А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, Безмассовое и массивное поле Янга–Миллса, *ТМФ*, 1970, том 3, номер 1, 18–23

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 3, № 1
апрель
1970

БЕЗМАССОВОЕ И МАССИВНОЕ ПОЛЕ ЯНГА — МИЛЛСА

А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев

Обсуждается связь между массивной и безмассовой теориями Янга — Миллса. Показано, что в отличие от случая абелевой калибровочной группы S-матрица массивной теории в пределе $m \to 0$ не переходит в S-матрицу безмассовой теории.

1. Калибровочные векторные поля с нулевой массой описываются сингулярными лагранжианами, что приводит к известным трудностям при попытке их канонического квантования. Калибровочные поля с ненулевой массой покоя свободны от этих трудностей, поэтому исходя из соображений непрерывности можно было бы надеяться получить безмассовую теорию в качестве предельного случая массивной теории при $m \to 0$. И действительно, такая программа с успехом может быть осуществлена в случае абелевой калибровочной группы. Как было показано еще Штюкельбергом [1], S-матрица, описывающая взаимодействие нейтрального векторного поля с сохраняющимся током, на массовой поверхности в пределе при $m \to 0$ переходит в S-матрицу для электромагнитного поля. Попытки провести аналогичную программу предпринимались и в случае неабелевой калибровочной группы. В частности, Фейнман, который первым сформулировал рецепт вычисления диаграмм с одной петлей для безмассового поля Янга — Миллса, рассматривал эту теорию именно как предел массивной теории при $m \to 0$ [2].

С другой стороны, в последние годы были предложены новые методы квантования калибровочных полей, позволяющие непосредственно получать S-матрицу для безмассового поля, не апеллируя к теории с конечной массой [3, 4, 5]. Сравнение правил Фейнмана для поля Янга — Миллса с нулевой массой, полученных в работах [3, 4, 5], с правилами Фейнмана для случая конечной массы, полученными в работе [6], показывает, что уже в низших порядках эти два подхода приводят, вообще говоря, к различным результатам. Этот факт был отмечен недавно также Булером [7].

Ниже будет показано, что в случае полей с неабелевой калибровочной группой «наивный» предельный переход при $m \to 0$ приводит к неправильному результату. В частности, в отличие от случая абелевой калибровочной группы не исчезают матричные элементы перехода в состояния с продольной (в трехмерном смысле) поляризацией.

2. Лагранжиан поля Янга — Миллса с произвольной массой можно записать в виде

$$L(x) = \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{8} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{4} B_\mu B_\mu\right\}, \tag{1}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu + g[B_\mu, B_\nu], \tag{2}$$

а матрицы $B_\mu(x)$ связаны с полями $b_\mu{}^a(x)$ следующим образом

$$(B_\mu)_{ab} = \sum_{c=1}^{3} b_\mu{}^c \tau_c{}^{ab} = \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\, b_\mu{}^c. \tag{3}$$

Матричный элемент S-матрицы выражается через континуальный интеграл Фейнмана

$$\langle \mathrm{in} | \mathrm{out} \rangle = \int \exp\left\{ i \int L(x)\, dx \right\} \prod_x dB(x), \tag{4}$$

где интегрирование ведется по всем полям, асимптотика которых при $t \to \pm\infty$ определяется состояниями in и out. При вычислении интеграла (4) по теории возмущений естественно возникают диаграммы Фейнмана, в которых в качестве пропагатора следует использовать функцию Грина

$$D^c(k) \sim \frac{g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu m^{-2}}{k^2 - m^2}. \tag{5}$$

Однако возникающие при этом формулы неудобны для исследования предельного перехода при $m \to 0$ вследствие сингулярности функции Грина (5). Поэтому мы построим другое продолжение S-матрицы за массовую оболочку, воспользовавшись формальным приемом, предложенным в работе (3).

Введем функционал $\Delta(B)$, определяемый условием

$$\Delta(B) \int \prod_x \delta\left(\frac{\partial B_\mu{}^\Omega}{\partial x^\mu} \right) d\Omega(x) = \mathrm{const}, \tag{6}$$

где

$$B_\mu{}^\Omega = \Omega B_\mu \Omega^{-1} + \frac{1}{g} \frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} \Omega^{-1}, \tag{7}$$

Ω — произвольная матрица-функция, соответствующая изотопическому вращению с фазой, зависящей от координат; $d\Omega$ — инвариантная мера на группе вращений. Интеграция в формуле (6) происходит по внутренности трехмерной сферы в пространстве параметров. Однако в силу периодичности подынтегральной функции область интеграции можно на самом деле распространить на все пространство. Это приведет лишь к умножению интеграла на тривиальный бесконечный множитель.

Домножим функциональный интеграл (4) на постоянный множитель (6) и сделаем в нем замену переменных $B_\mu{}^\Omega = B_\mu{}'$. Тогда с учетом инвариантности функционала $\Delta(B)$, а также безмассовой части лагранжиана (1), мы получим

$$\langle \mathrm{in} | \mathrm{out} \rangle = \int \exp\left\{ i \,\mathrm{Tr} \int \left[\frac{1}{8} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{4} \left(B_\mu - \frac{1}{g} \frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} \Omega^{-1} \right)^2 \right] dx \right\} \times$$

$$\times\, \Delta(B) \prod \delta\left(\frac{\partial B^\mu}{\partial x^\mu} \right) dB\, d\Omega. \tag{8}$$

Формула (8) дает нам на массовой оболочке ту же S-матрицу, что и (4), однако благодаря наличию в интеграле δ-функции свободные функции Грина, определяемые функционалом (8), поперечны

$$D^c(k) \sim \frac{g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu k^{-2}}{k^2 - m^2} \tag{9}$$

и в отличие от функций (5) несингулярны при $m = 0$. Зато в формуле (8), помимо интеграции по dB, остался еще интеграл по $d\Omega$, что с точки зрения лагранжева формализма означает введение вспомогательного скалярного поля в эффективный лагранжиан взаимодействия.

Рассмотрим вклад этого поля подробнее. Для этого используем экспоненциальную параметризацию матриц Ω, $\Omega(x) = \exp gu(x)$, и разложим Ω и $d\Omega$ в ряд по g. Вклад в действие от нескольких первых членов разложения Ω имеет вид

$$\Delta S = \int dx \mathrm{Tr} \frac{m^2}{4} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} + g[u, B_\mu] \partial_\mu u + O(g^2 u^3) \right\}, \tag{10}$$

а мера $d\Omega$ отличается от Πdu на величины порядка $O(g^2u^2)$. Если отбросить в ΔS члены порядка g^2u^3 и выше, то остающийся интеграл по du легко берется. Он равен $(\mathrm{Det}\, M)^{-1/2}$, где оператор M определяется равенством

$$Mu = \Box u - g[B_\mu, \partial_\mu u]. \tag{11}$$

Как было показано в работе [3], входящий в выражение для S-матрицы (8) функционал $\Delta(B)$ равен определителю того же оператора M. Таким образом, в принятом приближении $(\mathrm{Det}\, M)^{-1/2}$ частично сокращается с $\Delta(B)$ и S-матрица (8) принимает вид

$$\langle \mathrm{in} | \mathrm{out} \rangle = \int \exp\left\{ i \mathrm{Tr} \int \left[\frac{1}{8} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{4} B_\mu B_\mu + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2} \ln \Delta(B) \right] dx \right\} \delta\left(\frac{\partial B_\mu}{\partial x^\mu} \right) dB \tag{12}$$

(обратите внимание, что член $\ln \Delta(B)$ входит с коэффициентом $1/2$). Явное выражение для этого члена

$$\ln \Delta(B) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^n}{n} \int dx_1 \ldots dx_n \mathrm{Tr}(B_\mu(x_1) \ldots B_\mu(x_n)) \times$$
$$\times \partial_{\mu_2} D^c(x_1 - x_2) \ldots \partial_{\mu_n} D^c(x^n - x_1), \tag{13}$$

где

$$D^c(x) = (2\pi)^{-4} \int \exp\{ikx\} (k^2 + i\varepsilon)^{-1} d^4k. \tag{14}$$

Легко видеть, что отброшенные нами члены порядка g^2u^3 дают вклад лишь в диаграммы, содержащие, по крайней мере, две замкнутые петли. Правила Фейнмана, следующие из формулы (12), совпадают с точностью до четвертого порядка с правилами, полученными ранее в работе [6] другим методом.

Заметим теперь, что в S-матрице (12) мы можем беспрепятственно положить $m = 0$, так как ни функции Грина (9), ни $\ln \Delta(B)$ не сингулярны в этом пределе. Положив в соответствующих формулах $m=0$, мы придем к правилам, предложенным Фейнманом в работе [2]. Если же мы положим $m=0$ непосредственно в формуле (8), то придем к другим правилам, предложенным в [3, 4, 5]. Действительно, при таком способе действий зависимость от Ω в экспоненте исчезает, а остающийся интеграл $\int d\Omega$ можно опустить как несущественный постоянный множитель. В результате (8)' сведется к выражению

$$\langle \mathrm{in} | \mathrm{out} \rangle = \int \exp\left\{ i \operatorname{Tr} \int \left[\frac{1}{8} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \ln \Delta(B) \right] dx \right\} \delta\left(\frac{\partial B_\mu}{\partial x^\mu} \right) dB, \tag{15}$$

которое и лежит в основе правил квантования безмассового поля в работе [3]. В отличие от формулы (12) $\ln \Delta(B)$ входит в (15) с коэффициентом 1.

Таким образом, возникает на первый взгляд парадоксальная ситуация: S-матрица (12) унитарна до четвертого порядка при любом сколь угодно малом m и вместе с тем не совпадает при $m=0$ с S-матрицей (15), которая, как было показано в [3], также унитарна. При этом, поскольку S-матрица формально должна быть унитарна в каждом порядке по g, этот парадокс не зависит от поведения отброшенных членов в лагранжиане, так как они приводят к поправкам более высокого порядка по g.

Это кажущееся противоречие разрешается, однако, довольно просто. Дело в том, что частицы с нулевой и со сколь угодно малой массой обладают различным числом степеней свободы: частица с нулевой массой имеет два состояния поляризации, а с любой конечной массой — три. В случае нейтрального векторного поля все матричные элементы, недиагональные по числу продольных фотонов, в пределе при $m \to 0$ обращаются в нуль. Однако для поля Янга — Миллса это уже не так, и в пределе нулевой массы мы получаем S-матрицу, описывающую одновременно с поперечно поляризованными «фотонами» еще и скалярные частицы нулевой массы.

Чтобы пояснить сказанное выше, рассмотрим матричный элемент перехода из произвольного состояния $|l\rangle$ в состояние $|a_3, n\rangle$, содержащее, по крайней мере, один продольный квант.

$$\langle l | S | a_3, n \rangle = \sum_\mu \int \left\langle l \left| \frac{\delta S}{\delta B_\mu(x)} S^+ S \right| n \right\rangle [B_\mu(x) a_3(\mathbf{k})] \, d^4x. \tag{16}$$

Оператор $B_\mu(\mathbf{k})$ обычным образом разлагается на компоненты, соответствующие определенным поляризациям

$$B_i(\mathbf{k}) = e_1{}^i a_1 + e_2{}^i a_2 + \frac{k^i k_0}{|\mathbf{k}| m} a_3; \qquad B_0(\mathbf{k}) = \frac{|\mathbf{k}|}{m} a_3. \tag{17}$$

Коэффициенты при операторах a_3 разложим в ряд по степеням m:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{k} k_0}{|\mathbf{k}| m} &= \frac{\mathbf{k}}{m} + \frac{\mathbf{k} m^2}{2 |\mathbf{k}|^2 m} + O(m^3), \\ \frac{|\mathbf{k}|}{m} &= \frac{k_0}{m} - \frac{m^2}{2 k_0 m} + O(m^3). \end{aligned} \tag{18}$$

Воспользовавшись этим представлением и замечая, что $\dfrac{\delta S}{\delta B_\mu(x)} S^+$ есть не что иное как оператор тока, матричный элемент (16) можно представить в виде

$$\langle l|S|a_3, n\rangle = \int d^4x \left\{ \langle l|\partial_\mu j_\mu(x)|n'\rangle \frac{e^{ikx}}{m2k_0} + \sum_\alpha \langle l|j_\alpha(x)|n'\rangle e^{ikx} O_\alpha(m) \right\}. \tag{19}$$

Здесь $O_\alpha(m)$ — это функции, которые при $m \to 0$ ведут себя, по крайней мере, как m. Первый член, содержащий m^{-1}, пропадает из-за сохранения тока. Поэтому, если матричные элементы тока $\langle l|i_\alpha(x)|n'\rangle$ при $m \to 0$ конечны, то вероятность перехода из состояния, не содержащего продольных квантов, в состояние, содержащее, по крайней мере, один продольный

Рис. 1

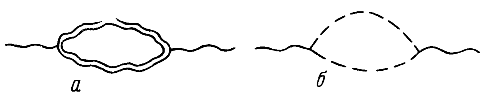

Рис. 2

квант, обращается в нуль. Именно так обстоит дело в электродинамике. Однако для поля Янга — Миллса матричные элементы тока оказываются сингулярными при $m = 0$. Элементарная выкладка показывает, что уже в низшем порядке матричный элемент тока между поперечным и продольным состояниями

$$\langle \text{trans}|\varepsilon^{abc} f_{\mu\nu}{}^b(x)\, b_\nu{}^c(x)|\text{long}\rangle \tag{20}$$

ведет себя при $m \to 0$, как m^{-1}. В результате вероятность соответствующего перехода оказывается конечной. Поэтому, если мы хотим получить S-матрицу, описывающую лишь поперечно поляризованные кванты, мы должны из S-матрицы (12) дополнительно вычесть вклад продольных «фотонов», после чего она в точности совпадет с S-матрицей (15).

Проиллюстрируем этот эффект на примере диаграмм низшего порядка. Рассмотрим простейшую собственно энергетическую диаграмму, изображенную на рис. 1. Как мы уже видели, эту диаграмму можно представить в виде суммы двух диаграмм, изображенных на рис. 2а и 2б (двойная волнистая линия соответствует функции Грина векторной частицы в калибровке Ландау, а штриховая — безмассовой скалярной частице).

Аналитическое выражение, соответствующее диаграмме 2б, имеет вид

$$-\frac{g^2}{4}\left\langle l\left|\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ljk}\int d^4x\, d^4y\, \partial_{\mu_1} D^c(x-y)\,\partial_{\mu_2} D^c(x-y) : b_{\mu_1}{}^i(x)\, b_{\mu_2}{}^l(y) : \right| l\right\rangle. \tag{21}$$

В условии унитарности, написанном для случая $m \neq 0$,

$$\langle l|S_2 + S_2{}^+|l\rangle = \sum_n \langle l|S_1{}^+|n\rangle \langle n|S_1|l\rangle \tag{22}$$

в правой части подразумевается суммирование по трем возможным поляризациям.

Легко показать, что состояние, содержащее один продольный квант, дает в эту сумму нулевой вклад, а состояние с двумя продольными квантами вносит неисчезающий при $m = 0$ вклад, равный

$$\frac{g^2}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}\langle l|\int d^4x\, d^4y\, \partial_\mu D_0{}^-(x-y)\,\partial_\nu D_0{}^-(x-y) : b_\mu{}^i(x)\, b_\nu{}^l(y) : |l\rangle. \tag{23}$$

Для того чтобы в пределе при $m \to 0$ условие унитарности (22) оставалось справедливым при суммировании лишь по поперечно поляризованным квантам, мы должны вычесть из S_2 выражение, мнимая часть которого в точности скомпенсировала бы вклад (23). Нетрудно видеть, что формула (23) определяет как раз взятую с обратным знаком мнимую часть диаграммы 2б. Следовательно, исключение продольных «фотонов» приводит к тому, что вклад диаграммы 2б удваивается, что находится в полном соответствии с правилами Фейнмана для безмассового случая, полученными в работах [3, 4, 5].

4. Итак, мы показали, что противоречие между двумя различными способами вычисления S-матрицы для безмассового поля Янга — Миллса исчезает, если принять во внимание тот факт, что в случае нулевой массы полную систему образуют состояния с двумя поляризациями, а при конечной массе — с тремя. Непосредственный предельный переход при $m \to 0$ приводит, по сути дела, к другой физической теории, описывающей наряду с «фотонами» еще и скалярные частицы нулевой массы. Нужно отметить, что в старших порядках такая теория может и не существовать, так как вероятности перехода в состояния, содержащие скалярные частицы, могут стремиться к бесконечности. Вопрос о существовании предела S-матрицы для теории Янга — Миллса при $m \to 0$ тесно связан с вопросом о перенормируемости этой теории. В работе [6] было показано, что если такой предел существует (с точностью до логарифмических инфракрасных особенностей), то массивная теория Янга — Миллса может быть перенормирована, причем правила Фейнмана в любом порядке будут даваться формулой (12). В настоящее время существуют различные точки зрения по вопросу о перенормируемости массивной теории Янга — Миллса. Так, в работе [7] содержится утверждение, что эта теория не может быть перенормирована. По нашему мнению, однако, этот вопрос нуждается в дополнительном исследовании. В частности, до сих пор в достаточной мере еще не использовалась информация, содержащаяся в тождествах Уорда, связывающих между собой диаграммы с различным числом внешних концов.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 ноября 1969 г.

Литература

[1] E. C. Stuecelberg. Helv. Phys. Acta, **11**, 226, 229, 1938.
[2] R. Feynmann. Acta Phys. Pol., **24**, 697, 1963.
[3] L. D. Faddeev, V. N. Popov. Phys. Let., **25B**, 29, 1967; Препринт ИТФ-67-36, Киев, 1967.
[4] B. S. De-Witt. Phys. Rev., **162**, 1195, 1239, 1967.
[5] S. Mandelstam. Phys. Rev., **175**, 1580, 1968.
[6] А. А. Славнов. Препринт ИТФ-69-20, Киев, 1969.
[7] D. G. Boulware. Preprint Univ. of Washington, 1969.

MASSLESS AND MASSIVE YANG-MILLS FIELD

A. A. Slavnov, L. D. Faddeyev

The relationship between the massless and massive Yang—Mills theories is discussed. It is shown that the massive theory S-matrix in the limit $m \longrightarrow 0$ does not turn into the massless theory S-matrix unlike the case of the abelian gauge group.