нас случае канонические переменные $q = (q^1, \ldots, q^n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ не пробегают все фазовое пространство Γ, а удовлетворяют соотношениям

$$\varphi^a(q, p) = 0, \quad a = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Функции $\varphi^a(q, p)$ называются связями. Естественно считать их независимыми и «неприводимыми» в том смысле, что уравнения (2) определяют в фазовом пространстве Г поверхность M размерности $2n - m$, причем произвольная функция f, исчезающая на M, является линейной комбинацией связей

$$f = \sum_a c_a(q, p)\varphi^a(q, p) \tag{3}$$

с переменными, вообще говоря, коэффициентами c_a.

Мы будем рассматривать специальный, на первый взгляд, случай, когда связи φ^a и гамильтониан H удовлетворяют дополнительным условиям

$$\{\varphi^a, \varphi^b\} = \sum_c c_c{}^{ab}\varphi^c; \tag{4}$$

$$\{H, \varphi^a\} = \sum_b c_b{}^a\varphi^b. \tag{5}$$

Здесь $\{f, g\}$ — обычные скобки Пуассона в Г, $c_c{}^{ab}$ и $c_b{}^a$ — некоторые функции. Другими словами, мы считаем, что скобки Пуассона связей между собой и с гамильтонианом исчезают на M. Связи в теориях калибровочно инвариантных полей удовлетворяют перечисленным условиям. Заметим, что для выполнения (4) необходимо, чтобы m не превосходило n.

Уравнения движения могут быть получены из вариационного принципа с обобщенным действием вида

$$S[q, p, \lambda] = \int \Big(\sum_i p_i\dot{q}^i - H - \sum_a \lambda_a\varphi^a \Big) dt, \tag{6}$$

так что, помимо канонических переменных, в них участвуют как независимые неизвестные функции $\lambda_a(t)$, играющие роль множителей Лагранжа. Таким образом, уравнения движения состоят из канонических уравнений вида

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_a \lambda_a \frac{\partial \varphi^a}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \sum_a \lambda_a \frac{\partial \varphi^a}{\partial q^i} \tag{7}$$

и условий (2). При помощи (4) и (5) нетрудно убедиться, что условия (2) выполняются при произвольных функциях $\lambda_a(t)$, если они выполнены для начальных условий. Другими словами, траектория, начавшаяся на M, не покидает эту поверхность, так что уравнения (7) определяют закон преобразования координат поверхности M, в описании которого, кроме гамильтониана H, участвуют m произвольных функций $\lambda_a(t)$, $a = 1, \ldots, m$.

Наблюдаемыми величинами естественно считать не все функции на M, а только такие, на изменении которых со временем не сказывается произвол в выборе $\lambda_a(t)$. Этому требованию удовлетворяют функции f, для которых выполняется условие

$$\{f, \varphi^a\} = \sum_b d_b{}^a\varphi^b. \tag{8}$$

Действительно, в уравнениях движения для таких функций

$$\dot{f} = \{H, f\} + \sum_a \lambda_a\{\varphi^a, f\} \tag{9}$$

члены, зависящие от λ_a, исчезают на M.

Формулы (8) и (9) требуют пояснения. Участвующая в них функция f является произвольным продолжением на пространство Г функции, заданной на поверхности M. В силу неприводимости связей (3) любые два таких продолжения отличаются на линейную комбинацию связей, и, вследствие (4), условие (8) от выбора продолжения не зависит. В дальнейшем мы будем несколько раз пользоваться таким приемом описания функций и соотношений на M. Можно сказать, что при этом мы рассматриваем классы функций на Г как функции на M. В один класс объединяются функции, отличающиеся на линейную комбинацию связей.

Функция f, заданная на M и удовлетворяющая (8), существенно зависит не от всех переменных. Действительно, (8) можно рассматривать как систему m дифференциальных уравнений первого порядка на M, причем (4) играют роль условий интегрируемости. Поэтому функция f однозначно определяется своими значениями на подмногообразии начальных условий для этой системы, которое имеет размерность $(2n - m) - m = 2(n - m)$.

В качестве такого подмногообразия удобно взять поверхность Г*, определяемую уравнениями

$$\chi_a(q, p) = 0, \quad a = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

которые называются дополнительными условиями. Функции χ_a должны удовлетворять условию

$$\det \| \{\chi_a, \varphi^b\} \| \neq 0, \tag{11}$$

так как только в этом случае Г* может служить начальной поверхностью для уравнений (8). Удобно считать, что χ_a, кроме того, коммутируют между собой

$$\{\chi_a, \chi_b\} = 0. \tag{12}$$

В этом случае мы можем просто ввести на Г* канонические переменные.

Действительно, если (12) выполнено, то при помощи канонического преобразования в Г мы можем перейти к новым переменным, в которых χ_a примут простой вид

$$\chi_a(q, p) = p_a,$$

где p_a, $a = 1, \ldots, m$,— часть канонических импульсов новой системы переменных. Обозначим через q^a сопряженные с ними координаты, и пусть q^*, p^* — остальные канонические переменные. Условие (11) в новых переменных выглядит следующим образом:

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi^a}{\partial q^b} \right\| \neq 0,$$

так что уравнения (2) можно разрешить относительно q^a. В результате поверхность Г* задается в Г уравнениями

$$p_a = 0, \quad q^a = q^a(q^*, p^*),$$

и q^* и p^* играют роль независимых переменных на Г*. Оказывается, что эти переменные канонические; скобку Пуассона любых функций f и g, удовлетворяющих (8), можно сосчитать следующим образом:

$$\{f, g\}|_M = \sum \left(\frac{\partial f^*}{\partial p^*} \frac{\partial g^*}{\partial q^*} - \frac{\partial f^*}{\partial q^*} \frac{\partial g^*}{\partial p^*} \right), \tag{13}$$

где

$$f^* = f(q^a(q^*, p^*), q^*, 0, p^*), \tag{14}$$

g^* определяется аналогично, причем в левой части (13) участвуют произвольные продолжения f и g с M на Г. Для проверки (13) удобно сосчитать скобку Пуассона $\{f, g\}$ в неканонических координатах $\eta = (\varphi^a, q^*, p_a, p^*)$. При этом

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha, \beta} \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial g}{\partial \eta^\beta}, \tag{15}$$

где

$$\Omega^{\alpha\beta} = \{\eta^\alpha, \eta^\beta\}.$$

Вследствие условий (4) и (8) ряд членов в правой части (15) исчезает, и в результате она совпадает с правой частью (13), где

$$f^* = f(\eta)\,|_{p_a = \varphi^a = 0},$$

что равносильно (14). Подчеркнем еще раз, что вывод о каноничности q^* и p^* существенно связан с условием (12).

Мы имеем, таким образом, два способа описания наблюдаемых величин в нашей системе. При первом из них наблюдаемые — функции на M (точнее, классы функций на Г), удовлетворяющие соотношению (8). Скобка Пуассона определяется как значение на M скобки Пуассона в Г. При втором способе наблюдаемые представляются произвольными функциями на Г*. Для перехода ко второму способу следует подобрать дополнительные условия χ_a, решить уравнения (2) и (10) и построить f^* по (14). Можно показать, что эта процедура не зависит от выбора дополнительных условий, изменение χ_a при соблюдении (11) и (12) сводится к каноническому преобразованию в Г*.

На практике решать связи непросто, так что предпочтительнее научиться работать с первым способом описания наблюдаемых. С другой стороны, при описании по второму способу мы имеем дело с обычным фазовым пространством и можем использовать привычные формулы механики, в частности, формулу (1) для континуального интеграла. Таким образом, для проверки правильности той или иной формулы в первом способе описания наблюдаемых достаточно проверить, что она переходит в обычную формулу при описанном выше переходе ко второму способу. Именно так мы и поступим в следующем параграфе для случая континуального интеграла.

В заключение этого параграфа заметим, что аналогично можно рассмотреть случай, когда связи не удовлетворяют условию (4). Размерность фазового пространства Г* в этом случае будет $2(n + k - m)$, где $2k$ — ранг матрицы $\{\varphi^a, \varphi^b\}$ на M. Условия (8) в этом случае модифицируются. Вместо скобки Пуассона в них следует использовать скобку Дирака [2, 14]. В примерах из теории поля такие случаи, по-видимому, не встречаются.

Обсуждение геометрического смысла конструкций, развитых в этом разделе, выделено в специальное приложение.

3. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ИНТЕГРАЛ ФЕЙНМАНА

Здесь мы покажем, как выглядит континуальный интеграл Фейнмана для случая механической системы, описанной в предыдущем параграфе. Пусть такая система задана каноническими переменными $q = (q^1, \ldots, q^n)$

и $p = (p_1, \ldots, p_n)$, функцией Гамильтона $H(q, p)$ и связями $\varphi^a(q, p)$, которые удовлетворяют условиям (4) и (5). Подберем дополнительные условия $\chi_a(q, p)$, для которых выполнены соотношения (11) и (12). Тогда формула для матричного элемента S-матрицы выглядит следующим образом:

$$\langle \mathrm{out} | S | \mathrm{in} \rangle =$$

$$= \int \exp\left\{\frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum p_i \dot{q}^i - H\right)dt\right\}\prod_t d\mu(q(t), p(t)), \tag{16}$$

где мера интегрирования определяется следующим образом:

$$d\mu(q, p) = \prod_a \delta(\chi_a)\,\delta(\varphi^a)\det\|\{\chi_a, \varphi^b\}\|\prod_i \frac{dp_i dq^i}{(2\pi h)^{n-m}}. \tag{17}$$

Траектории $q(t)$ здесь при $t \to \pm\infty$ совпадают с решениями $q_{\mathrm{in}}(t)$ и $q_{\mathrm{out}}(t)$ уравнений, описывающих асимптотическое движение, и однозначно определяются состояниями $|\mathrm{in}\rangle$ и $\langle \mathrm{out}|$, соответственно, и линеаризованными дополнительными условиями.

Для доказательства мы приведем это выражение к интегралу вида (1), в котором ведется интегрирование по траекториям в физическом фазовом пространстве Γ^*. Перейдем для этого к описанным во втором разделе координатам q^a, q^*, p_a и p^*. Интеграл (16) с точностью до несущественных граничных членов, о которых говорилось в конце первого раздела, примет вид, аналогичный (16), но с другой мерой:

$$d\tilde{\mu}(q, p) = \prod_a \delta(p_a)\,\delta(\varphi^a)\det\left\|\frac{\partial\varphi^b}{\partial q^a}\right\|\prod_i \frac{dp_i dq^i}{(2\pi h)^{n-m}},$$

которую, очевидно, можно переписать так:

$$\prod_a \delta(p_a)\,\delta(q^a - q^a(q^*, p^*))\,dp_a dq^a \prod \frac{dp^*\,dq^*}{(2\pi h)^{n-m}}.$$

Интегрирование по q^a и p_a снимается δ-функциями. В результате наш интеграл принимает вид

$$\int \exp\left\{\frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum p^* \dot{q}^* - H^*\right)dt\right\}\prod_t \frac{dp^*\,dq^*}{(2\pi h)^{n-m}},$$

буквально совпадающий с (1), и мы можем считать доказанной правильность формулы (16).

Заметим теперь, что интеграл в этой формуле можно переписать в следующем виде:

$$\int \exp\left\{\frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_i p_i \dot{q}^i - H - \sum_a \lambda_a \varphi^a\right)dt\right\}\times$$

$$\times \prod_t\left(\prod_a \delta(\chi_a)\det\|\{\chi_a, \varphi^b\}\|\prod_i \frac{dp_i\,dq^i}{(2\pi h)^n}\prod_b d\lambda_b\right), \tag{18}$$

так как очевидно, что интегрирование по λ можно провести явно, и (18) вернется к виду (16). В (18) мы интегрируем функционал $\exp\left\{\frac{i}{h}S\right\}$, где

S — обобщенное действие (6) по некоторой мере в пространстве траекторий $q(t)$, $p(t)$, $\lambda(t)$, лежащих на поверхности $\chi_a(q, p) = 0$. Явное выражение для меры в (18) и составляет основной результат нашей работы. В следующем параграфе мы увидим, как конкретизируется общее выражение (18) на примере поля Янга — Миллса.

В заключение этого параграфа покажем, что интеграл (16) не зависит от выбора дополнительных условий $\chi_a(q, p)$. Пусть $\delta\chi_a$ — бесконечно малое изменение этих условий. С точностью до линейной комбинации связей мы можем представить $\delta\chi_a$ как результат инфинитезимального канонического преобразования в Γ, генератор которого — тоже линейная комбинация связей. Действительно

$$\delta\chi_a = \{\Phi, \chi_a\} + \sum_b c_{ab}\varphi^b, \quad \Phi = \sum_a h_a\varphi^a,$$

где в качестве h_a можно взять решение системы уравнений

$$\sum_b \{\chi_a, \varphi^b\} h_b = -\delta\chi_a,$$

которая, вследствие (11), имеет однозначное решение. При описанном каноническом преобразовании связи заменяются на свои линейные комбинации

$$\delta\varphi^a = \sum_b A_b{}^a\varphi^b, \quad \delta\varphi = A\varphi,$$

и, таким образом, величины, участвующие в интеграле (16), меняются следующим образом:

$$\chi \to \chi + \delta\chi, \quad \varphi \to (I + A)\varphi, \quad H \to H,$$

$$\prod_a \delta(\varphi^a) \to (1 + \operatorname{tr} A)^{-1} \prod_a \delta(\varphi^a),$$

$$\det \|\chi_a, \varphi^b\}\| \to (1 + \operatorname{tr} A) \det \|\{\chi_a + \delta\chi_a, \varphi^b\}\|.$$

Мы используем здесь очевидные сокращенные обозначения и опускаем исчезающие при интегрировании линейные комбинации связей. В результате канонического преобразования интеграл принимает такой же вид, как и (16), но с заменой $\chi \to \chi + \delta\chi$, что и доказывает его независимость от выбора χ.

4. ПОЛЕ ЯНГА — МИЛЛСА

Простейшее нетривиальное приложение введенного в третьем разделе континуального интеграла — это квантование поля Янга — Миллса [15]. Мы покажем, как из (18) получается полученное ранее В. Н. Поповым и автором [16] из других соображений выражение для модифицированного фейнмановского интеграла для этого поля. Как показано в [17], из этого выражения следует видоизмененная диаграммная техника теории возмущений, необходимость которой отмечена впервые Фейнманом [18] (другие предположения по этому поводу см. [19—21]).

Векторное поле Янга — Миллса строится по любой компактной группе G (см. [22], а также [8]). Пусть t_α — генераторы группы, нормированные условием $\operatorname{tr}(t_\alpha t_\beta) = -2\delta_{\alpha\beta}$; $f^{\alpha\beta\gamma}$ — соответствующие структурные констан-

ты, антисимметричные по всем трем индексам. Поле Янга — Миллса удобно описывать вектором[2] A_μ и антисимметричным тензором $F_{\mu\nu}$, причем эти величины являются матрицами из алгебры Ли группы G. Можно положить

$$A_\mu = A_\mu{}^\alpha t_\alpha, \qquad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}{}^\alpha t_\alpha,$$

где $A_\mu{}^\alpha$ и $F_{\mu\nu}{}^\alpha$ образуют вектор в присоединенном представлении группы G. Оба обозначения окажутся удобными ниже.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{4}\operatorname{tr}\left\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \varepsilon[A_\mu, A_\nu])F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right\}$$

и не содержит производных по времени от переменных A_0 и F_{ik}. Последние входят в L квадратично и могут быть исключены по формуле

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i + \varepsilon[A_i, A_k]. \tag{19}$$

После подстановки (19) действие принимает вид

$$S = -\frac{1}{2}\int \operatorname{tr}\left\{E_k\partial_0 A_k - \frac{1}{2}(E_kE_k + G_kG_k) - A_0C\right\}dx, \tag{20}$$

где введены обозначения

$$E_i = F_{0k}, \qquad G_i = \varepsilon_{ikl}F_{kl}$$

и C дается выражением

$$C = \partial_k E_k + \varepsilon[A_k, E_k].$$

Сравнивая (20) с (6), мы видим, что E_k и A_k играют роль канонических переменных, A_0 — множитель Лагранжа, а C — связь. Если ввести основную скобку Пуассона

$$\{E_k{}^\alpha(\mathbf{x}), A_l{}^\beta(\mathbf{y})\} = \delta_{kl}\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

то легко проверить выполнение соотношений типа (4) и (5):

$$\{C^\alpha(\mathbf{x}), C^\beta(\mathbf{y})\} = f^{\alpha\beta\gamma}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})C^\gamma(\mathbf{x})$$

и

$$\left\{\int \operatorname{tr}(E_kE_k + G_kG_k)\,d^3x, \quad C(\mathbf{y})\right\} = 0.$$

Далее, уравнение

$$C(x) = 0 \tag{21}$$

позволяет выразить продольную часть вектора E_k через вектор A_k и поперечную часть E_k и, таким образом, уменьшает «размерность» фазового пространства (шесть функций трех переменных) на одну такую функцию. Действительно, если положить

$$E_k = E_k{}^L + E_k{}^T, \qquad \partial_k E_k{}^T = 0, \qquad E_k{}^L = \partial_k\varphi,$$

мы можем переписать (21) как уравнение

$$M\varphi = \Delta\varphi + \varepsilon[A_k, \varphi] = -\varepsilon[A_k, E_k{}^T], \tag{22}$$

---

[2] В этом параграфе мы положим $\hbar = 1$, $c = 1$ и используем обычные релятивистские обозначения $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$; $i, k = 1, 2, 3$; $a_\mu b_\mu = a_0b_0 - a_kb_k$.

которое однозначно разрешимо относительно φ, если принять естественные условия при $r \to \infty$.

Таким образом, вся развитая во втором и третьем разделах техника применима к рассматриваемой системе. В качестве дополнительного условия естественно взять

$$X = \partial_k A_k = 0,$$

так как соответствующая скобка Пуассона

$$\{X^\alpha(\mathbf{x}),\ C^\beta(\mathbf{y})\} = -[\delta^{\alpha\beta}\Delta + \varepsilon f^{\alpha\gamma\beta} A_k{}^\gamma \partial_k]\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

совпадает с ядром введенного выше в (22) оператора M, который однозначно обратим.

Континуальный интеграл (18) при таком выборе дополнительного условия принимает вид

$$\int \exp\{iS\} \prod_t \det{}' M \prod_{x,\,k} \delta(\partial_i A_i)\, dA_k\, dE_k\, dA_0. \tag{23}$$

Здесь S — действие (20) и через $\det' M$ обозначен регуляризованный определитель оператора

$$\det{}' M = \det(MM_0^{-1}), \qquad M_0\varphi = \Delta\varphi,$$

который только лишь неинтересным постоянным (и бесконечным) множителем отличается от $\det M$.

Континуальный интеграл (23) является производящим для диаграмм Фейнмана в кулоновской калибровке. Его существенный недостаток — отсутствие релятивистской ковариантности. Можно, однако, переписать этот интеграл в явно ковариантном виде. Для этого в первую очередь проведем интегрирование по E_k, взяв гауссов интеграл. В результате мы получим интеграл вида

$$\int \exp\{iS[A]\} \prod_t \det{}' M \prod_{x,\,\mu} \delta(\partial_i A_i)\, dA_\mu, \tag{24}$$

где $S[A]$ — ковариантное действие поля Янга — Миллса, выраженное в терминах потенциалов A_μ

$$S[A] = \frac{1}{8} \int \mathrm{tr}\,(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \varepsilon[A_\mu, A_\nu])^2\, dx. \tag{25}$$

Нековариантным в выражении (24) является лишь множитель

$$\prod_t \det{}' M \prod_x \delta(\partial_i A_i), \tag{26}$$

определяющий меру интегрирования. Оказывается, что значение интеграла (24) не изменится, если вместо этого множителя использовать ковариантное выражение

$$\det{}' N \prod_x \delta(\partial_\nu A_\nu), \tag{27}$$

где N — четырехмерное обобщение оператора M

$$N\varphi = \Box\varphi + \varepsilon[A_\mu,\ \partial_\mu\varphi]$$

и $\det'$ опять обозначает регуляризованный определитель. В результате интеграл (24) можно переписать в виде

$$\int \exp\{iS[A]\}\det' N \prod_{x,\mu} \delta(\partial_\nu A_\nu)\, dA_\mu. \tag{28}$$

Диаграммная техника, возникающая при вычислении этого интеграла по теории возмущений, подробно описана в [17]. Ее характерной чертой является появление дополнительных диаграмм, порожденных разложением $\ln \det' N$.

Другие подходы к задаче квантования поля Янга — Миллса, разработанные Де-Виттом [19], Мандельштаммом [20] и Вельтманом [21], привели к аналогичным результатам. Отметим, что, как показал Де-Витт [19], в основу теории возмущений можно положить интеграл

$$\int \exp\left\{iS[A] + i\beta \int (\partial_\mu A_\mu)^2 dx\right\}\det' N \prod_{x,\mu} dA_\mu(x)$$

с произвольным $\beta \neq 0$. В диаграммах, порожденных этим интегралом, продольная часть пропагатора векторного поля равна $\frac{1}{\beta} - 1$, в то время как при вычислении интеграла (28) можно пользоваться только калибровкой Ландау.

Для доказательства возможности замены (26) $\to$ (27) уместно пояснить ее геометрический смысл. Действие (25) инвариантно по отношению к калибровочным преобразованиям

$$A_\mu \to A_\mu^\Omega = \Omega^{-1} A_\mu \Omega + \frac{1}{\varepsilon}\Omega^{-1}\partial_\mu \Omega,$$

где $\Omega(x)$ — произвольная матрица-функция из группы G. Можно сказать, что $S[A]$ является функцией на многообразии $\mathfrak{A}$ классов полей A_μ, причем в один класс объединяются поля, отличающиеся калибровочным преобразованием. Интеграл (24) можно рассматривать как интеграл по этому многообразию, так как условие

$$\partial_k A_k = 0 \tag{29}$$

отбирает по одному представителю в каждом классе. Аналогичным свойством обладает также и условие

$$\partial_\mu A_\mu = 0, \tag{30}$$

так что мы можем смотреть на (29) и (30) как на два разных способа однозначной параметризации многообразия классов $\mathfrak{A}$.

Заметим теперь, что всякая мера на $\mathfrak{A}$ получается из некоторой калибровочно инвариантной меры на множестве всех полей A_μ. Такие меры имеют вид

$$m[A] \prod_{\mu,x} dA_\mu(x), \tag{31}$$

где $m[A]$ — калибровочно инвариантная функция. Если параметризация $\mathfrak{A}$ определяется уравнением $f[A] = 0$, то соответствующая мера на $\mathfrak{A}$ дается выражением

$$m[A]\,\Delta_f[A]\,\delta(f[A]) \prod_{\mu,x} dA_\mu(x), \tag{32}$$

где $\Delta_f[A]$ получается усреднением по группе

$$(\Delta_f[A])^{-1} = \int \delta(f[A^\Omega]) \prod_x d\Omega(x) \tag{33}$$

и $d\Omega$ — инвариантная мера на G. Можно проверить, что выражения (26) и (27) получаются, если применить этот рецепт к инвариантной мере вида (31) с $m = 1$ для случаев $f = \partial_k A_k$ и $f = \partial_\mu A_\mu$, соответственно. Для этого, повторяя рассуждения из [17], заметим, что в (32) участвуют значения $\Delta_f[A]$ только для полей A_μ, удовлетворяющих уравнению $f[A] = 0$. Для таких полей весь вклад в интеграл (33) дает окрестность единичного элемента в группе G, так что этот интеграл можно переписать в виде

$$\int \prod_x \delta\left(\frac{\delta f[A]}{\delta A_\mu(x)}(\partial_\mu u + \varepsilon[A_\mu, u])\right) \prod_x du(x),$$

где мы положили $\Omega = 1 + u$, u — матрица из алгебры Ли группы G, и линеаризовали выражение под знаком δ-функции. Применяя эту формулу к случаю условий (29) и (30), мы придем к выражениям (26)и (27), соответственно, доказав тем самым равносильность интегралов (24) и (28).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Это приложение предназначено для читателя, удрученного внешней неинвариантностью изложения во втором разделе. Мы поясним здесь геометрический смысл сформулированных там условий и проведенных рассуждений. Одновременно мы уточним условия, при которых эти рассуждения действительно справедливы. Естественно при этом использовать инвариантный язык дифференциальной геометрии (см., например, [8]), который является наиболее адекватным для общих вопросов механики (см., например, [23, 24]).

Фазовым пространством механической системы с n степенями свободы будем называть гладкое многообразие Γ размерности $2n$, снабженное невырожденной замкнутой дифференциальной 2-формой Ω,

$$d\Omega = 0, \qquad \Omega^n \neq 0.$$

При помощи такой формы мы можем ввести структуру алгебры Ли в алгебру функций $\mathfrak{A}$ на Γ, т. е. определить антисимметричную операцию $\{f, g\}$, $f \in \mathfrak{A}$, $g \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющую тождеству Якоби и называемую скобкой Пуассона. Нам удобен следующий вариант такого определения. По заданной функции f соотношение

$$\Omega(X_f, Y) = df(Y) = Yf \tag{П.1}$$

однозначно определяет векторное поле X_f. Скобка Пуассона определяется как

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g) = X_g f = -X_f g$$

и, очевидно, линейна и антисимметрична. Тождество Якоби является следствием замкнутости Ω.

Таким образом, в линейном пространстве функций на фазовом пространстве мы, кроме обычного умножения fg, имеем еще одну бинарную опе-

рацию $\{f, g\}$. При этом вторая операция является дифференцированием по отношению к первой

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g. \tag{П.2}$$

Алгебра $\mathfrak{A}$ функций на Г, снабженная описанными операциями, называется алгеброй наблюдаемых (величин) рассматриваемой механической системы.

В локальных координатах $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{2n})$ на Г форма Ω задается антисимметричной обратимой матрицей $\Omega_{\alpha\beta}$, удовлетворяющей условию

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \Omega_{\beta\gamma} + \text{циклическая перестановка} = 0.$$

Векторное поле X_f имеет следующие компоненты в естественном базисе:

$$X_f{}^\alpha = \sum_\beta \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\beta},$$

где $\Omega^{\alpha\beta}$ — матрица, обратная к $\Omega_{\alpha\beta}$. Скобка Пуассона дается формулой

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha,\beta} \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial g}{\partial \xi^\beta}$$

(сравни (15)) и выглядит привычным образом

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

в канонических переменных $\xi = (q, p)$, $q = (q^1, \ldots, q^n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, в которых форма Ω принимает вид

$$\Omega = 2 \sum_i dp_i \wedge dq^i.$$

Основным объектом, введенным во втором разделе, является фазовое пространство Γ^*. В его описании участвуют: 1) фазовое пространство Г с каноническими координатами (q, p) и канонической формой Ω; 2) связи $\varphi^a(q, p)$, $a = 1, \ldots, m$, т. е. m функций на Г, условия на которые описаны в начале второго раздела. Введенные выше понятия и обозначения помогут нам инвариантно описать Γ^*.

Обозначим через M подмногообразие, определяемое уравнениями

$$\varphi^a(q, p) = 0, \quad a = 1, \ldots, m.$$

Пусть $\widetilde{\Omega} = \Omega|_M$ — значение формы Ω на M. Форма $\widetilde{\Omega}$ замкнута, но сингулярна. Покажем, что вследствие условия (4) ее ранг равен $2(n - m)$. Он не меньше этого числа, так как ранг регулярной матрицы не может понизиться больше чем на $2m$ при ограничении ее на подпространство коразмерности m. С другой стороны, можно указать m линейно независимых нулевых векторов этой формы. Заметим, что векторные поля, касательные к M, являются ограничениями на M векторных полей Y на Г, удовлетворяющих условию

$$d\varphi^a(Y) = 0, \quad a = 1, \ldots, m,$$

которое в силу (П.1) мы можем переписать в виде

$$\Omega(X_{\varphi^a}, Y)|_M = 0, \quad a = 1, \ldots, m. \tag{П.3}$$

Вследствие (4) мы имеем

$$\{\varphi^a, \varphi^b\}|_M = \Omega(X_{\varphi^a}, X_{\varphi^b})|_M = 0, \qquad (\text{П}.4)$$

и, сравнивая это соотношение с (П.3), видим, что векторы X_{φ^a} — касательные к M и являются нулевыми векторами формы $\widetilde{\Omega}$, что и доказывает наше утверждение.

Всякая сингулярная замкнутая 2-форма Ω, заданная на некотором многообразии, порождает его слоение. Слоями являются максимальные интегральные многообразия инволютивного распределения (см., например, [25]), образованного нулевыми векторами формы. Множество таких нулевых векторов обозначим через P и покажем, что из $X \in P$ и $Y \in P$ следует $[X, Y] \in P$. Имеем

$$0 = 3d\Omega(X, Y, Z) = \Omega([X, Y], Z) + X\Omega(Y, Z) + \text{цикл. перест.},$$

и по условию на X и Y единственным неисчезающим по определению членом здесь является первое слагаемое в правой части. Оно тем самым тоже исчезает, что и доказывает инволютивность P.

Заметим, что в рассматриваемом нами случае мы описали явно базис нулевого пространства формы Ω, и инволютивность этого распределения можно проверить непосредственно при помощи (П.4).

Предположим теперь, что возникшее у нас слоение на самом деле является расслоением и пусть Γ^* — его база. Форма Ω^* — прообраз формы Ω на Γ^* замкнута и невырождена. Таким образом, Γ^* является фазовым пространством, которое и представляет собой искомый нами объект. Сформулированное в этом абзаце условие относительно существования расслоения накладывает наиболее сильные ограничения на связи φ^α, которые мы не могли сформулировать по-настоящему в основном тексте.

Произвольные гладкие функции на Γ^*, образующие алгебру наблюдаемых $\mathfrak{A}^*$ нашей системы, можно рассматривать как функции на M, постоянные на слоях. Последнее условие записывается в виде

$$X_{\varphi^a} f|_M = \{\varphi^a, f\}|_M = 0,$$

что совпадает с (8) одновременно поясняя это требование.

Дадим альтернативное алгебраическое определение алгебры $\mathfrak{A}^*$. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра наблюдаемых на Γ с операциями $f + g$, fg и $\{f, g\}$. Обозначим через Φ множество линейных комбинаций связей φ^a, так что $\varphi \in \Phi$ означает, что $\varphi = \Sigma c_a \varphi^a$, где c_a — произвольные функции на Γ. Множество Φ является идеалом в $\mathfrak{A}$ по отношению к обычному умножению. Более того, Φ — подалгебра $\mathfrak{A}$ по отношению к операции $\{f, g\}$, так как вследствие (4) из $\varphi_1 \in \Phi$ и $\varphi_2 \in \Phi$ следует $[\varphi_1, \varphi_2] \in \Phi$. Рассмотрим теперь множество $\bar{\mathfrak{A}}$ функций f таких, что для всех $\varphi \in \Phi$

$$\{f, \varphi\} \in \Phi$$

и которое можно назвать нормализатором Φ в $\mathfrak{A}$ по отношению к операции Ли. Существование нетривиального (отличного от Φ) такого множества является сильным условием на связи φ^a, сравнимым с упомянутым выше условием о расслоении.

Множество $\widetilde{\mathfrak{A}}$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$. Действительно, если $f \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ и $g \in \widetilde{\mathfrak{A}}$, то вследствие (П.2) и тождества Якоби

$$\{fg, \varphi\} = f\{g, \varphi\} + \{f, \varphi\}g \in \Phi,$$

$$\{\{f, g\}\varphi\} = -\{\{g, \varphi\}f\} + \{\{f, \varphi\}g\} \in \Phi.$$

Далее Φ по определению является идеалом в $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Алгебра $\mathfrak{A}^* = \widetilde{\mathfrak{A}} / \Phi$ и представляет собой еще одну реализацию алгебры наблюдаемых рассматриваемой нами системы.

При конкретном описании пространства Γ^* во втором параграфе мы вводили дополнительные условия (10). Уравнения (10) определяют подмногообразие Γ^* пространства M, и условие (11) означает, что Γ^* трансверсально интегральным многообразиям распределения P. Наложим на φ^a и χ_b условие, согласно которому каждое интегральное многообразие пересекает Γ^* только в одной точке. В этом случае мы имеем действительно расслоение, и Γ^* можно использовать в качестве реализации его базы.

Условие (12) имеет только техническое значение и помогает просто выбрать канонические координаты на Γ^*. Действительно, если оно выполнено, то в некоторых канонических координатах на Γ многообразие Γ^* задается уравнениями

$$p_a = 0, \quad q^a(q^*, p^*) = 0.$$

При этом прообраз формы $\sum dp_i \wedge dq^i$ имеет вид $\sum dp^* \wedge dq^*$, так что переменные q^* и p^* являются каноническими на Γ^*.

В заключение мы хотим выразить благодарность В. И. Арнольду, обсуждения с которым вопросов неголономной механики оказали большое влияние на это приложение. Ответственность за все неинвариантные выражения, не изгнанные до конца из данного текста, целиком лежит на авторе.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
5 февраля 1969 г.

Литература

[1] R. Feynman. Rev. Mod. Phys., **20**, 367, 1948.
[2] P. A. M. Dirac. Can. J. Math., **2**, 129, 1950.
[3] P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc., **A246**, 326, 1958.
[4] P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc., **A246**, 333, 1958.
[5] P. A. M. Dirac. Phys. Rev. **114**, 924, 1959.
[6] P. A. M. Dirac. Доклад на симпозиуме «Современная физика», Триест, июнь 1968.
[7] J. Klauder. Тезисы 5 Международной конференции по гравитации и относительности, Тбилиси, 1968.
[8] А. Лихнерович. Теория связностей в целом и группы голономий, ИЛ, 1960.
[9] R. Feynman. Phys., Rev., **84**, 108, 1951.
[10] W. Tobocman. Nuovo Cim, **3**, 1213, 1956.
[11] C. Garrod. Rev. Mod. Phys., **38**, 483, 1966.
[12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. Механика, Физматгиз, 1958.
[13] P. Bergmann. Rev. Mod. Phys., **33**, 510, 1961.
[14] P. Bergmann, I. Goldberg. Phys. Rev., **98**, 531, 1955.
[15] C. N. Yang, R. L. Mills. Phys. Rev., **96**, 191, 1954.
[16] L. Faddeev, V. Popov. Phys. Lett., **25B**, 29, 1967.

[17] В. Н. Попов, Л. Д. Фаддеев. Теория возмущений для калибровочноинвариантных полей, препринт ИТФ АН УССР, Киев, 1967.
[18] R. Feynman. Acta Phys. Polonica, **24**, 697, 1963.
[19] B. S. De-Witt. Phys. Rev., **162**, 1195, 1239, 1967.
[20] S. Mandelstam. Phys. Rev., **175**, 1604, 1968.
[21] M. Veltman. Nucl. Phys., **B7**, 637, 1968.
[22] S. L. Glashow, M. Gell-Mann. Ann. of Phys., **15**, 437, 1961.
J. Schwinger. Phys. Rev., **125**, 1043, 1962.
[23] В. И. Арнольд. Лекции по классической механике, Изд. МГУ, 1968, лек. 30—42.
[24] R. Jost. Rev. Mod. Phys., **36**, 572, 1964.
[25] R. S. Palais. Mem. Amer. Math. Soc., **22**, 1957.

FEYNMAN INTEGRAL FOR SINGULAR LAGRANGIANS

L. D. Faddeyev

The generalization of Feynman functional integral useful for the quantization of the mechanical system with the singular lagrangian is obtained. The quantization of the Yang — Mills field theory is considered as an application.